проверочная 1. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: ближайшее занятие)

Определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками в метрическом пространстве, сфера, открытый шар, замкнутый шар, тривиальная метрика, подпространство метрического пространства,

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского.

2. Докажите неравенство Минковского.

3. Докажите выполнимость третьего условия для канонической метрики на $\mathbb{R}^n$.

4. Будет ли метрическим пространством множество $\mathbb{R}^2$ с отображением $\rho(x,y) = min\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$? Ответ обосновать.

5. Докажите, что для шаров с различными центрами шар с большим радиусом может содержаться в шаре с меньшим радиусом.

6. Изобразите шары и сферу на $\mathbb{R}$ с канонической метрикой. Рисунок обосновать.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x,y) = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1,2)$ радиуса 1. (В данной задаче будут варьироваться числовые данные в пределах от -10 до 10).

8. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x,y) = max\{|x^1-y^1|, |x^2-y^2|\}$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1,2)$ радиуса 1. (В данной задаче будут варьироваться числовые данные в пределах от -10 до 10).

9. Пусть (X,ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $x, a \in X$ и любого числа $r > \rho(x,a)$ имеют место включения

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a).$$

10. Пусть (X,ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $x, a \in X$ и любого числа $r > \rho(x,a)$ имеют место включения

$$\bar{B}_{r-\rho(x,a)}(x) \subset \bar{B}_r(a).$$

проверочная 2. (дата проведения проверочной: 15 сентября)

Определения: отображение непрерывное в точке на языке эпсилон дельта, непрерывное отображение метрических пространств на языке шаров, метрическое пространство, открытый шар, метрика, каноническая метрика прямой.

1. Докажите, что если отображение непрерывно в точке x_0, то

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0)\, f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

2. Докажите, что если

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0)\, f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)),$$

то отображение непрерывно в точке x_0.

3. Пусть f – это id (параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, гомотетия). Будет ли отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывным, если на первой плоскости задана каноническая (тривиальная, max, сумма модулей) метрика, а на второй – каноническая (тривиальная, max, сумма модулей) метрика.

Для тех, кто предыдущие задачи понял уже на занятии, а хочется поисследовать что-нибудь интересное (необязательное задание). Для метрики с суммой модулей нарисуйте множество точек, равноудаленных от точек (0,0) и (1,0). Ничего интересного? Ну тогда попробуйте взять точки (0,0) и (1,1). Ну как впечатлило? А для метрики с максимумом уже интересная картинка получается для точек (0,0) и (1,0). А для точек (0,0) и (1,1) я еще не успела нарисовать. Если нарисуете, покажите, пожалуйста!

проверочная 3. (дата проведения проверочной: 22 сентября)

Определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками, непрерывное отображение в точке на языке эпсилон-дельта, непрерывное отображение в точке на языке открытых шаров, композиция отображений, открытый шар, открытое множество.

1. Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, отображение $g : Y \to Z$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$. Докажите, что отображение $g \circ f : X \to Z$ непрерывно в точке z_0. В задании метрические пространства будут обозначаться другими буквами и доказывать нужно будет в заданных вам буквах. Например, отображение $t : M \to N$ непрерывно в точке m_0, отображение $k : N \to L$ непрерывно в точке $n_0 = t(m_0)$ и т.д.

2. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что отображение $id : X \to X$ непрерывно в каждой точке.

3. Докажите, что открытый шар является открытым множеством.

4. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

5. Докажите, что пересечение двух открытых множеств является открытым множеством.

6. Пусть дана плоскость (с канонической метрикой, тривиальной, максимумом, суммой модулей) и квадрат (треугольник, луч без начала, множество внутренних точек некоторого квадрата, множество внутренних точек некоторого треугольника, прямая, интервал, отрезок, полуинтервал, окружность). Будет ли это множество открытым? Ответ обосновать.

7. Пусть дана прямая с канонической метрикой (тривиальной метрикой) и отрезок (луч с началом, луч без начала, интервал, полуинтервал, множество целых чисел, множество рациональных чисел). Будет ли это множество открытым? Ответ обосновать.

8. Рассмотрим метрическое пространство $X = (1, 4] \cup [5, 8)$ с метрикой, индуцированной канонической метрикой прямой. Будет ли множество $(2, 4]$ ($(1, 2]$, $(2, 4] \cup [5, 6)$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) открытыми в пространстве X? Ответ обосновать.

9*. (необязательно, для интересующихся). Покажите на конкретном примере, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым множеством.

проверочная 4. (дата проведения проверочной: 29 сентября)

определения: открытое множество, полный прообраз точки, полный прообраз множества, открытый шар, гомеоморфизм, гомеоморфные метрические пространства,

1. Докажите, что если отображение $t : M \to N$ непрерывно, то для любого открытого подмножества $R \subset N$ его полный прообраз $t^{-1}(R)$ является открытым в M.

2. Докажите, что если для любого открытого подмножества $R \subset N$ его полный прообраз $t^{-1}(R)$ является открытым в M, то $t : M \to N$ непрерывно.

3. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности (рефлексивность).

4. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности (симметричность).

5. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности (транзитивность).

6. Будет ли тождественное отображение (параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, скользящая симметрия, гомотетия) $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой (тривиальной метрикой, метрикой максимум, метрикой суммой модулей) в $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой (тривиальной метрикой, метрикой максимум, метрикой суммой модулей) гомеоморфизмом? Ответ обосновать.

самостоятельная 1. (дата проведения: 6 октября, 30 минут в начале пары; будет три задания: определение (2 балла), доказать утверждение (4 балла), решить задачу (4балла))

определения: метрического пространства, тривиальной метрики, канонической метрики на $\mathbb{R}^n$, непрерывного в точке отображения метрических пространств, полного прообраза точки, полного прообраза множества, гомеоморфизма метрических пространств, открытого шара, сферы, замкнутого шара, открытого множества в метрическом пространстве.

Утверждения для доказательства:

1. Докажите неравенство Минковского.

2. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

3. Докажите, что для отображения $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2}$ удовлетворяет третьему условию метрического пространства.

4. Докажите, что если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то для любого открытого в Y множества его полный прообраз открыт в X.

5. Докажите, что если для любого открытого множества в Y его полный прообраз открыт в X, то f непрерывное отображение.

6. Докажите, что если $\forall B_\varepsilon(f(x_0))\exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$, то $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0.

7. Докажите, что если $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, то $\forall B_\varepsilon(f(x_0))\exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

8. Докажите, что открытые шары в метрических пространствах являются открытыми множествами.

9. Докажите неравенство Коши-Буняковского.

10. Докажите, что пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.

11. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

12. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности.

Задачи (числа и метрики могут быть изменены).

1. Докажите, что если $y \in B_r(x)$, то $B_{r-\rho(x,y)} \subset B_r(x)$.

2. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$, где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Изобразите замкнутый шар с центром в точке $Q(1, 3)$ радиуса 4.

3. Будет ли метрическим пространством множество $\mathbb{R}^2$ с отображением $\rho(x, y) = min\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$? Ответ обосновать.

4. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой, $Y = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой. Будет ли гомотетия непрерывным отображением? Ответ обосновать.

5. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $x, a \in X$ и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеют место включения

$$\bar{B}_{r-\rho(x,a)}(x) \subset \bar{B}_r(a).$$

6. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x, y) = max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1, 2)$ радиуса 1.

проверочная 5. (дата проведения проверочной: 7 октября)

определения: топология, топологическое пространство, топология Зариского на прямой, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, индуцированная топология, база топологии, естественная топология $\mathbb{R}^n$.

1. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Будут ли следующие семейства подмножеств являться топологией на X: а) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, б) $\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}, \{a, b, d\}\}$, в) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ состоит из $\emptyset$ и всевозможных а) бесконечных подмножеств в $\mathbb{R}$, б) конечных подмножеств в $\mathbb{R}$. Является ли τ топологией?

3. Пусть $X = [0, +\infty)$, τ состоит из $\emptyset$, X и всевозможных лучей вида $(a, +\infty)$, где $a \geq 0$. Докажите, что τ – топология. Топологическое пространство (X, τ) называется *стрелкой*.

4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с тривиальной метрикой. Опишите все открытые множества его метрической топологии.

5. Укажите какую-нибудь базу естественной топологии а) на плоскости $\mathbb{R}^2$, б) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и в) в $\mathbb{R}^n$.

6. Укажите какую-нибудь базу дискретной и антидискретной топологии.

7. Пусть Y – топологическое подпространство топологического пространства (X, τ) и $\mathscr{B}$ – база топологии τ. Докажите, что семейство $\{U \cap Y, U \in \mathscr{B}\}$ будет базой индуцированной топологии на Y.

8. Пусть $f : X \to Y$ – отображение множество, $M, N \subset Y$. Докажите, что $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$, $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$, $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(N)$.

9* (необязательная). Пусть дана плоскость $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией и прямая $\mathbb{R}$ рассматривается как подмножество в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что естественная топология на $\mathbb{R}$ совпадает с индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологией.

проверочная 6. (дата проведения проверочной: 13 октября)

определения: непрерывное отображение топологических пространств, база топологии, открытое множество топологического пространства, замкнутое множество в топологическом пространстве.

1. Докажите, что если отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно, то для любого множества V из базы топологии Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии на X.

2. Докажите, что если для любого множества V из базы топологии Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии на X, то отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно.

3. Докажите, что если отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно, то для любого замкнутого множества A из Y его полный прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут в X.

4. Докажите, что если для любого замкнутого множества A из Y его полный прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут в X, то отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно.

5. Пусть X – окружность (точка O – ее центр), Y – треугольник, вписанный в окружность X. Любой точке M окружности поставим в соответствие точку M', которая получается при пересечении луча OM с треугольником Y. Пусть на X топология индуцированная метрической топологией плоскости с метрикой max (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости), а на Y топология индуцирована метрической топологией плоскости с метрикой суммой модулей (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости). Выясните, будет ли заданное отображение непрерывным. Ответ обосновать.

6. Пусть X – окружность с выколотой точкой (точка O – центр этой окружности), Y – прямая. Прямая касается окружности в точке, диаметрально противоположной выколотой точке. Отображение $f : X \to Y$ зададим следующим образом: каждой точке $M \in X$ ставим в соответствие точку $M' \in Y$, которая получается при пересечении луча OM и прямой Y. Пусть на X топология индуцирована метрической топологией метрики суммы модулей, а на Y – топология Зариского. Будет ли отображение f непрерывным? Ответ обосновать.

7. Будет ли множество рациональных чисел открытым (замкнутым) на прямой с топологией Зариского? Ответ обосновать.

8* (необязательная). Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *топологически эквивалентными*, если они порождают одну и ту же метрическую топологию. Будут ли топологически эквивалентны а) каноническая и тривиальная метрики на $\mathbb{R}^2$; б) каноническая и $\rho(a, b) = max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$ на $\mathbb{R}^2$; в) ρ и $\frac{\rho}{1+\rho}$ на $\mathbb{R}^2$, где ρ – каноническая метрика на $\mathbb{R}^2$?

проверочная 7. (дата проведения проверочной: 20 октября)

определения: открытое множество в топологическом пространстве, хаусдорфово топологическое пространство, топологический инвариант, гомеоморфизм, непрерывное отображение топологических пространств.

1. Пусть $f : X \to Y$ – гомеоморфизм топологических пространств, X – хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что Y – хаусдорфово топологическое пространство.

2. Будет ли хаусдорфовым топологическим пространством $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

3. Будет ли хаусдорфовым топологическим пространством $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (метрической топологией метрики максимум, метрической топологией метрики суммы модулей, метрической топологией тривиальной метрики)? Ответ обосновать.

4. Будут ли гомеоморфны два отрезка с топологией, индуцированной естественной топологией прямой? Ответ обосновать.

5. Будут ли гомеоморфны окружность и треугольник (квадрат, шестиугольник, пятиугольник, семиугольник, восьмиугольник и т.д.) с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости? Ответ обосновать.

6. Будут ли гомеоморфны окружность с антидискретной топологией и прямая с топологией Зариского? Ответ обосновать.

7*. (необязательная) Докажите, что круговая цилиндрическая поверхность гомеоморфна сфере с двумя выколотыми точками (топология индуцирована естественной топологией из $\mathbb{R}^3$).

проверочная 8. (дата проведения проверочной: 27 октября)

определения: открытое множество топологического пространства, замкнутое множество, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения, замыкание множества, граничная точка, граница множества, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства.

1. Будут ли гомеоморфны квадрат и треугольник (квадрат, шестиугольник, пятиугольник, семиугольник, восьмиугольник и т.д.) с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости? Ответ обосновать.

2. Будут ли гомеоморфны квадрат с дискретной топологией и квадрат с антидискретной топологией? Ответ обосновать.

3. Будет ли открытым (замкнутым) множеством отрезок (интервал, полуинтервал, множество натуральных чисел, множество рациональных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

4. Будет ли открытым (замкнутым) множеством треугольник (часть плоскости, ограниченная треугольником вместе с ним, часть плоскости, ограниченная треугольником без него, отрезок, интервал, полуинтервал) на плоскости с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, метрической топологией метрики сумма модулей, метрической топологией метрики максимум)? Ответ обосновать.

5. Найдите внутренность (замыкание, границу) интервала (отрезка, полуинтервала, множества натуральных чисел, множества вещественных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, топологией Зариского). Ответ обосновать.

самостоятельная 2. (дата проведения: 3 ноября, 30 минут в начале пары; будет три задания: определение (2 балла), доказать утверждение (4 балла), решить задачу (4балла))

определения: топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, база топологии, дискретная топология, антидискретная топология, топология Зариского, индуцированная топология, метрическая топология естественная топология на $\mathbb{R}^n$, непрерывное отображение, замкнутое множество, гомеоморфизм, гомеоморфные пространства, хаусдорфовы топологические пространства, внутренняя точка множества, точка прикосновения множества, граничная точка.

Утверждения для доказательства:

1. Докажите критерий открытого множества в топологическом пространстве.

2. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любого множества $V \in \mathscr{B}_Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

3. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F в Y его полный прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X.

4. Пусть дано топологическое пространство (X, τ), $\mathscr{B}$ – его база, $Y \subset X$ – подмножество в X. Зададим на нем индуцированную топологию τ_Y. Докажите, что множество $\mathscr{B}_Y = \{U \cap Y, U \in \mathscr{B}\}$ является базой топологии τ_Y.

5. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства и X – хаусдорфово. Докажите, что Y – хаусдорфово.

6. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства и Y – хаусдорфово. Докажите, что X – хаусдорфово.

7. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $Y \subset X$ – открытое множество в X и на Y индуцирована топология τ_Y. Докажите, что если множество A открыто в Y, то оно открыто в X.

8. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $Y \subset X$ – замкнутое множество в X и на Y индуцирована топология τ_Y. Докажите, что если множество A замкнуто в Y, то оно замкнуто в X.

Задачи.

1. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Будут ли следующие семейства подмножеств являться топологией на X: а) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, б) $\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}, \{a, b, d\}\}$, в) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ состоит из $\emptyset$ и всевозможных а) бесконечных подмножеств в $\mathbb{R}$, б) конечных подмножеств в $\mathbb{R}$. Является ли τ топологией? Ответ обосновать.

3. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с тривиальной метрикой. Опишите все открытые множества его метрической топологии.

4. Укажите какую-нибудь базу естественной топологии а) на плоскости $\mathbb{R}^2$, б) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и в) в $\mathbb{R}^n$.

5. Укажите какую-нибудь базу дискретной и антидискретной топологии.

6. Пусть $f : X \to Y$ – отображение множество, $M, N \subset Y$. Докажите, что $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$, $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$, $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(N)$.

7. Пусть X – окружность (точка O – ее центр), Y – треугольник (квадрат, пятиугольник), вписанный в окружность X. Любой точке M окружности поставим в соответствие точку M', которая получается при пересечении луча OM с треугольником (квадратом, пятиугольником) Y. Пусть на X топология индуцированная метрической топологией плоскости с метрикой max (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости), а на Y топология индуцирована метрической топологией плоскости с метрикой суммой модулей (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости). Выясните, будет ли заданное отображение непрерывным. Ответ обосновать.

8. Пусть X – окружность с выколотой точкой (точка O – центр этой окружности), Y – прямая. Прямая касается окружности в точке, диаметрально противоположной выколотой точке. Отображение $f : X \to Y$ зададим следующим образом: каждой точке $M \in X$ ставим в соответствие точку $M' \in Y$, которая получается при пересечении луча OM и прямой Y. Пусть на X топология индуцирована метрической топологией метрики суммы модулей, а на Y – топология Зариского. Будет ли отображение f непрерывным? Ответ обосновать.

9. Будет ли хаусдорфовым топологическим пространством $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (метрической топологией метрики максимум, метрической топологией метрики суммы модулей, метрической топологией тривиальной метрики)? Ответ обосновать.

10. Будут ли гомеоморфны два отрезка с топологией, индуцированной естественной топологией прямой? Ответ обосновать.

11. Будут ли гомеоморфны окружность и треугольник (квадрат, шестиугольник, пятиугольник, семиугольник, восьмиугольник и т.д.) с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости? Ответ обосновать.

12. Будут ли гомеоморфны окружность с антидискретной топологией и прямая с топологией Зариского? Ответ обосновать.

13. Будет ли открытым (замкнутым) множеством отрезок (интервал, полуинтервал, множество натуральных чисел, множество рациональных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

14. Будет ли открытым (замкнутым) множеством треугольник (часть плоскости, ограниченная треугольником вместе с ним, часть плоскости, ограниченная треугольником без него, отрезок, интервал, полу-

интервал) на плоскости с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, метрической топологией метрики сумма модулей, метрической топологией метрики максимум)? Ответ обосновать.

15. Найдите внутренность (замыкание, границу) интервала (отрезка, полуинтервала, множества натуральных чисел, множества вещественных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, топологией Зариского). Ответ обосновать.

Коллоквиум. (дата проведения: 24 ноября) Два задания: 1) Беседа по определениям (нужно не только знать определение, но также уметь приводить примеры объектов, подходящих под определение; определять, подходит ли данный объект под определение. Будет минимум три определения)(7баллов) 2) Доказать одно утверждение из ниже следующего списка (8 баллов).

Нужно знать следующие определения: метрическое пространство, метрика, расстояние между точками, каноническая метрика, метрика сумма модулей, метрика максимум, тривиальная метрика, индуцированная метрика, метрическое подпространство, открытый шар, замкнутый шар, сфера, непрерывное отображение в точке метрических пространств, непрерывное отображение метрических пространств, гомеоморфизм метрических пространств, открытое множество в метрическом пространстве, полный прообраз точки, полный прообраз множества, топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, окрестность точки в топологическом пространстве, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, естественная топология на $\mathbb{R}^n$, топология Зариского на прямой, индуцированная топология, топологическое подпространство, база топологии, непрерывное отображение топологических пространств, замкнутое множество, гомеоморфизм топологических пространств, хаусдорфово топологическое пространство, топологических инвариант, гомеоморфные топологические пространства, внутренняя точка множества, внутренность множества, точка прикосновения множества, замыкание множества, граничная точка множества, граница множества, предельная точка, изолированная точка, всюду плотное множество, сепарабельное пространство.

Утверждения для доказательства:

1. Неравенство Коши-Буняковского.

2. Неравенство Минковского.

3. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ будет непрерывным в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0))\, \exists B_\delta(x_0) :\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

4. Докажите, что композиция непрерывных отображений метрических пространств является непрерывным отображением.

5. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве являются открытыми множествами.

6. Докажите, что открытые множества метрических пространств обладают следующими свойствами: 1) пустое множество и само метрическое пространства открыты; 2) объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством; 3) пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.

7. Докажите, что отображение метрических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X.

8. Докажите критерий открытого множества в топологическом пространстве.

9. Докажите, что отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого элемента V из базы топологии на Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии пространства X.

10. Докажите, что свойство хаусдорфовости является топологическим инвариантом.

11. Докажите, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности.

12. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

13. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

14. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

15. Докажите, что $\partial A = cl\,A \setminus int\,A$.

16. Докажите, что граница множества является замкнутым множеством.

17. Докажите, что $f(cl\,A) = cl(f(A))$, $f(int\,A) = int(f(A))$, $f(\partial\,A) = \partial f(A)$.

18. Докажите, что каждая предельная точка множества является его точкой прикосновения.

19. Множество всюду плотно в топологическом пространстве тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым открытым подмножеством этого пространства.

проверочная 9. (дата проведения проверочной: 10 ноября)

определения: внутренняя точка множества, точка прикосновения, граничная точка, внутренность множества, замыкание множества, граница множества, гомеоморфизм, открытое множество, замкнутое множество.

1. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

2. Докажите, что внутренность множества является открытым множеством.

3. Докажите, что граница множества является замкнутым множеством.

4. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда совпадает со своей внутренностью.

5. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда совпадает со своим замыканием.

6. Пусть $f : X \to Y$ гомеоморфизм топологических пространств. Докажите, что F замкнуто тогда и только тогда, когда $f(F)$ замкнуто.

7. Пусть f – гомеоморфизм. Докажите, что $f(cl\,A) = cl(f(A))$, $f(int\,A) = int(f(A))$, $\partial(f(A)) = f(\partial A)$.

проверочная 10. (дата проведения проверочной: 17 ноября)

определения: точка прикосновения, предельная точка, изолированная точка, всюду плотное множество, сепарабельное топологическое пространство.

1. Докажите, что любая предельная точка является точкой прикосновения.

2. Докажите, что если множество A всюду плотно в топологическом пространстве X, то любое непустое открытое множество U пересекается с A.

3. Докажите, что если любое непустое открытое множество U пересекается с A, то A всюду плотно в топологическом пространстве X.

4. Найдите множество предельных (изолированных) точек множества $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ (целых чисел, $\{1, 2, 3\}$) на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной топологией, антидискретной топологией, топологией Зариского). Ответ обосновать.

5. Найдите множество предельных (изолированных точек) множества открытый круг (окружность, замкнутый круг) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (дискретной топологией, антидискретной топологией, метрической топологией метрики сумма модулей и максимум). Ответ обосновать.

6. Будет ли множество целых (натуральных, иррациональных) чисел всюду плотным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной топологией, антидискретной топологией, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

проверочная 11. (дата проведения проверочной: 1 декабря)

определения: несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество, связное множество, непрерывное отображение, гомеоморфизм, полный прообраз точки, полный прообраз множества.

1. Будет ли связным топологическим пространством прямая $\mathbb{R}$ с топологией Зариского (дискретной, антидискретной)? Ответ обосновать.

2. Будет ли множество $(1, 2] \cup \{6\}$ связным на прямой $\mathbb{R}$ с топологией Зариского (дискретной, антидискретной)? Ответ обосновать.

3. Докажите, что если X – несвязно, то существует вещественная, непрерывная, ровно двузначная функция $f : X \to \mathbb{R}$.

4. Докажите, что если существует вещественная, непрерывная, ровно двузначная функция $f : X \to \mathbb{R}$, то X – несвязно.

5. Докажите, что замыкание связного множества связно.

6. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств и X связно. Докажите, что $f(X)$ связно.

7. Докажите, что прямая с естественной топологией связна.

8. Докажите, что окружность на плоскости с естественной топологией связна.

самостоятельная 3. (дата проведения: 8 декабря, 30 минут в начале пары; будет три задания: определение (2 балла), доказать утверждение (4 балла), решить задачу (4балла))

определения: несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество, подотображение, сужение отображения, связное множество, компонента связности, покрытие топологического пространства, покрытие множества, открытое покрытие, подпокрытие, компактное топологическое пространство, компактное множество.

Утверждения для доказательства:

1. Сформулируйте и докажите критерий несвязности топологического пространства.

2. Докажите, что замыкание связного множества связно.

3. Докажите, что подотображение непрерывного отображения непрерывно.

4. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $f : X \to f(X)$.

5. Докажите, что если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение и X связно, то $f(X)$ связно.

6. Докажите, что связность топологического пространства – топологический инвариант.

7. Докажите, что прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией не компактное топологическое пространство.

Задачи:

1. Докажите, что все промежутки на $\mathbb{R}$ с естественной топологией связны.

2. Докажите, что окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией связна.

3. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ с дискретной топологией (топологией Зариского, антидискретной топологией) связной? Ответ обосновать.

4. Будет ли окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с дискретной топологией (антидискретной топологией) связной? Ответ обосновать.

5. Будет ли множество рациональных чисел (целых чисел, натуральных чисел, иррациональных чисел) связным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

6. Будет ли множество $A = (0, 1] \cup [3, 9)$ связным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

7. Докажите, что на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией интервал $(0, 1)$ не гомеоморфен отрезку $[0, 1]$.

8. Докажите, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией окружность и восьмерка не гомеоморфны.

9. Будет ли компактным топологическим пространством прямая $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

10. Будет ли компактным отрезок на прямой $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

проверочная 12. (дата проведения проверочной: 15 декабря)

определения: покрытие топологического пространства, покрытие множества, открытое покрытие, подпокрытие, компактное топологическое пространство, компактное множество.

1. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского) компактной? Ответ обосновать.

2. Докажите, что прямая с естественной топологией не является компактной.

3. Докажите, что отрезок на прямой с естественной топологией компактен.

4. Будет ли множество $(1,2)$ (множество натуральных чисел, рациональных чисел) компактно на прямой $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского) компактной? Ответ обосновать.

Программа зачета (дата проведения: начнем 15, 16 декабря, как только вычитать весь материал; 22, ?? декабря)

Три задания: 1) Беседа по определениям (нужно не только знать определение, но также уметь приводить примеры объектов, подходящих под определение; определять, подходит ли данный объект под определение. Будет минимум три определения)(9баллов) 2) Доказать одно утверждение из ниже следующего списка (10 баллов) 3) Решить задачу аналогичную задаче из ниже следующего списка (6 баллов).

определения: метрического пространства, тривиальной метрики, канонической метрики на $\mathbb{R}^n$, непрерывного в точке отображения метрических пространств, полного прообраза точки, полного прообраза множества, гомеоморфизма метрических пространств, открытого шара, сферы, замкнутого шара, открытого множества в метрическом пространстве, топологическое пространство, топология, открытое множество в топологическом пространстве, база топологии, дискретная топология, антидискретная топология, топология Зариского, индуцированная топология, метрическая топология естественная топология на $\mathbb{R}^n$, непрерывное отображение, замкнутое множество, гомеоморфизм, гомеоморфные пространства, хаусдорфовы топологические пространства, внутренняя точка множества, точка прикосновения множества, граничная точка, несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество, подотображение, сужение отображения, связное множество, компонента связности, покрытие топологического пространства, покрытие множества, открытое покрытие, подпокрытие, компактное топологическое пространство, компактное множество.

Утверждения для доказательства:

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского.

2. Докажите неравенство Минковского.

3. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

4. Докажите, что для отображения $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2}$ является метрикой на $\mathbb{R}^n$.

5. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого в Y множества его полный прообраз открыт в X.

6. Докажите, что $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, тогда и только тогда, когда $\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

7. Докажите, что открытые шары в метрических пространствах являются открытыми множествами.

8. Докажите, что пересечение любых двух открытых метрического пространства множеств является открытым множеством.

9. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств метрического пространства является открытым множеством.

10. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности.

11. Докажите критерий открытого множества в топологическом пространстве.

12. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любого множества $V \in \mathscr{B}_Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

13. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F в Y его полный прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X.

14. Пусть дано топологическое пространство (X,τ), $\mathscr{B}$ – его база, $Y \subset X$ – подмножество в X. Зададим на нем индуцированную топологию τ_Y. Докажите, что множество $\mathscr{B}_Y = \{U \cap Y, U \in \mathscr{B}\}$ является базой топологии τ_Y.

15. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства и X – хаусдорфово. Докажите, что Y – хаусдорфово.

16. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства и Y – хаусдорфово. Докажите, что X – хаусдорфово.

17. Сформулируйте и докажите критерий несвязности топологического пространства.

18. Докажите, что замыкание связного множества связно.

19. Докажите, что связность топологического пространства – топологический инвариант.

20. Докажите, что прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией не компактное топологическое пространство.

21. Докажите, что компактность является топологическим инвариантом.

22. Докажите, что замкнутое подмножество компактного пространства является компактным.

Задачи:

1. Докажите, что если $y \in B_r(x)$, то $B_{r-\rho(x,y)} \subset B_r(x)$.

2. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$, где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Изобразите замкнутый шар с центром в точке $Q(1, 3)$ радиуса 4.

3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой, $Y = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой. Будет ли гомотетия непрерывным отображением? Ответ обосновать.

4. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(x, y) = max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$. Изобразите сферу (открытый шар, замкнутый шар) с центром в точке $Q(1, 2)$ радиуса 1.

5. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ состоит из $\emptyset$ и всевозможных а) бесконечных подмножеств в $\mathbb{R}$, б) конечных подмножеств в $\mathbb{R}$. Является ли τ топологией? Ответ обосновать.

6. Пусть $f : X \to Y$ – отображение множество, $M, N \subset Y$. Докажите, что $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$, $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$, $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(N)$.

7. Пусть X – окружность (точка O – ее центр), Y – треугольник (квадрат, пятиугольник), вписанный в окружность X. Любой точке M окружности поставим в соответствие точку M', которая получается при пересечении луча OM с треугольником (квадратом, пятиугольником) Y. Пусть на X топология индуцированная метрической топологией плоскости с метрикой max (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости), а на Y топология индуцирована метрической топологией плоскости с метрикой суммой модулей (топология индуцированная метрической топологией с тривиальной метрикой, топология индуцированная естественной топологией плоскости). Выясните, будет ли заданное отображение непрерывным. Ответ обосновать.

8. Пусть X – окружность с выколотой точкой (точка O – центр этой окружности), Y – прямая. Прямая касается окружности в точке, диаметрально противоположной выколотой точке. Отображение $f : X \to Y$ зададим следующим образом: каждой точке $M \in X$ ставим в соответствие точку $M' \in Y$, которая получается при пересечении луча OM и прямой Y. Пусть на X топология индуцирована метрической топологией метрики суммы модулей, а на Y – топология Зариского. Будет ли отображение f непрерывным? Ответ обосновать.

9. Будет ли хаусдорфовым топологическим пространством $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (метрической топологией метрики максимум, метрической топологией метрики суммы модулей, метрической топологией тривиальной метрики)? Ответ обосновать.

10. Будут ли гомеоморфны два отрезка с топологией, индуцированной естественной топологией прямой? Ответ обосновать.

11. Будут ли гомеоморфны окружность и треугольник (квадрат, шестиугольник, пятиугольник, семиугольник, восьмиугольник и т.д.) с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости? Ответ обосновать.

12. Будут ли гомеоморфны окружность с антидискретной топологией и прямая с топологией Зариского? Ответ обосновать.

13. Будет ли открытым (замкнутым) множеством отрезок (интервал, полуинтервал, множество на-

туральных чисел, множество рациональных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

14. Будет ли открытым (замкнутым) множеством треугольник (часть плоскости, ограниченная треугольником вместе с ним, часть плоскости, ограниченная треугольником без него, отрезок, интервал, полуинтервал) на плоскости с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, метрической топологией метрики сумма модулей, метрической топологией метрики максимум)? Ответ обосновать.

15. Найдите внутренность (замыкание, границу) интервала (отрезка, полуинтервала, множества натуральных чисел, множества вещественных чисел) на прямой с естественной топологией (дискретной, антидискретной топологией, топологией Зариского). Ответ обосновать.

16. Докажите, что все промежутки на $\mathbb{R}$ с естественной топологией связны.

17. Докажите, что окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией связна.

18. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ с дискретной топологией (топологией Зариского, антидискретной топологией) связной? Ответ обосновать.

19. Будет ли окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с дискретной топологией (антидискретной топологией) связной? Ответ обосновать.

20. Будет ли множество рациональных чисел (целых чисел, натуральных чисел, иррациональных чисел) связным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

21. Будет ли множество $A = (0, 1] \cup [3, 9)$ связным на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией (дискретной, антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

22. Докажите, что на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией интервал $(0, 1)$ не гомеоморфен отрезку $[0, 1]$.

23. Докажите, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией окружность и восьмерка не гомеоморфны.

24. Будет ли компактным топологическим пространством прямая $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.

25. Будет ли компактным отрезок на прямой $\mathbb{R}$ с дискретной (антидискретной, топологией Зариского)? Ответ обосновать.