проверочная 1 (дата проведения: 21 февраля, первые 10 минут (10.40 – 10.50))

определения: числовой промежуток, вектор-функция одного скалярного аргумента, предел вектор-функции, производная вектор-функции в точке t_0, производная вектор-функции, вторая производная вектор-функции, координаты вектор-функции, сумма вектор-функций, произведение вектор-функции на скалярную функцию, скалярное произведение вектор-функций, векторное произведение вектор-функций.

1. Пусть вектор-функция дифференцируема. Докажите, что дифференцируемы ее координаты.

2. Пусть координаты вектор-функции дифференцируемы. Докажите, что дифференцируема вектор функция.

3. Сформулируйте и докажите правило дифференцирования суммы вектор-функций.

4. Сформулируйте и докажите правило дифференцирования произведения вектор-функции на скалярную функцию.

5. Сформулируйте и докажите правило дифференцирования скалярного произведения вектор-функций.

проверочная 2 (дата проведения: 28 февраля)

определения: простейшая линия, элементарная линия, простая линия, гладкая линия, допустимая замена параметризации, натуральный параметр, вектор-функция одного скалярного аргумента.

1. Сформулируйте и докажите правило дифференцирования сложной функции.

2. Докажите, что $|\vec{r}(t)| = const$ тогда и только тогда, когда $\forall t \in U$ векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны.

3. Вычислите производные функций 1) $[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']$, 2) $\sqrt{[\vec{r}, \vec{r}\,']^2}$.

4. Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, где a – постоянное число, $t \in [0, 2\pi)$. Проверьте справедливость равенств для любого $t \in [0, 2\pi)$: 1) $|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}\,'''(t)|$, 2) $\vec{r}(t) + \vec{r}\,'(t) + \vec{r}\,''(t) + \vec{r}\,'''(t) = \vec{0}$.

5. Выведите параметрические уравнения окружности и перейдите к натуральной параметризации.

6. Пусть линия задана в естественной параметризации. Докажите, что $\frac{\vec{r}}{ds}\frac{\vec{r}}{ds} = 1$ для любого $t \in U$.

проверочная 3 (дата проведения: 7 марта)

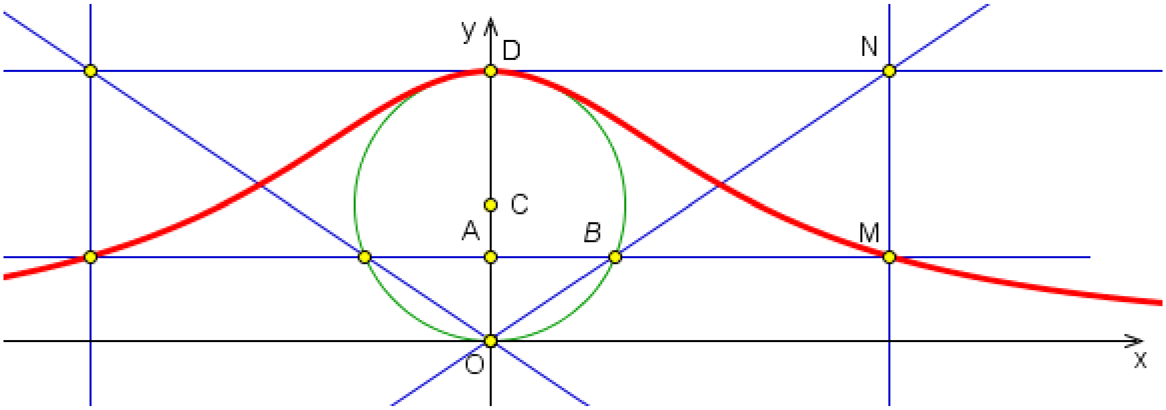
определения: гладкая кривая, натуральный параметр, параметрические уравнения кривой, векторное параметрическое уравнение кривой.

1. Напишите параметрические уравнения параболы, лежащей в плоскости Oxy с вершиной в точке $(a, 0, 0)$ и ветвями, направленными вдоль положительного направления оси Ox.

2. Напишите параметрические уравнения гиперболы, расположенной в плоскости Oxy, центр которой находится в точке с координатами $(\alpha, \beta, 0)$, а главные диаметры параллельны осям Ox и Oy.

3. Вычислите длину дуги линии $x = 3a\cos t$, $y = 3a\sin t$, $z = 4at$ (a – положительная константа) от точки пересечения с плоскостью Oxy до точки с произвольным значением параметра t. Запишите параметрические уравнения этой линии в естественной параметризации.

4. Дана окружность радиуса a.



Точка B движется по окружности. Из нее опущен перпендикуляр на диаметр OD (основание – точка A). Луч OB пересекает прямую, проходящую через D параллельно оси Ox в точке N. Из этой точки опущен перпендикуляр на прямую AB и получена точка M. Когда точка B пробегает окружность, точка M рисует кривую (на рисунке она изображена красной). Эта кривая называется верзьерой Аньези (или локоном Аньези). Возьмите в качестве параметра угол между лучами OA и OB и напишите параметрические уравнения этой кривой. Затем перейдите к общему уравнению, то есть найдите зависимость y от x. (Динамический рисунок локона Аньези смотрите на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24)

5. Линия γ задана в неявном виде системой уравнений $y^2 = 2z$, $x - y + z = 1$. Докажите, что это гладкая линия и напишите ее параметрические уравнения.

проверочная 4 (дата проведения: 14 марта)

определения: касательная, угол между кривыми, вектор касательной, вектор кривизны, кривизна кривой в точке, орт главной нормали, орт бинормали, главная нормаль, бинормаль, соприкасающаяся плоскость, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость, репер Френе.

1. Докажите, что линия является прямой или ее частью тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кривизна равна нулю.

2. Докажите, что кривизна линии в точке – это предел отношения угла между касательными к длине дуги.

3. Найдите подэру параболы относительно ее фокуса.

4. Для кривой $\gamma : x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ напишите уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

5. Докажите, что касательная к кривой γ: $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ во всех ее точках образует постоянный угол с вектором $\vec{p}(1, 0, 1)$.

6. Для произвольной точки винтовой линии найдите угол между ней и прямолинейной образующей цилиндра, проходящей через эту же точку.

проверочная 5 (дата проведения: 21 марта)

определения: вектор касательной, касательная, вектор кривизны, орт главной нормали, орт бинормали, главная нормаль, бинормаль, соприкасающаяся плоскость, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость.

1. Найдите репер Френе (векторы, прямые, плоскости) для винтовой линии, перейдя к естественной параметризации. Сравните этот способ со способом, примененным на семинаре. Сделайте вывод, какой более трудоемок и прежде чем начать решать задачу 4, подумайте.

2. Пусть дана линия $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t > 0$. Покажите, что эта линия лежит на конусе. Найдите ее репер Френе (векторы, прямые, плоскости) в произвольной точке.

3. Покажите, что все нормальные плоскости кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ проходят через некоторую фиксированную точку. Определите координаты этой точки.

4. На кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ найдите значения параметров точек, главные

нормали в которых пересекают ось Ox.

5. Из произвольной точки кривой $z = \frac{x^2}{3}$, $xy = 1$ опущен перпендикуляр на ось Ox. Покажите, что бинормаль кривой в этой точке образует с перпендикуляром прямой угол.

проверочная 6 (дата проведения: 28 марта)

определения: репер Френе, вектор касательной, орт главной нормали, орт бинормали, формулы Френе (записать все три), кривизна кривой, кручение кривой, плоская линия.

1. Выведите вторую и третью формулы Френе.

2. Докажите, что линия является плоской тогда и только тогда, когда во всех ее точках кручение равно нулю.

3. Выведите формулу для вычисления кручения в естественной параметризации.

4. Выведите формулы для вычисления кривизны и кручения в произвольной параметризации.

5. Найдите кривизну и кручение линии, заданной уравнениями $y^2 = x$, $x^2 = z$ в произвольной точке.

6. Докажите, что для любой кривой, заданной векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра, выполняются равенства 1) $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^2 = k^4(s)+k^2(s)\varkappa^2(s)+(k'(s))^2$; 2) $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3\vec{r}}{ds} = -k^2(s)$; 3) $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = k(s)k'(s)$.

Указания. Используйте формулы Френе.

Контрольная работа (дата проведения: 4 апреля, 10:40 – 11:25)

Задачи 1 – 3 являются обязательными для решения. Они входят в рейтинг план (10 баллов за все). Задачи будут аналогичными тем, которые мы решали на занятиях. Задача 4 дополнительная, в скобках указано количество баллов, которые можно получить при ее полном решении.

Расчет количества баллов, которое начисляется за решение каждой из обязательных задач:
5 у.е.: задача решена полностью без недочетов;
4 у.е.: есть не существенные недочеты вычислительного характера, которые не приводят к качественным ошибкам, идея решения полностью верна;
3 у.е.а: есть недочеты вычислительного характера, которые привели к качественной ошибке, идея решения может содержать незначительные недочеты;
2 у.е.: есть разумные намеки на идею решения задачи (не менее 50 процентов), но полностью идея решения задачи отсутствует, проведена часть вычислительной работы;
0 у.е.: менее 50 процентов разумных намеков на идею решения задачи.
Набранные условные единицы по пропорции пересчитываются в баллы.

Примерные варианты контрольной работы.

Вариант 1.

1. Для кривой $\gamma : x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ напишите уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

2. Покажите, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ параллельны плоскости Oxy.

3. Найдите кручение линии, заданной уравнениями $y^2 = x$, $x^2 = z$ в $(1, 1, 1)$ точке.

4. (+3 балла) Докажите, что гладкая кривая в пространстве является окружностью или ее частью тогда и только тогда, когда ее главные нормали проходят через одну точку.

Вариант 2.

1. Существуют ли точки на кривой $\gamma : x = t,\ y = t^3,\ z = t^2 + 4$, в которых касательные к ней перпендикулярны плоскости $4x + 4y + 12z + 1 = 0$? Если да, то напишите уравнения этих касательных.

2. Найдите угол под которым винтовая линия $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ пересекает прямолинейную образующую цилиндра (на котором лежит), проходящую через точку $(1, 0, 0)$.

3. Найдите кривизну гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ в произвольной точке.

4. (+3 балла) Докажите, что неплоская линия является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда смешанное произведение $\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right) = 0$.

проверочная 7 (дата проведения: 11 апреля)

определения: простейшая поверхность, элементарная поверхность, простая поверхность, гладкая поверхность, вектор-функция двух скалярных аргументов, частная производная вектор-функции двух скалярных аргументов, линия u, линия v, касательная плоскость, нормаль, параметрические уравнения поверхности, допустимая замена параметра.

1. Докажите, что понятие касательной плоскости не зависит от выбора параметризации.

2. Докажите, что направляющий вектор касательной любой кривой, лежащей на поверхности, параллелен касательной плоскости в той же точке. Докажите, что каждого вектора, параллельного касательной плоскости поверхности в точке M, существует кривая на поверхности, проходящая через M, для которой данный вектор будет параллелен касательной.

3. Напишите параметрические уравнения эллипсоида, двуполостного гиперболоида, эллиптического цилиндра. Определите вид координатных линий.

4. Определите, какой поверхностью второго порядка является поверхность, заданная параметрическими уравнениями 1) $x = a(u + v)$, $y = b(v - u)$, $z = 2uv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$; 2) $x = a \cos u \sin v$, $y = b \cos u \cos v$, $z = c \cos u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Определите вид координатных линий.

Программа коллоквиума. (дата проведения: 2 мая)

определения: числовой промежуток, вектор-функция одного скалярного аргумента, предел вектор-функции одного скалярного аргумента, производная вектор-функции одного скалярного аргумента, сумма вектор-функций, произведение вектор-функции на скалярную функцию, скалярное произведение вектор-функций, векторное произведение вектор-функций, простейшая линия, элементарная линия, простая линия, гладкая линия, параметрические уравнения линии, допустимая замена параметра, касательная к гладкой линии, вектор касательной, натуральный параметр, естественная параметризация, вектор кривизны, кривизна, орт главной нормали, орт бинормали, главная нормаль, бинормаль, соприкасающаяся плоскость, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость, репер Френе, формулы Френе, кручение, плоская линия, двумерный числовой промежуток, вектор-функция двух скалярных аргументов, частная производная вектор-функции, простейшая поверхность, элементарная поверхность, простая поверхность, гладкая поверхность, параметрические уравнения поверхности, линия u, линия v, криволинейные координаты точки на поверхности, касательная плоскость, нормаль к поверхности, первая квадратичная форма поверхности.

1. Вектор-функция одного скалярного аргумента. Координаты. Теорема о дифференцировании вектор-функции.

2. Простейшая линия, элементарная линия, простая линия. Гладкая линия и ее параметрические уравнения. Замена параметра. Натуральный параметр.

3. Касательная к гладкой кривой. Теорема о касательной.

4. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой.

5. Репер Френе.

6. Формулы Френе.

7. Кручение кривой. Формула для вычисления кручения в естественной параметризации.

8. Кручение кривой. Теорема о геометрическом смысле кручения. Плоские кривые.

9. Вычисление кривизны, кручения и векторов репера Френе в произвольной параметризации.

10. Простейшая поверхность, элементарная поверхность и простая поверхность. Гладкая поверхность и ее параметрические уравнения. Криволинейные координаты. Замена параметризации.

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Корректность определения касательной плоскости. Теорема о касательных вектора линии, лежащей на поверхности.

12. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения (поверхность задана неявно).

13. Первая квадратичная форма. Вычисление длины дуги кривой на поверхности.

14. Первая квадратичная форма. Вычисление угла между кривыми на поверхности.

15. Первая квадратичная форма. Вычисление площади области на поверхности.

Будет два пункта в карточке коллоквиума: 1) сформулировать определения (будут указаны три определения), 2) доказать одно из утверждений из программы коллоквиума (будет указано одно из них). За первое задание – 3 балла, за второе задание – 7 баллов.

проверочная 8 (дата проведения: 18 апреля)

определения: гладкая поверхность, касательная плоскость, нормаль, криволинейные координаты точки на поверхности, параметрические уравнения линии на поверхности в криволинейных координатах.

1. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически: 1) $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $(-1, 1, -1)$; 2) $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$ $(a, b \neq 0)$ в точке $u = 0$, $v = \frac{\pi}{3}$.

2. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 = z$ в точке $(1, 1, 2)$.

3. Докажите, что у поверхности $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

4. Для поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv + 3$ найдите нормаль, проходящую через начало координат (обратите внимание, что начало координат не принадлежит поверхности).

проверочная 9 (дата проведения: 25 апреля)

определение: гладкая поверхность, касательная плоскость, первая квадратичная форма, угол между кривыми.

1. Выведите формулу для вычисления длины дуги линии на поверхности.

2. Выведите формулу для вычисления площади куска поверхности.

3. Найдите длину дуги линии $u - v = 1$ на поверхности $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ между точками пересечения с координатными линиями $u = 0$ и $u = \sqrt{2}a$.

4. Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u+v$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

5. Найти площадь треугольника ABC, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $I = (1 + e^{2u})du^2 - 2e^{u+v}dudv + e^{2v}dv^2$, если AB: $v = 0$, BC: $u = 1$, AC: $u = v$.

проверочная 10 (дата проведения: 16 мая) определения: вторая квадратичная форма, нормальная кривизна кривой, кривизна кривой, нормаль к поверхности, орт главной нормали к кривой, касательная плоскость к поверхности, нормальное сечение поверхности, соприкасающаяся плоскость кривой, индикатриса Дюпена, асимптотическое направление, эллиптическая точка поверхности, гиперболическая точка поверхности, параболическая точка поверхности, омбилическая точка поверхности.

1. Выведите вторую квадратичную форму. Выведите три набора формул для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.

2. Докажите, что вторая квадратичная форма во всех точках поверхности равна нулю тогда и только тогда, когда это плоскость или ее часть.

3. Выведите формулу для вычисления нормальной кривизны кривой на поверхности в натуральной параметризации. Выведите формулу для вычисления нормальной кривизны кривой в произвольной параметризации.

4. Докажите, что нормальная кривизна у всех кривых на поверхности с общей касательной одинакова и выведите формулу для вычисления кривизны кривой на поверхности через кривизну нормального сечения.

5. Выведите уравнение индикатрисы Дюпена.

6. Найдите нормальную кривизну координатных линий на катеноиде $x = \sqrt{a^2+u^2}\cos v$, $y = \sqrt{a^2+u^2}\sin v$, $z = a\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

7. Найдите нормальную кривизну указанной линии на поверхности в заданной точке и напишите уравнения нормального сечения: а) $x = u$, $y = v$, $z = 2uv$, линия $u - 2v = 0$ в точке $(2, 1, 4)$; в) $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, линия $u = v^2$ в точке $u = 1$, $v = 1$. Определите вид индикатрисы Дюпена и нормального сечения в этой точке.

проверочная 11 (дата проведения: 23 мая)

определения: асимптотическое направление, асимптотическая линия, индикатриса Дюпена, нормальная кривизна, первая квадратичная форма, вторая квадратичная форма, главная кривизна, главное направление в точке поверхности; направления, сопряженные относительно линии второго порядка;

1. Найдите уравнения асимптотических линий следующих поверхностей: а)винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$; в) сферы $x = r\cos v\cos u$, $y = r\cos v\sin u$, $z = r\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Найдите уравнения асимптотических линий поверхностей: а) $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; б) $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

3. Выведите уравнение для нахождения главных направлений.

4. Докажите теорему Родрига вместе с леммой (направление $d\vec{r}$ является главным тогда и только тогда, когда $d\vec{n} = -k_n d\vec{r}$).

5. Выведите уравнение для нахождения главных кривизн.

6. Докажите теорему Эйлера ($k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$).

проверочная 12 (дата проведения: 30 мая)

определения: нормальная кривизна в данном направлении, индикатриса Дюпена, главные направления, главные кривизны, полная кривизна, средняя кривизна, линии кривизны, асимптотические линии, развертывающиеся поверхности, минимальные поверхности.

1. Докажите, что главные кривизны являются наибольшим и наименьшим значениями среди всех нормальных кривизн.

2. Выведите формулы для вычисления полной и средней кривизны.

3. Как зависит тип точки поверхности от знака полной кривизны? Ответ обосновать.

4. Докажите, что асимптотические линии на минимальной поверхности перпендикулярны.

5. Докажите, что коническая поверхность является развертывающейся.

6. Пусть дана линия γ. Рассмотрим множество точек всех касательных к γ. Полученная поверхность называется поверхностью касательных. Вычислите полную кривизну поверхности касательных

в произвольной точке.

проверочная 13 (дата проведения: 6 июня)

определения: полная кривизна, средняя кривизна, главные кривизны, линии кривизны, главные направления поверхности в точке, нормальная кривизна, минимальная поверхность, развертывающаяся поверхность.

1. Выясните, будет ли винтовая поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ минимальной.

2. Докажите, что поверхность Эннепера $x = 3u + 3uv^2 - u^3$, $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ является минимальной.

3. Выясните, будет ли полная кривизна постоянна вдоль а) u линий, б) вдоль v линий поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

4. Выясните, будет ли прямой геликоид а) развертывающейся поверхностью, б) минимальной поверхностью.

5. Пусть дана гладкая кривая. Выясните, будет ли поверхность, образованная главными нормалями к данной кривой, развертывающейся.

6. Будут ли прямолинейные образующие линиями кривизны для однополостного гиперболоида? Ответ обосновать.

проверочная 14 (дата проведения: 13 июня)

определения: главные направления, главные кривизны, линии кривизны, полная кривизна, средняя кривизна.

1. Найдите главные направления винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ в произвольной точке.

2. Найдите главные направления и главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$. Какая кривизна какому главному направлению соответствует?

3. Найдите линии кривизны поверхности $z = xy$.

4. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = u$ в точке $A(\frac{\pi}{2}, 1)$.

5. Найдите линии кривизны эллиптического цилиндра.

Программа экзамена

Всего за экзамен 30 баллов= 12 первый вопрос (6 сам вопрос+6 дополнительные вопросы)+ 12 второй вопрос (6 сам вопрос+6 дополнительные вопросы) + 6 задача (3 сама задача+3 дополнительные вопросы по задаче).

Если после ответа на билет не хватает баллов до оценки удовлетворительно, то выдаются еще задачи аналогичные задачам из списка стандартных задач к экзамену для набора минимального количества баллов необходимого для оценки удовлетворительно. Одна задача оценивается в три балла.

Если после ответа на билет не хватает не более трех баллов до оценки хорошо или отлично, то, если студент желает повысить оценку на один балл, выдается задача, аналогичная задаче из списка дополнительных задач к экзамену. Ее нужно решить полностью в независимости от того, сколько (один, два или три) балла не хватает.

Вопросы к экзамену.

1. Вектор- функция одного скалярного аргумента и техника дифференцирования.
2. Простейшие, элементарные и простые линии. Гладкие линии. Длина дуги. Натуральный параметр. Замена параметризации. Неявное задание кривой.
3. Касательная к гладкой кривой. Теорема о существовании и единственности касательной. Уравнения касательной к линии, заданной неявно. Нормальная плоскость.
4. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой. Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Репер Френе.
5. Формулы Френе.
6. Кручение линии, формула вычисления. Теорема о геометрическом смысле обращения кручения в нуль.
7. Формулы для вычисления кривизны и кручения линии, заданной в произвольной параметризации.
8. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Простейшие, элементарные и простые поверхности. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты.
9. Замена параметризации в уравнениях поверхности. Неявные уравнения поверхности.
10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Различные способы задания и виды уравнений.
11. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины дуги.
12. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
13. Вычисление площади на поверхности.
14. Вторая квадратичная форма. Различные формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.
15. Нормальная кривизна линии на поверхности. Формулы для ее вычисления.
16. Кривизна нормального сечения поверхности, свойства. Теорема Менье.

17. Индикатриса Дюпена.

18. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности. Критерий асимптотической линии. Теорема о количестве асимптотических направлений.

19. Главные направления поверхности. Теорема Родрига.

20. Главные кривизны поверхности. Теорема Эйлера.

21. Полная кривизна поверхности.

22. Средняя кривизна поверхности.

23. Поверхности постоянной полной кривизны.

Задачи к экзамену.

1. Вычислите производные функций 1) $[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']$, 2) $\sqrt{[\vec{r},\vec{r}\,']^2}$.

2. Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, где a – постоянное число, $t \in [0, 2\pi)$. Проверьте справедливость равенств для любого $t \in [0, 2\pi)$: 1) $|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}\,'''(t)|$, 2) $\vec{r}(t) + \vec{r}\,'(t) + \vec{r}\,''(t) + \vec{r}\,'''(t) = \vec{0}$.

3. Напишите параметрические уравнения параболы, лежащей в плоскости Oxy с вершиной в точке $(a, 0, 0)$ и ветвями, направленными вдоль положительного направления оси Ox.

4. Вычислите длину дуги линии $x = 3a\cos t$, $y = 3a\sin t$, $z = 4at$ (a – положительная константа) от точки пересечения с плоскостью Oxy до точки с произвольным значением параметра t. Запишите параметрические уравнения этой линии в естественной параметризации.

5. Линия γ задана в неявном виде системой уравнений $y^2 = 2z$, $x - y + z = 1$. Докажите, что это гладкая линия и напишите ее параметрические уравнения.

6. Для кривой $\gamma : x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ напишите уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

7. Докажите, что касательная к кривой γ: $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ во всех ее точках образует постоянный угол с вектором $\vec{p}(1, 0, 1)$.

8. Для произвольной точки винтовой линии найдите угол между ней и прямолинейной образующей цилиндра, проходящей через эту же точку.

9. Найдите репер Френе (векторы, прямые, плоскости) для винтовой линии, перейдя к естественной параметризации.

10. Покажите, что все нормальные плоскости кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ проходят через некоторую фиксированную точку. Определите координаты этой точки.

11. На кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ найдите значения параметров точек, главные нормали в которых пересекают ось Ox.

12. Из произвольной точки кривой $z = \frac{x^2}{3}$, $xy = 1$ опущен перпендикуляр на ось Ox. Покажите, что бинормаль кривой в этой точке образует с перпендикуляром прямой угол.

13. Найдите кривизну и кручение линии, заданной уравнениями $y^2 = x$, $x^2 = z$ в произвольной точке.

14. Докажите, что для любой кривой, заданной векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра, выполняются равенства 1) $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^2 = k^4(s) + k^2(s)\varkappa^2(s) + (k'(s))^2$; 2) $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3\vec{r}}{ds} = -k^2(s)$; 3) $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = k(s)k'(s)$.

15. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически: 1) $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $(-1, 1, -1)$; 2) $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$ $(a, b \neq 0)$ в точке $u = 0$, $v = \frac{\pi}{3}$.

16. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 = z$ в точке $(1, 1, 2)$.

17. Докажите, что у поверхности $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

18. Для поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv + 3$ найдите нормаль, проходящую через начало координат (обратите внимание, что начало координат не принадлежит поверхности).

19. Найдите длину дуги линии $u - v = 1$ на поверхности $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ между точками пересечения с координатными линиями $u = 0$ и $u = \sqrt{2}a$.

20. Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

21. Найти площадь треугольника ABC, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $I = (1 + e^{2u})du^2 - 2e^{u+v}dudv + e^{2v}dv^2$, если AB: $v = 0$, BC: $u = 1$, AC: $u = v$.

22. Найдите нормальную кривизну координатных линий на катеноиде $x = \sqrt{a^2 + u^2}\cos v$, $y = \sqrt{a^2 + u^2}\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{a^2 + u^2})$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

23. Найдите нормальную кривизну указанной линии на поверхности в заданной точке и напишите уравнения нормального сечения: а) $x = u$, $y = v$, $z = 2uv$, линия $u - 2v = 0$ в точке $(2, 1, 4)$; в) $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, линия $u = v^2$ в точке $u = 1$, $v = 1$. Определите вид индикатрисы Дюпена и нормального сечения в этой точке.

24. Найдите уравнения асимптотических линий следующих поверхностей: а)винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$; в) сферы $x = r\cos v\cos u$, $y = r\cos v\sin u$, $z = r\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

25. Найдите главные направления винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ в произвольной точке.

26. Найдите главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.

27. Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $z = xy$ в произвольной точке.

28. Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $xyz = 1$.

29. Найдите линии кривизны поверхности $z = xy$.

30. Выясните, будет ли винтовая поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ минимальной.

31. На поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ найти линии, вдоль которых полная кривизна постоянна.

32. Докажите, что коническая и цилиндрические поверхности имеют нулевую полную кривизну.

Дополнительные задачи к экзамену.

1. Существуют ли элементарные линии, все главные нормали которых проходят через одну точку? параллельны между собой?

2. На листе бумаги нарисованы восьмерка и четверка. Будут ли эти линии гладкими?

3. На бумаге нарисована плоская кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Изобразите векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.

4. Могут ли все коэффициенты первой квадратичной формы поверхности быть тождественно равны нулю? А какие-нибудь из трех?

5. Существуют ли не плоские элементарные линии, все главные нормали которых проходят через одну точку?

6. Существуют ли линии, все главные нормали которых параллельны между собой?

7. На некоторой поверхности линия в криволинейных координатах задана уравнением $Au + Bv + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$. Верно ли, что это всегда будет прямая? Ответ обосновать.

8. Верно ли, что на любой поверхности в криволинейных координатах прямая задается линейным уравнением вида $Au + Bv + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$? Ответ обосновать.

9. Существуют ли не плоская линия, все главные нормали которой пересекают одну и ту же прямую? Ответ обосновать.

10. Существуют ли элементарные линии, все спрямляющие плоскости которых параллельны между собой? Ответ обосновать.

11. Могут ли все нормальные плоскости элементарной линии быть параллельны друг другу? Ответ обосновать.

12. Сфера задана параметрическими уравнениями $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$, $u \in [-\pi, \pi)$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Не проводя вычислений, определите направление векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и $\vec{N}$ в какой нибудь точке сферы. Что произойдет в точках с $v = \pm\frac{\pi}{2}$?

13. Тор задан параметрическими уравнениями $x = (a + b\cos v)\cos u$, $y = (a + b\cos v)\sin u$, $z = b\sin v$. Не проводя вычислений, определите направление векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и $\vec{N}$ в какой нибудь точке тора.

14. Может ли первая квадратичная форма какой-нибудь поверхности иметь вид $e^{2u}(du)^2 - 2e^{u+v}dudv + e^{2v}(dv)^2$? Ответ обосновать.

15. Запишите параметрические уравнения прямого кругового цилиндра так, чтобы координатными линиями были винтовые линии.

16. Докажите, что если у плоской линии все главные нормали проходят через одну точку, то это окружность или ее часть.

17. Может ли первая квадратичная форма какой-нибудь поверхности иметь вид $(2u-u^2-1)(du)^2+e^{u+v}dudv+(v^3+v^2+v)(dv)^2$? Ответ обосновать.

18. Напишите параметрические уравнения гиперболического параболоида так, чтобы его координатными линиями были прямолинейные образующие.

19. Почему на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны?

20. Может ли поверхность, состоящая из касательных к данной пространственной кривой иметь эллиптические точки?

21. Может ли винтовая линия быть нормальным сечением некоторой поверхности?

22. Существуют ли асимптотические линии на поверхности положительной полной кривизны?

23. Каким может быть тип точки а) для 1-линейчатых поверхностей, б) 2-линейчатых поверхностей? (Поверхность называется 1-линейчатой, если через каждую ее точку проходит единственная прямая, целиком лежащая в ней. Поверхность называется 2-линейчатой, если через каждую ее точку проходит ровно две прямые, целиком лежащие в ней).

24. Существуют ли омбилические точки на параболоиде вращения, эллипсоиде вращения, однополостном гиперболоиде вращения?

25. На поверхности F в криволинейных координатах уравнение кривой задано линейным уравнением $Au + Bv + C = 0$. Верно ли, что это всегда уравнение прямой? Может ли прямая в криволинейных координатах иметь не линейное уравнение?

26. Почему индикатриса Дюпена не может быть параболой, парой совпавших прямых, парой пересекающихся прямых?

27. На рисунке изображена индикатриса Дюпена и указано несколько направлений. Определите, в каком направлении нормальная кривизна больше, а в каком меньше.

28. Запишите первую квадратичную форму плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, в аффинной системе координат, в полярной системе координат. Изобразите координатные линии в каждом случае.

29. На верхней окружности тора укажите главные направления и главные кривизны (не проводя вычислений).

30. Зависит ли нормальная кривизна линии от поверхности, на которой находится?

31. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии, то все точки линии параболического типа. (Можно ли параболоид вращения „положить“ на стол?)

32. Изобразите индикатрису Дюпена для произвольной точки кругового цилиндра (конуса), укажите главные и асимптотические направления (не проводя вычислений).

33. Как по картинке отличить эллиптическую точку от гиперболической?

34. Может ли асимптотическая линия быть линией кривизны?

35. Как известно, главные кривизны – это максимальное и минимальное значения нормальных кривизн в данной точке. Проиллюстрируйте это утверждение для а) эллиптической точки; б) для параболической точки; в) для гиперболической точки.