Литература: Игнаточкина Л.А. Топология для бакалавров математики, Москва, Прометей, 2016.

Для подготовки к проверочной работе настоятельно рекомендую ответ на каждый вопрос прописать самостоятельно!

проверочная 1. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: ближайшее занятие)

Определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками в метрическом пространстве, сфера, открытый шар, замкнутый шар, тривиальная метрика.

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского.

2. Докажите неравенство Минковского.

3. Докажите выполнимость третьего условия для канонической метрики на $\mathbb{R}^n$.

4. Будет ли метрическим пространством множество $\mathbb{R}^2$ с отображением $\rho(x, y) = min\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$? Ответ обосновать.

5. Изобразите шары и сферу на плоскости с тривиальной метрикой.

6. Изобразите шары и сферу на $\mathbb{R}$ с канонической метрикой. Рисунок обосновать.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x, y) = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1, 2)$ радиуса 1. (В данной задаче будут варьироваться числовые данные в пределах от -10 до 10).

8. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x, y) = max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1, 2)$ радиуса 1. (В данной задаче будут варьироваться числовые данные в пределах от -10 до 10).

9. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $x, a \in X$ и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеют место включения

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a).$$

проверочная 2. (дата проведения проверочной: 13 сентября)

При доказательстве и решении задач на занятии мы многое проговаривали устно, а писали мало. В работе слова должны быть написаны. Это обоснование кратких записей и картинок.

Определения: отображение непрерывное в точке метрических пространств на языке эпсилон дельта, непрерывное отображение в точке метрических пространств на языке шаров, метрическое пространство, открытый шар, метрика, каноническая метрика прямой $\mathbb{R}$.

1. Докажите, что если отображение непрерывно в точке x_0, то

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0)\, f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

2. Докажите, что если

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0)\, f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)),$$

то отображение непрерывно в точке x_0.

3. Пусть f – это id (параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, гомотетия). Будет ли отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывным, если на первой плоскости задана каноническая (тривиальная, max, сумма модулей) метрика, а на второй – каноническая (тривиальная, max, сумма модулей) метрика.

4. Пусть даны две параллельные прямые a и b и точка O, не лежащая на них. Построим отображение a на b по следующему правилу: точке $M \in a$ ставим в соответствие точку $M' = b \cap OM$. Выясните, будет ли отображение f непрерывным, если на первой прямой каноническая (тривиальная) метрика, а на второй прямой каноническая (тривиальная) метрика. Ответ обосновать.

проверочная 3. (дата проведения проверочной: 20 сентября)

Определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками, непрерывное отображение в точке на языке эпсилон-дельта, непрерывное отображение в точке на языке открытых шаров, композиция отображений, открытый шар, открытое множество.

1. Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, отображение $g : Y \to Z$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$. Докажите, что отображение $g \circ f : X \to Z$ непрерывно в точке x_0. В задании метрические пространства будут обозначаться другими буквами и доказывать нужно будет в заданных вам буквах. Например, отображение $t : M \to N$ непрерывно в точке m_0, отображение $k : N \to L$ непрерывно в точке $n_0 = t(m_0)$ и т.д.

2. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что отображение $id : X \to X$ непрерывно в каждой точке.

3. Докажите, что открытый шар является открытым множеством.

4. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

5. Пусть дана плоскость (с канонической метрикой, тривиальной, максимумом, суммой модулей) и квадрат (треугольник, луч без начала, множество внутренних точек некоторого квадрата, множество внутренних точек некоторого треугольника, прямая, интервал, отрезок, полуинтервал, окружность). Будет ли это множество открытым? Ответ обосновать.

6. Пусть дана прямая с канонической метрикой (тривиальной метрикой) и отрезок (луч с началом, луч без начала, интервал, полуинтервал, множество целых чисел, множество рациональных чисел). Будет ли это множество открытым? Ответ обосновать.

проверочная 4. (дата проведения проверочной: 27 сентября)

определения: открытое множество в метрическом пространстве, полный прообраз точки, полный прообраз множества, топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, окрестность точки топологического пространства, топология Зариского, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, индуцированная топология, естественная топология на $\mathbb{R}^n$.

1. Докажите, что в метрическом пространстве пересечение любых двух открытых множеств открыто.

2. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества из Y его полный прообраз открыт в X.

3. Докажите, что множество U топологического пространства (X, τ) является открытым тогда и только тогда, когда для любой его точки существует окрестность, лежащая в нем.

4. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с антидискретной топологией. Будет ли отрезок (луч, прямая, квадрат с внутренними точками, внутренние точки квадрата, треугольник) открытым множеством? Ответ обосновать.

5. Опишите открытые множества индуцированной топологии на отрезке A, лежащем на прямой $\mathbb{R}$ с топологией Зариского.

6. Опишите открытые множества индуцированной топологии на окружности A, лежащей на плоскости $\mathbb{R}^2$ с метрической топологией метрики букашки.

проверочная 5. (дата проведения проверочной: 4 октября)

определения: топология, база топологии, открытое множество в топологическом пространстве, замкнутое множество.

1. Укажите какие-нибудь базы дискретной и антидискретной топологии, заданных на произвольном множестве. Ответ обосновать.

2. Укажите какую-нибудь базу метрической топологии метрики максимум на $\mathbb{R}^2$,

3. Докажите, что базой индуцированной топологии на множестве будет пересечение элементов базы объемлющего пространства с этим множеством.

4. Будет ли квадрат (квадрат с внутренними точками, прямая, отрезок, луч, интервал, окружность) замкнутым множеством на плоскости $\mathbb{R}^2$ с дискретной топологией (антидискретной, естественной, метрической топологией метрики букашки)? Ответ обосновать.

5. Будет ли отрезок (интервал, одна точка, конечное множество точек, луч) замкнутым множеством на прямой $\mathbb{R}$ с топологией Зариского (дискретной , антидискретной, естественной)? Ответ обосновать.

проверочная 6. (дата проведения проверочной: 11 октября)

определения: топологическое пространство, непрерывное отображение топологических пространств, база топологии, полный прообраз множества.

1. Докажите, что отображение топологических пространств X и Y является непрерывным тогда и только тогда, когда для любого элемента базы топологии на Y его полный прообраз открыт в X.

2. Пусть окружность Ω касается прямой $\mathbb{R}$ в точке S. Обозначим через N диаметрально противоположную точку для точки S на окружности Ω. Обозначим $X = \Omega \setminus N$, $Y = \mathbb{R}$. Построим отображение $f : X \to Y$ следующим образом: точке $M \in X$ поставим в соответствие точку пересечения прямой NM и $\mathbb{R}$. Выясните, будет ли это отображение

непрерывным, если на X индуцированная топология естественной топологией плоскости $\mathbb{R}^2$ (метрической топологией метрики максимум, дискретной топологией, антидискретной топологией), а на Y – естественная топология (дискретная топология, антидискретная топология, топология Зариского). Ответ обосновать.

3. Докажите, что композиция непрерывных отображений топологических пространств непрерывна.

проверочная 7. (дата проведения проверочной: 18 октября)

определения: гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, непрерывное отображение топологических пространств, база топологии.

1. Пусть окружность Ω касается прямой $\mathbb{R}$ в точке S. Обозначим через N диаметрально противоположную точку для точки S на окружности Ω. Обозначим $X = \Omega \setminus N$, $Y = \mathbb{R}$. Построим отображение $f : X \to Y$ следующим образом: точке $M \in X$ поставим в соответствие точку пересечения прямой NM и $\mathbb{R}$. Выясните, будет ли это отображение гомеоморфизмом, если на X индуцированная топология естественной топологией плоскости $\mathbb{R}^2$ (метрической топологией метрики максимум, дискретной топологией, антидискретной топологией), а на Y – естественная топология (дискретная топология, антидискретная топология, топология Зариского). Ответ обосновать.

2. Будут ли гомеоморфны топологические пространства 1) два отрезка равной длины с одинаковыми топологиями, 2) окружность с выколотой точкой (топология индуцирована естественной топологией плоскости) и прямая с естественной топологией, 3) прямая с топологией Зариского и прямая с дискретной топологией, 4) $X = \{0,1\}$ с топологией $\{\emptyset, X, \{1\}\}$ и $Y = \{0,1\}$ с дискретной топологией? Ответ обосновать.

3. Будут ли хаусдорфовыми топологические пространства: 1) прямая с естественной топологией (топологией Зариского, дискретной, антидискретной), 2) $X = \{0,1\}$ с топологией $\{\emptyset, X, \{1\}\}$ 3) окружность с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости (метрической топологией метрики максимум), 4) плоскость с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией)? Ответ обосновать.

проверочная 8. (дата проведения проверочной: 25 октября)

определения: гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, непрерывное отображение топологических пространств, база топологии, хаусдорфово топологическое пространство, естественная топология прямой, естественная топология плоскости, метрическая топология метрического пространства, топология Зариского прямой, дискретная топология, антидискретная топология, индуцированная топология.

1. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства, (Y, τ_Y) – хаусдорфово. Докажите, что (X, τ_X) – хаусдорфово.

2. Будут ли гомеоморфны следующие топологические пространства: 1) окружность с дискретной топологией и прямая с дискретной топологией, 2) интервал с топологией, индуцированной естественной топологией прямой и прямая с естественной топологией, 3) треугольник и четырехугольник с топологиями, индуцированными метрической тополо-

гией метрики максимум плоскости? Ответ обосновать.

3. Будут ли хаусдорфовыми следующие топологические пространства: 1) прямая с дискретной (антидискретной, естественной , Зариского) топологией, 2) плоскость с дискретной (антидискретной, естественной, метрической топологией метрики максимум), 3) луч с началом с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости (топологией, индуцированной топологией Зариского прямой)? Ответ обосновать.

проверочная 9. (дата проведения проверочной: 1 ноября)

определения: открытое множество топологического пространства, замкнутое множество, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения множества, замыкание множества, граничная точка множества, граница множества.

1. На прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского) дано множество $A = [0,2) \cup \{4\}$. На множестве A индуцирована топология τ_A топологией прямой. Будут ли следующие множества а) открытыми, б) замкнутыми в топологическом пространстве (A, τ_A): $(0,1)$, $(1,2)$, $[1,2)$, $\{4\}$, $\{1\}$, $(0,1) \cup \{4\}$? Ответ обосновать. (в вариантах числа могут быть другими)

2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, метрической топологией метрики букашки, с метрической топологией метрики максимум, метрической топологией тривиальной метрики) дана окружность (отрезок, интервал, луч с началом, луч без начала, замкнутый круг). Будет ли это множество а) открытым, б) замкнутым? Ответ обосновать.

3. На прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского) даны множества $(0,1)$, $(1,2)$, $[1,2)$, $\{4\}$, $\{1\}$, $(0,1) \cup \{4\}$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $\mathbb{N}$ (множество натуральных чисел). Найдите их внутренность, замыкание и границу. (в вариантах числа могут быть другими)

проверочная 10. (дата проведения проверочной: 8 ноября)

определения: открытое множество топологического пространства, замкнутое множество, внутренняя точка, внутренность множества, точка прикосновения, замыкание множества, граничная точка, граница множества.

1. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

2. Докажите, что внутренность множества является открытым множеством.

3.Докажите, что множество является открытым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

4. Докажите, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

5. Докажите, что для любого множества U топологического пространства X имеет место равенство $\partial U = cl\, U \setminus int\, U$.

6. Докажите, что граница является замкнутым множеством.

проверочная 11. (дата проведения проверочной: 15 ноября)

определения: внутренняя точка множества, точка прикосновения множества, граничная точка множества, предельная точка, изолированная точка, гомеоморфизм, замкнутое множество, открытое множество в топологическом пространстве.

1. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства. Докажите, что F замкнуто в X тогда и только тогда, когда $f(F)$ замкнуто в Y.

2. Докажите, что для если f – гомеоморфизм, то $intf(U) = f(intU)$, $cl(f(U)) = f(clU)$, $\partial(f(U)) = f(\partial U)$.

3. Пусть дана прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией (топологией Зариского, дискретной топологией, антидискретной топологией). Найдите множество предельных и изолированных точек для множества $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Программа коллоквиума (дата проведения: 22 ноября)

Два задания: 1) Беседа по определениям (нужно не только знать определение, но также уметь приводить примеры объектов, подходящих под определение; определять, подходит ли данный объект под определение. Ответ нужно уметь обосновать. В качестве примеров пустое множество и само топологическое пространство не принимаются. Будет минимум три определения)(15 баллов) 2) Доказать одно утверждение из ниже следующего списка (10 баллов).

Нужно знать следующие определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками, каноническая метрика, метрика сумма модулей (букашки), метрика максимум, тривиальная метрика, открытый шар, замкнутый шар, сфера, непрерывное отображение в точке метрических пространств, непрерывное отображение метрических пространств, открытое множество в метрическом пространстве, полный прообраз точки, полный прообраз множества, топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, окрестность точки в топологическом пространстве, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, естественная топология на $\mathbb{R}^n$, топология Зариского на прямой, индуцированная топология, топологическое подпространство, база топологии, непрерывное отображение топологических пространств, замкнутое множество, гомеоморфизм топологических пространств, хаусдорфово топологическое пространство, топологический инвариант, гомеоморфные топологические пространства, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения множества, замыкание множества, граничная точка множества, граница множества.

Утверждения для доказательства:

1. Неравенство Коши-Буняковского.

2. Неравенство Минковского.

3. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ будет непрерывным в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\forall B_\varepsilon(f(x_0))\, \exists B_\delta(x_0) :\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

4. Докажите, что композиция непрерывных отображений метрических пространств является непрерывным отображением.

5. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве являются открытыми

множествами.

6. Докажите, что открытые множества метрических пространств обладают следующими свойствами: 1) пустое множество и само метрическое пространства открыты; 2) объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством; 3) пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.

7. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X.

8. Докажите критерий открытого множества в топологическом пространстве.

9. Докажите, что отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого элемента V из базы топологии на Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии пространства X.

10. Докажите, что свойство хаусдорфовости является топологическим инвариантом.

11. Докажите, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности.

12. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

13. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

14. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

15. Докажите, что $\partial A = cl\, A \setminus int\, A$.

16. Докажите, что граница множества является замкнутым множеством.

проверочная 12. (дата проведения проверочной: 29 ноября)

определения: открытое множество в топологическом пространстве, замкнутое множество, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения, замыкание множества, граничная точка множества, граница множества, предельная точка, изолированная точка, всюду плотное множество, нигде не плотное множество, несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство.

Во всех последующих задачах, в которых требуется привести пример, тривиальные случаи $\emptyset$ и X (самого топологического пространства) не подходят. Другими словами, требуется привести пример собственного множества.

1. Существует ли множество, граница которого совпадает с его внутренностью? Ответ обосновать.

2. Приведите пример множества, у которого замыкание совпадает со всем топологическим пространством.

3. Приведите пример множества, у которого пустая внутренность.

4. Приведите пример множества, которое имеет пустую границу.

5. Существует ли множество, которое является одновременно всюду плотным, не открытым и не замкнутым? Ответ обосновать.

6. Существует ли множество, которое является одновременно всюду плотным и замкнутым? Ответ обосновать.

проверочная 13. (дата проведения проверочной: 6 декабря)

определения: несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество, связное множество, точка прикосновения, замыкание множества, индуцированная топология.

1. Будет ли множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ связным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (топологией Зариского)? Ответ обосновать.

2. Докажите, что если X – несвязно, то существует вещественная непрерывная ровно двузначная функция $f : X \to \mathbb{R}$.

3. Докажите, что если существует вещественная непрерывная ровно двузначная функция $f : X \to \mathbb{R}$, то X – несвязно.

4. Докажите, что если A – связное множество топологического пространства (X, τ), то $cl\, A$ – связное множество.

5. Докажите, что связность является топологическим инвариантом.

проверочная 14. (дата проведения проверочной: 13 декабря)

определения: несвязное топологическое пространство, несвязное множество, связное топологическое пространство, связное множество, непрерывное отображение топологических пространств,

1. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что сужение f на подмножество $A \subset X$ будет непрерывным отображением в индуцированных топологиях.

2. Докажите, что окружность является связным множеством (на плоскости с естественной топологией).

3. Докажите, что любой промежуток (в частности, прямая) является связным множеством на прямой с естественной топологией.

4. Будут ли гомеоморфны: 1) латинские буквы S и K; 2) $(2, 3]$ и $(2, 3)$; 3) квадрат (четыре отрезка) и прямая; 4) $(2, 3]$ и $[2, 3)$? Топологии индуцированы естественной топологией плоскости. Ответ обосновать.

проверочная 15. (дата проведения проверочной: 20 декабря)

определения: покрытие топологического пространства, открытое покрытие топологического пространства, подпокрытие, компактное топологическое пространство, открытое покрытие множества, компактное множество в топологическом пространстве.

1. Будет ли плоскость с естественной топологией компактной? Ответ обосновать.

2. Будет ли множество натуральных чисел на прямой с антидискретной (дискретной, топологией Зариского) топологией компактным множеством? Ответ обосновать.

3. Докажите, что окружность с выколотой точкой не является компактным топологи-

ческим пространством с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости.

4. Докажите, что замкнутое множество компактного топологического пространства является компактным.

проверочная 16. (дата проведения проверочной: 27 декабря)

определения: покрытие топологического пространства, открытое покрытие топологического пространства, подпокрытие, компактное топологическое пространство, открытое покрытие множества, компактное множество в топологическом пространстве.

1. Докажите, что отрезок является компактным множеством на прямой с естественной топологией.

2. Будет ли отрезок компактным множеством на прямой с антидискретной (дискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

3. Докажите, что компактность топологического пространства (множества топологического пространства) является топологическим инвариантном.

Программа зачета (дата проведения: 27 декабря)

На зачете будет 5 заданий. В каждом задании будет: 1) доказать одно из вышеперечисленных утверждений, 2) сформулировать определение, входящее в доказательство 3) привести пример или выяснить, подходит ли под определение п. 2) указанный объект. Каждое задание оценивается $5 = 2 + 1 + 2$. Всего за зачет максимальное число баллов 25.

Нужно знать определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками, каноническая метрика, метрика сумма модулей (букашки), метрика максимум, тривиальная метрика, открытый шар, замкнутый шар, сфера, непрерывное отображение в точке метрических пространств, непрерывное отображение метрических пространств, открытое множество в метрическом пространстве, полный прообраз точки, полный прообраз множества, топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, окрестность точки в топологическом пространстве, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, естественная топология на $\mathbb{R}^n$, топология Зариского на прямой, индуцированная топология, топологическое подпространство, база топологии, непрерывное отображение топологических пространств, замкнутое множество, гомеоморфизм топологических пространств, хаусдорфово топологическое пространство, топологический инвариант, гомеоморфные топологические пространства, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения множества, замыкание множества, граничная точка множества, граница множества, предельная точка, изолированная точка, всюду плотное множество, нигде не плотное, несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество, связное множество, компонента связности, компактное топологическое пространство, компактное множество.

Нужно уметь доказывать следующие утверждения:

1. Неравенство Коши-Буняковского.

2. Неравенство Минковского.

3. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ будет непрерывным в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\forall B_\varepsilon(f(x_0))\, \exists B_\delta(x_0) :\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

4. Докажите, что композиция непрерывных отображений метрических пространств является непрерывным отображением.

5. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве являются открытыми множествами.

6. Докажите, что открытые множества метрических пространств обладают следующими свойствами: 1) пустое множество и само метрическое пространства открыты; 2) объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством; 3) пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.

7. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X.

8. Докажите критерий открытого множества в топологическом пространстве.

9. Докажите, что отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого элемента V из базы топологии на Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии пространства X.

10. Докажите, что свойство хаусдорфовости является топологическим инвариантом.

11. Докажите, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности.

12. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

13. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

14. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

15. Докажите, что $\partial A = cl\, A \setminus int\, A$.

16. Докажите, что граница множества является замкнутым множеством.

17. Докажите критерий несвязности топологического пространства.

18. Докажите, что замыкание связного множества является связным.

19. Докажите, что связность топологического пространства является топологическим инвариантом.

20. Докажите, что сужение непрерывного отображения будет непрерывным отображением в индуцированных топологиях.

21. Докажите, что любой промежуток прямой (интервал, отрезок, полуинтервал, луч, вся прямая) с естественной топологией связен.