О ПРИМЕНЕНИИ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

Игнаточкина Л.А.

Московский педагогический государственный университет

119435, г.Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1.

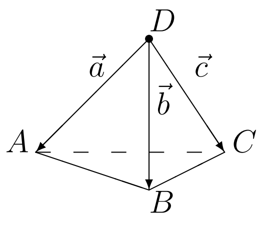
Тел.: 89299693341, e-mail: ignlia@gmail.com

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации [1] сказано, что „изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению ... Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе“. С другой стороны, там же отмечены и проблемы развития математического образования, а также указаны их причины: „низкая учебная мотивация школьников и студентов связана с ... перегруженностью образовательных программ ... профессионального образования, а также ... устаревшим содержанием“. В связи с этим встает проблема обновления образовательных программ профессионального образования, создания единой системы, в которой каждый элемент служит решению максимального числа задач в развитии математического образования.

Рассмотрим тему „Применение скалярного произведения к решению задач школьного курса геометрии“. Это тема практического занятия на 1 курсе бакалавриата (бакалавры математики).

Рассмотрим задачу 1.82 из [2]: доказать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны. Обозначим эту пирамиду $ABCD$ (ABC – правильный треугольник в основании). Решение этой задачи методом векторной алгебры заключается во введении базиса $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (представители векторов базиса откладываются от точки D). Векторы, представителями которых являются противоположные ребра пирамиды $ABCD$, раскладываются по этому базису и находится их скалярное произведение. Отметим, что базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ не является ортонормированным. Это обстоятельство, во-первых, позволяет показать студентам на примере рассматриваемой задачи, что формулы, которые были выведены на лекции (для ортонормированного базиса) не всегда применимы и, во-вторых, показать студентам в естественным образом возникающей ситуации применение алгебраических свойств скалярного произведения и его определения.

Но на этом потенциал данной задачи далеко не исчерпан. Она естественным образом предполагает обобщение: пусть дана не правильная пирамида, а произвольная треугольная пирамида. Что достаточно знать о треугольной пирамиде, чтобы однозначно задать эту пирамиду? Студенты предлагают задать длины трех ребер, выходящих из вершины D, и плоские углы между ними. Обозначим длины теми же буквами, что и соответствующие векторы, величины углов обозначим α (между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$), β (между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$) и γ (между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$). Для такой произвольной треугольной пирамиды встает вопрос: чему будет равен угол между противоположными ребрами.



Идея решения этой задачи уже подготовлена решением предыдущей: ввести базис и разложить по нему векторы, представители которых являются противоположными ребрами данной пирамиды. Здесь встает следующий вопрос: как вычислить угол между векторами? Формула для вычисления косинуса угла через скалярное произведение векторов и их длины вспоминается легко и скалярное произведение студенты вычисляют правильно (это подготовлено решением предыдущей задачи). А вот нахождение длины вектора в произвольном базисе – это новый момент. Здесь нужно вспомнить формулу скалярного квадрата вектора.

Итак, все необходимые формулы есть, получаем ответ для данной задачи: формулу для вычисления косинуса угла между противоположными ребрами произвольной пирамиды.

$$\cos\angle(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{DA}\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})}{a\sqrt{(\vec{c}-\vec{b})^2}} = \frac{\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}}{a\sqrt{\vec{c}^2-2\vec{b}\vec{c}+\vec{b}^2}} = \frac{c\cos\beta - b\cos\gamma}{\sqrt{c^2-2bc\cos\alpha+b^2}}.$$

Проанализируем ее. Во-первых, эта формула должна работать в частном случае правильной пирамиды. Во-вторых, анализируя эту формулу, убеждаемся, что противоположные ребра могут быть перпендикулярными не только у правильной треугольной пирамиды. Это позволяет подобрать конкретные значения длин ребер и величин углов так, чтобы получилась новая задача, в которой треугольная пирамида имеет перпендикулярные противоположные ребра. Отметим, что умение формулировать новые задачи для будущих учителей очень важно. Также отметим, что если первая (исходная) задача может быть решена методами элементарной геометрии, то решение второй (обобщенной задачи) методами элементарной геометрии весьма трудно. Следовательно, на примере этой задачи хорошо видно преимущество векторного метода перед методами элементарной математики. Наконец, отметим, что обе задачи не требуют технически сложных выкладок, и их решение занимает всего лишь 15 – 20 минут на семинаре.

Итак, связка всего лишь из двух задач позволяет, во-первых, в естественной ситуации показать применение алгебраических и геометрических свойств скалярного произведения векторов (формулы для вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе в этих задачах не работают); во-вторых, показать метод обобщения (он важен студентам бакалаврам математики как будущим ученым); в-третьих, показать преимущества векторного метода при решении некоторых задач школьного курса (будущему учителю важно уметь получить ответ задачи каким-либо методом, так как после этого проще подобрать методы элементарной математики для решения той же задачи); в-четвертых, показать метод оценки истинности полученного результата (умение важно и учителям, и ученым); в-пятых, показать способ составления новых задач (важно для учителя).

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. [Электронный ресурс] минобрнауки.рф/документы/3650

2. Н.И.Гусева, Н.С.Денисова, О.Ю.Тесля Сборник задач по геометрии. Москва: Кнорус, 2012.