Классическая дифференциальная геометрия.

30 сентября 2015 г.

Литература.
1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, Том 2, Москва, Просвещение, 1988.
2. Гусева Н.И. и др. Геометрия Том 2, Москва, Академия, 2013.
3. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей, Москва, Физматлит, 2006.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, Москва, УРСС, 2003.
[Г] Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии. Часть 2., Москва, Кнорус, 2012.
[Б] Сборник задач по геометрии под ред. Базылева В.Т., Москва, 1980.
[А] Атанасян, Атанасян Сборник задач по геометрии, Том 2
[С] Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии, Москва, Физматлит, 2007.

Аналитическая геометрия, которую мы изучали на первом курсе, основана на сопоставлении объектам геометрии объектов алгебры. Например, каждой точке пространства сопоставляется упорядоченный набор из трех чисел – координат этой точки, плоскости – линейного уравнения, прямой – системы двух таких уравнений и т.д. Благодаря такому сопоставлению геометрические задачи переводятся на язык алгебры, решаются с помощью ее мощного аппарата, а затем переводятся обратно на язык геометрии. Основная идея здесь привлечь к решению геометрических проблем сильные и действенные алгоритмы алгебры. При этом прогресс заключается не только (и не столько) в том, что старые задачи решаются более совершенным аналитическим методом, сколько в возможности неизмеримо расширить сам круг геометрических проблем по сравнению с проблемами, доступными элементарному анализу.

Дифференциальная геометрия означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата дифференциального исчисления. При этом круг задач, решаемых новыми методами снова расширяется. Основным объектом исследования (классической) дифференциальной геометрии являются кривые и поверхности в трехмерном пространстве. Некоторые виды таких объектов мы уже изучали в аналитической геометрии, например, прямые и линии второго порядка, плоскости и поверхности второго порядка. В курсе дифференциальной геометрии круг изучаемых кривых и поверхностей существенно расширится, но особенности дифференциального исчисления позволят изучать эти объекты только " в малом", то есть в некоторой окрестности каждой своей точки (проще говоря, мы будем изучать кривые и поверхности по кусочкам).

Глава 1. Лекции.

§1.1. Вектор-функция скалярного аргумента и техника дифференцирования.

1.1. Вектор-функция одного скалярного аргумента. Пусть E^3 – трехмерное точечное евклидово пространство (это то пространство, которое нас окружает), V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство (элементами этого пространства являются классы эквиполентных направленных отрезков, которые мы построили в начале курса Аналитическая геометрия). Множества (t_1, t_2), $(t_1, t_2]$, $[t_1, t_2)$, $[t_1, t_2]$, $(t_1, +\infty)$, $[t_1, +\infty)$, $(-\infty, t_2)$, $(-\infty, t_2]$, $(-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ будем называть *промежутками* и обозначать U.

В курсе математического анализа было введено понятие функции одного аргумента как отображения вида $f : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}$ – некоторое подмножество (чаще всего это бывает какой-либо промежуток числовой прямой). Будем называть такие отображения *скалярными функциями.*

Будем называть отображение из промежутка U в пространство V^3 *векторной функцией скалярного аргумента* (или, короче, *вектор-функцией*). Вектор-функция каждому числу $t \in U$ ставит в соответствие однозначно определенный вектор $\vec{r} \in V^3$. Промежуток U называется *областью определения* вектор-функции. Будем записывать вектор-функцию в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $\vec{r}(t)$.

Пример 1.1. Фиксируем в V^3 два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зададим вектор-функцию следующей формулой $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{b}$. Здесь $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$. Областью определения U будет вся вещественная прямая $\mathbb{R}$.

Пусть даны вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и I – интервал, содержащийся в области определения этой вектор-функции. Фиксируем произвольное число $t_0 \in I$. *Пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$ при t стремящимся к t_0 ($t \to t_0$) называется постоянный вектор $\vec{a}$, такой что длина $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$ при $t \to t_0$. Пишут $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Пусть $t_0 \in I$ – произвольное фиксированное число. Возьмем число Δt так, чтобы число $t_0 + \Delta t$ также принадлежало I. Вычислим значение данной вектор-функции в точках t_0 и $t_0 + \Delta t$. В результате мы получим два вектора $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$. Вычислим их разность и обозначим ее $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется *дифференцируемой в точке* $t_0 \in I$, если существует предел $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Он обозначается $\vec{r}\,'(t_0)$ (или $\dot{\vec{r}}(t_0)$ или $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t_0}$) и называется *производной* вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0. Отметим, что производная вектор-функции в точке t_0 – это некоторый фиксированный вектор. Вектор $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t_0)dt$ называется *дифференциалом* вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ *дифференцируема на интервале* I, если она дифференцируема в каждой точке t этого интервала. Тогда в каждой точке интервала I мы можем вычислить производную – для каждой точки это будет вектор. При переходе от одной точки к другой вектор будет меняться. В результате мы получим вектор-функцию, которая называется первой производной вектор-функции $\vec{r}$. Она обозначается $\vec{r}\,'(t)$ (или $\dot{\vec{r}}(t)$ или $\frac{d\vec{r}}{dt}$ или $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$).

Если первая производная $\frac{d\vec{r}}{dt}$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ является дифференцируемой вектор-функцией на интервале I, то для нее также можно вычислить вычислить первую производную. Полученная в результате вектор-функция называется *второй производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$. Обозначение $\vec{r}\,''(t)$ (или $\ddot{\vec{r}}(t)$ или $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$). Другими словами,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

Если вектор-функция $\vec{r}\,''(t)$ является дифференцируемой, то мы можем по тому же принципу определить третью производную и так далее.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ является *гладкой на интервале* I, если она имеет производные любого порядка на этом интервале.

1.2. Координаты вектор-функции. Пусть в пространстве V^3 фиксирован правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда при любом фиксированном $t \in I$ вектор $\vec{r}(t)$ можно разложить по этому базису. Коэффициенты разложения (числа) обозначим $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Если t будет меняться, то будут меняться и коэффициенты разложения. В результате этого мы получим три скалярные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ от переменной t. Они называются *координатами* вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Очевидно, что координаты вектор-функции имеют ту же область определения, что и сама вектор-функция.

Теорема 1.1. *Вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на интервале I тогда и только тогда, когда ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются дифференцируемыми функциями на интервале I. При этом координатами вектор-функции $\vec{r}\,'(t)$ являются скалярные функции $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$.*

Доказательство. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на интервале I. Фиксируем произвольную точку $t_0 \in I$. По определению дифференцируемости вектор-функции имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0).$$

(этот предел существует и его значение равно первой производной вектор-функции). По определению предела вектор-функции получаем

$$\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} - \vec{r}\,'(t_0)\right| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0. \qquad (1.1)$$

Обозначим координаты вектора $\vec{r}\,'(t_0)$ через (a^1, a^2, a^3) и разложим все векторы из выражения (1.1) по базису. Соберем коэффициенты при базисных векторах.

$$\left|\left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - a^1\right)\vec{i} + \left(\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} - a^2\right)\vec{j} + \left(\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} - a^3\right)\vec{k}\right| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

По формуле вычисления длины вектора в ортонормированном базисе получим

$$\left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - a^1\right)^2 + \left(\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} - a^2\right)^2 + \left(\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} - a^3\right)^2 \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Сумма квадратов будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда модуль каждого выражения, стоящего под квадратом будет стремиться к нулю. По определению предела скалярной функции это означает, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \tfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = a^1; \quad \lim_{\Delta t\to 0} \tfrac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t} = a^2; \quad \lim_{\Delta t\to 0} \tfrac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} = a^3.$$

В левых частях этих равенств стоят соответственно производные (определение производной скалярной функции). Таким образом, координаты вектор-функции $\vec{r}(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и

$$x'(t_0) = a^1; \quad y'(t_0) = a^2; \quad z'(t_0) = a^3.$$

Итак, координаты вектора $\vec{r}\,'(t_0)$ – это числа $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$, то есть производные координат вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0. Другими словами,

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}. \tag{1.2}$$

Проводя рассуждения в обратную сторону, получим, что из дифференцируемости координат вектор-функции $\vec{r}(t)$ следует дифференцируемость самой вектор-функции (проведите рассуждения самостоятельно). □

Замечание 1.1. Так как равенство (1.2) верно для любой точки $t_0 \in I$, мы можем обозначить ее через t и получить равенство для вектор-функции $\vec{r}\,'(t)$:

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \tag{1.3}$$

1.3. Техника дифференцирования. Пусть даны две вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и $\vec{r} = \vec{r}_2(t)$ с областью определения U. Их *суммой* будем называть вектор-функцию $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)(t)$, определенную формулой

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t),\ t \in U.$$

Скалярным произведением двух вектор-функций назовем функцию $(\vec{r}_1\vec{r}_2)(t)$, определенную формулой

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t),\ t \in U.$$

В правой части этого равенства стоит скалярное произведение векторов. Будем обозначать через $\vec{r}^2(t)$ скалярный квадрат вектор-функции $\vec{r}(t)$, то есть

$$\vec{r}^2(t) = (\vec{r}\vec{r})(t).$$

Векторным произведением двух вектор-функций называется вектор-функция $[\vec{r}_1, \vec{r}_2](t)$, определенная равенством

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2](t) = [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)],\ t \in U,$$

где квадратные скобки в правой части равенства обозначают векторное произведение векторов геометрического векторного пространства.

Произведением скалярной функции $f(t)$ и вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется вектор-функция $(f\vec{r})(t)$, задаваемая формулой

$$(f\vec{r})(t) = f(t)\vec{r}(t).$$

Правила дифференцирования суммы и двух видов произведения вектор-функций аналогичны правилам дифференцирования функций в математическом анализе.

Теорема 1.2. *Пусть даны две вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и $\vec{r} = \vec{r}_2(t)$ с областью определения U, дифференцируемая функция $f(t)$ с той же областью определения, и дифференцируемая функция $t = t(\tau)$. Тогда*

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1{}'(t) + \vec{r}_2{}'(t)$; 2) $(f(t)\vec{r}_1(t))' = f'(t)\vec{r}_1(t) + f(t)\vec{r}_1{}'(t)$;
3) $(\vec{r}_1\vec{r}_2)'(t) = (\vec{r}_1{}'(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}_2{}'(t)$; 4) $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]'(t) = [\vec{r}_1{}'(t), \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2{}'(t)]$;
5) $\frac{d\vec{r}(t(\tau))}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$

Доказательство. 1) Пусть координаты вектор-функции $\vec{r}_1(t)$ – $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, а координаты вектор-функции $\vec{r}_2(t)$ – $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$. Тогда по определению суммы двух вектор-функций получим

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t) = x_1(t)\vec{i}+y_1(t)\vec{j}+z_1(t)\vec{k}+x_2(t)\vec{i}+y_2(t)\vec{j}+z_2(t)\vec{k} = (x_1(t)+x_2(t))\vec{i}+(y_1(t)+y_2(t))\vec{j}+(z_1(t)+z_2(t))\vec{k}.$$

По (1.3) получим

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'(t) = (x_1(t)+x_2(t))'\vec{i}+(y_1(t)+y_2(t))'\vec{j}+(z_1(t)+z_2(t))'\vec{k} = (x_1'(t)+x_2'(t))\vec{i}+(y_1'(t)+y_2'(t))\vec{j}+(z_1'(t)+z_2'(t))\vec{k}.$$

С другой стороны,

$$\vec{r}_1{}'(t) + \vec{r}_2{}'(t) = x_1'(t)\vec{i} + y_1'\vec{j} + z_1'(t)\vec{k} + x_2'(t)\vec{i} + y_2'(t)\vec{j} + z_2'(t)\vec{k}.$$

Сравнивая крайне правые части двух последних цепочек равенств, получаем требуемую формулу.

2) Вычислим координаты вектор-функции $f(t)\vec{r}_1(t)$.

$$f(t)\vec{r}_1(t) = f(t)x_1(t)\vec{i} + f(t)y_1(t)\vec{j} + f(t)z_1(t)\vec{k}.$$

Применяем (1.3).

$$(f(t)\vec{r}_1(t))' = (f(t)x_1(t))'\vec{i} + (f(t)y_1(t))'(t)\vec{j} + (f(t)z_1(t))'\vec{k} =$$
$$= (f'(t)x_1(t) + f(t)x_1'(t))\vec{i} + (f'(t)y_1(t) + f(t)y_1'(t))\vec{j} + (f'(t)z_1(t) + f(t)z_1'(t))\vec{k} =$$
$$= f'(t)(x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j} + z_1(t)\vec{k}) + f(t)(x_1'(t)\vec{i} + y_1'(t)\vec{j} + z_1'(t)\vec{k}) = f'(t)\vec{r}_1(t) + f(t)\vec{r_1}'(t).$$

3) Доказательство проводится аналогичным образом. Вычислим функцию $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)(t)$, используя формулу для вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе.

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t).$$

Тогда

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)'(t) = (x_1(t)x_2(t)+y_1(t)y_2(t)+z_1(t)z_2(t))' = x_1'(t)x_2(t)+x_1(t)x_2'(t)+y_1'(t)y_2(t)+y_1(t)y_2'(t)+z_1'(t)z_2(t)+z_1(t)z_2'(t) =$$
$$= (x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t) + z_1'(t)z_2(t)) + (x_1(t)x_2'(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1(t)z_2'(t)) = \vec{r_1}'(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\vec{r_2}'(t).$$

4) Самое громоздкое доказательство из всех четырех, но по сути такое же. Напомним, что для двух векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных своими координатами относительно правого ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ координаты векторного произведения векторов вычисляются по формуле

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - b_3a_1)\vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k}.$$

Применим эту формулу для вектор-функций $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$.

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2](t) = [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = (y_1(t)z_2(t) - z_1(t)y_2(t))\vec{i} + (z_1(t)x_2(t) - z_2(t)x_1(t))\vec{j} + (x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t))\vec{k}$$

По (1.3) имеем

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2]'(t) = (y_1(t)z_2(t) - z_1(t)y_2(t))'\vec{i} + (z_1(t)x_2(t) - z_2(t)x_1(t))'\vec{j} + (x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t))'\vec{k} =$$
$$= (y_1'(t)z_2(t) + y_1(t)z_2'(t) - z_1'(t)y_2(t) - z_1(t)y_2'(t))\vec{i} + (z_1'(t)x_2(t) + z_1(t)x_2'(t) - z_2'(t)x_1(t) - z_2(t)x_1'(t))\vec{j}+$$
$$+ (x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - x_2'(t)y_1(t) - x_2(t)y_1'(t))\vec{k}.$$

С другой стороны,

$$[\vec{r_1}'(t), \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), \vec{r_2}'] = (y_1'(t)z_2(t) - z_1'(t)y_2(t))\vec{i} + (z_1'(t)x_2(t) - x_1'(t)z_2(t))\vec{j} + (x_1'(t)y_2(t) - y_1'(t)x_2(t))\vec{k})+$$
$$+ (y_1(t)z_2'(t) - z_1(t)y_2'(t))\vec{i} + (z_1(t)x_2'(t) - x_1(t)z_2'(t))\vec{j} + (x_1(t)y_2'(t) - y_1(t)x_2'(t))\vec{k}).$$

Сравнивая крайне правые части двух последних цепочек равенств, получаем требуемую формулу.

5) Правило дифференцирования сложной вектор-функции доказывается аналогично предыдущим, используя переход к координатам (докажите самостоятельно). □

1.4. Вспомогательные леммы. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, определенная на промежутке U. Определим отображение $|\vec{r}(t)| : U \to \mathbb{R}$, которое каждому значению $t \in U$ ставит в соответствие длину вектора $\vec{r}(t)$. Это обычная функция переменной t. Она называется *длиной* вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *имеет постоянную длину*, если функция $|\vec{r}(t)|$ является константой.

Лемма 1.1. *(о векторе постоянной длины). Пусть непрерывная вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на промежутке U и дифференцируема на любом интервале I из U. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ имеет постоянную длину на любом интервале I из U тогда и только тогда, когда для любого $t \in I$ векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть $|\vec{r}(t)| = a$, где a – фиксированное положительное число, $t \in I$. Возведем обе части этого равенства в квадрат $|\vec{r}(t)|^2 = a^2$ и воспользуемся свойством скалярного произведения векторов (квадрат длины вектора равен скалярному квадрату этого вектора)

$$\vec{r}(t)\vec{r}(t) = a^2.$$

Продифференцируем обе части этого равенства с учетом правил дифференцирования вектор-функции.

$$\vec{r}\,'(t)\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 0.$$

В силу коммутативности скалярного произведения получим $\vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 0$, то есть для каждой $t \in I$ скалярное произведение векторов $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ равно нулю. Следовательно, для каждого $t \in I$ векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны.

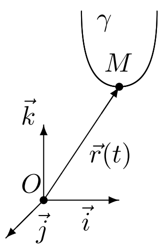
Обратно, пусть для каждого $t \in I$ векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны, то есть их скалярное произведение равно нулю для любого $t \in I$ $\vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 0$. Вычислим производную функции $|\vec{r}(t)|^2$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{r}(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 2\vec{r}(t)\vec{r}\,'(t) = 0.$$

Таким образом, производная функции $|\vec{r}(t)|^2$ на интервале I равна нулю, а значит эта функция является константой. □

§1.2. Гладкая кривая. Касательная.

2.1. Кривые и гладкие кривые. Пусть дана вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t пробегает некоторый интервал I из области определения вектор-функции $\vec{r}(t)$.



Фиксируем в евклидовом пространстве E^3 произвольную точку O. Тогда вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ задает отображение $\gamma : I \to E^3$ по следующему алгоритму. Для каждого $t \in I$ вычисляем вектор $\vec{r}(t)$ и откладываем его представитель от точки O. Конец этого представителя обозначим через M (это точка из E^3). Тогда положим $\gamma(t) = M$. Отображение γ называется *параметризованной кривой* (или *кривой* или *линией*). Его образ $\gamma(I)$ (это множество точек из E^3) также будем называть кривой или линией и обозначать той же буквой γ. Равенство $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется *векторным параметрическим уравнением кривой* γ.

Рассмотрим правую прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и кривую γ. Кривая – это множество точек, а множества точек (при наличии системы координат) мы умеем задавать с помощью уравнений (и/или неравенств). Постараемся получить уравнения для кривой γ. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная фиксированная точка евклидова пространства E^3. Она принадлежит кривой γ тогда и только тогда, когда радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M совпадает со значением вектор-функции $\vec{r}(t)$ при некотором значении параметра t, то есть $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. Разложим векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}(t)$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (здесь мы использовали определение координат точки относительно системы координат).

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Так как координаты вектора относительно базиса определены однозначно, получаем

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \tag{1.4}$$

Теперь отпускаем точку M (она бегает по пространству, рисуя кривую). В правых частях уравнений (1.4) значения параметра t меняются, а функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вычисляют координаты x, y, z точки M. Уравнения (1.4) называются *параметрическими уравнениями кривой* γ. Буква t называется *параметром*.

Пример 1.2. Пусть кривая γ задана вектор-функцией $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{p}t$, где $\vec{r}_0$ и $\vec{p} \neq \vec{0}$ – некоторые постоянные векторы (они не изменяются при изменении t), t пробегает все значения из $\mathbb{R}$. Выясним, что за множество точек представляет из себя кривая γ. Для этого запишем параметрические уравнения этой кривой. Обозначим координаты векторов $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Тогда

$$\vec{r}(t) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + (p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k})t = (x_0 + p_1 t)\vec{i} + (y_0 + p_2 t)\vec{j} + (z_0 + p_3 t)\vec{k}.$$

Используя этот результат, мы видим, что формулы (1.4) примут в нашем случае вид

$$x = x_0 + p_1 t; \quad y = y_0 + p_2 t; \quad z = z_0 + p_3 t.$$

Это параметрические уравнения прямой. Итак, вектор-функция $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{p}t$ задает прямую.

Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Будем говорить, что кривая γ является *гладкой* (на интервале I), если, во-первых, вектор-функция $\vec{r}$ гладкая (на интервале I) и, во-вторых, вектор-функция $\vec{r}\,'(t)$ отлична от нуля для каждого $t \in I$ (другими словами, первая производная вектор-функции $\vec{r}$ нигде на I не обращается в нуль).

Используя определение координат вектор-функции, получим

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}; \quad \vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Тогда, используя определение производной вектор-функции, получим, что первое условие гладкости кривой примет вид: координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ имеют производные любого порядка на интервале I; а второе условие – вид: производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ одновременно не обращаются в нуль ни при одном значении $t \in I$ (другими словами, ранг матрицы $(x'(t), y'(t), z'(t))$ равен 1).

Пример 1.3. Прямая, заданная векторным параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{p}t$ (см. пример 1.2) является гладкой кривой.

В самом деле, проверим выполнение условий из определения гладкой кривой. Нам нужно сначала найти первую производную вектор-функции $\vec{r}(t)$. Она представляет из себя сумму постоянной вектор-функции $\vec{r}_0$ и произведения постоянной вектор-функции $\vec{p}$ на обычную функцию $f(t) = t$. Согласно примеру **??** первая производная постоянной функции равна $\vec{0}$. Производную произведения функции на вектор-функцию вычисляется по теореме 1.2. Получаем

$$\vec{r}\,'(t) = (\vec{r}_0)' + (t)'\vec{p} + t(\vec{p})' = \vec{p}.$$

Так как $\vec{p} \neq \vec{0}$, второе условие из определения гладкой кривой выполняется. Вторая производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ равна $\vec{0}$

$$\vec{r}\,''(t) = (\vec{r}\,'(t))' = (\vec{p})' = \vec{0}.$$

Дальнейшее дифференцирование вектор-функции $\vec{r}(t)$ всегда будет давать $\vec{0}$, то есть вектор-функция имеет производные любого порядка, следовательно, первое условие гладкой кривой выполняется.

Пример 1.4. Зададим кривую γ параметрическими уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$, где R – некоторое положительное число, $t \in [0, 2\pi)$. Покажем, что это гладкая кривая.

В самом деле, из курса математического анализа мы знаем, что функции $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$ можно продифференцировать любое число раз. Находим первые производные (мы помним, что переменная у нас t и дифференцируем мы по этой переменной): $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = R\cos t$, $z'(t) = 0$. Предположим, что все три производные одновременно равны нулю. Тогда должно существовать такое число t, что $\cos t = 0$ и одновременно $\sin t = 0$. Как мы знаем, такого числа не существует, следовательно, первые производные x', y', z' не обращаются в нуль одновременно. Итак, мы получаем, что выполняются оба условия из определения гладкой кривой (здесь мы работаем с определением гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями) выполняются, следовательно, γ – гладкая кривая.

Попутно возникает интересный вопрос: что это за кривая? Может она нам знакома? Посмотрим внимательно на ее параметрические уравнения. Третье равенство $z = 0$ говорит о том, что все третьи координаты точек этой кривой нулевые, то есть кривая γ лежит в координатной плоскости Oxy. В системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ плоскости Oxy кривая γ задается уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Возведем оба уравнения в квадрат и сложим: $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$. Легко видеть, что верно и обратное: любая точка плоскости Oxy, координаты которой удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = R^2$ будут удовлетворять и уравнениям $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Следовательно, кривая γ задается уравнением $x^2 + y^2 = R^2$ – это окружность.

Второе условие из определения гладкой кривой ($\vec{r}\,'(t) \neq 0$ для любой $t \in I$) может нарушаться для каких-то значений t. Если таких точек не очень много (не более чем счетное множество), то такие кривые (они уже не будут называться гладкими) все равно можно изучать методами дифференциальной геометрии, разделяя их на „куски“, которые будут являться гладкими кривыми. Для этого мы разрежем исходную кривую в точках, в которых производная $\vec{r}\,'(t)$ обращается в нуль. Такие точки кривой будем называть *особыми*, а кривую, имеющую не более чем счетное множество особых точек будем называть *кусочно гладкой*.

Пример 1.5. Рассмотрим кривую γ, заданную параметрическими уравнениями

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad z = 0, \tag{1.5}$$

где $t \in \mathbb{R}$, a – положительная константа. Такая кривая называется *циклоидой*. Из параметрических уравнений мы видим, что циклоида лежит в координатной плоскости Oxy. Ее можно получить следующим образом: нарисуем краской точку на колесе и покатим колесо с постоянной скоростью по прямой дороге. Тогда нарисованная точка нарисует циклоиду.

Покажем, что циклоида является кусочно гладкой кривой. Из курса математического анализа мы знаем, что функции, стоящие в правых частях формул (1.5) бесконечно дифференцируемы. Вычислим первые производные этих функций:

$$x' = a(1 - \cos t); \quad y' = a\sin t; \quad z' = 0.$$

Найдем t, при которых все три производные одновременно равны нулю:

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, мы получили, что при $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ есть особые точки. Так как множество $\mathbb{Z}$ счетно, множество особых точек циклоиды счетно, следовательно, она является кусочно гладкой кривой.

2.2. Замена параметра. Натуральный параметр. Одну и ту же гладкую линию γ можно задать с помощью разных векторных параметрических уравнений. Например, прямую ℓ, проходящую через точку $(0,0,0)$ параллельно вектору $(1,1,1)$ можно задать с помощью уравнения

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\ \vec{r}(t)=t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k},\ t\in\mathbb{R}.$$

Для той же самой прямой ℓ можно получить другое векторное параметрическое уравнение. Обозначим через $t=1-\tau$. Тогда получим векторное параметрическое уравнение

$$\vec{r}=\vec{R}(\tau),\ \vec{R}(\tau)=(1-\tau)\vec{i}+(1-\tau)\vec{j}+(1-\tau)\vec{k},\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Это та же самая прямая (но с точки зрения геометрии она теперь задана точкой $(1,1,1)$ и направляющим вектором $(-1,-1,-1)$). Будем говорить, что мы получили второе векторное параметрическое уравнение прямой ℓ заменой параметра t на параметр τ. По сути мы записали зависимость старого параметра t через новый параметр τ (то есть выражение вида $t=\varphi(\tau)$) и подставили это выражение в первое векторное параметрическое уравнение.

Выясним, какие требования на функцию φ нужно наложить в общем случае, чтобы второе векторное уравнение задавало ту же гладкую кривую. Пусть гладкая кривая γ задана $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in U_1$ и пусть $t=\varphi(\tau)$, $\tau\in U_2$. Обозначим через $\vec{R}(\tau)=\vec{r}(\varphi(\tau))$.

Во-первых, заметим, что параметры t и τ равноправны и мы должны иметь возможность не только переходить от t к τ, но и наоборот. Другими словами, нужно иметь возможность выражать τ через t. Как мы знаем из курса математического анализа, для этого достаточно потребовать от функции $\varphi(\tau)$, чтобы она была строго монотонной (строго возрастающей или строго убывающей).

Во-вторых, уравнение $\vec{r}=\vec{R}(\tau)$ должно задавать гладкую кривую, а значит вектор-функция $\vec{R}(\tau)$ должна иметь производные всех порядков. Так как $\vec{R}(\tau)=\vec{r}(\varphi(t))$, по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau},$$

то есть функция $\varphi(\tau)$ должна дифференцироваться по τ хотя бы один раз. Будем вычислять производные дальше по правилам дифференцирования сложной функции и дифференцирования произведения вектор-функции и скалярной функции.

$$\frac{d^2\vec{R}(\tau)}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}.$$

Мы видим, что нам нужно уметь дифференцировать функцию $\varphi(\tau)$ дважды. Вычисляя производные для $\vec{R}(\tau)$ дальше мы будем получать производные следующих порядков для функции $\varphi(\tau)$. Таким образом, функция $\varphi(\tau)$ должна иметь производные всех порядков, то есть должна быть *гладкой*.

В-третьих, $\frac{d\vec{R}}{d\tau}\neq\vec{0}$ для всех $\tau\in U_2$. Так как

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\equiv\frac{dx}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\vec{k}\neq\vec{0},$$

получаем, что $\frac{d\varphi}{d\tau}\neq 0$ для всех $\tau\in U_2$.

Итак, собираем полученные требования вместе:

1) функция $t=\varphi(\tau)$ должна отображать U_2 на все U_1 строго монотонно;
2) функция $t=\varphi(\tau)$ должна быть гладкой (то есть иметь производные на всех интервалах из U_2);
3) $\frac{d\varphi}{d\tau}\neq 0$ для всех τ из любого интервала, содержащегося в U_2.

Если все три условия выполняются, то будем говорить, что функция $\varphi(\tau)$ *осуществляет в векторном уравнении кривой замену параметра.*

Пример 1.6. Пусть гладкая кривая γ задана векторным уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in U$ (или что эквивалентно параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $t\in U$). Фиксируем на кривой γ точку со значением параметра t_0 и зададим функцию

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

Это интеграл с переменным верхним пределом и он вычисляет длину дуги кривой от точки со значением параметра t_0 до точки со значением параметра t. Таким образом, мы получаем функцию $s=s(t)$. Это строго возрастающая функция (длина дуги растет), она имеет производные всех порядков по t (правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и гладкость кривой γ), и $\frac{ds}{dt}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\neq 0$ (последнее условие в определении гладкой кривой). Итак, функция $s=s(t)$ может служить заменой параметра t на параметр s. Параметр s называется *натуральным параметром.* Также говорят, что кривая задана в *естественной параметризации.*

Натуральный параметр очень удобен в вычислениях (это мы увидим в дальнейших рассуждениях). А пока отметим одно его замечательное свойство: скалярных квадрат первой производной вектор-функции $\vec{r}(s)$ по натуральному параметру всегда равен 1, то есть

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = 1, \forall s.$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции и обратной функции получим

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = \frac{(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t)) + (z'(t))^2})^2}{(x'(t))^2 + (y'(t)) + (z'(t))^2} = 1$$

Пример 1.7. Пусть дана кривая γ параметрическими уравнениями $x = t$, $y = t^2$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Это парабола (почему?) Пусть задана функция $t = \tau^3 + \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Выясним, будет ли эта функция заменой параметра. Из курса математического анализа мы знаем, что указанная функция имеет производные любого порядка. Кроме того,

$$\frac{dt}{d\tau} = 3\tau^2 + 1 > 0, \forall \tau \in \mathbb{R},$$

следовательно, такая функция является допустимой заменой параметра. В новой параметризации параметрические уравнения параболы будут иметь вид

$$x = \tau^3 + \tau; \quad y = (\tau^3 + \tau)^2; \quad z = 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим функцию $t = \tau^2$, $\tau \in \mathbb{R}$. Эта функция не является строго монотонной, а значит, не задает замену параметра.

2.3. Неявные уравнения кривой. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что прямая в пространстве E^3 задается не только параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + p_1 t; \quad y = y_0 + p_2 t; \quad z = z_0 + p_3 t,$$

но еще и общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases},$$

где A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$ – это вещественные числа, причем A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2$ одновременно не равны нулю. Эти уравнения мы называли общими уравнениями прямой в пространстве. В связи с этим возникает следующая идея: записать аналогичную систему уравнений, но в их левых частях вместо линейных функций поставить какие-то произвольные функции от переменных x, y, z, то есть

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Эта система задаст какое-то множество G точек в E^3 (возможно пустое). Какие требования нужно наложить на функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$, чтобы множество G было гладкой кривой?

Из курса математического анализа нам известна

Теорема 1.3. *(о неявной функции) Пусть множество $G \subset E^3$ задано системой уравнений (1.6), точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная фиксированная точка множества G, функции F, Φ – гладкие (то есть они имеют частные производные любого порядка по каждой переменной x, y, z). Если в точке M_0 определитель*

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.7}$$

где F_y, F_z, Φ_y, Φ_z – первые частные производные по соответствующим аргументам, то существует окрестность $U(M_0)$, в которой систему уравнений (1.6) можно разрешить относительно y и z (то есть выразить $y = f(x)$, $z = g(x)$ и $F(x, f(x), g(x)) = 0$, $\Phi(x, f(x), g(x)) = 0$). При этом функции $f(x)$ и $g(x)$ будут гладкими.

Из теоремы о неявной функции следует, что множество $G \cap U(M_0)$ будет задаваться параметрическими уравнениями $x = t$, $y = f(t)$, $z = g(t)$, где t пробегает некоторый интервал I и все функции, стоящие в левых частях уравнений, являются гладкими. Кроме того, $x' = 1 \neq 0$. По определению гладкой кривой это означает, что множество $G \cap U(M_0)$ является гладкой кривой.

Итак, если мы потребуем от системы (1.6) гладкости функций F и Φ, а также выполнение условия (1.7) в некоторой точке M_0 множества G, то вокруг этой точки возникнет пространственная окрестность $U(M_0)$, которая вырежет из множества G гладкую кривую. Уравнения (1.6) будем называть *неявными уравнениями* гладкой кривой $G \cap U(M_0)$.

Замечание 1.2. Если в точке M_0 не равны нулю определители

$$\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ \Phi_x & \Phi_z \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

то гладкая кривая $G \cap U(M_0)$ будет задаваться соответственно параметрическими уравнениями

$$x = f(t),\, y = t,\, z = g(t); \quad x = f(t),\, y = g(t),\, z = t.$$

Отличие от нуля хотя бы одного из указанных определителей равносильно тому, что матрица

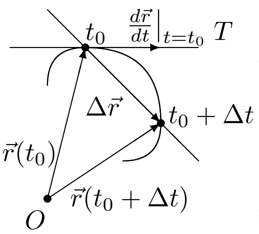
$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

имеет ранг 2. Если нас не интересует конкретный вид параметрических уравнений кривой, а только факт ее гладкости, то мы можем пользоваться такой теоремой, которая вытекает из теоремы о неявной функции

Теорема 1.4. *Пусть множество $G \subset E^3$ задано системой уравнений (1.6), точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная фиксированная точка множества G, функции F, Φ – гладкие (то есть они имеют частные производные любого порядка по каждой переменной). Если ранг матрицы (1.8) равен двум в точке M_0, то существует окрестность $U(M_0)$, такая что множество $G \cap U(M_0)$ является гладкой кривой.*

2.4. Касательная. Договоримся далее рассматривать либо гладкие кривые, либо части кусочно гладких кривых, являющиеся гладкими кривыми.

Пусть задана гладкая кривая γ векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$.



Фиксируем на кривой γ произвольную точку M_0. Пусть ей соответствует значение параметра t_0. Вблизи точки M_0 (стоящей на одном месте) двигается точка M. Пусть ей соответствует значение параметра $t_0 + \Delta t$ (Δt меняется – точка M двигается). Обозначим

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

Мы видим, что $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, то есть векторы $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллельны. Пусть теперь $\Delta t \to 0$, то есть $M \to M_0$. Тогда секущая M_0M стремится к своему предельному положению MT. Предельное положение секущей называется касательной к кривой γ, то есть прямая M_0T есть касательной к кривой γ точке M_0.
При этом $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$ (то есть вычисляем производную $\vec{r}(t)$ по t и вместо t подставляем значение t_0. Другими словами, вычисляем значение производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$ в точке со значением параметра t_0), следовательно, $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0} \| M_0T$. Итак, вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$ (значение производной вектор-функции в точке со значением параметра t_0) является направляющим вектором касательной M_0T к кривой γ в точке M_0.

Как мы знаем, одна и та же кривая может задаваться разными векторными параметрическими уравнениями. Пусть та же самая кривая γ задается так: $\vec{r} = \vec{R}(\tau)$. В такой параметризации точке M_0 (в которой мы определяем касательную к γ) соответствует какое-то значение параметра τ_0 и направляющий вектор касательной будет вычисляться так: $\frac{d\vec{R}}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}$. Возникает вопрос: если мы проведем через точку M_0 прямую параллельную вектору $\frac{d\vec{R}}{d\tau}\Big|_{t=t_0}$, будет ли она совпадать с прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$? Чтобы эти две прямые совпадали, надо, чтобы векторы $\frac{d\vec{R}}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$ были бы коллинеарны. Проверим, что это так. Так как оба векторных уравнения задают одну и ту же кривую, их параметры связаны зависимостью $t = \varphi(\tau)$ и $\vec{r}(\varphi(\tau)) = \vec{R}(\tau)$ для всех τ. Продифференцируем это равенство по τ (используем правило дифференцирования сложной функции):

$$\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

и вычислим значение обеих частей равенств при $\tau = \tau_0$:

$$\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0} = \frac{\vec{r}(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi(\tau_0)=t_0} \frac{d\varphi}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0}.$$

Мы видим, что в точке M_0 векторы $\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}$ и $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}$ отличаются на число $\frac{d\varphi}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}$. Другими словами, мы замене параметризации в векторном параметрическом уравнении мы получили ту же самую касательную. В этом случае говорят, что понятие касательной в точке M_0 гладкой кривой не зависит от выбора параметризации (то есть какое бы векторное параметрическое уравнение кривой мы не взяли, мы всегда будем получать одну и ту же касательную). Тем самым мы доказали теорему.

Теорема 1.5. *В каждой точке M_0 гладкой кривой γ существует единственная касательная, определяемая точкой M_0 и направляющим вектором $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$.*

Пример 1.8. Пусть дана кривая γ: $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$, a, b – некоторые положительные константы, $t \in [0, 2\pi]$ (если кто не узнал, это эллипс). Напишем уравнение касательной в точке M_0 со значением параметра t_0.

Начнем с того, что запишем кроме векторного параметрического уравнения кривой γ еще и параметрические уравнения:

$$x = a\cos t;\ y = b\sin t;\ z = 0;\ t \in [0, 2\pi].$$

По доказанной теореме для получения уравнения касательной нужно, во-первых, координаты точки M_0, в которой проводится касательная, и, во-вторых, координаты направляющего вектора. Точка $M_0 \in \gamma$ и ей соответствует значение параметра t_0. Подставляем t_0 в параметрические уравнения: $M_0(a\cos t_0, b\sin t_0, 0)$. Чтобы найти координаты направляющего вектора касательной, продифференцируем векторное параметрическое уравнение γ:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + b\cos t\vec{j}.$$

Подставим в него значение параметра t_0:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} = -a\sin t_0\vec{i} + b\cos t_0\vec{j}$$

и считываем координаты направляющего вектора касательной $(-a\sin t_0, b\cos t_0, 0)$. Запишем канонические уравнения касательной к кривой γ, используя общую формулу

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3},$$

получим

$$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0};\ z = 0.$$

Или в более удобном виде, заменяя $a\cos t_0 = x_0$, $b\sin t_0 = y_0$:

$$\begin{cases} xx_0b^2 + yy_0a^2 - a^2b^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Углом между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

В курсе аналитической геометрии была выведена формула для вычисления угла между прямыми: пусть заданы две прямые ℓ_1 (точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}$) и прямая ℓ_2 (точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{q}$). Угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\ell_1, \ell_2) = \left|\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\right|.$$

Благодаря модулю, нам не нужно думать, на какие направляющие векторы прямых мы попали, формула всегда считает не тупой угол, образованный данными прямыми.

Пусть даны гладкие кривые γ_1: $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и γ_2: $\vec{r} = \vec{r}_2(\tau)$. Пусть они пересекаются в точке M_0. На первой кривой этой точке соответствует значение параметра t_0, а на второй соответствует τ_0. Выведем формулу для вычисления угла между кривыми γ_1 и γ_2 в этой точке. Тогда угол между кривыми будет вычисляться по формуле

$$\cos\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \left|\frac{\frac{d\vec{r}_1}{dt}\big|_{t=t_0} \frac{d\vec{r}_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{dt}\big|_{t=t_0}\right| \left|\frac{d\vec{r}_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}\right|}\right|.$$

Эта формула еще упрощается, если кривые γ_1 и γ_2 заданы с помощью натуральной параметризации, то есть $\gamma_1 : \vec{r} = \vec{r}_1(s_1)$, $\gamma_2 : \vec{r} = \vec{r}_2(s_2)$. Как мы доказывали выше, в этом случае длины направляющих векторов касательных равны 1 и выведенной формуле исчезает знаменатель.

§1.3. Кривизна кривой. Репер Френе.

3.1. Кривизна кривой. Пусть гладкая кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$, где s – натуральный параметр. Как мы видели выше вектор

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

является, во-первых, направляющим вектором касательной, и, во-вторых, единичным для любого значения $s \in I$. Вообще говоря, при движении вдоль кривой γ этот вектор меняется, поэтому мы написали ему аргумент s. Вектор $\vec{\tau}(s)$ для каждого $s \in I$ называется *касательным вектором.*

Найдем вторую производную вектор-функции $\vec{r}(s)$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Для каждого значения $s \in I$ опять получим вектор, он будет меняться при изменении движении вдоль кривой γ. Полученный вектор называется *вектором кривизны* кривой γ в точке со значением параметра s. Его длина $\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$ называется *кривизной* кривой γ в точке со значением параметра s. Если в этой точке вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ отличен от нуль-вектора, то его можно представить в виде

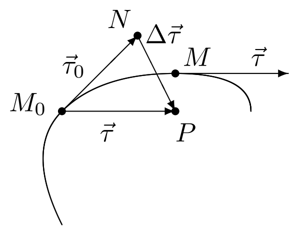
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s), \tag{1.9}$$

где $k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$, $\vec{\nu}(s)$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором кривизны (орт вектора кривизны). Вектор $\vec{\nu}(s)$ называется *ортом главной нормали* кривой γ в точке M (со значением параметра s). Прямая, проходящая через точку M параллельно орту главной нормали, называется *главной нормалью кривой* в точке M.

Выясним геометрический смысл кривизны кривой.

Теорема 1.6. *Кривизна гладкой кривой γ в точке M_0 есть предел, к которому стремится отношение угла между касательными в точках M_0 и M к γ к длине дуги M_0M, когда точка M, оставаясь на γ, стремится к M_0.*

Решение. Пусть задана гладкая кривая γ векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – натуральный параметр.



Точка M_0 (ей соответствует значение натурального параметра s_0) стоит на месте. Для нее определен касательный вектор $\vec{\tau}(s_0)$ (для краткости он обозначен через $\vec{\tau}_0$). Точка M двигается по кривой γ. Ее параметр меняется: от точки M_0 (значение параметра s_0) мы должны отъехать по дуге кривой до точки M на Δs (Δs будет положительной величиной, если мы движемся в сторону увеличения параметра s и отрицательной в противном случае). Тогда у точки M будет значение параметра $s_0 + \Delta s$. Для этой точки также определен касательный вектор $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$, который для краткости мы обозначим $\vec{\tau}$. Отложим его представитель от точки M_0. В результате получим равнобедренный треугольник (так как параметр натуральный, векторы $\vec{\tau}_0$ и $\vec{\tau}$ единичные) M_0NP. Во введенных обозначениях нам нужно доказать, что

$$k(s_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{|\Delta s|}.$$

Отметим, что $|\Delta s|$ будет как раз длиной дуги M_0M в силу определения натурального параметра. Из равнобедренного треугольника M_0NP получим

$$NP = 2M_0N \sin\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2} = 2\sin\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2} = |\vec{\tau} - \vec{\tau}_0| = |\Delta\vec{\tau}|. \tag{1.10}$$

Имеем

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}}{\sin\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}}{|\Delta s|} =$$

Первый предел, согласно первому замечательному пределу, равен 1. Второй множитель с учетом (1.10) приобретает вид

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta s|} = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right| =$$

Приращение вектор-функции к приращению аргумента – это производная вектор-функции в точке со значением параметра s_0 (см. § 1.1.).

$$= \left|\left.\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|_{s=s_0}\right| = \left|\left.\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|_{s=s_0}\right| = k(s_0).$$

Тем самым теорема доказана. □

Следствие 1.1. Гладкая кривая γ является прямой или ее частью тогда и только тогда, когда во всех ее точках кривизна равна нулю.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть дана прямая γ. Зададим ее с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{p}s$, где $\vec{p}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор некоторой фиксированной точки этой прямой, s – натуральный параметр. Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p};\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{0}.$$

Откуда мы видим, что во всех точках прямой γ кривизна равна нулю.

$\Leftarrow$). Пусть дана гладкая кривая γ, у которой во всех точках кривизна равна нулю. Зададим кривую γ параметрическими уравнениями в естественной параметризации:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s).$$

Мы знаем, что кривизна $k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2} = 0$. Тогда

$$x''(s) = 0,\ y''(s) = 0,\ z''(s) = 0.$$

Зададимся вопросом: как должны выглядеть функции $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$, чтобы их производные были бы нулевыми? Они должны быть константами (причем эти константы могут быть произвольными). Обозначим это так:

$$x'(s) = x_0,\ y'(s) = y_0,\ z'(s) = z_0.$$

Опять задаемся вопросом: какими должны быть функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, чтобы их производные были бы константами? Эти функции должны быть линейны:

$$x = p_1 s + x_0,\ y = p_2 s + y_0,\ z = p_3 s + z_0,$$

где $p_1, p_2, p_3; x_0, y_0, z_0$ – произвольные константы. Если все три числа p_1, p_2, p_3 равны нулю, то такие уравнения не будут задавать гладкую кривую (этот случай выбрасываем). Все оставшиеся случаи задают прямую (если параметр s принимает всевозможные значения и часть прямой, если его значения ограничены какими-либо условиями). $\square$

Замечание 1.3. Точки линии, в которых кривизна равна нулю, называются *точками спрямления.* например, все точки прямой являются точками спрямления. Такие точки мы будем исключать из дальнейшего рассмотрения.

Замечание 1.4. Еще раз посмотрим на рисунок к теореме 1.6 и подумаем, куда будет направлен вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в точке M_0. Из доказательства теоремы мы видим, что в точке M_0

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}.$$

Величина Δs – это число, становящееся все меньше и меньше, следовательно, вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ направлен „примерно также как“ вектор $\Delta\vec{\tau}$. А он направлен „внутрь “ кривой.

3.2. Соприкасающаяся плоскость. Пусть кривая γ задана уравнением относительно натурального параметра $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$ и все точки этой кривой не являются точками спрямления.

Соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 параллельно векторам $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке.

Замечание 1.5. Для того чтобы в точке M_0 соприкасающаяся плоскость была определена однозначно необходимо и достаточно чтобы векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке были не параллельны.

Покажем, что эти векторы параллельны тогда и только тогда, когда кривизна $k(s)$ линии γ в этой точке равна нулю. Другими словами, соприкасающаяся плоскость не определяется только в точках спрямления (поэтому мы их и выбросили из дальнейшего рассмотрения).

Пусть $k(s) = 0$ в точке M_0. Тогда вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке равен нулю (см. формулу (1.9)). Так как нуль-вектор по определению параллелен любому вектору, векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ параллельны.

Обратно, пусть векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ параллельны. Так как кривая задана относительно натурального параметра, вектор-функция $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет постоянную длину (равна 1). Тогда по лемме 1.1 она при каждом значении параметра s перпендикулярна своей производной, то есть для любого значения параметра s вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ перпендикулярен вектору $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Мы получаем, что в точке M_0 два вектора одновременно параллельны и перпендикулярны. При этом вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет длину 1, то есть не нулевой. Следовательно, нулевым должен быть второй вектор, то есть вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Тогда по формуле (1.9) мы получаем, что в точке M_0 кривизна $k(s) = 0$.

Замечание 1.6. Кривые далеко не всегда задаются относительно натурального параметра, переход от произвольного параметра к натуральному часто весьма трудоемок, а уравнение соприкасающейся плоскости все-равно писать нужно. Оказывается, что если кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$ с помощью произвольного параметра, то векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ в точке M_0 также параллельны соприкасающейся плоскости (доказать не семинаре). В случае, если они не коллинеарны (часто так и бывает) по ним можно написать уравнение соприкасающейся плоскости.

Итак, общее уравнение соприкасающейся плоскости к кривой γ заданной уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (со значением параметра $t=t_0$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$.

3.3. Репер Френе.Нормаль к соприкасающейся плоскости к кривой γ в рассматриваемой точке называется *бинормалью кривой.*

Найдем направляющий вектор бинормали. Его можно получить, например, так: взять два не коллинеарных вектора, которые параллельны соприкасающейся плоскости, и найти их векторное произведение. Полученный вектор будет перпендикулярен соприкасающейся плоскости, а значит, параллелен бинормали.

Пусть кривая γ задана в произвольной параметризации векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Фиксируем на ней произвольную точку M. Согласно замечанию 1.6 векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ параллельны соприкасающейся плоскости. Тогда вектор

$$\vec{p}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$$

будет направляющим вектором бинормали кривой γ в точке M.

Пусть кривая γ задана в естественной параметризации. Тогда можно построить еще один вектор, параллельный бинормали. Он хорош тем, что составляет с векторами $\vec{\tau}$ (касательный вектор в точке M) и $\vec{\nu}$ (орт главной нормали в точке M) правый ортонормированный базис. Мы обозначим этот вектор $\vec{\beta}$:

$$\vec{\beta}=[\vec{\tau}, \vec{\nu}].$$

Он называется *ортом бинормали.*

Таким образом, с каждой точкой M кривой γ естественным образом связывается прямоугольная декартова система координат, начало которой совпадает с точкой M, а оси определяются ортами: $\vec{\tau}$ – касательной, $\vec{\nu}$ – главной нормали, $\vec{\beta}$ – бинормали. Прямоугольная декартова система координат $(M, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ изменяется при движении точки M по кривой γ (движется не только точка, но и поворачиваются векторы базиса). Поэтому ее называют *подвижным репером.* Также есть еще названия: *репер Френе* и *сопровождающий трехгранник.* (С термином „репер“ вы уже встречались в курсе аналитической геометрии. Каждой системе координат взаимно однозначно ставится в соответствие репер: от начала системы координат откладываются представители векторов базиса. Получаем упорядоченную систему четырех точек. Это репер. Поэтому термины репер и система координат употребляют как синонимы. Здесь мы как раз встретились с таким случаем.)

Координатные плоскости подвижного репера носят следующие названия: $(M,\vec\tau,\vec\nu)$ – соприкасающаяся плоскость, $(M,\vec\tau,\vec\beta)$ – спрямляющая плоскость, $(M,\vec\nu,\vec\beta)$ – нормальная плоскость. Оси координат подвижного репера: $(M,\vec\tau)$ – касательная, $(M,\vec\nu)$ – главная нормаль, $(M,\vec\beta)$ – бинормаль.

§1.4. Кручение и кривизна кривой. Формулы Френе.

4.1. Формулы Френе. Пусть кривая γ задана в естественной параметризации векторным параметрическим уравнением $\vec r=\vec r(s)$. В каждой точке этой кривой определяется репер Френе $(M,\vec\tau(s),\vec\nu(s),\vec\beta(s))$. При движении точки M по кривой γ векторы $\vec\tau(s),\vec\nu(s),\vec\beta(s)$ меняются. Выясним, как. Это изменение характеризуется первой производной данных векторов. Поэтому наша ближайшая задача выразить производные $\frac{d\vec\tau}{ds}$, $\frac{d\vec\nu}{ds}$, $\frac{d\vec\beta}{ds}$ через векторы $\vec\tau(s),\vec\nu(s),\vec\beta(s)$.

Согласно формуле (1.9) и определению касательного вектора имеем

$$\frac{d\vec\tau}{ds}=k(s)\vec\nu(s),$$

где $k(s)$ – кривизна кривой γ в точке со значением параметра s. Напомним, что точки, в которых кривизна обращается в нуль (точки спрямления), мы исключили из рассмотрения.

Найдем $\frac{d\vec\nu}{ds}$. Так как $\vec\nu(s)$ является единичным вектором в каждой точке, согласно лемме о векторе постоянной длины (лемма 1.1) его производная будет перпендикулярна ему в каждой точке, следовательно, при его разложении по базису $(\vec\tau(s),\vec\nu(s),\vec\beta(s))$ коэффициент при векторе $\vec\nu$ будет нулевым. Остальные два коэффициента обозначим $\alpha(s)$ и $\varkappa(s)$:

$$\frac{d\vec\nu}{ds}=\alpha(s)\vec\tau(s)+\varkappa(s)\vec\beta(s).$$

Найдем коэффициент $\alpha(s)$. Так как при каждом значении s векторы $\vec\tau(s)$ и $\vec\nu(s)$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec\tau(s)\vec\nu(s)=0$. Продифференцируем это равенство по s:

$$\frac{d\vec\tau}{ds}\vec\nu(s)+\vec\tau(s)\frac{d\vec\nu}{ds}=0$$

и подставим в него выражения для обеих производных (мы их знаем)

$$k(s)\vec\nu(s)\vec\nu(s)+\vec\tau(s)(\alpha(s)\vec\tau(s)+\varkappa(s)\vec\beta(s))=0.$$

Раскрываем скобки и учитываем, что векторы $\vec\tau(s)$ и $\vec\nu(s)$ имеют длину 1, то есть их скалярные квадраты равны 1, а вектор $\vec\tau(s)$ для каждого s перпендикулярен вектору $\vec\beta(s)$, а значит их скалярное произведение будет нулем. Таким образом, получаем

$$k(s)+\alpha(s)=0,$$

то есть коэффициент $\alpha(s)=-k(s)$. Коэффициент $\varkappa(s)$ ни через какие введенные ранее величины выражен быть не может. Это новая характеристика кривой. Она называется *кручением* линии γ. Итак, *кручение линии* γ – это коэффициент при $\vec\beta(s)$ в формуле

$$\frac{d\vec\nu}{ds}=-k(s)\vec\tau(s)+\varkappa(s)\vec\beta(s).$$

Найдем $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$. Напомним, что $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$. Тогда по правилам дифференцирования вектор-функции получим

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}(s), \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right] =$$

Подставляем производные

$$= [k(s)\vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s)] + [\vec{\tau}(s), -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)] =$$

Вспоминаем курс аналитической геометрии. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нуль-вектору, векторное произведение векторов линейно (это для второго слагаемого)

$$= \vec{0} - k(s)[\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s)] + \varkappa(s)[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] =$$

Осталось вычислить $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)]$. Это векторное произведение векторов двух единичных векторов. Полученный вектор тоже должен иметь длину 1 (площадь параллелограмма построенного на векторах сомножителях) и должен быть перпендикулярен векторам $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$. Таких векторов два: $\vec{\nu}(s)$ и $-\vec{\nu}(s)$. Чтобы выбрать один из них, вспомним, что тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s), [\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)])$ должна быть правой. Если предположить, что $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] = \vec{\nu}(s)$, то тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\nu}(s))$ – правая, следовательно (меняем два вектора местами) тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ – левая. Но, с другой стороны, по определению $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$ имеем $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ – правая тройка. Следовательно, $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] = -\vec{\nu}(s)$. Таким образом, получаем

$$= -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Собираем полученные формулы вместе

$$\tfrac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s); \quad \tfrac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s); \quad \tfrac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Эти формулы называются *формулами Френе.*

4.2. Кручение линии. При выводе формул Френе мы получили функцию $\varkappa = \varkappa(s)$ от параметра s, которую назвали кручением линии. При каждом фиксированном значении s эта функция выдает число, которое как-то характеризует эту линию. Выясним, как и научимся это число вычислять.

Пусть кривая γ задана относительно натурального параметра s с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Выведем формулу для вычисления кручения $\varkappa(s)$. Начнем со вспомогательной формулы для третьей производной вектор-функции $\vec{r}(s)$. Будем использовать формулы Френе.

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) = \frac{d}{ds}(k(s)\vec{\nu}(s)) = k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)\frac{d\vec{\nu}}{ds} = k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$

Вычислим смешанное произведение (вспоминаем связь между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов), используя выведенную формулу,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = \left[\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = [\vec{\tau}(s), k(s)\vec{\nu}(s)](k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s))) =$$

Пользуясь линейностью векторного произведения векторов, выносим $k(s)$ из скобок векторного произведения и вспоминаем определение орта бинормали $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$. Остается раскрыть скобки со скалярным произведением, учитывая ортогональность векторов (значит скалярные произведения нулевые), а также единичную длину вектора $\vec{\beta}(s)$.

$$= k(s)\vec{\beta}(s)(k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s))) = (k(s))^2\varkappa(s).$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = (k(s))^2\varkappa(s). \tag{1.11}$$

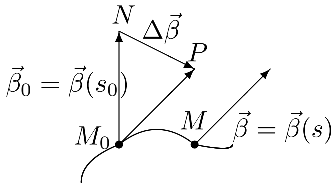
Напомним, что кривизну $k(s)$ мы получали как длину вектора $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, когда вводили орт главной нормали $\vec{\nu}(s)$ по формуле $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s)$. Тогда $(k(s))^2 = \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2$, то есть квадрат кривизны (для каждого значения параметра s) – это скалярный квадрат вектора $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Подставляя это в формулу (1.11), получим формулу для вычисления кручения кривой, заданной с помощью натурального параметра:

$$\varkappa(s) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}.$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл кручения кривой.

Теорема 1.7. *В точке M_0 гладкой линии γ, в которой кривизна отлична от нуля, абсолютное значение кручения γ равно пределу, к которому стремится отношение угла между бинормалями в точках M_0 и M к длине дуги M_0M, когда точка M, оставаясь на линии γ стремится к точке M.*

Доказательство. Пусть точке M_0 соответствует значения параметра s_0 и орт бинормали $\vec{\beta}_0 = \vec{\beta}(s_0)$. Эта точка стоит на месте. Точка M со значением параметра $s = s_0 + \Delta s$ и ортом бинормали $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ двигается по кривой γ к точке M_0.



Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.6. Отложим представитель вектора $\vec{\beta}$ от точки M_0. Тогда

$$\overrightarrow{NP} = \vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}_0 = \Delta\vec{\beta}$$

и из равнобедренного треугольника NPM_0 получим

$$|\Delta\vec{\beta}| = NP = 2\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}}{\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}}{|\Delta s|} = 1 \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{\beta}|}{|\Delta s|} = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s} \right| = \left| \left.\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|_{s=s_0} \right| = |-\varkappa(s_0)\vec{\nu}(s_0)| = |\varkappa(s_0)|.$$

□

Гладкая линия называется *плоской*, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Теорема 1.8. *Гладкая линия будет плоской тогда и только тогда, когда кручение во всех ее точках равно нулю.*

Доказательство. Пусть линия γ плоская. Нам нужно доказать, что в каждой ее точке кручение равно нулю. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы γ лежала в координатной плоскости Oxy. Тогда γ задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, для которого $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$. Следовательно, векторы $\frac{d\vec{r}}{ds} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}$ будут параллельны плоскости Oxy. Так как эти векторы определяют соприкасающуюся плоскость кривой γ, в каждой точке линии γ она будет совпадать с плоскостью Oxy. Значит, в каждой точке γ орт вектора бинормали будет перпендикулярен одной и той же плоскости Oxy, то есть это постоянный вектор. Тогда $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$ и по третьей формуле Френе $-\varkappa(s)\vec{\nu}(s) = \vec{0}$ для каждого значения параметра s. Следовательно, $\varkappa(s) = 0$.

Обратно, пусть для линии γ кручение равно нулю в каждой точке. Нам нужно доказать, что кривая плоская, то есть все ее точки лежат в одной плоскости. Пусть опять кривая γ задана векторным параметрическим уравнением относительно натурального параметра: $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Так как кручение γ в каждой точке равно нулю, по третьей формуле Френе получим, что $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$ для всех s. Напомним, что в естественной параметризации $\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$. Тогда из ортогональности векторов $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ получаем, что $\vec{\beta}(s)\frac{d\vec{r}}{ds} = 0$. Так как производная вектор-функции $\vec{\beta}(s)$ нулевая, последнее равенство мы можем записать в виде

$$\frac{d}{ds}(\vec{\beta}(s)\vec{r}(s)) = 0,$$

то есть $\vec{\beta}(s)\vec{r}(s) = c$, где c – константа. В каждой точке линии γ вектор $\vec{\beta}(s)$ один и тот же, поэтому обозначим его $\vec{\beta}$, а его координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Это три вещественных числа, одновременно не равные нулю. Вектор $\vec{r}(s)$ при изменении s меняется и выдает точки кривой γ. Их координаты $(x(s), y(s), z(s))$. Тогда записывая уравнение $\vec{\beta}(s)\vec{r}(s) = c$ в координатах, получим, что координаты $(x(s), y(s), z(s))$ точек кривой γ удовлетворяют уравнению

$$\beta_1 x(s) + \beta_2 y(s) + \beta_3 z(s) = c.$$

Это линейное уравнение и оно задает плоскость. Откуда мы видим, что все точки линии γ лежат в этой плоскости, то есть γ является плоской линией. □

Замечание 1.7. Итак, мы выяснили, что кривизна линии характеризует ее отличие от прямой, а кручение – отличие линии от плоской линии.

4.3. Вычисление кривизны и кручения для линии, заданной в произвольной параметризации. Научимся вычислять кривизну и кручение линии, если она задана относительно произвольного параметра t.

Пусть гладкая линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Найдем формулы для вычисления ее кривизны $k(t)$ и кручения $\varkappa(t)$. Мы знаем, что для натурального параметра кривизна и кручения вычисляются по формулам

$$k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|; \quad \varkappa(s) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}. \tag{1.12}$$

Пусть параметры s и t связаны с помощью функции $s = s(t)$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}(s)\frac{ds}{dt}.$$

Так как вектор $\vec{\tau}(s)$ при любом значении s имеет длину 1, получим

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \tag{1.13}$$

Вычисляем вторую производную (используя формулы Френе)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}(s)\frac{d^2s}{dt^2} = k(s)\vec{\nu}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}(s)\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Вычислим векторное произведение первой и второй производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ по t (раскрываем скобки с учетом линейности векторного произведения и равенства нулю векторного произведения коллинеарных векторов)

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left[\vec{\tau}(s)\frac{ds}{dt}, k(s)\vec{\nu}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}(s)\frac{d^2s}{dt^2}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k(s)\vec{\beta}(s).$$

Таким образом, мы получили

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k(s)\vec{\beta}(s). \tag{1.14}$$

Это равенство двух векторов при каждом значении t (мы помним, что $s = s(t)$, то есть s тоже можно выразить через t). Следовательно, длины этих векторов также равны. С учетом равенства (1.13), положительности $k(s)$ и единичности $\vec{\beta}(s)$, получим

$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 k(s(t))$$

или окончательная формула для вычисления кривизны кривой, заданной с помощью произвольного параметра

$$k(t) = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}. \tag{1.15}$$

Замечание 1.8. Попутно мы можем получить формулы для вычисления векторов подвижного репера для линии, заданной в произвольной параметризации. Выразим кривизну из формулы (1.15) и подставим в формулу (1.14).

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}\vec{\beta}(s(t)).$$

Откуда находим, что $\vec{\beta}(t) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}$. Тогда вся троица векторов подвижного репера будет вычисляться по формулам:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}; \; \vec{\beta}(t) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}; \; \vec{\nu}(t) = [\vec{\beta}(t), \vec{\tau}(t)].$$

Выведем формулу для вычисления кручения для произвольной параметризации. Вычислим третью производную вектор-функции $\vec{r}(t)$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3} =$$

$$= \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Вычисляем смешанное произведение, используя выведенные формулы

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right) =$$

Нам нужно упростить смешанное произведение векторов. Раскрываем скобки, учитывая равенство нулю смешанного произведения компланарных векторов

$$= \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Таким образом, мы получили

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Воспользуемся вторым равенством из (1.12) и (1.13)

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \varkappa(s)\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6 =$$

Вспоминаем, что скалярный квадрат вектора – это квадрат его длины, а также формулу для вычисления кривизны (1.15)

$$= \varkappa(s(t))\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^6}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6.$$

Откуда получаем формулу для вычисления кручения линии, заданной с помощью произвольного параметра

$$\varkappa(t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Замечание 1.9. Можно доказать, что для любой гладкой линии γ определяются две функции $k = k(s)$ и $\varkappa = \varkappa(s)$ длины дуги s (зависимость кривизны и кручения линии от параметра s). Эти уравнения называются *натуральными уравнениями кривой*. Для них имеет место следующая теорема. Если на двух гладких линиях γ и γ_1 можно ввести натуральные параметры s и s_1 так, чтобы во всех точках с одинаковым значением этих параметров совпадали бы значения кривизн k и k_1, а также значения кручений $\varkappa$ и $\varkappa_1$, то линии γ и γ_1 отличаются лишь положением в пространстве.

Другими словами, зная кривизну и кручение линии в каждой ее точке, мы можем восстановить эту линию с точностью до положения в пространстве.

§1.5. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Координатные линии. Замена параметризации.

5.1. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Мы по-прежнему находимся в трехмерном евклидовом пространстве E^3 и у нас есть трехмерное пространство векторов V^3.

Пусть U_1, U_2 – два числовых промежутка. Тогда их декартово произведение $G = U_1 \times U_2$ называется *двумерным числовым промежутком*, то есть

$$G = \{(u, v),\ u \in U_1, v \in U_2\}.$$

Если каждой паре чисел (u, v) двумерного числового промежутка G по некоторому закону сопоставлен однозначно определенный вектор $\vec{r}(u, v)$ векторного пространства V^3, то говорят, что на промежутке G задана *вектор-функция* $\vec{r}(u, v)$ *двух скалярных аргументов* u и v.

Будем говорить, что постоянный вектор $\vec{a}$ есть *предел* вектор-функции $\vec{r}(u, v)$, если числовая функция $|\vec{r}(u, v) - \vec{a}|$ стремится к нулю при $(u, v) \to (u_0, v_0)$. Пишут

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}.$$

Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u};\ \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta v},$$

то они называются *частными производными* вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ в точке (u_0,v_0) по u и v соответственно и обозначаются $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\big|_{(u_0,v_0)}$ и $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\big|_{(u_0,v_0)}$ или $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0,v_0)$.

Если точка (u_0,v_0) меняется (и мы обозначаем ее (u,v)), то частные производные $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ сами являются вектор-функциями двух скалярных переменных u и v их частные производные будут производными второго порядка для исходной вектор-функции $\vec{r}(u,v)$.

Пусть $du=u-u_0$, $dv=v-v_0$, $\rho=\sqrt{(du)^2+(dv)^2}$. Предположим, что для данной вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ и для данной точки $(u_0,v_0)\in G$ существуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что

$$\vec{r}(u,v)-\vec{r}(u_0,v_0)=\vec{a}du+\vec{b}dv+\vec{R}(u,v)\rho,$$

где $\vec{R}(u,v)$ – бесконечно малая функция при $(u,v)\to(u_0,v_0)$. Из определения частных производных вектор-функции видно, что

$$\vec{a}=\vec{r}_u(u_0,v_0);\ \vec{b}=\vec{r}_v(u_0,v_0).$$

Вектор

$$d\vec{r}(u_0,v_0)=\vec{a}du+\vec{b}dv=\vec{r}_u(u_0,v_0)du+\vec{r}_v(u_0,v_0)dv$$

называется *дифференциалом вектор-функции* $\vec{r}(u,v)$ в точке (u_0,v_0). Если вектор-функция имеет в точке (u_0,v_0) дифференциал, то она называется *дифференцируемой в этой точке*. Если точка (u_0,v_0) меняется, то меняется и дифференциал. В результате получаем вектор-функцию $d\vec{r}(u,v)=\vec{r}_u(u,v)du+\vec{r}_v(u,v)dv$. Вектор-функция, дифференцируемая в каждой точке двумерного промежутка G, называется *дифференцируемой*.

Фиксируем в евклидовом пространстве E^3 прямоугольную декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Тогда для любой точки $(u,v)\in G$ вектор $\vec{r}(u,v)$ можно разложить по векторам этой системы координат:

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}.$$

Если точка (u,v) меняется, то меняются числа $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ и мы получаем три функции, которые называются *координатами* вектор-функции $\vec{r}(u,v)$.

Следующая теорема описывает связь между дифференцированием вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ и ее координат. Она доказывается аналогично теореме о дифференцировании координат вектор-функции одной переменной и это доказательство мы оставляем читателю.

Теорема 1.9. *Пусть вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ задана на двумерном промежутке G своими координатами $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ и (u,v) – точка из G. Тогда вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ имеет в точке (u,v) частные производные тогда и только тогда, когда функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют частные производные в этой точке. При этом выполняются соотношения:*

$$\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\vec{k};$$
$$\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\vec{k};$$
$$d\vec{r}(u,v)=\left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}dv\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}dv\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}dv\right)\vec{k}.$$

Для частных производных функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ будем также использовать обозначения $x_u(u,v)$, $x_v(u,v)$ и т.д.

Приведем еще две технические теоремы (их доказательства можно посмотреть в [2])

Теорема 1.10. *(о векторе постоянной длины) Пусть вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ задана на двумерном промежутке G и дифференцируема в каждой точке этого промежутка. Длина данной вектор-функции постоянна тогда и только тогда, когда в каждой точке $(u,v)\in G$ вектор $\vec{r}(u,v)$ перпендикулярен векторам частных производных $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.*

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r}(u,v)$, заданная на двумерном промежутке G, *сохраняет свое направление*, если существует единичный постоянный вектор $\vec{e}$, такой что $\vec{r}(u,v)=|\vec{r}(u,v)|\vec{e}$.

Теорема 1.11. *(о векторе постоянного направления) Пусть вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ определена на двумерном промежутке G и дифференцируема в каждой точке этого промежутка. Вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ сохраняет свое направление во всех точках промежутка G тогда и только тогда, когда в каждой точке G вектор $\vec{r}(u,v)$ параллелен векторам частных производных $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.*

5.2. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ задана на некотором двумерном промежутке G. Фиксируем правую прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Будем откладывать вектор $\vec{r}$ от начала координат. Конец этого представителя вектора $\vec{r}$ обозначим через M. Эта точка имеет своим радиус-вектором вектор $\vec{r}$, а координатами – упорядоченную систему чисел $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Когда (u,v) пробегают область своего изменения G, точка M описывается некоторое геометрическое место точек в E^3, которое мы будем называть *поверхностью в параметрическом представлении* (или, просто, *поверхностью*). Каждой паре $(u,v) \in G$ ставится в соответствие точка поверхности. В дальнейшем, говоря о точке поверхности, мы подразумеваем задание определяющих ее значений u и v.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$ будем называть *векторным параметрическим уравнением поверхности*, а u и v будем называть *параметрами*. Уравнения

$$x = x(u,v);\ y = y(u,v);\ z = z(u,v)$$

будем называть *параметрическими уравнениями поверхности.*

Потребуем, чтобы вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ имела частные производные любого порядка на любом открытом множестве из G. Такую вектор-функцию будем называть *гладкой.* Точку M_0 (пусть ей соответствует пара (u_0,v_0)) поверхности F будем называть *обыкновенной*, если векторы $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ не коллинеарны. Поверхность, которая задается с помощью гладкой вектор-функции и все точки которой обыкновенные, называется *гладкой поверхностью.*

Согласно теореме 1.9 векторы $\vec{r}_u(u,v)$ и $\vec{r}_v(u,v)$ имеют координаты

$$\vec{r}_u(x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v));\ \vec{r}_v(x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)).$$

Тогда не коллинеарность, векторов равносильна не пропорциональности их координат, которую в этом случае удобно записать в виде условия на ранг матрицы:

$$rg\begin{pmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} = 2. \tag{1.16}$$

Если условия гладкой поверхности F не выполняются для всех значений $(u,v) \in G$ (пропадают производные или в каких-то точках становятся коллинеарными вектора частных производных вектор функции $\vec{r}(u,v)$), то мы будем брать пересечения открытых шаров пространства E^3 с поверхностью F, таких что эти пересечения удовлетворяют условиям гладкости. Можно показать, что для любой обыкновенной точки поверхности F такой шар всегда существует. При этом будем говорить, что мы изучаем поверхность *в окрестности обыкновенной точки.*

Пусть дана гладкая поверхность F, она задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Рассмотрим произвольную точку M этой поверхности (она определяется парой (u,v)). По определению гладкой поверхности ранг матрицы (1.16) в этой точке равен двум. Следовательно, один из трех определителей, которые можно составить, используя эту матрицу, отличен от нуля. Пусть для определенности это

$$\begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как известно из курса математического анализа, если функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ при данных u, v удовлетворяют этому условию, то в G существует окрестность точки (u,v), для которой соответствие $(u,v) \to (x,y)$ будет взаимно однозначным. Другими словами, из уравнений $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ мы можем равносильным образом выразить $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ через x и y (Тогда $z = z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y)) = z(x,y)$). Это означает, что не только каждой паре значений (u,v) однозначно отвечает точка M поверхности, но и обратно, каждой точке поверхности $M(x,y,z)$ однозначно отвечает пара значений u, v. Таким образом, в некоторой окрестности обыкновенной точки поверхности мы имеем взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и парами чисел (u,v). На этом основании параметры u и v называются *криволинейными координатами* на поверхности. Таким образом, точка M, лежащая на поверхности F, может быть однозначно задана упорядоченной парой чисел (u,v), которая называется *криволинейными координатами* точки M на поверхности F.

Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Фиксируем значение v (положим его равным $v = v_0$) так, чтобы $(u,v_0) \in G$ при всех допустимых u. Подставим это значение в векторное параметрическое уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$. Когда u будет меняться, радиус-вектор $\vec{r}$ опишет некоторое множество точек на поверхности F. Что это за множество точек? Оно задается векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$ с одной переменной. Вектор-функция $\vec{r}(u,v_0)$ имеет производные по u любого порядка и первая производная для любого u отлична от нуля (так как матрица из обеих частных производных имеет ранг 2). Это значит, что множество точек, задаваемое векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$, является гладкой линией. Эта линия называется *линией* u (или u-линией). Аналогично, фиксируя $u = u_0$, мы получаем *линию* v (v-линию). Она задается векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u_0,v)$.

Из определения частной производной вектор-функции двух скалярных аргументов мы видим, что касательными векторами к u-линии будут векторы $\vec{r}_u$, а для v-линии – векторы $\vec{r}_v$. (Действительно, чтобы получить касательный вектор к линии в данной точке, нужно взять ее векторное параметрическое уравнение ($\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$), продифференцировать по переменной (сейчас это u) и вычислить значение полученной производной в нужной точке. Это как раз и будет частная производная $\vec{r}_u$.) Аналогично для v-линий касательными векторами будут частные производные $\vec{r}_v$.

Отметим, что любые две различные линии u не пересекаются, так как для одной всегда $v = v_1$, а для другой $v = v_2$. Рассмотрим произвольную линию u (для нее всегда $v = v_0$) и линию v (для нее всегда $u = u_0$). Тогда для их общих точек будет выполняться требование $u = u_0$, $v = v_0$. Так как точка (u_0, v_0) – единственная в G, любая линия u пересекает любую линию v только в одной точке.

Итак, мы получаем на гладкой поверхности F два семейства линий, причем любые две линии одного семейства не пересекаются, а любые две линии разных семейств имеют единственную общую точку. Это семейство линий называется *координатной сетью поверхности*.

5.3. Замена параметризации. Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v),\ (u, v) \in G.$$

Пусть дан еще один двумерный промежуток G', его элементы будем обозначать (α, β). Предположим, что между точками двумерных промежутков существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое равенствами $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$. Эти равенства можно подставить в параметрические уравнения поверхности

$$x = x(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) = x(\alpha, \beta);\ y = y(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) = y(\alpha, \beta);\ z = z(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) = z(\alpha, \beta),\ (\alpha, \beta) \in G'.$$

Выясним, какие дополнительные условия нужно наложить на функции $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, чтобы пары (α, β) можно было считать криволинейными координатами на поверхности F.

Во-первых, функции $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$ должны иметь частные производные любого порядка по переменным α и β. По правилу дифференцирования сложной функции, например, получим

$$\frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}.$$

Мы видим, чтобы производная существовала, нужно, чтобы существовали частные производные $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$. Рассуждая аналогично для других равенств, получим, что функции $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ должны иметь частные производные любого порядка по обеим переменным.

Во-вторых, должно выполняться условие из определения обыкновенной точки для параметров α и β, то есть

$$rg\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} \end{pmatrix} = 2.$$

Это означает, что хотя бы один из трех возможных определителей, которые можно составить для этой матрицы, отличен от нуля. Пусть для определенности это определитель, составленный из первых двух столбцов, то есть

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Второй определитель в произведении отличен от нуля, так как u и v являются криволинейными координатами. Значит, нужно потребовать, чтобы второй определитель также был отличен от нуля для всех пар значений (α, β). Матрица, для которой вычисляется этот определитель, называется матрицей Якоби отображения $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$.

Итак, взаимно однозначное соответствие $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ будет определять новые криволинейные координаты (α, β) на поверхности F, если 1) функции $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ будут иметь частные производные любого порядка, 2) матрица Якоби этого отображения будет отлична от нуля для любой пары $(\alpha, \beta) \in G'$.

Переход от криволинейных координат (u, v) к криволинейным координатам (α, β) называется заменой параметризации гладкой поверхности.

5.4. Неявные уравнения поверхности. Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v),\ (u, v) \in G.$$

Как мы видели выше, если определитель в обыкновенной точке гладкой поверхности, составленный из первых двух столбцов матрицы (1.16) отличен от нуля, то в некоторой ее окрестности мы можем выразить $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Подставим эти выражения в третье параметрическое уравнение: $z = z(x, y)$ или $z - z(x, y) = 0$. Если этот определитель равен нулю, то один из двух оставшихся определителей, составленных из столбцов матрицы

(1.16), будет ненулевым (так как ранг матрицы равен 2). В одном случае мы можем выразить $y = y(x, z)$, а во втором – $x = x(y, z)$. Объединяя все три случая, мы можем утверждать, что в некоторой окрестности каждой обыкновенной точки гладкая поверхность может быть задана уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется *неявным уравнением* поверхности F.

Возникает вопрос: в каком случае множество точек евклидова пространства E^3, заданное уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, будет гладкой поверхностью? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы примем без доказательства (доказывается в курсе математического анализа)

Теорема 1.12. *Пусть функция $\Phi(x, y, z)$ имеет частные производные любого порядка и Ω – множество точек из E^3, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка этого множества, в которой частные производные функции $\Phi(x, y, z)$ одновременно не равны нулю, то есть в этой точке*

$$rg(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = 1.$$

Тогда существует открытый шар $B(M_0)$ с центром в этой точке, такой что пересечение $B(M_0)$ с множеством Ω будет гладкой поверхностью.

§1.6. Касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма поверхности.

6.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрическими уравнениями. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Будем говорить, что *линия принадлежит поверхности*, если каждая ее точка принадлежит этой поверхности.

Поскольку каждая точка поверхности F определяется парой чисел $(u, v) \in G$, а каждая точка линии определяется значением одного параметра t, то для каждой точки $M(u, v)$ гладкой линии, принадлежащей поверхности, параметры u и v являются функциями параметра t

$$u = u(t),\ v = v(t),$$

причем параметр t пробегает значения такого числового промежутка U, что соответствующее значение $(u(t), v(t))$ принадлежало двумерному промежутку G. Это параметрические уравнения гладкой линии на поверхности в криволинейных координатах поверхности.

Получим векторное параметрическое уравнение этой линии. Так как линия лежит на поверхности, значения $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяют уравнению $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ поверхности F. Подставляя их в это уравнение, получим

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)).$$

Обозначая $\vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{R}$, получим уравнение линии, лежащей на поверхности $\vec{r} = \vec{R}(t)$.

Пусть дана поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, фиксируем точку M (ей соответствует значение параметра t) на ней и рассмотрим всевозможные линии γ поверхности, проходящие через точку M. Касательные векторы в точке M к этим кривым будут вычисляться по формуле (используем правило дифференцирования сложной функции)

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{1.17}$$

(В правой части равенства производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ вычисляем в в точке со значением параметра t, а частные производные $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ вычисляются в точке со значениями параметров $u(t), v(t)$.) Плоскость, определяемая точкой M и не коллинеарными векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, называется *касательной плоскостью* к поверхности F в точке M. Упорядоченная пара $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ векторов является базисом направляющего подпространства этой плоскости.

Покажем, что перебирая все кривые γ, лежащие на плоскости и проходящие через точку M, мы получим все векторы, параллельные касательной плоскости. Другими словами, какую бы пару чисел (p_1, p_2) мы не взяли, всегда существует кривая γ, проходящая через точку M, у которой касательный вектор в этой точке имеет координаты (p_1, p_2) в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Возьмем произвольные числа (p_1, p_2) (конечно, одновременно не равные нулю) и зададим кривую γ с помощью уравнений в криволинейных координатах (u, v): $u = u_0 + p_1 t$, $v = v_0 + p_2 t$, где (u_0, v_0) – криволинейные координаты точки M. Согласно формуле (1.17) координатами касательного вектора к кривой γ в точке M относительно базиса $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ будут производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, вычисленные при значении t, которое соответствует точке M. Для кривой γ получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(u_0 + p_1 t) = p_1;\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u_0 + p_2 t) = p_2.$$

Итак, все векторы направляющего пространства касательной плоскости являются касательными векторами кривых поверхности F, проходящих через точку M. Направляющее касательное пространство касательной плоскости называется *касательным пространством* поверхности F в точке M.

Так как в любой точке M гладкой поверхности F векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны, определяется вектор

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v].$$

Этот вектор перпендикулярен всем векторам направляющего пространства касательной плоскости (а, значит, он перпендикулярен и самой касательной плоскости) и называется *вектором нормали*. Прямая, проходящая через точку M параллельно вектору нормали, называется *нормалью к поверхности в точке* M.

Из определения гладкой поверхности (векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны в каждой точке) следует, что в каждой ее точке существует единственная касательная плоскость и единственная нормаль.

Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v);\; y = y(u, v);\; z = z(u, v).$$

Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в прямоугольной декартовой системе координат (та, которая была фиксирована в самом начале) имеют координаты

$$\vec{r}_u(x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v));\; \vec{r}_v(x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

(сначала ищем частную производную, а затем в нее подставляем значения параметров u, v точки M). По формуле для вычислении координат векторного произведения векторов в правом ортонормированном базисе получим, что координаты вектора нормали имеют вид

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения нормали в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности F будут иметь вид

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ можно записать в двух видах (по точке и паре параллельных ей векторов; по точке и перпендикулярному вектору)

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

где значения производных вычисляются при значении параметром $u = u_0$, $v = v_0$, соответствующих точке M.

Теорема 1.13**.** *Касательная плоскость и нормаль не зависят от выбора параметризации на поверхности. Говорят, что они имеют геометрический смысл.*

Доказательство. Сначала поймем, в чем здесь может возникнуть проблема. Если взять другую параметризацию (α, β) поверхности F и вычислить $\vec{r}_\alpha$, $\vec{r}_\beta$ и $\vec{n} = [\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta]$, то a priory может получиться, что плоскость определенная точкой M и векторами $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$ может не совпасть с плоскостью, определенной точкой M и векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. А следовательно и нормаль к поверхности, определенная в разных параметризациях, может быть различной. Убедимся, что это не так.

Вспомним, что одну параметризацию мы можем выразить через другую с помощью формул $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$. Тогда для точки M по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

то есть вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Аналогично получаем, что вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$ есть линейная комбинация этих векторов. Таким образом, мы получили, что векторы $\vec{r}_\alpha$, $\vec{r}_\beta$ также как и векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ определяют одну и ту же касательную плоскость. Раз касательная плоскость получается одной и той же, то и нормаль (перпендикуляр к касательной плоскости, проходящий через точку M) будет одним и тем же при обеих параметризациях. $\square$

6.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно (на семинар). Пусть гладкая поверхность F задана неявным уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Пусть γ – кривая, лежащая на поверхности F, задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Тогда координаты любой точки M кривой γ удовлетворяют уравнению поверхности F, то есть $\Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Продифференцируем это равенство по параметру t (применяем правило дифференцирования сложной функции)

$$\Phi_x \frac{dx}{dt} + \Phi_y \frac{dy}{dt} + \Phi_z \frac{dz}{dt} \equiv 0.$$

Посмотрим на левую часть этого тождества как на скалярное произведение векторов с координатами (Φ_x, Φ_y, Φ_z) и $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. Второй вектор – это направляющий вектор касательной для кривой γ в точке M. Тогда последнее равенство показывает, что вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) перпендикулярен касательному вектору кривой γ. Так как мы рассматриваем все кривые γ, лежащие на поверхности F и проходящие через точку M, вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) будет перпендикулярен касательному вектору к любой кривой проходящей через точку M, то есть будет перпендикулярен касательной плоскости. Оказалось, что вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) – это вектор нормали. Тогда касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности F имеет уравнение (по точке и перпендикулярному вектору)

$$\Phi_x(x - x_0) + \Phi_y(y - y_0) + \Phi_z(z - z_0) = 0,$$

а нормаль – уравнения (по точке и направляющему вектору)

$$\frac{x - x_0}{\Phi_x} = \frac{y - y_0}{\Phi_y} = \frac{z - z_0}{\Phi_z}.$$

6.3. Первая квадратичная форма. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Запишем ее дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$. Найдем скалярный квадрат дифференциала $d\vec{r}$

$$d\vec{r}^2 = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12} du dv + \gamma_{21} dv du + \gamma_{22}(dv)^2, \tag{1.18}$$

где $\gamma_{11} = \vec{r}_u \vec{r}_u$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u \vec{r}_v$, $\gamma_{22} = \vec{r}_v \vec{r}_v$. Выражение в правой части (1.18) называется *первой квадратичной формой* поверхности F.

Первая квадратичная форма позволяет вычислить длину кривой на поверхности F. Пусть на поверхности F дана кривая γ. Параметрические уравнения кривой γ в локальных координатах поверхности будут иметь вид $u = u(t), v = v(t)$. Так как кривая лежит на поверхности F, криволинейные координаты (u, v) ее точек будут удовлетворять параметрическим уравнениям поверхности F, а значит, в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторное параметрическое уравнение кривой γ имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Как мы знаем, длина дуги кривой от точки M_0 (со значением параметра $t = t_0$) до точки M_1 (со значениями параметра $t = t_1$) в E_3 вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt.$$

Вычислим $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ в нашем случае. Используя правило дифференцирования сложной функции и обозначение коэффициентов первой квадратичной формы, получим

$$\left| \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right| = \sqrt{\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}} = \sqrt{(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt})(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt})} =$$
$$\sqrt{\gamma_{11}(\frac{du}{dt})^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22}(\frac{dv}{dt})^2}.$$

Откуда получаем формулу для вычисления длины дуги кривой на поверхности F

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt. \tag{1.19}$$

Замечание 1.10. В предыдущей формуле под интегралом стоит дифференциал длины дуги, то есть ds (формула $s = \int ds$ известна из математического анализа – чтобы вычислить длину дуги, нужно вычислить длины маленьких кусочков и сложить их), то есть

$$ds = \sqrt{\gamma_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

Вносим dt под корень и переходим к дифференциалам (формула $df = \frac{df}{dt}dt$, то есть мысленно сокращаем на dt^2). Чтобы не возиться с корнем, возведем обе части в квадрат.

$$ds^2 = \gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2. \tag{1.20}$$

Эта формула объясняет распространенное обозначение для первой квадратичной формы ds^2.

Пример 1.9. Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Рассмотрим u линию $v = v_0$ и вычислим ее длину между точками ее пересечения с v линиями, заданными уравнениями $u = u_0$ и $u = u_1$. Смотрим на формулу (1.19): чтобы ее применить, нужно задать u линию с помощью параметрический уравнений в криволинейных координатах (относительно параметра t), вычислить значения параметра t для точек пересечения u линии с v линиями и вычислить производные.

Зададим u линию с помощью параметрический уравнений (они должны быть вида $u = u(t)$, $v = v(t)$). Сначала заметим, что для всех точек u линии значение криволинейной координаты v всегда равно v_0. Значит, второе параметрическое уравнение будет иметь вид $v = v_0$. Координата u на u линии меняется. Ее мы обозначим через параметр t. Тогда получим $u = t$, $v = v_0$.

u линия $u = t$, $v = v_0$ пересекает v линию $u = u_0$ в точке со значением параметра $t = u_0$. Аналогично, вторая точка пересечения имеет значение параметра $t = u_1$.

Вычисляем производные $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{dv}{dt} = 0$. Тогда

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2} dt = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\gamma_{11}} dt.$$

Аналогичную формулу можно получить для v линии (проведите вычисления самостоятельно).

Пусть даны две кривые γ_1 и γ_2 на поверхности F, пересекающиеся в точке M_0. Найдем угол между этими кривыми в точке M_0. Напомним, что углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, кривые γ_1 и γ_2 в криволинейных координатах заданы уравнениями $u = u_1(t), v = v_1(t)$ и $u = u_2(\tau), v = v_2(\tau)$ соответственно. Обозначим координаты точки $M_0(u_0, v_0)$ в криволинейных координатах. Пусть точке M_0 соответствует значение параметра t_0 на линии γ_1 и значение параметра τ_0 на второй линии. Тогда $u_0 = u_1(t_0) = u_2(\tau_0)$ и $v_0 = v_1(t_0) = v_2(\tau_0)$. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ линии γ_1 и γ_2 задаются следующим образом

$$\gamma_1 : \vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t)); \quad \gamma_2 : \vec{r} = \vec{r}(u_2(\tau), v_2(\tau)).$$

Найдем какой-нибудь вектор, параллельный касательной к γ_1 в точке M_0. Как мы знаем, вектор $\left.\frac{d\vec{r}(u_1(t), v_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$ будет касательным к γ_1. Обозначим его $\vec{\xi}_1$. С учетом правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\vec{\xi}_1 = \left.\frac{d\vec{r}(u_1(t), v_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du_1(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Аналогично получаем вектор

$$\vec{\xi}_2 = \left.\frac{d\vec{r}(u_2(\tau), v_2(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du_2(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0},$$

касательный к кривой γ_2 в точке M.

По определению скалярного произведения векторов получим

$$\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \frac{\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2}{|\vec{\xi}_1||\vec{\xi}_2|} = \frac{\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2}{\sqrt{(\vec{\xi}_1)^2}\sqrt{(\vec{\xi}_2)^2}}.$$

Вычислим числитель крайне правой части последнего равенства. Частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ здесь вычисляются в точке (u_0, v_0). Из-за громоздкости в следующей формуле мы опускаем обозначение этой точки.

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2 &= (\vec{r}_u \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0})(\vec{r}_u \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}) = \\ &= \gamma_{11} \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12} \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}.\end{aligned}$$

В знаменателе получим

$$\sqrt{(\vec{\xi}_1)^2} = \sqrt{(\vec{r}_u\ \frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0} + \vec{r}_v\ \frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0})(\vec{r}_u\ \frac{u_1}{dt}\Big|_{t=t_0} + \vec{r}_v\ \frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0})} =$$

$$= \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\ \frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\ \frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2}$$

Аналогично получаем

$$\sqrt{(\vec{\xi}_2)^2} = \sqrt{\left(\vec{r}_u\ \frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v\ \frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)\left(\vec{r}_u\ \frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v\ \frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)} =$$

$$= \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\ \frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\ \frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)^2}$$

Объединяя вычисления, получаем

$$\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) =$$

$$= \frac{\gamma_{11}\ \frac{du_1}{dt}\big|_{t=t_0}\ \frac{du_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\ \frac{du_1}{dt}\big|_{t=t_0}\ \frac{dv_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\ \frac{dv_1}{dt}\big|_{t=t_0}\ \frac{du_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\ \frac{dv_1}{dt}\big|_{t=t_0}\ \frac{dv_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}}{\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\big|_{t=t_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\ \frac{du_1}{dt}\big|_{t=t_0}\ \frac{dv_1}{dt}\big|_{t=t_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_1}{dt}\big|_{t=t_0}\right)^2}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\ \frac{du_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}\ \frac{dv_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_0}\right)^2}}. \tag{1.21}$$

Так как, выбирая направляющие векторы касательных к кривым, мы могли выбрать их так, что угол между этими векторами тупой, для нахождения угла между самими касательными (не тупой угол между прямыми) нужно взять модуль полученного числа, то есть

$$\cos\angle(\gamma_1, \gamma_2) = |\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)|.$$

Пример 1.10**.** Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Найдем угол между координатными линиями этой поверхности.

Напомним, что u линия задается в криволинейных координатах уравнением $v = v_0$ (или с параметром t: $u = t$, $v = v_0$), а v линия – уравнением $u = u_0$ (или с параметром τ: $u = u_0$, $v = \tau$. Точка пересечения этих линий (обозначим ее M_0) имеет криволинейные координаты (u_0, v_0). Для этой точки значение параметра на первой линии будет $t = u_0$, а на второй линии будет $\tau = v_0$. Считая производные, сразу подставляем их в формулу (1.21).

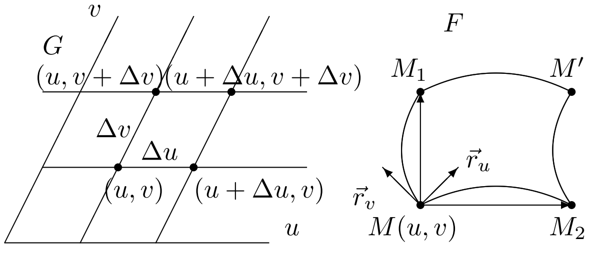
$$\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \frac{\gamma_{11}\cdot 1\cdot 0 + \gamma_{12}\cdot 1\cdot 1 + \gamma_{12}\cdot 0\cdot 0 + \gamma_{22}\cdot 0\cdot 1}{\sqrt{\gamma_{11}\,(1)^2 + 2\gamma_{12}\cdot 1\cdot 0 + \gamma_{22}\,(0)^2}\sqrt{\gamma_{11}\,(0)^2 + 2\gamma_{12}\cdot 0\cdot 1 + \gamma_{22}\,(1)^2}} = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}}.$$

Тогда угол между u линией и v линией (обозначим его φ) будет равен

$$\cos\varphi = \frac{|\gamma_{12}|}{\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}}.$$

Заметим, что если $\gamma_{12} = 0$, то u линия перпендикулярна v линии.

Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$. Разобьем область G конечным числом прямых линий $u = const$ и $v = const$ на параллелограммы со сторонами Δu и Δv.



Рассмотрим один из таких параллелограммов (произвольный). Обозначим его вершину с наименьшими значениями через (u, v), а остальные вершины как показано на рисунке. Переходим к поверхности F. Обозначим через M точку поверхности F, которая определяется радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$, через M_1 – радиус-вектором $\vec{r}(u, v+\Delta v)$, через M_2 – радиус-вектором $\vec{r}(u+\Delta u, v)$, через M' – радиус-вектором $\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Остальные пары значений параметров, которые лежат на сторонах и внутри выделенного параллелограмма, определять на поверхности F так называемый криволинейный параллелограмм $MM_1M'M_2$.

Площадь ΔS криволинейного параллелограмма $MM_1M'M_2$ будет приблизительно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Вычислим эту площадь. Для вектора $\overrightarrow{MM_1}$ получим

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v) \approx \vec{r}_u \Delta u.$$

Аналогично для вектора $\overrightarrow{MM_2}$ получим

$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v) \approx \vec{r}_v \Delta v.$$

Тогда, используя тот факт, что площадь параллелограмма, построенного на векторах, равна длине их векторного произведения, получим

$$\Delta S \approx |[\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}]| \approx |[\vec{r}_u \Delta u, \vec{r}_v \Delta v]| = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \Delta u \Delta v. \tag{1.22}$$

Вспомним формулу из аналитической геометрии, которая позволяет свести вычисление длины векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к вычислению скалярных произведений.

$$(\vec{a}\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a})^2(\vec{b})^2 - |[\vec{a}\vec{b}]|^2,$$

то есть

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = \sqrt{(\vec{a})^2(\vec{b})^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Применим эту формулу в нашем случае для $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$.

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{(\vec{r}_u)^2(\vec{r}_v)^2 - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}. \tag{1.23}$$

Возвращаемся к формуле (1.22)

$$\Delta S \approx \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\Delta u \Delta v.$$

Составим сумму таких площадей

$$\sum \Delta S \approx \sum \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\Delta u \Delta v.$$

Будем теперь бесконечно уменьшать Δu и Δv (увеличивая число параллелограммов). Тогда левая часть приближенного равенства будет стремиться к площади поверхности F, а правая часть – двойной интеграл по области G, то есть

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\,dudv.$$

Не для любой поверхности существует площадь (те поверхности, для которых площадь существует называются *квадрируемыми*). Не вдаваясь далеко в вопросы существования, мы будем предполагать, что поверхность квадрируема и двойной интеграл существует. Также нужно доказать, что полученная формула не зависит от выбора параметризации поверхности (желающие могут ознакомиться с подробными рассуждениями в [4, стр. 232]).

Итак, мы показали, что первая квадратичная форма позволяет вычислять длины дуг кривых на поверхности, углы между кривыми и площади поверхностей (или их частей), не выходя в объемлющее евклидово пространство E^3.

§1.7. Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна кривой на поверхности.

7.1. Вторая квадратичная форма. Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Рассмотрим произвольную кривую γ, лежащую на поверхности и заданную в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное параметрическое уравнение кривой γ будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Первый дифференциал получается так: берем производную по t от вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Переходим от производных к дифференциалам (мысленно умножаем обе части на dt)

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Это первый дифференциал вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$. Второй дифференциал этой вектор-функции – это первый дифференциал от первого дифференциала вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$. Опять начинаем с производных (считаем вторую производную $\vec{r}(u(t), v(t))$ по t, используя правило дифференцирования сложной функции, где это нужно, и правило дифференцирования произведения).

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}\frac{dv}{dt}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{d^2v}{dt^2}. \tag{1.24}$$

Переходим к дифференциалам (мысленно умножаем обе части на dt^2) и учитываем, что порядок взятие частных производных по u и v не важен, так как исходная вектор-функция гладкая.

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v. \tag{1.25}$$

Фиксируем произвольную точку M поверхности F и рассмотрим единичный вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности F (Раньше мы считали вектор нормали $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, его длина нас не волновала). Он вычисляется по формуле

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$$

Умножим обе части равенства (1.25) скалярно на $\vec{n}$. Так как $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, последние два слагаемых будут нулями, а в остальных введем обозначения (учитываем равенство (1.23))

$$b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$
$$b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$
$$b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$

Тогда скалярное произведение $\vec{n}d^2\vec{r}$ запишется в виде

$$\vec{n}d^2\vec{r} = b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2. \tag{1.26}$$

Теперь отпускаем точку M поверхности F (которую мы фиксировали, когда начинали считать скалярные и векторные произведения). Величины b_{11}, b_{12}, b_{22} начинают меняться при изменении точки M (а значит и ее криволинейных координат), то есть они являются функциями переменных u и v.

Правая часть в равенстве (1.26) называется *второй квадратичной формой поверхности.*

Получим для коэффициентов второй квадратичной формы другие формулы. Для этого заметим, что в каждой точке поверхности единичный вектор нормали $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, то есть их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n}d\vec{r} = 0$. Единичный вектор нормали меняется при переходе от точки к точке поверхности, то есть является функцией от переменных u и v, а на кривой γ эти переменные зависят от t, следовательно $\vec{n} = \vec{n}(u(t), v(t))$. Другими словами, вектор $\vec{n}$ тоже вектор-функция. Возьмем дифференциалы от обеих частей тождества $\vec{n}d\vec{r} = 0$.

$$d\vec{n}d\vec{r} + \vec{n}d^2\vec{r} = 0.$$

Второе слагаемое – это вторая квадратичная форма. Вычислим первое слагаемое.

$$d\vec{n}d\vec{r} = (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{n}_u\vec{r}_u du^2 + (\vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}_v\vec{r}_u)dudv + \vec{n}_v\vec{r}_v dv^2.$$

Сравнивая коэффициенты при du^2, $dudv$ и dv^2, видим

$$b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u;\ 2b_{12} = -(\vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}_v\vec{r}_u);\ b_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v.$$

Дифференцируем очевидные тождества $\vec{n}\vec{r}_u = 0$ и $\vec{n}\vec{r}_v = 0$.

$$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0;\ \vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0;\ \vec{n}_v\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vv} = 0;\ \vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vu} = 0.$$

Тогда для коэффициентов b_{ij} окончательно получаем

$$\begin{array}{lll} b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u; & b_{12} = -\vec{n}_u\vec{r}_v = -\vec{n}_v\vec{r}_u; & b_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \\ b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu}; & b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv}; & b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} \end{array} \tag{1.27}$$

Теорема 1.14. *Вторая квадратичная форма поверхности равна нулю во всех точках поверхности тогда и только тогда, когда поверхность является плоскостью или ее частью.*

Доказательство. Пусть F – плоскость или ее часть. Выберем прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, чтобы F содержалась в координатной плоскости Oxy. Тогда параметрические уравнения F имеют вид $x = u$, $y = v$, $z = 0$, $(u, v) \in G$. Тогда $\vec{r}_u(1, 0, 0)$, $\vec{r}_v(0, 1, 0)$, $\vec{r}_{uu}(0, 0, 0)$, $\vec{r}_{vv}(0, 0, 0)$, $\vec{r}_{uv}(0, 0, 0)$. Смотрим на определения коэффициентов b_{ij} и видим, что в числителях стоят смешанные произведения векторов, среди которых есть нулевой. Следовательно, все b_{ij} будут нулями.

Пусть дана поверхность F, для которой в каждой точке $b_{11} = 0$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$. Тогда из формул (1.27) следует, что векторы $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярны векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ (скалярные произведения нулевые). Кроме того, так как вектор $\vec{n}$ имеет одну и ту же длину в каждой точке (он единичный), в каждой точке он перпендикулярен своим частным производным. Итак, мы получаем, что в каждой точке из промежутка G каждый из векторов $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярен одновременно трем не компланарным векторам. Это векторы $\vec{n}$, $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Следовательно, векторы $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ нулевые. Значит, вектор $\vec{n}$ постоянный. Тогда тождество $\vec{n} d\vec{r} = 0$ можно записать в виде $d(\vec{n}\vec{r}) = 0$, то есть $\vec{n}\vec{r} = c = const$. Обозначим координаты вектора $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ относительно ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = c,$$

где $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ – координаты вектор-функции $\vec{r}(u, v)$, а также координаты (относительно ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) точек поверхности F. Это уравнение плоскости или ее части в зависимости от того, в каком двумерном промежутке меняются (u, v). □

Точки, в которых вторая квадратичная форма обращается в нуль, называются точками *уплощения*. Например, все точки плоскости являются точками уплощения.

7.2. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. На F гладкая кривая γ задана в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, $s \in I$ в естественной параметризации. Тогда ее векторное параметрическое уравнение будет $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$. Рассмотрим на кривой γ произвольную точку M. Ей соответствует значение параметра s и она, как точка поверхности F, имеет криволинейные координаты (u, v).

Касательный вектор к кривой γ в точке M

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}.$$

Так как $\vec{\tau}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, параллельных касательной плоскости к поверхности F в точке M, то и касательный вектор к кривой γ будет параллелен этой плоскости.

Вторая производная по s радиус-вектора $\vec{r}(u(t), v(t))$ кривой γ будет определять кривизну $k(s)$ и орт главной нормали $\vec{\nu}(s)$ по формуле $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s)$ (см. § 1.3.). Вторая производная радиус-вектора кривой, лежащей на поверхности уже вычислена (см. формулу (1.24)). Подставляем ее в левую часть последнего равенства.

$$k(s)\vec{\nu}(s) = \vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Умножим скалярно обе части на орт нормали $\vec{n}$ к поверхности F в точке M и учтем, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

или

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = b_{11} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{1.28}$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Используем определение скалярного произведения векторов и учтем, что векторы $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{n}$ имеют единичные длины.

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = k(s) \cos\angle(\vec{\nu}(s), \vec{n}) \equiv k(s) \cos\theta.$$

Мы обозначили угол между векторами $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{n}$ (орт вектора нормали в точке M) через θ. Число $k(s)\cos\theta$ называется *нормальной кривизной* кривой γ в точке M и обозначается k_n. Возвращаясь к формуле (1.28) и получаем формулу для вычисления

$$k_n = k(s)\cos\theta = b_{11} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{1.29}$$

Переходя от производных к дифференциалам (мысленно приводя к общему знаменателю ds^2) и используя (1.20), получим

$$k_n = \frac{b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2}{ds^2} = \frac{b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2}{\gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2}. \tag{1.30}$$

Таким образом, нормальная кривизна линии на поверхности в данной точке равна отношению второй квадратичной формы к первой квадратичной форме, вычисленной в данной точке и для дифференциалов du и dv, определяющих касательный вектор линии в этой точке.

7.3. Кривизна нормального сечения поверхности. Выясним, что означают дифференциалы du, dv для данной линии γ в данной точке M. Начинаем опять с того, что поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, линия γ на ней задана в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ будет векторным параметрическим уравнением для кривой γ. Если продифференцировать вектор-функцию $\vec{r}(u(t), v(t))$ по t и вычислить значения производной в точке M (ей соответствует значение параметра t_0), то получим вектор – касательный вектор к кривой γ в точке M:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}\vec{r}_u + \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}\vec{r}_v,$$

где частные производные вычислены тоже в точке M. Напомним, что упорядоченная пара $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ образует базис касательного пространства и числа $\left(\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$ являются координатами касательного вектора в этом базисе. Теперь сделаем шаг назад. Продифференцируем по t, но подставлять t_0 пока не будем. Тогда для переменной точки M в переменном базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ (меняется при переходе от точки к точке) пара $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ будет координатами касательного вектора. На дифференциал dt мы можем посмотреть как на число, которое меняется при переходе от точки к точке. На него умножим обе координаты $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$. Тогда для каждой точки M получим новый вектор с координатами (du, dv), который будет параллелен прежнему, а значит тоже будет направляющим вектором касательной в переменной точке M. Если точку M фиксировать, то получим направляющий вектор касательной с координатами (du, dv) в этой точке.

Посмотрим на формулу (1.30). В ней под дифференциалами du и dv как раз и понимаются координаты направляющего вектора касательной в точке M. Более того, значение нормальной кривизны зависит только от отношения du к dv (или наоборот). Чтобы в этом убедиться, достаточно разделить числитель и знаменатель дроби на du^2 (или dv^2 в зависимости от того, какая из этих координат гарантированно не нулевая). Другими словами, нормальная кривизна k_n в данной точке M зависит от направления касательной к кривой. Но тогда для всех кривых, проходящих через точку M и имеющих одну и ту же касательную нормальная кривизна будет одной и той же. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.15. *Все линии поверхности, проходящие через данную точку и имеющие в ней общую касательную, имеют в этой точке одинаковую нормальную кривизну.*

Таким образом, при рассмотрении нормальной кривизны линии γ, лежащей на поверхности F, ее можно заменить другой линией поверхности с той же касательной в этой точке поверхности. Обычно ее заменяют плоской линией γ_0, являющейся пересечением данной поверхности и плоскости, проходящей через данную точку параллельно вектору нормали к поверхности и направляющему вектору касательной к линии γ. Кривая γ_0 называется *нормальным сечением поверхности.*

Для нормального сечения γ_0 орт главной нормали параллелен плоскости нормального сечения и перпендикулярен вектору касательной, следовательно, параллелен вектору нормали к поверхности. Тогда по формуле (1.29) получаем, что

$$k_n = k(s)\cos\angle(\vec{\nu}(s), \vec{n}) = \pm k_0,$$

где k_0 – кривизна нормального сечения в точке M. Тогда получим

$$k_n = \pm k_0.$$

Мы получили

Теорема 1.16. *Нормальная кривизна, соответствующая данному направлению, с точностью до знака равна кривизне нормального сечения поверхности, определенного данным направлением.*

Следствие 1.2. Кривизна k кривой γ на поверхности F в точке M равна кривизне k_0 нормального сечения γ_0 в этой точке, имеющего с γ общую касательную, деленной на косинус угла между соприкасающейся плоскостью кривой γ и плоскостью нормального сечения (если этот угол отличен от прямого).

Доказательство. По доказанной теореме имеем $k_0 = |k_n|$. С другой стороны, по определению нормальной кривизны получаем $k_n = k\cos\theta$, где $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{\nu})$ в точке M (то есть угол между вектором нормали к поверхности и вектором главной нормали к кривой γ). По определению двугранного угла (так как $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ перпендикулярны касательной) для плоскости нормального сечения и соприкасающейся плоскости кривой γ (касательная для них общая прямая) угол θ будет либо величиной двугранного угла между этими плоскостями, либо величиной смежного с ним угла. Тогда

$$k_0 = |k\cos\theta| = k|\cos\theta|.$$

Так как $|\cos\theta|$ будет равен косинусу угла между плоскостью нормального сечения и соприкасающейся плоскостью кривой, мы получили требуемое утверждение □

Следствие 1.3. Все кривые, проходящие через данную точку поверхности и имеющие общую соприкасающуюся плоскость, имеют одинаковую кривизну в этой точке.

Будем называть доказанную теорему вместе с двумя следствиями *теоремой Менье.*

7.4. Асимптотические линии поверхности. Пусть дана поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Фиксируем точку M этой поверхности.

Направление в точке M будем называть *асимптотическим*, если соответствующая ему нормальная кривизна равна нулю.

Выясним, сколько асимптотических направлений может существовать в произвольной точке поверхности F. Рассмотрим кривую γ, проходящую через точку M (например, нормальное сечение). Зададим ее параметрическими уравнениями в криволинейных координатах $u = u(s)$, $v = v(s)$. Тогда касательный вектор к этой кривой $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$ имеет координаты $(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds})$ в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Используем формулу (1.28) для вычисления нормальной кривизны:

$$k_n = b_{11} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 .$$

Для краткости обозначим $\frac{du}{ds} = p_1$, $\frac{dv}{ds} = p_2$. Тогда вектор (p_1, p_2) будет иметь асимптотическое направление ($k_n = 0$) тогда и только тогда, когда

$$b_{11}(p_1)^2 + 2b_{12}p_1p_2 + b_{22}(p_2)^2 = 0.$$

Так как p_1 и p_2 одновременно не могут быть нулями, разделим на то из них, которое не нуль. Пусть для определенности это p_2. Тогда мы получим уравнение

$$b_{11} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 + 2b_{12} \frac{p_1}{p_2} + b_{22} = 0. \tag{1.31}$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений (любое $\frac{p_1}{p_2}$ является решением) тогда и только тогда, когда $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$. Из этого следует, что M – точка уплощения.

Если M не является точкой уплощения, то уравнение (1.31) является уравнением порядка не выше 2, а значит, может иметь не более двух корней.

Тем самым мы доказали теорему.

Теорема 1.17. *В точке уплощения поверхности любое направление является асимптотическим. Если точка поверхности не является точкой уплощения, то в ней существует не более двух асимптотических направлений.*

Линия на поверхности называется *асимптотической*, если касательная в каждой ее точке имеет асимптотическое направление.

Получим дифференциальное уравнение для асимптотической линии. Пусть линия γ асимптотическая. Тогда в каждой ее точке направление касательной, определяемое парой (du, dv), является асимптотическим ($k_n = 0$). Тогда из формулы (1.30) получим

$$b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2 = 0.$$

Это дифференциальное уравнение, решая которое мы можем получить уравнение вида $u = u(v)$ или $v = v(u)$ для асимптотической линии.

7.5. Индикатриса нормальной кривизны. Как мы видели выше, кривизна любой линии, лежащей на поверхности, может быть вычислена через кривизну нормального сечения. Поэтому для изучения кривизны произвольной линии поверхности достаточно исследовать свойства кривизны всевозможных нормальных сечений поверхности.

Пусть F – гладкая поверхность, заданная векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Зафиксируем на ней точку M. Если M – точка уплощения ($k_n = 0$ в любом направлении), то каждое направление является асимптотическим. Этот случай мы уже изучили. Поэтому предположим, что точка M не является точкой уплощения. В точке M сразу же возникает касательная плоскость и нормаль. В касательной плоскости есть система координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Через нормаль проведем плоскость и будем ее крутить. Каждое положение этой плоскости вырезает в поверхности нормальное сечение, а в касательной плоскости – касательную к этому нормальному сечению. Будем откладывать на этих касательных по обе стороны от точки M отрезки, равные $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, где k_n – нормальная кривизна в точке M, соответствующая этой касательной (напомним, что с точностью до знака – это кривизна нормального сечения). В точках, для которых $k_n = 0$ (точки уплощения), отрезки не откладываем. Множество концов всех таких отрезков является линией в касательной плоскости. Эта линия называется *индикатрисой нормальной кривизны* или *индикатрисой Дюпена*.

Найдем уравнение индикатрисы Дюпена в системе координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ (вообще говоря, не прямоугольной декартовой). Пусть $P(x, y)$ – произвольная точка касательной плоскости. Тогда она принадлежит индикатрисе Дюпена γ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{MP} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \vec{\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right).$$

С другой стороны, по определению координат точки в аффинной системе координат получим

$$\overrightarrow{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v.$$

Тогда $\pm\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right) = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v$. В силу линейной независимости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ получим

$$\frac{du}{ds} = \pm\sqrt{|k_n|}x; \ \frac{dv}{ds} = \pm\sqrt{|k_n|}y.$$

Подставим эти выражения в формулу (1.28) (напомним, что ее левую часть мы обозначили k_n и назвали нормальной кривизной). Тогда получим

$$k_n = b_{11}|k_n|x^2 + 2b_{12}|k_n|xy + b_{22}|k_n|y^2.$$

Раскрывая модуль в правой части уравнения и сокращая на k_n (которое мы предполагаем отличным от нуля), получим

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1.$$

Это уравнение линии второго порядка. Мы знаем девять видом линий второго порядка (эти девять видов разбиваются на три типа: эллиптический, гиперболический и параболический). Выясним, какими из них может быть индикатриса Дюпена. Во-первых, заметим, что по построению индикатрисы Дюпена точка M является ее центром. Во-вторых, этот центр не принадлежит самой индикатрисе, так как величина $\frac{1}{|k_n|}$ всегда отлична от нуля. В-третьих, индикатриса не пустое множество, так как направлений, в которых нормальная кривизна k_n равна нулю не более двух (асимптотические направления).

1) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 > 0$ – линия эллиптического типа (это может быть эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых). Так как индикатриса имеет вещественные точки, мнимый эллипс отпадает. Так как центр индикатрисы не может принадлежать ей, отпадает пара мнимых пересекающихся прямых. Таким образом, в этом случае остается только эллипс. Обратим внимание, что индикатриса Дюпена задается двумя уравнениями. Одно из этих уравнений и будет уравнением эллипса. Второе будет задавать пустое множеств точек (иначе это должен быть эллипс, не совпадающий с первым эллипсом и центром в точке M. Но тогда на каждом луче, выходящем из точки M, будет по две точки, для которых расстояние от точки M равно $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$. Это противоречие.) Точка M называется *эллиптической точкой.* В частности, если индикатриса является окружностью, то точка M называется *омбилической* или *шаровой.*

2) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 < 0$ – линия гиперболического типа (это может быть гипербола или пара пересекающихся прямых). Пара пересекающихся прямых отпадает, так как центр индикатрисы не принадлежит ей. Остается гипербола. Опять получаем два уравнения (они отличаются только свободным членом). Каждое из них будет задавать гиперболу. Асимптотические направления и асимптоты гиперболы не зависят от свободного члена, следовательно, для этих гипербол одни и те же. В этом случае точка M называется *гиперболической.*

3) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 = 0$ – линия параболического типа (это может быть парабола, пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых, пара совпавших прямых). Парабола не подходит, так как у нее нет центра. Пара мнимых параллельных прямых не имеет вещественных точек. Пара совпавших прямых проходит через точку M. Поэтому остается только пара параллельных прямых. В этом случае точка M называется *параболической точкой.*

Теорема 1.18**.** *Направление в данной точке поверхности является асимптотическим тогда и только тогда, когда оно является асимптотическим относительно индикатрисы Дюпена в этой точке.*

Доказательство. Пусть в точке M поверхности F направление будет асимптотическим. Тогда нормальная кривизна в этом направлении будет равна нулю. Тогда касательная, имеющая это направление, не пересекается с индикатрисой Дюпена, то есть является асимптотой. Тогда ее направление будет асимптотическим относительно индикатрисы Дюпена.

Обратно, пусть направление является асимптотическим относительно индикатрисы. Тогда в этом направлении нет точки индикатрисы, то есть нормальная кривизна в этом направлении была нулевой. Тогда это направление асимптотическое по определению. □

§1.8. Главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности.

8.1. Главные направления поверхности.Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

Главными направлениями в точке M поверхности F называются главные направления относительно индикатрисы Дюпена поверхности F в точке M.

Напомним, что направление называется главным относительно линии второго порядка, если оно сопряжено перпендикулярному. Условие сопряженности двух направлений $\vec{p}(p_1,p_2)$ и $\vec{q}(q_1,q_2)$ относительно линии второго порядка γ: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Возвращаемся к поверхности F в точку M. Получим уравнение для нахождения главных направлений относительно индикатрисы Дюпена. Напомним, что индикатриса Дюпена расположена в касательной плоскости и ее уравнение записано относительно аффинной системы координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Рассмотрим два направления (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$, то есть два вектора

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv;\ \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v.$$

Они будут главными тогда и только тогда, когда они 1) перпендикулярны (их скалярное произведение равно нулю), то есть

$$(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = 0$$

и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена

$$b_{11} du\delta u + b_{12} du\delta v + b_{12} dv\delta u + b_{22} dv\delta v = 0. \tag{1.32}$$

Используя определение первой квадратичной формы, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{11} du\delta u + \gamma_{12} du\delta v + \gamma_{12} dv\delta u + \gamma_{22} dv\delta v = 0 \\ b_{11} du\delta u + b_{12} du\delta v + b_{12} dv\delta u + b_{22} dv\delta v = 0. \end{cases}$$

Посмотрим на эту систему как на систему двух линейных уравнений с неизвестными δu, δv. Так как для любой линии второго порядка всегда существуют главные направления (для окружности любое направление главное, а для остальных линий существует два и только два главных направления), эта система уравнений всегда имеет ненулевое решение δu, δv, а значит, ее определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} du + \gamma_{12} dv & \gamma_{12} du + \gamma_{22} dv \\ b_{11} du + b_{12} dv & b_{12} du + b_{22} dv \end{vmatrix} = 0.$$

Это необходимое и достаточное условие того, что направление $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ является главным направлением.

Теорема 1.19**.** *(Родрига) Направление $d\vec{r}$ в данной точке поверхности будет главным тогда и только тогда, когда*

$$d\vec{n} = -k_n d\vec{r},$$

где $d\vec{n}$ – дифференциал единичного вектора нормали поверхности, соответствующий направлению $d\vec{r}$, k_n – нормальная кривизна по направлению $d\vec{r}$.

Доказательство. Рассмотрим условие сопряженности направлений $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ (см. формулу (1.32)). Подставляя в него выражения для коэффициентов второй квадратичной формы (см. формулу (1.27)), мы можем записать его в двух видах

$$\vec{n}_u\vec{r}_u du\delta u + \vec{n}_v\vec{r}_u du\delta u + \vec{n}_u\vec{r}_v dv\delta u + \vec{n}_v\vec{r}_v dv\delta v = 0; \quad \vec{n}_u\vec{r}_u du\delta u + \vec{n}_u\vec{r}_v du\delta u + \vec{n}_v\vec{r}_u dv\delta u + \vec{n}_v\vec{r}_v dv\delta v = 0.$$

Группируя слагаемые, получим

$$\vec{n}_u\delta u(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) + \vec{n}_v\delta v(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = 0; \quad \vec{n}_u du(\vec{r}_u\delta u + \vec{r}_v\delta v) + \vec{n}_v dv(\vec{r}_u\delta u + \vec{r}_v\delta v) = 0$$

или

$$(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u\delta u + \vec{n}_v\delta v) = 0; \quad (\vec{r}_u\delta u + \vec{r}_v\delta v)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = 0$$

или

$$d\vec{r}\delta\vec{n} = 0; \quad \delta\vec{r}d\vec{n} = 0. \tag{1.33}$$

Итак, мы получили еще два эквивалентных вида записи условия сопряженности направлений $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$.

Пусть $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ – различные главные направления поверхности F в данной точке M. Тогда они перпендикулярны (следовательно, образуют базис направляющего пространства касательной плоскости) и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена в этой точке. Так как вектор $\vec{n}$ во всех точках поверхности F имеет единичную длину (является вектором постоянной длины), его частные производные $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярны $\vec{n}$, а значит, и вектор $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ перпендикулярен $\vec{n}$. Следовательно, вектор $d\vec{n}$ в каждой точке поверхности параллелен касательной плоскости в этой точке. В частности, это выполняется в точке M. Тогда вектор $d\vec{n}$ можно разложить по векторам $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$.

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r} + \mu\delta\vec{r},$$

где λ и μ – некоторые вещественные числа. Умножим скалярно обе части этого равенства на $\delta\vec{r}$. Учитывая равенство (1.33), получим

$$0 = \mu(\delta\vec{r})^2.$$

Так как вектор $\delta\vec{r}$ не нулевой, $\mu = 0$. Тогда

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $d\vec{r}$

$$d\vec{n}d\vec{r} = \lambda(d\vec{r})^2.$$

Вспоминаем, что скалярный квадрат вектора $d\vec{r}$ – это первая квадратичная форма. С другой стороны, из тождества $\vec{n}d\vec{r} = 0$ (вектор нормали к поверхности перпендикуляен вектору, параллельному касательной плоскости) следует, что $d(\vec{n}d\vec{r}) = 0$ или (правило Лейбница) $d\vec{n}d\vec{r} + \vec{n}d^2\vec{r} = 0$, то есть $d\vec{n}d\vec{r} = -\vec{n}d^2\vec{r}$. Последнее скалярное произведение есть вторая квадратичная форма. Тогда число λ есть отношение второй и первой квадратичных форм со знаком минус. А это отношение есть нормальная кривизна, то есть

$$\lambda = \frac{d\vec{n}d\vec{r}}{(d\vec{r})^2} = -\frac{\vec{n}d^2\vec{r}}{(d\vec{r})^2} = -k_n.$$

Обратно, пусть для направления $d\vec{r}$ в точке M выполняется равенство из условия теоремы. Рассмотрим направление $\delta\vec{r}$, параллельное касательной плоскости и перпендикулярное направлению $d\vec{r}$. Умножим скалярно равенство $d\vec{n} = -k_n d\vec{r}$ на вектор $\delta\vec{r}$. Тогда в правой части получим нуль из-за перпендикулярности направлений. Следовательно, $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$. Согласно (1.33) это означает, что направления $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ сопряжены. Получаем, что направление $d\vec{r}$ является главным по определению. □

Линия на поверхности, касательная к которой в каждой точке имеет главное направление, называется *линией кривизны*.

Равенство, которое мы получили как критерий главного направления, можно рассматривать как дифференциальное уравнение, задающее линии кривизны на поверхности.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv & \gamma_{12}du + \gamma_{22}dv \\ b_{11}du + b_{12}dv & b_{12}du + b_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение мы получаем уравнение линий кривизны в виде $u = u(v)$ или $v = v(u)$.

Если точка поверхности не является точкой уплощения или омбилической точкой, то через нее проходят две и только две линии кривизны, причем они взаимно перпендикулярны.

Для точки уплощения любое направление будет асимптотическим и индикатриса Дюпена для такой точки не определена. Поэтому будем по определению считать любую линию, проходящую через точку уплощения, линией кривизны. Для омбилической точки (индикатриса Дюпена – окружность) любое направление будет главным и в каждом направлении будет проходить линия кривизны.

8.2. Главные кривизны.Нормальные кривизны, соответствующие главным направлениям поверхности в данной точке, называются *главными кривизнами*.

Получим уравнение для нахождения главных кривизн. Фиксируем на поверхности F точку M. Будем искать главные кривизны в этой точке. Воспользуемся теоремой Родрига. Пусть $d\vec{r}$ – главное направление в точке M. Обозначим соответствующую ему нормальную кривизну через k (вместо стандартного обозначения k_n). Тогда по теореме Родрига получим $d\vec{n} = -kd\vec{r}$. В развернутом виде это равенство имеет вид

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -k(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv).$$

Умножим скалярно обе части этого равенства сначала на вектор $\vec{r}_u$, а потом на вектор $\vec{r}_v$ и воспользуемся формулами для коэффициентов первой и второй квадратичных форм

$$\begin{aligned} b_{11}du + b_{12}dv &= k(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv) \\ b_{12}du + b_{22}dv &= k(\gamma_{12}du + \gamma_{22}dv). \end{aligned}$$

Рассматривая эти равенства как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных du, dv (они задают главное направление), получаем, что эта система должна иметь ненулевое решение (так как главные направления всегда есть). Это означает, что определитель этой системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{12} - k\gamma_{12} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

В развернутом виде это уравнение принимает вид

$$k^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.34}$$

Главные кривизны k_1 и k_2 являются решениями этого уравнения.

Теорема 1.20. *(Эйлер) Нормальная кривизна k_n, соответствующая произвольному направлению $d\vec{r}$ поверхности, выражается через главные кривизны k_1 и k_2 формулой*

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ – угол между направлением $d\vec{r}$ и направлением $d_1\vec{r}$, которому соответствует кривизна k_1. Эта формула называется формулой Эйлера.

Доказательство. Выберем криволинейные координаты (u, v) так, чтобы они являлись линиями кривизны поверхности (это можно сделать, так как через каждую точку проходит две линии кривизны). Тогда направления $(du, 0)$ и $(0, dv)$ будут главными направлениями. так как эти направления взаимно перпендикулярны, получим

$$0 = (\vec{r}_u du)(\vec{r}_v dv) = \gamma_{12} du dv.$$

Так как du и dv не нули, получаем, что в выбранных криволинейных координатах коэффициент γ_{12} первой квадратичной формы будет равен нулю.

Аналогичным образом из условия сопряженности направлений $(d_1u, 0)$ и $(0, d_2v)$ получим

$$b_{12} d_1u d_2v = 0.$$

Откуда получаем, что $b_{12} = 0$. Таким образом, в криволинейных координатах, в которых линии u и v являются линиями кривизны, первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$I = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2;\ II = b_{11}(du)^2 + b_{22}(dv)^2.$$

При этом главные кривизны k_1 и k_2 соответствуют в данном случае направлениям $(d_1u, 0)$ и $(0, d_2v)$ и вычисляются по формулам

$$k_1 = \frac{b_{11}(d_1u)^2}{\gamma_{11}(d_1u)^2} = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}};\ k_2 = \frac{b_{22}(d_2v)^2}{\gamma_{22}(d_2v)^2} = \frac{b_{22}}{\gamma_{22}}$$

Формула для вычисления нормальной кривизны в произвольном направлении $d\vec{r}(du, dv)$ имеет вид

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Запишем это выражение в виде

$$k_n = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}} \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} + \frac{b_{22}}{\gamma_{22}} \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} = k_1 \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} + k_2 \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}. \quad (1.35)$$

Вычислим косинус угла между направлениями $d\vec{r}(du, dv)$ и $(d_1u, 0)$ (обозначим этот угол φ). Имеем, учитывая, что $\gamma_{12} = 0$,

$$\cos^2 \varphi = \frac{((\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u d_1u))^2}{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 (\vec{r}_u d_1u)^2} = \frac{\gamma_{11}^2 (du)^2 (d_1u)^2}{(\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2)\gamma_{11}(d_1u)^2} = \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Тогда

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Подставляя полученные равенства в (1.35), получим формулу Эйлера. □

Следствие 1.4. Главные кривизны есть наибольшее и наименьшее значения среди всех нормальных кривизн в данной точке поверхности.

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи для главных кривизн k_1 и k_2:

1) $k_1 = k_2$. Тогда по формуле Эйлера $k_n = k_1(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1$. Таким образом, если главные кривизны в точке равны между собой, то им равны и все нормальные кривизны в этой точке (это значит, что точка омбилическая). Формально мы можем назвать в этом случае k_1 и k_2 наименьшей и наибольшей нормальной кривизной (наименьшее совпадает с наибольшем).

2) $k_1 < k_2$. Тогда, заменив $\cos^2 \varphi$ на $1 - \sin^2 \varphi$, запишем формулу Эйлера в виде

$$k_n = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \varphi. \quad (1.36)$$

Второе слагаемое правой части этого равенства строго положительно. Оно принимает наименьшее значение 0 при $\varphi = 0$ и наибольшее значение $k_2 - k_1$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда наименьшее значение правой части равенства равно k_1, а наибольшее равно k_2. Все остальные нормальные кривизны расположены между этими значениями.

3) $k_1 > k_2$. Тогда из формулы (1.36) получаем, что в ее правой части второе слагаемое отрицательно. При этом наибольшее значение правой части соответствует значению $\varphi = 0$, то есть $k_n = k_1$, а наименьшее – значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть $k_n = k_2$. Опять получаем, что k_1 и k_2 наибольшее и наименьшее из значений всех возможных нормальных кривизн. □

8.3. Полная и средняя кривизна. Произведение главных кривизн поверхности в данной точке называется полной кривизной поверхности в этой точке:

$$K = k_1 k_2.$$

Так как k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения (1.34), по теореме Виета получим

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

В знаменателе стоит число $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2$, то есть число положительное, знак полной кривизны K совпадает со знаком числа $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$. А это число есть число Δ для индикатрисы Дюпена в данной точке. Из этого получаем:

1) точка является эллиптической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней больше нуля ($K > 0$);

2) точка является гиперболической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней меньше нуля ($K < 0$);

3) точка является параболической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней равна нулю.

Поверхность, во всех точках которой полная кривизна $K = 0$, называется *развертывающейся.*

Это название связано с тем, что каждый достаточно малый кусок такой поверхности можно деформировать посредством изгибания (то есть сохраняя длины всех линий) в кусок плоскости (то есть развернуть на плоскость). Благодаря такому свойству развертывающиеся поверхности находят широкое применение в технике, поскольку их удобно изготовлять из листового материала (путем надлежащего изгибания плоских листов).

Примерами развертывающихся поверхностей являются цилиндрические и конические поверхности (мы докажем это на семинаре, вычислив их полную кривизну).

Поверхность, в каждой точке которой полная кривизна $K = const$ (то есть одна и та же), называются поверхностями постоянной кривизны.

Примерами поверхностей постоянной кривизны являются сфера и псевдосфера.

Полусумма главных кривизн поверхности в данной точке называется *средней кривизной* поверхности в этой точке.

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

По теореме Виета из уравнения (1.34) получим

$$H = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Название „средняя кривизна“ оправдывается следующим фактом, непосредственно вытекающим из формулы Эйлера: полусумма нормальных кривизн, соответствующих произвольной паре ортогональных направлений, равна средней кривизне поверхности. Действительно,

$$\frac{1}{2}(k_\varphi + k_{\varphi+\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2}(k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi + k_1\cos^2(\varphi + \frac{\pi}{2}) + k_2\sin^2(\varphi + \frac{\pi}{2})) =$$
$$= \frac{1}{2}(k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi + k_1\sin^2\varphi + k_2\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Поверхность, средняя кривизна в каждой точке которой равна нулю, называется *минимальной поверхностью.*

Свойства минимальных поверхностей:

1. Полная кривизна минимальных поверхностей отрицательна.

Действительно, из равенства $0 = H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ получаем, что $k_1 = -k_2$ и $K = k_1k_2 = -(k_1)^2 < 0$.

2. Асимптотические линии минимальной поверхности ортогональны.

Действительно, для минимальной поверхности имеем $k_1 = -k_2$. Тогда по формуле Эйлера

$$k_n = k_1\cos^2\varphi - k_1\sin^2\varphi = k_1\cos 2\varphi.$$

Для асимптотических линий $k_n = 0$. Тогда получим $k_1\cos 2\varphi = 0$. Так как мы исключили из рассмотрения точки уплощения ($k_1 = k_2 = 0$), то из этого следует, что $\cos 2\varphi = 0$. Это уравнение имеет два корня (мы рассматриваем углы от нуля до π) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Другими словами, направление будет асимптотическим ($k_n = 0$) тогда и только тогда, когда угол между ним и одним из главных (k_1) равен $\frac{\pi}{4}$ (или $\frac{3\pi}{4}$). Между этими асимптотическими направлениями угол будет равен $\frac{\pi}{2}$.

3. (без доказательства) Пусть дана поверхность F конечной площади $S(F)$, ограниченная пространственной кривой γ. Если F имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, ограниченных кривой γ, то во всех точках поверхности F средняя кривизна $H = 0$.

Другими словами, поверхность, натянутую на кривую γ и имеющую наименьшую площадь, нужно искать среди минимальных поверхностей. Этим и объясняется название минимальная.

Глава 2. Семинары.

§2.1. Вектор-функция скалярного аргумента.

1.1. Сведения из теории. *Вектор-функция* – это отображение, которое каждому числу t из некоторого числового промежутка U ставит в соответствие вектор, который обозначается $\vec{r}(t)$. Обозначение вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (по аналогии с обозначениями из математического анализа для функций: $y = f(x)$ или $y = y(x)$).

Если фиксирована прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то у вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ появляются координаты – это три скалярные функции, определяемые равенством

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Производная $\vec{r}\,'(t_0)$ (или $\frac{d\vec{r}}{dt}|_{t_0}$) вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Если посчитать производную вектор-функции в каждой точке некоторого интервала $I \subset U$, то получим новую вектор-функцию $\vec{r}\,'(t)$, которая называется производной вектор-функции $\vec{r}(t)$.

На практике этим определением пользоваться почти не будем. Большую часть вычислений производных вектор-функций будем сводить к вычислению производных их координат

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Для производных 2-го и далее порядков все аналогично.

Правила дифференцирования

1. (сумма вектор-функций)

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t) = (\vec{r}_1)'(t) + (\vec{r}_2)'(t);$$

2. (скалярное произведение вектор-функций)

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)'(t) = (\vec{r}_1)'(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(\vec{r}_2)'(t);$$

3. (векторное произведение вектор-функций)

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2]'(t) = [(\vec{r}_1)'(t), \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), (\vec{r}_2)'(t)];$$

4. (произведение скалярной функции на вектор-функцию) Здесь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, $f(t)$ – скалярная функция

$$(f\vec{r})'(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)(\vec{r})'(t);$$

Правили дифференцирования разных видов произведений (пункты 2,3, 4 будем называть правилом Лейбница.

5. (сложная функция) Здесь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, $t = \varphi(\tau)$ – скалярная функция

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r}(\varphi(\tau))\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

1.2. Задачи.

1. Разобрать доказательства, оставленные в лекции.

2. **[Г], стр.214** Пусть дана вектор-функция

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sin^2 t\vec{j} - \cos^2 t\vec{k},\ t \in [0, 2\pi).$$

Докажите, что вектор $\vec{r}\,''(t)$ параллелен плоскости Oyz при всех значениях $t \in [0, 2\pi)$. Найдите вектор, которому будет параллелен вектор $\vec{r}\,''(t)$ при всех значениях $t \in [0, 2\pi)$.

Решение. Находим производную вектор-функции „по-координатно“ . Сначала первую производную:

$$\vec{r}\,'(t) = 1\vec{i} + 2\sin t\cos t\vec{j} + 2\cos t\sin t\vec{k} = 1\vec{i} + \sin 2t\vec{j} + \sin 2t\vec{k}.$$

Затем еще раз дифференцируя, находим вторую производную:

$$\vec{r}\,''(t) = 0\vec{i} + 2\cos 2t\vec{j} + 2\cos 2t\vec{k}.$$

Списываем координаты вектора $\vec{r}\,''(t)(0, 2\cos 2t, 2\cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Фиксируем произвольное $t \in [0, 2\pi)$ и найдем скалярное произведение вектора $\vec{r}\,''(t)$ и вектора $\vec{i}(1, 0, 0)$. Так как у нас фиксирована прямоугольная система координат, а значит ее базис является ортонормированным, и скалярное произведение векторов вычисляется через их координаты по формуле $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$:

$$\vec{r}\,''(t)\vec{i} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2\cos 2t + 0 \cdot 2\cos 2t = 0.$$

Так как плоскость Oyz перпендикулярна вектору $\vec{i}$ и вектор $\vec{r}''(t)$ перпендикулярен вектору $\vec{i}$, получаем, что вектор $\vec{r}''(t)$ параллелен плоскости Oyz.

Напомним, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Посмотрим на вектор $\vec{r}''(t)(0, 2\cos 2t, 2\cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$ – произвольное фиксированное число. Если мы попали на такое t, что $\cos 2t = 0$ (чему равны такие t?), то вектор $\vec{r}''(t) = \vec{0}$. Такой вектор параллелен любому вектору (по определению). Если мы выбрали t, для которого $\cos 2t \neq 0$, то вектор $\vec{r}''(t)$ будет параллелен вектору $\vec{a}(0, 1, 1)$ (из-за пропорциональности координат). Объединяем оба случая и получаем, что для любого $t \in [0, 2\pi)$ вектор $\vec{r}''(t)$ параллелен вектору $\vec{a}(0, 1, 1)$. □

3. **[Г], стр.217** Пусть дана вектор-функция $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi)$. Докажите, что 1) $\vec{r}'(t) = \vec{r}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\vec{r}''(t) = -\vec{r}$.

   Решение. Находим производные и пользуемся формулами приведения:
   $$\vec{r}'(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} = \cos\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)\vec{j}; \quad \vec{r}''(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.$$
   Смотрим на полученные равенства и видим, что мы получаем требуемые соотношения. □

4. **[Г], стр. 216** Найдите производные функций: 1) $|\vec{r}|(t)$, 2) $(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')(t)$.

   Решение. Вспоминаем, какие правила дифференцирования у нас есть: суммы вектор-функций, произведения вектор-функции на обычную функцию, скалярное произведение и векторное произведение вектор-функций. Поэтому нужно выразить то, что нам дано через эти четыре операции с вектор-функциями:
   $$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}(t).$$
   Заметим, что $(\vec{r}\vec{r})(t)$ (скалярное произведение двух вектор-функций) – это обычная функция и взять производную от нее в степени $\frac{1}{2}$ мы можем по обычным правилам математического анализа. Имеем
   $$|\vec{r}|'(t) = \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r})^{-\frac{1}{2}}(t)(\vec{r}\vec{r})'(t) = \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r})^{-\frac{1}{2}}(t)(\vec{r}'(t)\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\vec{r}'(t)) = \frac{1}{2|\vec{r}(t)|}2(\vec{r}\vec{r}')(t) = \frac{(\vec{r}\vec{r}')(t)}{|\vec{r}(t)|}.$$
   Далее, напомним, что смешанное произведение векторов определяется так: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$ (векторно умножаем первые два вектора и полученный вектор скалярно умножаем на третий вектор). Тогда
   $$\begin{aligned}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')'(t) &= ([\vec{r}, \vec{r}']\vec{r}'')'(t) = ([\vec{r}, \vec{r}']'\vec{r}'' + [\vec{r}, \vec{r}']\vec{r}''')(t) = ([\vec{r}', \vec{r}']\vec{r}'' + [\vec{r}, \vec{r}'']\vec{r}'' + [\vec{r}, \vec{r}']\vec{r}''')(t) = \\ &= (0 + 0 + [\vec{r}, \vec{r}']\vec{r}''')(t) = (\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''')(t).\end{aligned}$$
   Здесь мы воспользовались тем, что векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нуль-вектору, то есть $[\vec{r}', \vec{r}'](t) = \vec{0}$, и тем, что каждый из векторов векторного произведения перпендикулярен векторному произведению, то есть $\vec{r}'' \perp [\vec{r}, \vec{r}'']$ и их скалярное произведение равно нулю. □

5. **[Г], стр. 217, 6.7** Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$, где a, b – постоянные числа. Доказать, что длина вектора $\vec{r}''(t)$ постоянна при всех значениях t.

   Решение. Чтобы найти длину вектора $\vec{r}''(t)$, надо сначала найти его самого:
   $$\vec{r}'(t) = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}; \quad \vec{r}''(t) = -a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j}.$$
   Получаем координаты вектора $\vec{r}''(t)(-a\cos t, -a\sin t, 0)$. Так как базис ортонормированный, формула для вычисления длины вектора через его координаты имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$. Применяем ее к вектору $\vec{r}''(t)(-a\cos t, -a\sin t, 0)$.
   $$|\vec{r}''(t)| = \sqrt{(-a\cos t)^2 + (-a\sin t)^2} = |a|.$$
   Мы получили константу. Она не зависит от t, то есть длина вектора $\vec{r}''(t)$ постоянна. □

1.3. Домашнее задание.

1. ([Г], стр. 216, 6.3(а,в,г,е)) Вычислите производные функций 1) $\vec{r}\vec{r}$, 2) $\vec{r}'\vec{r}''$, 3) $[\vec{r}'\vec{r}'']$, 4) $\sqrt{[\vec{r}, \vec{r}']^2}$.

   Ответ. 1) $2\vec{r}\vec{r}'$; 2) $\vec{r}''\vec{r}'' + \vec{r}'\vec{r}'''$; 3) $[\vec{r}', \vec{r}''']$; 4) $\frac{[\vec{r}, \vec{r}']}{\sqrt{[\vec{r}, \vec{r}']^2}}[\vec{r}\vec{r}'']$.

2. ([Г], стр. 217, 6.6 (в,г)) Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi)$. Доказать, что 1) $\vec{r}'''(t) = -\vec{r}'(t)$, 2) $\vec{r}'''\vec{r}' = -1$.

3. ([Г], стр. 217, 6.8) Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, где a – постоянное число, $t \in [0, 2\pi)$. Проверьте справедливость равенств для любого $t \in [0, 2\pi)$: 1) $\vec{r}^2 = (\vec{r}'')^2$, 2) $|\vec{r}'(t)| = |\vec{r}'''(t)|$, 3) $\vec{r}(t) + \vec{r}'(t) + \vec{r}''(t) + \vec{r}'''(t) = \vec{0}$, 4) $\vec{r}(t)\vec{r}''(t) = \vec{r}'(t)\vec{r}'''(t)$.

1.4. Дополнительные задачи.

1. **[Г]6.9** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = \sin 2t\vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j} + 2\cos t\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi)$ лежит на сфере. Найдите радиус сферы.

   Решение. Сначала объясним, что такое траектория вектор-функции. На данный момент в векторном пространстве выбран ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ относительно которого и задана вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t \in U$. Возьмем в точечном пространстве E^3 точку O и фиксируем ее. В результате в E^3 получим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть значение параметра t меняется в промежутке U, тогда вектор-функция $\vec{r}(t)$ для каждого t выдает определенный вектор. Будем откладывать представитель этого вектора от точки O – начала системы координат. Конец представителя каждого из векторов определит точку. Множество всех таких точек называется *траекторией вектор-функции.* Другими словами, представляем себе стрелку, выходящую из начала координат. При изменении t она будет двигаться и своим концом будет описывать траекторию вектор-функции $\vec{r}(t)$.

   Возвращаемся к задаче. Точки кривой будут лежать на сфере тогда и только тогда, когда длина вектора $\vec{r}(t)$ одна и та же при всех значениях t. Фиксируем произвольное $t \in [0, 2\pi)$ и вычисляем длину получившегося вектора

   $$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\sin^2 2t + (1 - \cos 2t)^2 + 4\cos^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos 2t + 4\cos^2 t} = \sqrt{2 - 2(2\cos^2 t - 1) + 4\cos^2 t} = 2.$$

   Итак, длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, следовательно, точки кривой лежат на сфере. Длина этого вектора есть радиус сферы, то есть радиус сферы равен 2. □

2. **[Г]6.13** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q} + \vec{r}_0$, есть эллипс, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны и отрезок прямой, если коллинеарны.

   Решение. Рассмотрим случай, когда $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны. Попробуем представить себе траекторию заданной вектор-функции. От точки O нужно пройти по постоянному вектору $\vec{r}_0$ до точки, которую мы обозначим M_0, а затем двигаться по различным линейным комбинациям векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, доходя до точек M данной траектории. Из этого сразу видим, что траектория данной вектор-функции лежит в плоскости, которая определяется точкой M_0 и парой векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Обозначим ее через α. В этой плоскости введем аффинную систему координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Траектория – это множество точек, а множество точек, в случае наличия системы координат, можно задать уравнением (неравенством, их системой или совокупностью). Напишем уравнение траектории в аффинной системе координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Для обозначения координат в ней нам нужны две буквы. Возьмем греческие буквы ξ и η. По определению координат точки в аффинной системе координат, чтобы найти эти координаты, нам нужно разложить радиус-вектор $\overrightarrow{M_0M}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

   $$\overrightarrow{M_0M} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}.$$

   Найдем вектор $\overrightarrow{M_0M}$. У нас есть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Ее значения при каждом t – это радиус-векторы точки M относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то есть вектор $\overrightarrow{OM}$. Кроме того, вектор $\vec{r}_0$ – это радиус-вектор точки M_0. Тогда

   $$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \vec{r}_0 = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q} + \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q}.$$

   Сравнивая это равенство с предыдущим, получаем, что

   $$\xi = \cos t;\ \eta = \sin t.$$

   Используя основное тригонометрическое тождество, получим

   $$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

   Это уравнение траектории в аффинной системе координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$ (буквы ξ и η играют здесь роль x и y). Первый порыв сказать, что это уравнение окружности. Но это не так. Такой вид уравнение окружности имеет только в прямоугольной декартовой системе координат, а у нас аффинная. Поэтому мы пока только можем сказать, что это линия второго порядка. Линия эллиптического типа (почему?) Пользуемся классификацией линий второго порядка: линий эллиптического типа три – эллипс, мнимый эллипс и пара мнимых пересекающихся прямых. Наше множество не может быть мнимым эллипсом, так как содержит вещественные точки (например, точку $(0, 1)$). Так же не может быть парой мнимых пересекающихся прямых, так как ее центр $(0, 0)$ ей не принадлежит (а у пары мнимых пересекающихся прямых принадлежит). Поэтому мы получили эллипс.

   Постарайтесь самостоятельно разобраться со случаем коллинеарности векторов. □

3. **[Г] 6.14** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q} + \vec{r}_0$, есть эллипс, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны и луч, если коллинеарны.

4. **[Г] 6.15** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = t\vec{p} + t^2\vec{q} + \vec{r}_0$, есть парабола, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны и прямая, если коллинеарны.

§2.2. Гладкие кривые. Длина дуги. Натуральный параметр.

2.1. Сведения из теории. Пусть гладкая кривая γ в трехмерном евклидовом пространстве E^3 задана с помощью векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I,$$

где I – интервал из области определения вектор-функции $\vec{r}(t)$. Чтобы кривая была гладкой, вектор-функция $\vec{r}(t)$ должна иметь все производные по t в каждой точке $t \in I$ и, кроме того, в каждой точке $t \in I$ вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

Если в E^3 фиксировать прямоугольную декартову систему координат, то кривая γ будет задаваться параметрическими уравнениями

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t),\ t \in I.$$

Гладкость кривой означает, что функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют все производные по t для каждого $t \in I$ и первые производные $x'(t), y'(t), z'(t)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке $t \in I$.

Кривая γ может быть задана в неявном виде, как система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Чтобы показать, что эта система уравнений в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ задает гладкую кривую, нужно:

1) проверить, что функции $F(x,y,z)$ и $\Phi(x,y,z)$ имеют частные производные всех порядков по всем переменным;

2) посчитать значения первых частных производных функций $F(x,y,z)$ и $\Phi(x,y,z)$ в точке M_0, составить из них матрицу
$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}$$
и проверить, что ее ранг равен 2.

3) если точка M_0 не указана, то вычислить частные производные по x, y, z и составить из них матрицу; выяснить, в каких точках ранг этой матрицы будет меньше 2 и выкинуть эти точки. Для остальных точек пространства E^3 будут существовать окрестности, в которых данная система уравнений задает гладкую кривую.

Пусть кривая γ задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Длина ее дуги от точки со значением параметра t_1 до точки со значением параметра t_2 вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Натуральным параметром кривой называется длина ее дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

2.2. Задачи.

1. **[А] №942** Пусть γ – пересечение цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z - 1 = 0$. Докажите, что это гладкая кривая и напишите ее параметрические уравнения.

   Решение. Смотрим на условие и видим, что кривая γ задана в неявном виде как пересечение двух поверхностей. Здесь
   $$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1; \quad \Phi(x,y,z) = x + y + z - 1.$$
   Из курса математического анализа мы знаем, что эти функции имеют частные производные любого порядка.

Вычислим первые частные производные:

$$F_x(x,y,z) = 2x; \quad F_y(x,y,z) = 2y; \quad F_z(x,y,z) = 0;$$
$$\Phi_x(x,y,z) = 1; \quad \Phi_y(x,y,z) = 1; \quad \Phi_z(x,y,z) = 1.$$

Так как точка не указана, составляем матрицу из найденных частных производных:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что ранг этой матрицы во всех точках кроме точек $(0,0,z)$ равен 2. Но эти точки не принадлежит кривой γ, так как их координаты не удовлетворяют системе уравнений (сбой в первом уравнении). Следовательно, для любой точки кривой γ ранг матрицы равен 2, то есть кривая γ является гладкой.

Напишем ее параметрические уравнения. Первый способ „в лоб“. В системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

одну из переменных обозначаем через t. Обычно выбирают ту из букв x, y, z, через которую легче выразить остальные две буквы. Пусть $x = t$. Тогда из первого уравнения мы видим, что $-1 \leq x \leq 1$, то есть $-1 \leq t \leq 1$. Выражаем y и z: $y = \pm\sqrt{1-t^2}$, $z = 1 - t \mp \sqrt{1-t^2}$. Следовательно, кривая γ получается как объединение двух кривых

$$\gamma_1 : \ x = t; \ y = \sqrt{1-t^2}; \ z = 1 - t - \sqrt{1-t^2};$$
$$\gamma_2 : \ x = t; \ y = -\sqrt{1-t^2}; \ z = 1 - t + \sqrt{1-t^2}.$$

Эти параметрические уравнения для γ не удобны. Постараемся найти другую, более удобную параметризацию. Для этого заметим (из первого уравнения системы), что $-1 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 1$, следовательно, мы можем обозначить $x = \cos t$, $y = \sin t$. Когда t меняется от 0 до 2π, x, y будут меняться от -1 до 1. В результате выбора такого параметра точки кривой потеряны не будут. Тогда $z = 1 - \cos t - \sin t$. В результате кривая γ будет задаваться следующими параметрическими уравнениями:

$$\gamma : \ x = \cos t; \ y = \sin t; \ z = 1 - \cos t - \sin t; \ t \in [0, 2\pi].$$

□

2. **[Г] 6.23** Напишите параметрические уравнения следующих линий, лежащих в плоскости XOY: а)эллипса; б) гиперболы. Покажите, что это гладкие кривые.

Решение. Начнем с эллипса. Про эллипс, кроме определения, мы знаем каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – это полуоси эллипса. Заметим, что величины $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{a}$ меняются от -1 до 1, а значит, как в предыдущей задаче мы можем обозначить их через $\cos t$ и $\sin t$. Тогда параметрические уравнения эллипса примут вид

$$x = a\cos t; \ y = b\sin t; \ z = 0.$$

Осталось определить, как меняется t. Чтобы указанные уравнения описывали все точки эллипса, нужно, чтобы $t \in [0, 2\pi)$.

Для получения параметрических уравнений гиперболы нам потребуется вспомнить гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \ \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Это соответственно гиперболический косинус и синус. Для этих функций существует аналог основного тригонометрического тождества $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Используя это тождество, из канонического уравнения гиперболы получим

$$x = a\operatorname{ch} t; \ y = b\operatorname{sh} t; \ z = 0.$$

Из определения гиперболического косинуса видно, что при изменении t по всей числовой прямой $\mathbb{R}$, x будем получать только положительные. Значит, эти параметрические уравнения задают только правую ветвь гиперболы. Левая ветвь гиперболы будет задаваться уравнениями

$$x = -a\operatorname{ch} t; \ y = b\operatorname{sh} t; \ z = 0.$$

□

3. **[А]** Докажите, что гладкая кривая

$$\gamma: x = \frac{t}{1+t^2+t^4};\ y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4};\ z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4} \tag{2.1}$$

лежит на сфере с центром в точке $A\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Определите радиус этой сферы.

Решение. Уравнение сферы с центром в точке A будет выглядеть так:

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = r^2. \tag{2.2}$$

Радиус мы не знаем, поэтому обозначили его буквой r. Если точка с координатами (x, y, z) лежит на кривой γ, то x, y, z выражаются через t по формулам (2.1). Если эта точка будет лежать на сфере, то ее координаты должны удовлетворять уравнению сферы (2.2). Подставим их в левую часть этого уравнения и преобразовываем:

$$\frac{t^2}{(1+t^2+t^4)^2} + (\frac{t^2}{1+t^2+t^4} - \frac{1}{2})^2 + \frac{t^6}{(1+t^2+t^4)^2} =$$
$$\frac{4t^2 + (t^2-1-t^4)^2 + 4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2} = \frac{t^8+2t^6+3t^4+2t^2+1}{4(1+t^2+t^4)^2} = \frac{t^8+2t^6+3t^4+2t^2+1}{4(t^8+2t^6+3t^4+2t^2+1)} = \frac{1}{4}.$$

Получаем, что координаты любой точки кривой γ удовлетворяют уравнению сферы с центром в точке A и радиусом $\frac{1}{4}$.

P.S. (для интересующихся). Давайте усложним задачу. Пусть нам не известно, на какой поверхности лежит данная кривая γ. Попробуем найти уравнение этой поверхности из параметрических уравнений кривой γ. А если повезет, то и уравнения обеих поверхностей, которые при пересечении определяют кривую γ. Общий подход к решению подобных задач такой:

> выразить из одного из параметрических уравнений параметр t и подставить в два оставшихся уравнения. В результате получаем два уравнения только с переменными x, y, z. Каждое уравнение задает поверхность. Пересекаясь, поверхности задают кривую.

Но в данной задаче выразить t из какого либо уравнения достаточно сложно. Поэтому приходится придумывать что-то другое. Заметим, что если умножить первое уравнение на третье, то получим второе в квадрате, то есть $xz = y^2$. Это уравнение конической поверхности (почему?). А теперь возведем в квадрат все три параметрических уравнения, сложим их и посмотрим, что получится.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{(1+t^2+t^4)^2} + \frac{t^4}{(1+t^2+t^4)^2} + \frac{t^6}{(1+t^2+t^4)^2} = \frac{t^2(1+t^2+t^4)}{(1+t^2+t^4)^2} = y.$$

Итак, получаем уравнение второй поверхности

$$x^2 + y^2 - y + z^2 = 0.$$

Если выделить полный квадрат для y, то мы убедимся в том, что это уравнение сферы с центром в точке $A\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{4}$.

Таким образом, мы получили неявное задание кривой γ

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x^2 + y^2 - y + z^2 = 0. \end{cases}$$

Это пересечение конической поверхности и сферы. □

4. **[Г]№6.34 а)** Вычислите длину дуги линии $x = 3a\cos t$, $y = 3a\sin t$, $z = 4at$ (a – положительная константа) от точки пересечения с плоскостью Oxy до точки с произвольным значением параметра t. Запишите параметрические уравнения этой линии в естественной параметризации.

Решение. Для применения формулы вычисления длины дуги нам нужно найти значение параметра точки пересечения кривой с плоскостью Oxy. Эта точка имеет третью нулевую координату, то есть $z = 0$. Так как точка принадлежит кривой, получим $0 = 4at$, то есть $t = 0$.

Применяем формулу

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{(-3a\sin t)^2+(3a\cos t)^2+(4a)^2}dt=5a|_0^t=5t.$$

Итак, длина кривой $5t$. Переходим к натуральному параметру $s=5t$, то есть $t=\frac{s}{5}$. Тогда уравнения кривой в естественной параметризации будут иметь вид

$$x=3a\cos\tfrac{s}{5};\quad y=3a\sin\tfrac{s}{5};\quad z=4a\tfrac{s}{5}.$$

□

5. **[Г] 6.27** Прямой круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz, а радиус равен a, вращается вокруг оси с постоянной скоростью. Точка M, лежащая на поверхности цилиндра, движется вдоль образующей с постоянной скоростью b. Написать параметрические уравнения траектории точки M. Это (обыкновенная) *винтовая линия.*

Доказательство. Траектория движения точки – это кривая в пространстве. Обозначим ее γ. Нам нужно написать параметрические уравнения кривой γ, то есть найти зависимость координат (x,y,z) движущейся точки M от параметра t. Посмотрим на t как на время. Пусть в начальный момент времени $t=0$ точка M находилась на оси Ox, то есть имела координаты $(a,0,0)$. Точка M вращается вместе с цилиндром вокруг оси Oz. При этом движении из трех ее координат (x,y,z) меняются только x,y, а z остается неизменной. При этом движении точка M описывает окружность, то есть ее координаты меняются так: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Теперь вспомним, что точка M еще и движется с постоянной скоростью b вдоль оси Oz. При этом движении ее координаты x,y не меняются, а меняется только координата z. Так как скорость движения b, то за время t точка M сдвинется по оси Oz на $z=bt$. Наконец, соединим оба движения вместе:

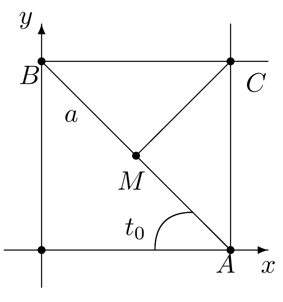
$$x=a\cos t;\ y=a\sin t;\ z=bt.$$

Это и будут искомые параметрические уравнения винтовой линии. При $t=0$ мы получаем точку $(a,0,0)$ (как и требовалось). Мы выводили их для $t\geq 0$, но их можно распространить и для значений $t<0$. □

6. **[С] стр. 58** Лестница AB длины a скользит своими концами по осям прямоугольной декартовой системы координат, которую студенты заботливо натерли мылом. Прямые AC и BC, параллельные координатным осям, пересекаются в точке C, из которой проведен перпендикуляр CM к лестнице AB. Точка M обозначена этой буквой не случайно, поскольку перепуганный монтер, почуяв скольжение лестницы, сползает вместе с ней вниз так, что сливается с точкой M в одно перепуганное целое. Найдите параметрическое задание траектории монтера. Это часть кривой, называемой *астроидой.*

Решение. Обозначим искомую кривую через γ. Сначала заметим, что все действие происходит в плоскости Oxy. У всех точек этой плоскости третья координата равна нулю, а значит и в параметрических уравнениях кривой γ третье уравнение будет иметь вид $z=0$.

Найдем первые два уравнения. Обозначим через t угол наклона лестницы к оси Ox. Тогда $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.



Фиксируем произвольный момент времени t_0. В этот момент времени точки A, B и M имеют координаты в плоскости Oxy следующего вида: $A(a\cos t_0,0)$ и $B(0,a\sin t_0)$, $M(x,y)$. Из подобия треугольников BMC и BCA получим

$$\frac{BM}{BC}=\frac{BC}{BA}\Rightarrow BM=\frac{BC^2}{BA}=\frac{(a\cos t_0)^2}{a}=a\cos^2 t_0.$$

Тогда первая координата точки M: $x=BM\cos t_0$, то есть $x=a\cos^3 t_0$, а вторая координата точки M: $y=a\sin t_0-BM\sin t_0=a\sin^3 t_0$.

Теперь отпускаем точку t_0, стирая у нее нуль. В результате получаем, что траектория монтера задается параметрическими уравнениями

$$x=a\cos^3 t;\ y=a\sin^3 t;\ z=0,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$$

Чтобы получить параметрические уравнения всей астроиды, нужно разрешить параметру t изменяться от нуля до 2π. Из свойств симметрии синуса и косинуса следует, что это кривая симметрична относительно начала координат и осей Ox, Oy. Поэтому чтобы ее изобразить, достаточно нарисовать ее часть, лежащую в первом квадранте. Постройте несколько точек астроиды из первого квадранта и изобразите кривую. □

2.3. Домашнее задание.

1. **[А] №948** Докажите, что кривая $\gamma: x = 1 + \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2\sin\frac{t}{2},\ -2\pi \le t \le 2\pi$ гладкая и лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 2, а также на цилиндрической поверхности $(x-1)^2+y^2 = 1$.

2. **[А] №949** Докажите, что кривая $\gamma: x = a\,tgt,\ y = b\cos t,\ z = b\sin t,\ 0 \le t < \frac{\pi}{2},\ a \neq 0,\ b \neq 0$ лежит на гиперболическом параболоиде.

   P.S. (для интересующихся) Найдите задание кривой γ в неявном виде.

3. **[Г] 6.23** Напишите параметрические уравнения следующих линий, лежащих в плоскости XOY: а) прямой; б) окружности с центром в точке (a, b); в) эллипса; г) гиперболы; д) параболы. Покажите, что это гладкие кривые.

4. **[Г]6.25** Отрезок постоянной длины b скользит своими концами A и B по осям декартовой системы координат Oxy. Точка M делит отрезок в отношении λ. Написать неявные уравнения ее траектории.

5. **[Г]№6.34 г)** Вычислите длину дуги линии $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$ между точками со значениями параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$. Запишите уравнения этой кривой в естественной параметризации.

2.4. Дополнительные задачи.

1. **[Б]№1642** Найдите длину дуги линии $x^3 = 3a^2y,\ 2xz = a^2$ (a – ненулевая константа) между плоскостями $y = \frac{a}{3}$ и $y = 9a$.

2. Найдите длину астроиды.

§2.3. Касательная.

3.1. Сведения из теории. Пусть гладкая кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec r = \vec r(t)$ и дана точка M_0 на ней (обозначим значение соответствующего ей параметра через t_0). Касательной к кривой γ в точке M_0 называется предельное положение секущей. Касательная – это прямая, которая однозначно задается для гладкой кривой точкой M_0 и направляющим вектором $\frac{d\vec r}{dt}(t_0)$ (Вот где пригодилось требование $\frac{d\vec r}{dt} \neq \vec 0$ из определения гладкой кривой. Оказывается оно обеспечивает гладкую кривую в каждой точке единственной касательной).

Плоскость, проходящая через точку $M_0 \in \gamma$ перпендикулярно касательной к кривой γ в этой точке, называется нормальной плоскостью.

Углом между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

В курсе аналитической геометрии была выведена формула для вычисления угла между прямыми: пусть заданы две прямые ℓ_1 (точкой M_1 и направляющим вектором $\vec p$) и прямая ℓ_2 (точкой M_2 и направляющим вектором $\vec q$). Угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\ell_1, \ell_2) = \left|\frac{\vec p\vec q}{|\vec p||\vec q|}\right|.$$

Благодаря модулю, нам не нужно думать, на какие направляющие векторы прямых мы попали, формула всегда считает не тупой угол, образованный данными прямыми.

Пусть даны гладкие кривые γ_1: $\vec r = \vec r_1(t)$ и γ_2: $\vec r = \vec r_2(\tau)$. Пусть они пересекаются в точке M_0. На первой кривой этой точке соответствует значение параметра t_0, а на второй соответствует τ_0. Выведем формулу для вычисления угла между кривыми γ_1 и γ_2 в этой точке. Тогда угол между кривыми будет вычисляться по формуле

$$\cos\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \left|\frac{\frac{d\vec r_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{d\vec r_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}}{\left|\frac{d\vec r_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right|\left|\frac{d\vec r_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right|}\right|.$$

Эта формула еще упрощается, если кривые γ_1 и γ_2 заданы с помощью натуральной параметризации, то есть $\gamma_1 : \vec r = \vec r_1(s_1)$, $\gamma_2 : \vec r = \vec r_2(s_2)$. Как мы доказывали выше, в этом случае длины направляющих векторов касательных равны 1 и выведенной формуле исчезает знаменатель.

3.2. Задачи.

1. **[Г] 6.40 а)** Для кривой $\gamma: x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ написать уравнение касательной, параллельной плоскости $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

Решение. Кривая γ является гладкой кривой во всех своих точках, кроме точки $(0, 0, 0)$ (почему?) Во всех этих точках есть касательные, но не известно в какой именно касательная будет параллельна данной плоскости. Поэтому обозначим координаты точки M_0, удовлетворяющей условию задачи, через $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а значение параметра, который соответствует этой точке, через t_0.

Направляющий вектор $\vec{p}$ касательной – это

$$\left(\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=t_0} \right),$$

то есть

$$((t_0)^3, (t_0)^2, t_0). \tag{2.3}$$

Вспоминаем критерий параллельности вектора и плоскости: вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ параллелен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$.

Применяем критерий параллельности в нашем случае:

$$(t_0)^3 + 3(t_0)^2 + 2t_0 = 0.$$

Откуда находим, что $t_0 = 0$, $t_0 = -1$, $t_0 = -2$, то есть получаем три возможные точки. Но при $t_0 = 0$ точка $M_0 \in \gamma$ имеет координаты $(0, 0, 0)$ (подставили значение $t_0 = 0$ в параметрические уравнения γ). Как мы видели, в этой точке нарушается условие гладкости и там нет касательной (действительно, для $t_0 = 0$ направляющий вектор касательной получается нулевым, а он не определяет прямой). Итак, мы получили два значения: $t_0 = -1$, $t_0 = -2$. Для каждого из них вычисляем координаты точки M_0 и координаты направляющего вектора:

1) $t_0 = -1$. Тогда (подставляем в параметрические уравнения γ) $M_0\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Направляющий вектор (подставляем в (2.3)) $\vec{p}(-1, 1, -1)$.

Уравнения касательной напишем в виде канонических уравнений. Их общий вид для прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}.$$

В нашем случае получим

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}.$$

2) Аналогичные рассуждения для $t_0 = -2$ приводят к следующему ответу:

$$x = 4t + 4;\ y = -2t - \frac{8}{3};\ z = t + 2.$$

Здесь для разнообразия записаны параметрические уравнения касательной. □

2. **[Г] 6.41 а)** Существуют ли точки на кривой $\gamma : x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$, в которых касательная перпендикулярна плоскости $x - 5y + 6z - 7 = 0$?

Решение. Опять обозначаем значение параметра искомой точки через t_0. Координаты направляющего вектора касательной для кривой γ мы уже вычислили в предыдущей задаче. Это (2.3).

Задумаемся, как выразить в виде равенства (равенств) условие перпендикулярности вектора и плоскости. Система координат – прямоугольная декартова, а в ней вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B, C) будет перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ будет перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}$ и $\vec{p}$ параллельны, то есть их координаты должны быть пропорциональны, то есть

$$\frac{p_1}{A} = \frac{p_2}{B} = \frac{p_3}{C}.$$

В нашей задаче вектор $\vec{n}(1, -5, 6)$, $\vec{p}(((t_0)^3, (t_0)^2, t_0)$ и условие параллельности будет иметь вид

$$\frac{(t_0)^3}{1} = \frac{(t_0)^2}{-5} = \frac{t_0}{6},$$

то есть $6(t_0)^3 = t_0$ и $6(t_0)^2 = -5t_0$. В точке со значением параметра $t_0 = 0$ гладкость кривой нарушается, поэтому мы выбрасываем это значение. У нас остаются точки, для которых значения параметра t_0 находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 6(t_0)^2 = 1 \\ 6t_0 = -5 \end{cases}$$

Мы видим, что эта система не совместна, следовательно, точек, в которых касательная к γ перпендикулярна данной плоскости, нет.

P.S. (для интересующихся). Мы увидели пример плоскости, для которой не существует касательной к кривой γ, перпендикулярной этой плоскости. А существуют ли плоскости, для которых есть перпендикулярные касательные? Очевидно, что да. Попробуем найти все такие плоскости.

Чтобы плоскость была перпендикулярна касательной, направляющий вектор касательной должен быть перпендикулярен плоскости, то есть плоскость должна иметь уравнение вида

$$(t_0)^2x + t_0y + z + D = 0.$$

Здесь мы сразу выбросили точку со значением параметра $t_0 = 0$. Для удобства обозначим $t_0 = \lambda$, $D = \mu$. При этом заметим, что λ – любое ненулевое число, μ – произвольное число (это два параметра):

$$\lambda^2x + \lambda y + z + \mu = 0.$$

Говорят, что получено двупараметрическое семейство плоскостей. Например, этому семейству принадлежит плоскость $x + y + z + 2 = 0$. $\square$

3. **[Б]№1650** Пусть кривая γ задана в неявном виде, то есть в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Выведите уравнения касательной и нормальной плоскости к γ, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$.

Решение. Запишем параметрические уравнения кривой γ:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),\ t \in I.$$

Если в правые части этих уравнений подставлять различные значения t, то, вычисляя их, мы будем получать координаты точек кривой γ. Так как эти точки принадлежат γ, подставляя их координаты в уравнения (2.4), мы получаем верные тождества для любых $t \in I$, то есть

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \\ \Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \end{cases}$$

Продифференцируем оба тождества по t (вспоминаем правило дифференцирования сложной функции):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} \equiv 0;\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \equiv 0;$$

Эти тождества верны в любой точке кривой γ, в частности, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (ей соответствует значение параметра t_0), то есть

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} \equiv 0;\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{M_0}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} \equiv 0; \tag{2.5}$$

Добавленные символы означают, что мы сначала считаем производную по соответствующей переменной, а затем подставляем вместо переменных x, y, z соответствующие значения x_0, y_0, z_0, а вместо t – подставляем t_0.

Как мы знаем упорядоченная тройка чисел $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$ является набором координат для направляющего вектора касательной в точке M_0. Если мы обозначим через (X, Y, Z) координаты произвольной точки M, принадлежащей касательной к кривой γ в точке M_0, то вектор $(X - x_0, Y - y_0, Z - z_0)$ будет параллелен вектору $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$, а значит, их координаты будут пропорциональны

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \lambda(X - x_0);\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \lambda(Y - y_0);\ \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = \lambda(Z - z_0),$$

где λ – какое-то ненулевое число. Подставим полученные выражения в (2.5) и сократим на λ:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(X - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(Y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(Z - z_0) = 0; \\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0}(X - x_0) + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0}(Y - y_0) + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{M_0}(Z - z_0) = 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

Обратите внимание, что переменные здесь обозначены не обычно (X, Y, Z), что не меняет их сути – это переменные.

Получим уравнение нормальной плоскости. Для того, чтобы написать уравнение плоскости, нужны точка и вектор нормали (система координат у нас прямоугольная декартова, а значит этот способ вполне допустим). Обозначим искомую плоскость через α. По определению нормальной плоскости $M_0 \in \alpha$, то есть точка у нас есть. Нужен еще нормальный вектор (то есть перпендикулярный плоскости α). Заменим, что касательная в точке M_0 перпендикулярна нормальной плоскости, а значит направляющий вектор касательной – это то, что нам нужно. Осталось считать координаты направляющего вектора касательной из ее уравнений (2.6). Опять вспоминаем 1 курс. Пусть прямая в пространстве задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда направляющий вектор $\vec{p}$ этой прямой имеет следующее разложение по базису

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Применим эту формулу в нашем случае.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

Все есть для написания уравнения плоскости по точке и нормальному вектору. Осталось только вспомнить саму формулу:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0, \tag{2.8}$$

где (n_1, n_2, n_3) – координаты нормального вектора, (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, через которую проходит плоскость. Терпеливому и трудолюбивому читателю предлагаю самостоятельно достать координаты нормального вектора для нашего случая из формулы (2.7), подставить их в формулу (2.8) и получить ответ.

P.S. (для тех, кто не любит долго вычислять). Посмотрим на формулу (2.7) внимательно. Ведь это же координаты векторного произведения векторов, координаты которых стоят во второй и третьей строках! А левая часть формулы (2.8) – это скалярное произведение векторного произведения указанных векторов на вектор с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Векторное произведение двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор – это смешанное произведение этих трех векторов. Для них есть формула для вычисления в ортонормированном базисе:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Применяя ее в нашем случае, сразу выписываем уравнение нормальной плоскости в удобном виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} \end{vmatrix} = 0.$$

□

4. **[Г] 6.41 г)** Существуют ли точки на кривой γ: $z = x^2 + y^2$, $y = x$, в которых касательные перпендикулярны плоскости $2x - y + 3 = 0$?

Решение. Нам нужно написать уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Кривая задана в неявном виде, поэтому применяем выведенные в предыдущей задаче уравнения. В нашем случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $\Phi(x, y, z) = x - y$. Тогда

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2x_0 & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} = 2y_0 & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} = -1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} = 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} = -1 & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} = 0. \end{array}$$

Подставляем в (2.6)

$$\begin{cases} 2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0 \\ (x-x_0)-(y-y_0)=0 \end{cases}$$

Вычисляем направляющий вектор касательной

$$\vec{p}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x_0 & -2y_0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+(-2x_0+2y_0)\vec{k}.$$

Этот вектор должен быть параллелен нормальному вектору плоскости $2x-y+3=0$, то есть вектору $(2,-1,0)$. Вектора параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. В нашем случае получим

$$\frac{-1}{2}=\frac{-1}{-1};\ -2x_0+2y_0=0.$$

Первое равенство противоречиво, то есть точек, в которых касательные перпендикулярны данной плоскости нет. □

5. Пусть на плоскости Oxy дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ (Расстояние между его фокусам c связано с буквами a и b следующим образом $b^2=a^2-c^2$). Как мы знаем, его параметрические уравнения $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=0$, $t\in[0,2\pi)$. Возьмем на эллипсе точку со значением параметра $t_0=\frac{\pi}{4}$. Координаты этой точки (подставляем t_0 в параметрические уравнения) будут $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$. Обозначим ее A. Через точку A проходит единственная гипербола, которая имеет те же фокусы, что и данный эллипс. Такая гипербола называется *софокусной* эллипсу. Покажем, что угол в этой точке между эллипсом и софокусной гиперболой прямой.

Найдем уравнение гиперболы. Сначала заметим, что система координат эллипса будет канонической и для гиперболы (так как фокусы для них одни и те же). Тогда гипербола будет иметь уравнение

$$\frac{x^2}{d^2}-\frac{y^2}{f^2}=1,$$

где d^2 и f^2 нужно выразить через буквы, характеризующие эллипс, то есть через a^2, b^2, c^2. Набираем уравнения для выражения букв d и f. Две буквы – два уравнения. Во-первых, точка A лежит на гиперболе, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, то есть $\frac{a^2}{2d^2}-\frac{b^2}{2f^2}=1$. Во-вторых, так как фокусы у эллипса одни и те же, расстояние между фокусами c для гиперболы будет удовлетворять равенству $f^2=c^2-d^2$. Решаем полученную систему уравнений относительно d^2 и f^2. Получим 1) $d^2=a^2$ и $f^2=c^2-a^2$. Но последнее равенство противоречиво ($c<a$). Его откидываем. 2) $d^2=\frac{c^2}{2}$ и $f^2=\frac{c^2}{2}$. Тогда уравнение софокусной гиперболы, проходящей через точку A будет иметь вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)}-\frac{y^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)}=1.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям линий:
эллипс: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=0$;
гипербола: $x=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau$, $y=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau$, $z=0$.
Обратите внимание, что у гиперболы параметр мы обозначили другой буквой, так как параметр у эллипса и параметр у гиперболы никак не зависят друг от друга. Точке A на гиперболе соответствует значение параметра $\tau=\tau_0$. Чему оно конкретно равно, мы пока не знаем. Находим направляющие вектора касательных в точке A.

$$\text{эллипс: }\vec{p}(-a\cos\frac{\pi}{4},b\sin\frac{\pi}{4});\ \text{гипербола: }\vec{q}(\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0,\ \frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0).$$

Напомним, что мы должны доказать, что эллипс и гипербола перпендикулярны, то есть скалярное произведение направляющих векторов касательных равно нулю. Вычисляем (помним, что в пространстве у нас фиксирована прямоугольная декартова система координат, базис у нее ортонормированный)

$$-a\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0+b\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0=$$

Встает вопрос, чему равен τ_0? Даже достаточно найти $\operatorname{ch}\tau_0$ и $\operatorname{sh}\tau_0$. Вспоминаем, что τ_0 – значение параметра для точки A на гиперболе. Следовательно, если подставить τ_0 в параметрические уравнения гиперболы, то получим координаты точки A, которые (из параметрических уравнений эллипса) равны $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$. Тогда $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0$, $\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0$. Откуда находим $\operatorname{ch}\tau_0=\frac{a}{c}$, $\operatorname{sh}\tau_0=\frac{b}{c}$. Подставляем эти выражения в прерванную цепочку равенств

$$=-\frac{ac}{2}\frac{b}{c}+\frac{bc}{2}\frac{a}{c}=0.$$

Итак, мы показали, что данный эллипс и софокусная гипербола в точке A перпендикулярны.

P.S. (для интересующихся) Если мы возьмем любую другую точку эллипса, то через нее также проходит единственная софокусная гипербола. Какой угол она будет образовывать с эллипсом в точке их пересечения?

3.3. Домашнее задание.

1. **[Г]6.40 б)** Для кривой $\gamma : x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ написать уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

2. **[Г]6.41 б)** Существуют ли точки на кривой $\gamma : x = t,\ y = t^3,\ z = t^2 + 4$, касательные в которых перпендикулярны плоскости $4x + 4y + 12z + 1 = 0$?

3. **[Г]6.43** Доказать, что касательная к кривой γ: $x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ во всех ее точках образует постоянный угол с вектором $\vec{p}(1, 0, 1)$. А нормальная плоскость?

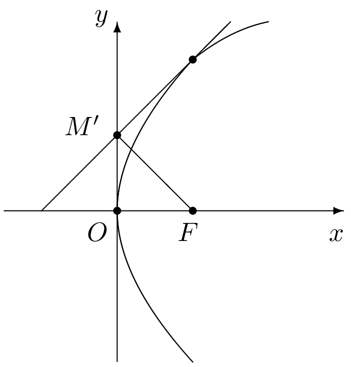
4. **[Г]6.44** Докажите, что линия $x = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t,\ y = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t,\ z = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$ лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и пересекает его образующие под углом 45^0.

3.4. Дополнительные задания. Пусть даны линия γ и точка C. Обозначим через M' ортогональную проекцию точки C на касательную MT к линии γ в точке $M \in \gamma$. Фигура $\gamma' = \{M',\ M \in \gamma$, состоящая из всех точек M', называется *подэрой* линии γ относительно точки C.

1. **[Б]№1638** Найти подэру параболы относительно ее фокуса.

Решение. Начнем с того, что зададим параболу γ с помощью уравнений. Пусть парабола лежит в плоскости Oxy. В этой плоскости каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где p – это фокальный параметр параболы (расстояние от фокуса до директрисы). Уравнение самой плоскости Oxy в пространстве имеет вид $z = 0$. Тогда точка пространства $M(x, y, z)$ будет принадлежать параболе тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений $y^2 = 2px$ и $z = 0$. Это и будет неявным заданием параболы в пространстве.

Теперь обратимся к определению подэры. Там сказано, что нам нужно делать дальше: во-первых, записать уравнение касательной в произвольной фиксированной точке параболы; во-вторых, написать уравнение прямой, перпендикулярной касательной и проходящей через фокус F; в-третьих, найти координаты точки пересечения касательной и перпендикулярной ей прямой. Координаты этих точек будут удовлетворять каким-то уравнениям (их и надо найти). Эти уравнения и будут уравнениями подэры.



Обозначим через $M_0(x_0, y_0, 0)$ произвольную точку на параболе и фиксируем ее. Третью координату сразу обозначаем нулем, так как все точки параболы лежат в плоскости Oxy, а там третьи координаты нулевые. Уравнение касательной в точке M_0 будет иметь вид (проведите вычисления самостоятельно)

$$\begin{cases} -2p(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Так как $M_0 \in \gamma$, получим $y_0^2 = 2p_0$ и первое уравнение касательной упростится: $y_0 y = p(x + x_0)$.

Уравнение прямой $\ell \subset Oxy$, проходящей через точку $F(\frac{p}{2}, 0)$ перпендикулярно касательной будет иметь уравнение $\left(x - \frac{p}{2}\right) y_0 + py = 0$ (проведите вычисления самостоятельно). Точка $M'(x, y, z)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} y_0 y = p(x + x_0) \\ \left(x - \frac{p}{2}\right) y_0 + py = 0 \\ y_0^2 = 2px_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Нам нужно из этих уравнений получить уравнения на x, y, z, а все лишние буквы убрать (не должно быть координат точки M_0). Заметим, что при этом должно остаться два уравнения, чтобы задать подэру (это ведь линия) в неявном виде. Для этого выразим x_0 и y_0 из первых двух уравнений и подставим в третье. В результате получим, что останется два уравнения: $x(y^2 + (x - \frac{p}{2})^2) = 0$ и $z = 0$. В первом уравнении в левой части в скобках стоит положительная величина, так как точка $(\frac{p}{2}, 0)$ не может быть основанием перпендикуляра, опущенного на касательную), следовательно, на эту величину можно сократить. Таким образом, уравнения подэры параболы относительно ее фокуса будет иметь вид: $x = 0$, $z = 0$. Это прямая, а именно ось Oy.

P.S. (для интересующихся) Мы получили очень красивый ответ для фокуса: сложно определяемое множество точек вдруг оказалось простой прямой. А какими множествами будут подэры параболы относительно других точек. Будут ли среди точек плоскости Oxy такие же хорошие точки, как фокус? Выведите уравнение подэры параболы относительно вершины (получится кривая, называемая циссоидой Диокла). Какие подэры будут у эллипса и гиперболы относительно их фокусов? А относительно других точек?

Легко видеть, что подэра окружности относительно ее центра есть сама окружность (подэра окружности относительно других точек – кривая, которая называется улиткой Паскаля); подэра прямой относительно любой точки, не лежащей на ней, есть сама прямая. А интересно, есть ли еще линии, которые совпадают со своими подэрами? □

2. **[Г]6.42** Найдите линию, по которой касательные к кривой $\vec{r} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}e^t$, $t \in \mathbb{R}$, пересекают плоскость Oxy.

Решение. Фиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда точка $M_0(\cos t_0, \sin t_0, e^{t_0}) \in \gamma$. Напишем уравнение касательной к γ в точке M_0. Для этого ищем направляющий вектор касательной в этой точке

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} = -\vec{i}\sin t_0 + \vec{j}\cos t_0 + \vec{k}e^{t_0}.$$

Пишем канонические уравнения касательной

$$\frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0} = \frac{y-\sin t_0}{\cos t_0} = \frac{z-e^{t_0}}{e^{t_0}}.$$

Точка пересечения (x, y, z) касательной и плоскости Oxy определяется системой

$$\begin{cases} \frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0} = \frac{y-\sin t_0}{\cos t_0} = \frac{z-e^{t_0}}{e^{t_0}} \\ z = 0 \end{cases}$$

Отпустим точку t_0 бегать по кривой γ (чтобы подчеркнуть это обозначим ее через t) и выразим x, y, z через параметр t. Это будут параметрические уравнения искомой кривой.

$$x = \cos t + \sin t; \quad y = \sin t - \cos t; \quad z = 0;\ t \in \mathbb{R}.$$

Выясним, что это за кривая. Очевидно, что она плоская (лежит в плоскости Oxy). Тогда нам достаточно получить ее уравнение в этой плоскости с использованием координат x, y. Первые два уравнения мы можем записать в виде

$$x = \sqrt{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t) = \sqrt{2}\cos(t - \tfrac{\pi}{4});$$
$$y = \sqrt{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t) = \sqrt{2}\sin(t - \tfrac{\pi}{4}$$

Возводя в квадрат обе части уравнений и складывая, получим $x^2 + y^2 = 2$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. □

3. **[Г] 6.42 а)** Найдите линию, по которой пересекают плоскость Oxy касательные к кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

4. Напишите уравнения нормальных плоскостей к кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$, проходящих через точку $(0, 0, 1)$. Обратите внимание, что точка не лежит на кривой.

5. **[А]№947** Докажите, что кривая $x = t^2\cos t$, $y = t^2\sin t$, $z = t^2$, $t > 0$ гладкая и лежит на конической поверхности. Определите угол между этой кривой и образующей конуса в точке со значением параметра $2\sqrt{6}$.

6. Эллипс и гипербола называются софокусными, если они имеют одну и ту же пару фокусов. Найдите угол между софокусными эллипсом и гиперболой.

   Указания. Фокусы в точках c и $-c$, полуоси a и $\tilde{a}$ соответственно (эллипс и гипербола) Тогда $b^2 = a^2 - c^2$, $\tilde{b}^2 = c^2 - \tilde{a}^2$. решаем систему канонических уравнений и находим точку пересечения $(\frac{a\tilde{a}}{c}, \frac{b\tilde{b}}{c})$. Параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, гиперболы $x = \tilde{a}\,\mathrm{ch}\,t$, $y = \tilde{b}\,\mathrm{sh}\,t$. Для точки пересечения $\cos t = \frac{\tilde{a}}{c}$, $\sin t = \frac{\tilde{b}}{c}$, $\mathrm{ch}\,t = \frac{a}{c}$, $\mathrm{sh}\,t = \frac{b}{c}$. Касательные векторы $(-a\sin t, b\cos t)$ и $\tilde{a}\,\mathrm{sh}\,t, \tilde{b}\,\mathrm{ch}\,t)$ в скалярном произведении в точке пересечения дают нуль.

§2.4. Кривизна кривой. Репер Френе.

4.1. Сведения из теории. В этой теме нужно уметь находить направляющие векторы касательной, главной нормали и бинормали, а также писать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей.

Направляющий вектор касательной – это первая производная правой части векторного параметрического уравнения, то есть $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Если кривая задана относительно натурального параметра, то этот вектор всегда будет единичным.

Два способа вычисления направляющего вектора бинормали:
1) (произвольная параметризация) $\vec{p} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$;
2) (естественная параметризация) $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$. Здесь всегда будет единичный вектор.

Хуже всего обстоит дело с направляющим вектором главной нормали. К сожалению, вторая производная вектор-функции, задающей кривую, будет направляющим вектором главной нормали (причем еще и не единичным) только для естественной параметризации. Поэтому находить направляющий вектор главной нормали можно двумя способами:
1) Перейти к естественной параметризации (в общем случае бывает сложно – не берутся интегралы) и вычислять вторую производную, то есть $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Это будет нужный вектор.
2) Не переходя к естественной параметризации, вычислить направляющий вектор касательной $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Затем вычислить вторую производную $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ и найти векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}]$. Это будет направляющий вектор бинормали. Обозначим его $\vec{q}$. Тогда векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{q}]$ будет вектором, перпендикулярным и касательной и бинормали, то есть будет параллелен главной нормали. Если нужно, его можно сделать единичным. Это будет орт главной нормали.

Общее уравнение соприкасающейся плоскости к кривой γ заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (со значением параметра $t = t_0$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Нормальная плоскость задается параллельными ей векторами главной нормали и бинормали. Так как вектор главной нормали искать трудно, на нормальную плоскость лучше задать как плоскость перпендикулярную касательному вектору. Так как фиксированная система координат является прямоугольной декартовой, то здесь работает уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором: $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$.

Спрямляющая плоскость задается параллельными ей векторами касательной и бинормали. Находить мы их умеем и уравнение этой плоскости записывается по точке и паре параллельных ей векторов.

4.2. Задачи.

1. Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ относительно произвольного параметра t. Фиксируем на кривой γ точку M_0 (значение параметра $t = t_0$). Докажите, что векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=t_0}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=t_0}$ параллельны соприкасающейся плоскости этой кривой в точке M_0.

   Доказательство. Пусть кривая γ в натуральной параметризации задается уравнением $\vec{r} = \vec{R}(s)$. Тогда два параметра s и t связаны с помощью функции $s = \varphi(t)$ и $\vec{r}(t) = \vec{R}(\varphi(t))$. Точке M_0 в первой параметризации соответствует значение параметра t_0, а в естественной параметризации – значение параметра $s = s_0$ ($s_0 = \varphi(t_0)$). Считаем первую производную $\vec{r}(t)$ по t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{d\varphi}{dt}$$

   и находим ее значение в точке со значением параметра $t = t_0$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \frac{d\vec{R}}{ds}\bigg|_{s=\varphi(t_0)} \frac{d\varphi}{dt}\bigg|_{t=t_0}.$$

   Мы видим, что векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d\vec{R}}{ds}$ в точке M_0 параллельны, следовательно вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ параллелен соприкасающейся плоскости.

   Находим вторую производную $\frac{d^2\vec{r}}{dt}$:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{ds}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{R}}{ds^2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

и опять находим ее значение в точке M_0:

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^2\vec{R}}{ds^2}\right|_{s=\varphi(t_0)} \left.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right|_{t=t_0} + \left.\frac{d\vec{R}}{ds}\right|_{s=\varphi(t_0)} \left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=t_0}.$$

Вектор $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ в точке M_0 является линейной комбинацией векторов $\frac{\vec{R}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{R}}{ds^2}$ в этой же точке, то есть тоже параллелен соприкасающейся плоскости. □

2. **[А]№982** Докажите, что все бинормали кривой $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $z = e^{-\frac{t^2}{2}}$ пересекают ось Oz.

Решение. Возьмем произвольную точку M на кривой γ (ей соответствует значение параметра t) и зафиксируем ее. Нам нужно найти какой-нибудь направляющий вектор бинормали. Обозначим его $\vec{p}$. Воспользуемся формулой для вычисления направляющего вектора бинормали в произвольной параметризации. Для этого нам потребуется первая и вторая производные вектор-функции $\vec{r}(t)$. Вычисляем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (t\cos t)\vec{i} + (t\sin t)\vec{j} - te^{-\frac{t^2}{2}}\vec{k}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\cos t - t\sin t)\vec{i} + (\sin t + t\cos t)\vec{j} + (-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2e^{-\frac{t^2}{2}})\vec{k}.$$

Находим вектор $\vec{p}$ по формуле для вычисления векторного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t\cos t & t\sin t & -te^{-\frac{t^2}{2}} \\ \cos t - t\sin t & \sin t + t\cos t & -e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2e^{-\frac{t^2}{2}} \end{vmatrix} = t^2e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos t + t\sin t)\vec{i} - t^2e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos t - t\sin t)\vec{j} + t^2\vec{k}.$$

Заметим, что вектор $\vec{q} = t^{-2}e^{\frac{t^2}{2}}$ также будет параллелен бинормали. Здесь мы разделили на t^2, что нельзя делать, если $t = 0$. Но, взглянув на касательный вектор в точке со значением параметра $t = 0$, мы видим, что в этой точке нарушается условие гладкости кривой, а значит эта точка исключается из рассмотрения.

Итак, бинормаль в точке $M(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, e^{-\frac{t^2}{2}})$ имеет направляющий вектор $\vec{q}(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, e^{\frac{t^2}{2}})$.

Напомним, что в курсе аналитической геометрии были критерии для взаимного расположения двух прямых в пространстве. Если прямые $a = (A, \vec{a})$ и $b = (B, \vec{b})$ (то есть прямые a и b задаются соответственно точками A и B, а также направляющими векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$), то они пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ компланарны. Также вспомним, что параллельность векторов можно обнаружить по пропорциональности их координат, а компланарность векторов – по равенству нулю определителя составленного из их координат. Применим эти воспоминания в нашем случае.

Бинормаль уже задана точкой M и направляющим вектором $\vec{q}$. Зададим ось Oz аналогичным образом. На ней удобно взять точку $O(0,0,0)$ и направляющий вектор $\vec{k}(0,0,1)$. Сравнивая координаты векторов $\vec{q}$ и $\vec{k}$, мы видим, что эти векторы не параллельны. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\vec{q}$, $\vec{k}$, $\overrightarrow{OM}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos t + t\sin t & \sin t - t\cos t & e^{\frac{t^2}{2}} \\ \cos t + t\sin t & \sin t - t\cos t & e^{-\frac{t^2}{2}} \end{vmatrix} = (t\sin t + \cos t)(\sin t - t\cos t) - (\sin t - t\cos t)(t\sin t + \cos t) = 0$$

Итак, мы получили, что все бинормали кривой γ пересекают ось Oz. □

3. **[А]№996** От каждой точки кривой $x = \cos t$, $y = t$, $z = \sin t$ в положительном направлении главной нормали отложены отрезки длиной $\ell = 1$. Найдите уравнение кривой, образованной концами этих отрезков.

Доказательство. В этой задаче нужно нужно работать с ортом главной нормали (нам важно его направление, так как откладывать единичные отрезки нужно в том направлении, в котором он показывает). Поэтому придется перейти к натуральному параметру.

Перейдем для данной кривой γ к натуральному параметру (напомним, что $s = \int_0^t \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$:

$$s = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t}dt = \sqrt{2}t.$$

Тогда уравнения кривой γ относительно натурального параметра s будут иметь вид

$$\gamma: \, x = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \, y = \frac{s}{\sqrt{2}}, \, z = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}.$$

В такой параметризации направляющий вектор главной нормали – это вторая производная по s. Находим ее.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = -\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Находим его орт (вычисляем его длину и делим).

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\vec{\nu}$ – орт вектора главной нормали будет иметь вид

$$\vec{\nu}(s) = -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} - \sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Найдем вектор-функцию, которая будет задавать искомую кривую γ_1. Чтобы прийти в точку кривой γ_1 нужно сначала от точки O (начало фиксированной прямоугольной декартовой системы координат в трехмерном евклидовом пространстве) пройти по вектору $\vec{r}(s)$ до точки кривой γ, а затем по вектору $\vec{\nu}(s)$ дойти до точки на кривой γ_1. В результате мы получаем вектор-функцию

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(s) + \vec{\nu}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Это прямая, а именно ось Oy. Заметим, что для нее параметр s уже не будет натуральным (докажите это самостоятельно).

P.S. (для интересующихся) Ответ ожидаемый. Исходная линия γ – это винтовая линия, она накручивается на прямой круговой цилиндр радиуса 1 (посмотрите на уравнение кривой и вспомните, как от параметрических уравнений кривой перейти к неявным уравнениям). Главные нормали будут перпендикулярны оси цилиндра, орт вектора главной нормали будет направлен внутрь цилиндра. Если от каждой точки винтовой линии γ отложить орт главной нормали, то их концы в точности попадут на ось цилиндра.

А что будет, если сдвинуться по орту главной нормали еще на 1, то есть отложить от точки кривой по направлению орта главной нормали отрезки длины 2? Что это за кривая?

что интересного можно сказать о бинормалях винтовой линии? Какая линия получится, если в положительном направлении каждой бинормали отложить отрезок постоянной длины? □

4. **[A] №973** Покажите, что нормальные плоскости кривой $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\cos t$ проходят через одну точку. Найдите координаты этой точки.

Доказательство. Вспоминаем, что нормальная плоскость – это плоскость, параллельная векторам главной нормали и бинормали. Вектор главной нормали искать достаточно трудно. Поэтому постараемся посмотреть на нормальную плоскость с другой стороны. Эта плоскость перпендикулярна направляющему вектору касательной, причем все равно единичный вектор мы берем или нет. Он вычисляется в произвольной параметризации (правда не всегда попадем на единичный вектор, но это и не важно в данной задаче). Поэтому нормальную плоскость будем задавать с помощью уравнения по точке и перпендикулярному вектору.

Находим направляющий вектор касательной:

$$x'(t) = 2a\sin t\cos t; \; y'(t) = a(\cos^2 t - \sin^2 t); \; z'(t) = -a\sin t.$$

Тогда применяя формулу $(x-x_0)n_1+(y-y_0)n_2+(z-z_0)n_3 = 0$ для уравнения плоскости по точке (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярному вектору (n_1, n_2, n_3), получим, что уравнение нормальной плоскости, проходящей через точку $M(a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ перпендикулярно вектору $(2a\sin t\cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a\sin t)$ имеет вид

$$(2\sin t\cos t)x + (\cos^2 t - \sin^2 t)y - \sin tz = 0.$$

Мы видим, что все такие плоскости проходят через точку с координатами $(0, 0, 0)$, то есть через начало фиксированной прямоугольной декартовой системы координат. □

5. **[А]№984** Из произвольной точки кривой $z = \frac{x^2}{3}$, $xy = 1$ опущен перпендикуляр на ось Ox. Покажите, что бинормаль кривой в этой точке образует с перпендикуляром прямой угол.

   Решение. Заметим сначала, что кривая в этой задаче задана в неявном виде, а с бинормалью мы умеем работать только при параметрическом задании кривой (вид параметризации не важен). Поэтому придется переходить к параметрическим уравнениям. Применяем самый простой способ: одну (удобную) букву обозначаем через t, а две остальные выражаем через нее.

$$x = t;\ y = t^{-1};\ z = \frac{1}{3}t^2,\ t \neq 0.$$

   Нужно найти угол между бинормалью и перпендикуляром. Значит нужны направляющие векторы бинормали (все равно какой) и перпендикуляра. Сначала найдем направляющий вектор бинормали. Хотя параметризация у кривой произвольная, первая и вторая производные правой части ее векторного параметрического уравнения будут параллельны соприкасающейся плоскости и их векторное произведение будет направляющим вектором бинормали (напомним, что бинормаль перпендикулярна соприкасающейся плоскости). Вычисляем

$$\begin{array}{lll} x'(t) = 1; & y'(t) = -t^{-2}; & z'(t) = \frac{2}{3}t \\ x''(t) = 0; & y''(t) = 2t^{-3}; & z''(t) = \frac{2}{3}. \end{array}$$

   Возиться с дробями не хочется, поэтому перейдем от найденных векторов к коллинеарным им векторам (каждый умножим на 3, а второй еще разделим на 2). При этом их векторное произведение не перестает быть параллельным бинормали. Вычисляем векторное произведение.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3t^{-2} & 2t \\ 0 & 3t^{-3} & 1 \end{vmatrix} = -9t^{-2}\vec{i} - 3\vec{j} + 9t^{-3}\vec{k}.$$

   Итак, направляющий вектор бинормали $\vec{p}(3t, t^3, -3)$, $t \neq 0$ (опять чтобы не возиться с дробями мы разделили на -3 и умножили на t^3).

   Теперь найдем направляющий вектор перпендикуляра, опущенного из точки $M(t, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$ кривой на ось Ox. Обозначим основание перпендикуляра через H. Так как точка H лежит на оси Ox, вторая и третья координаты у нее нулевые, а первую мы не знаем. Поэтому обозначим ее через a, то есть $H(a, 0, 0)$. Нужно найти a. А что это означает в данной задаче? Ситуация такая: точка M движется по данной кривой γ (то есть меняется значение параметра t, его подставляем в параметрические уравнения γ и вычисляем координаты точки M). Вместе с точкой M двигается перпендикуляр MH, а значит и точка H. Ее положение также однозначно определяется значением параметра t. Таким образом, нам нужно выразить неизвестное a через t. Воспользуемся тем, что $\overrightarrow{HM}(t-a, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$ перпендикулярно Ox, то есть вектору $\vec{i}(1,0,0)$. По формуле для вычисления скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе получаем $(t-a)1 = 0$, то есть $a = t$. Итак, $H(t, 0, 0)$. А нам нужен направляющий вектор перпендикуляра. Годится вектор $\overrightarrow{HM}$. Его координаты $(0, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$.

   Направляющие векторы бинормали и перпендикуляра на ось Ox есть, вычисляем их скалярное произведение

$$(3t)0 + (t^3)t^{-1} + (-3)\frac{1}{3}t^2 = 0.$$

   Скалярное произведение нуль, следовательно, векторы перпендикулярны. □

4.3. Домашнее задание.

1. **[А]№978** Покажите, что все нормальные плоскости кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ проходят через некоторую фиксированную точку. Определите координаты этой точки.
2. **[А]№987** На кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ найдите значения параметров точек, главные нормали в которых пересекают ось Ox.
3. **[А]№986** Напишите уравнение главной нормали винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(a > 0$, $b > 0)$ и покажите, что все главные нормали этой линии лежат на поверхности $y = x\frac{b}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{b}$.
4. Покажите, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ параллельны плоскости Oxy.

4.4. Дополнительные задачи.

1. **[А] №997** От каждой точки кривой $x = \cos\alpha\cos t$, $y = \cos\alpha\sin t$, $z = t\sin\alpha$, $\alpha = const$ на бинормалях отложены отрезки единичной длины. Определите угол θ, под которым бинормали новой кривой, образованной концами этих отрезков, пересекают бинормали заданной кривой.
2. **[А]№980** Дана кривая $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Докажите, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к этой кривой в любой ее точке имеет постоянное направление.

§2.5. Кривизна и кручение линии. Формулы Френе.

5.1. Сведения из теории. Формулы Френе для линии, заданной в натуральной параметризации $\vec{r} = \vec{r}(s)$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s);\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s);\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Формулы для вычисления кривизны и кручения для линии, заданной векторным параметрическим уравнением в произвольной параметризации

$$k(t) = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}; \quad \varkappa(t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

1. Линия является прямой (или ее частью) тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кривизна равна нулю.
2. Линия является плоской тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кручение равно нулю. При этом линия лежит в своей соприкасающейся плоскости.

Воспоминания из аналитической геометрии:
1. Формула для вычисления векторного произведения векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Формула для вычисления длины вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

3. Формула для вычисления смешанного произведения векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5.2. Задачи.

1. **[Г] 6.58 а)** Найдите кривизну и кручение кривой $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ в произвольной ее точке.

   Решение. Для вычисления кривизны и кручения есть формулы. Чтобы применить их, нужно вычислить первую, вторую и третью производные вектор-функции, задающей кривую. Вычисляем

$$\begin{array}{lll} x'(t) = e^t; & y'(t) = -e^{-t}; & z'(t) = \sqrt{2}; \\ x''(t) = e^t; & y''(t) = e^{-t}; & z''(t) = 0; \\ x'''(t) = e^t; & y'''(t) = -e^{-t}; & z'''(t) = 0. \end{array}$$

   Вычисляем векторное произведение

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-\sqrt{2}e^{-t}) - \vec{j}(-\sqrt{2}e^t) - \vec{j}(-\sqrt{2}e^t) + 2\vec{k}.$$

   Вычисляем длину этого вектора

$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = 2\sqrt{2}ch\,t.$$

   Вычисляем длину вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = 2ch\,t.$$

   Вычисляем по формуле кривизну кривой

$$k(t) = \frac{2\sqrt{2}ch\,t}{(2ch\,t)^3} = \frac{\sqrt{2}}{4ch^2\,t}.$$

Для кручения нужно посчитать смешанное произведение

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}.$$

Наконец, вычисляем кручение

$$\varkappa(t) = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}ch\,t)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4ch^2\,t}.$$

□

2. Найдите кривизну и кручение линии, заданной неявно уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $x - z + 2 = 0$ в точке $(1, 0, 3)$.

Доказательство. Вычислять кривизну и кручение для кривой, заданной неявно, мы не умеем. Поэтому либо нужно выводить новые формулы, либо переходить к параметрическому заданию кривой. Выберем второй путь. Параметрические уравнения данной кривой имеют вид

$$x(t) = \cos t;\ y(t) = \sin t;\ z(t) = 2 + \cos t.$$

Для кручения мы можем сразу дать ответ (какой и почему?) Остается вычислить две производные, необходимые для нахождения кривизны.

$$\begin{array}{lll} x'(t) = -\sin t; & y'(t) = \cos t; & z'(t) = -\sin t \\ x''(t) = -\cos t; & y''(t) = -\sin t; & z''(t) = -\cos t. \end{array}$$

Так как нам нужно вычислить кривизну в конкретной точке, дальнейшие вычисления мы можем проводить только для векторов в этой точке. Для этого вычислим значение параметра t, которое соответствует точке $(1, 0, 3)$. Подставляем в параметрические уравнения: $1 = \cos t$, $0 = \sin t$, $3 = 2 + \cos t$. Откуда получаем, что $t = 0$. Тогда координаты векторов первой и второй производных в точке со значением параметра $t = 0$ имеют вид

$$\begin{array}{lll} x'(0) = 0; & y'(0) = 1; & z'(0) = 0 \\ x''(0) = -1; & y''(0) = 0; & z''(0) = -1. \end{array}$$

Вычислим векторное произведение этих векторов

$$\left[\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}.$$

Длина этого вектора $\sqrt{2}$. Длина вектора

$$\left|\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0}\right| = 1.$$

Тогда кривизна в точке $(1, 0, 3)$ равна $k(0) = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$. □

3. **[Г] 6.60 б)** Докажите, что линия $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 2$, $z = t^3$ плоская и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.

Решение. Чтобы убедиться, что линия плоская, нам нужно посчитать ее кручение. Оно должно быть равно нулю во всех точках этой линии. Для кручения нам нужны три производные. Начинаем вычисления с них.

$$\begin{array}{lll} x'(t) = 2t & y'(t) = 2t & z'(t) = 3t^2 \\ x''(t) = 2 & y''(t) = 2 & z''(t) = 6t \\ x'''(t) = 0 & y'''(t) = 0 & z'''(t) = 6 \end{array}$$

Посмотрим на формулу для вычисления кручения: это дробь. Дробь будет нулем тогда и только тогда, когда нулем будет ее числитель. Значит, знаменатель нас не интересует и вычислять векторное произведение не нужно. Вычисляем числитель, то есть смешанное произведение производных

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6(4t - 4t) = 0.$$

Итак, мы убедились, что линия действительно плоская. Напишем уравнение плоскости, в которой лежит эта линия. Вспомним, что все плоские линии лежат в своих соприкасающихся плоскостях. Значит, нам нужно написать уравнение соприкасающейся плоскости. Эта плоскость будет одной и той же для всех точек данной линии. Значит, нам имеет смысл выбрать точку попроще. Самое простое, что приходит в голову, взять точку со значением параметра $t = 0$. Но – посмотрим на первую производную – в этой точке нарушается условие гладкости линии (все три координаты первой производной радиус-вектора в этой точке обращаются в нуль). Поэтому возьмем точку, которой соответствует значение $t = 1$, то есть точку $(0, 3, 1)$. Напишем в ней уравнение соприкасающейся плоскости. Для этого найдем какой-нибудь направляющий вектор бинормали $\vec{p}$. Для этого нужно найти векторное произведение векторов первой и второй производной $\vec{r}(t)$ в этой точке. Имеем

$$\begin{array}{lll} x'(1) = 2 & y'(1) = 2 & z'(1) = 3 \\ x''(1) = 2 & y''(1) = 2 & z''(1) = 6 \end{array}$$

Вектор второй производной заменим на коллинеарный ему вектор $(1, 1, 3)$. Тогда

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Опять, упрощая себе жизнь, от найденного вектора переходим к коллинеарному ему вектору $(1, -1, 0)$ (он по-прежнему будет параллелен бинормали, а значит, годится нам). Пишем уравнение плоскости по точке и перпендикулярному вектору.

$$x - (y - 3) = 0.$$

Это уравнение искомой плоскости. В данном случае его легко было подобрать, исходя из параметрических уравнений кривой. □

4. **[Б] №1675** Докажите, что формулы Френе могут быть записаны в виде

$$\tfrac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\tau}]; \quad \tfrac{d\vec{\nu}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\nu}]; \quad \tfrac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\beta}].$$

Вектор $\vec{\omega}$ называется *вектором Дарбу*. Найдите его координаты в подвижном репере $(M, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$.

Решение. Вектор $\vec{\omega}$ при движении вдоль кривой γ меняется, то есть это не совсем вектор (хотя так он называется), а вектор-функция. Значит, мы должны обозначать его $\vec{\omega}(s)$. Разложим в каждой точке кривой γ вектор $\vec{\omega}(s)$ по векторам подвижного репера.

$$\vec{\omega}(s) = a(s)\vec{\tau}(s) + b(s)\vec{\nu}(s) + c(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем коэффициенты разложения, используя формулы Френе.

$$k(s)\vec{\nu}(s) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{\omega}(s), \vec{\tau}(s)] = [a(s)\vec{\tau}(s) + b(s)\vec{\nu}(s) + c(s)\vec{\beta}(s), \vec{\tau}(s)] = b(s)\vec{\beta}(s) + c(s)\vec{\nu}.$$

В силу линейной независимости векторов подвижного репера в каждой точке, получаем, что $b(s) = 0$, $c(s) = k(s)$.

Проведем аналогичное рассуждение со третьей формулой Френе.

$$-\varkappa(s)\vec{\nu}(s) = \frac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{\omega}(s), \vec{\beta}(s)] = [a(s)\vec{\tau}(s) + k(s)\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s)] = -a(s)\vec{\nu}(s).$$

Откуда получаем, что $a(s) = \varkappa(s)$. Итак, вектор Дарбу имеет вид $\vec{\omega}(s) = \varkappa(s)\vec{\tau}(s) + k(s)\vec{\beta}(s)$. Непосредственная проверка показывает, что вектор Дарбу удовлетворяет второй формуле Френе (проведите вычисления самостоятельно). □

5. **[А]№994** Докажите, что кривая, образованная концами отрезков постоянной длины, отложенными на главных нормалях некоторой кривой от каждой ее точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

Решение. Пусть дана кривая γ. Зададим ее векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра. Обозначим длину отрезка, который будем откладывать на главной нормали этой кривой через c, а полученную кривую – через γ_1. Как мы получаем точки кривой γ_1? Сначала нужно пройти от точки O (начало фиксированной декартовой системы координат) до точки M (пусть ей соответствует значение параметра s), принадлежащей кривой γ, а затем в направлении вектора $\vec{\nu}(s)$ сместиться на отрезок длины c, то есть сместиться на вектор $c\vec{\nu}(s)$. Получим точку M_1 кривой γ. И, перебирая таким образом все точки кривой γ, мы получим все точки кривой γ_1. Другими словами, точки кривой γ_1 будут задаваться радиус-векторами $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$. Это векторное параметрическое уравнение кривой γ_1. Нам нужно показать, что кривая γ_1 пересекает главные нормали под прямым углом, то есть, что угол между направляющим вектором касательной к γ_1 в точке M_1 и вектором $\vec{\nu}(s)$ в соответствующей точке $M \in \gamma$ прямой. Найдем какой-нибудь направляющий вектор касательной к кривой γ в точке M_1. Заметим, что параметр s не будет натуральным параметром в векторном параметрическом уравнении $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$, задающим кривую γ_1, но этого нам и не нужно. Мы знаем, что первая производная $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ (в точке со значением параметра s) относительно любого параметра будет направляющим вектором касательной в этой точке. Вычисляем ее.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + c\frac{d\vec{\nu}}{ds} =$$

А вот для кривой γ параметр s является натуральным и для нее работают формулы Френе. Тогда, продолжая цепочку равенств, получим

$$= \vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$

Итак, направляющий вектор касательной к γ_1 в произвольной ее точке со значением параметра s имеет вид

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = (1 - ck(s))\vec{\tau}(s) + c\varkappa(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем скалярное произведение $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ и $\vec{\nu}(s)$.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds}\vec{\nu}(s) = ((1 - ck(s))\vec{\tau}(s) + c\varkappa(s)\vec{\beta}(s))\vec{\nu}(s) = 0.$$

Здесь мы воспользовались попарной ортогональностью векторов подвижного репера. Итак, мы получили, что в каждой точке M_1 кривая γ_1 перпендикулярна главной нормали кривой γ в соответствующей точке M. □

5.3. Домашнее задание.

1. **[Г] 6.58 г)** Найдите кривизну и кручение кривой $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ в произвольной ее точке.
2. **[Г] 6.59 б)** Найдите кривизну и кручение линии, заданной уравнениями $y^2 = x$, $x^2 = z$ в произвольной точке.
3. **[Г] 6.60 д)** Докажите, что линия $x = t + \ln t$, $y = t$, $z = \ln t$, $t > 0$ является плоской и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.
4. Докажите, что для любой кривой, заданной векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра, выполняются равенства 1) $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^2 = k^4(s) + k^2(s)\varkappa^2(s) + (k'(s))^2$; 2) $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3\vec{r}}{ds} = -k^2(s)$; 3) $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = k(s)k'(s)$.
   Указания. Используйте формулы Френе.

5.4. Дополнительные задачи.

1. **[А]№1008** Докажите, что если для данной кривой отношение кривизны и кручения есть постоянное число λ, то вектор $\vec{p} = \vec{\tau} + \lambda\vec{\beta}$ не меняется вдоль кривой и угол, образованный касательной к кривой с этим вектором, также остается неизменным.

   Решение. Зададим кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в естественной параметризации. По условию $k(s) = \lambda\varkappa(s)$, где λ – число (оно не меняется при изменении s). Подставим это соотношение в первую формулы Френе и сравним с третьей.

   $$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lambda\varkappa(s)\vec{\nu}(s);\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

   Тогда получим $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\lambda\frac{d\vec{\beta}}{ds}$. Переносим в одну сторону и интегрируем.

   $$\frac{d}{ds}(\vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s)) \Rightarrow \vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s) = \vec{p}.$$

   Вектор $\vec{p}$ – постоянный вектор.

Вычислим угол между этим вектором $\vec{p}=\vec{\tau}(s)+\lambda\vec{\beta}(s)$ и направляющим вектором касательной. Это вектор $\vec{\tau}(s)$.

$$\cos\angle(\vec{\tau}(s),\vec{p})=\frac{\vec{\tau}(s)\vec{p}}{|\vec{\tau}(s)||\vec{p}|}=\frac{\vec{\tau}(s)(\vec{\tau}(s)+\lambda\vec{\beta}(s))}{1\cdot\sqrt{(\vec{\tau}(s)+\lambda\vec{\beta}(s))^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\vec{\tau}(s))^2+2\lambda\vec{\tau}(s)\vec{\beta}(s)+\lambda^2(\vec{\beta}(s))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

□

2. Докажите, что (обыкновенная) винтовая линия обладает следующими свойствами: 1) ее касательные образуют постоянный по величине угол с некоторым направлением, 2) ее бинормали образуют постоянный угол с некоторым направлением, 3) ее главные нормали параллельны некоторой плоскости, 4) $k(s)=\lambda\varkappa(s)$, где λ – некоторая константа.
   Указания. Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, где $a,b>0$ – постоянные, $t\in\mathbb{R}$. Дальше считайте по формулам, проверяя свойства.

3. **[Б] №1671** Докажите, что если неплоская линия обладает одним из следующих свойств: 1) ее касательные образуют постоянный по величине угол с некоторым направлением, 2) ее бинормали образуют постоянный угол с некоторым направлением, 3) ее главные нормали параллельны некоторой плоскости, 4) $k(s)=\lambda\varkappa(s)$, где λ – некоторая константа, то она обладает и остальными тремя свойствами. Такая линия называется *обобщенной винтовой линией.* (Г.А. Гайден "Об обобщенной винтовой линии в римановом пространстве"(1930))

   Решение. 1) ⇒ 2). Пусть кривая γ задана $\vec{r}=\vec{r}(s)$. По условию вектор $\vec{\tau}(s)$ образует постоянный угол с некоторым направлением, заданным вектором $\vec{p}$. Возьмем $\vec{p}$ по длине равным 1. Так как длина вектора $\vec{\tau}(s)$ тоже 1, получаем, что скалярное произведение $\vec{\tau}(s)\vec{p}$ есть величина постоянная. Обозначим ее c, то есть $\vec{\tau}(s)\vec{p}=c$. Продифференцируем это равенство по s: $\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{p}=0$. Воспользуемся первой формулой Френе: $(k(s)\vec{\nu}(s))\vec{p}=0$. Если $k(s)=0$, то $\vec{\nu}(s)=\vec{0}$ и по определению он перпендикулярен любому вектору, в частности, вектору $\vec{p}$. Если $k(s)\neq 0$, то $\vec{\nu}(s)\vec{p}=0$, то есть $\vec{\nu}(s)$ перпендикулярен вектору $\vec{p}$. По третьей формуле Френе $\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\varkappa(s)\vec{\nu}(s)$. Умножим скалярно обе части на $\vec{p}$: $\frac{d}{ds}(\vec{\beta}(s)\vec{p})=0$ или $\vec{\beta}(s)\vec{p}=\xi=const$. Так как оба вектора единичные, угол будет постоянным. Заметим, что это то же самое направление, что и для вектора $\vec{\tau}(s)$.

   2) ⇒ 3). Пусть вектор $\vec{\beta}(s)$ образует постоянный угол с некоторым вектором $\vec{q}$, то есть $\vec{\beta}(s)\vec{q}=c=const$. Продифференцируем это равенство и воспользуемся формулами Френе: $\vec{\nu}(s)$ перпендикулярен $\vec{q}$ для каждого значения s. Возьмем плоскость σ, перпендикулярную вектору $\vec{q}$. Тогда для любого s вектор $\vec{\nu}(s)$ будет параллелен плоскости σ.

   3) ⇒ 4). Пусть существует плоскость σ, которой параллельны векторы $\vec{\nu}(s)$ при любом s. Обозначим через $\vec{q}$ вектор, который перпендикулярен σ (его длина равна 1). Рассмотрим скалярное произведение $\vec{\tau}(s)\vec{q}$. Продифференцируем его по s и воспользуемся формулами Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{q}=(k(s)\vec{\nu}(s))\vec{q}=k(s)(\vec{\nu}(s)\vec{q}=0,$$

   то есть $\vec{\tau}(s)\vec{q}=\xi=cosnt$. Аналогично получаем, что $\vec{\beta}(s)\vec{q}=c=const$. Продифференцируем по s равенство $\vec{\nu}(s)\vec{q}$ и воспользуемся формулами Френе:

$$0=\frac{d\vec{\nu}}{ds}\vec{q}=(-k(s)\vec{\tau}(s)+\varkappa\vec{\beta}(s))\vec{q}=-k(s)\xi+\varkappa(s)c.$$

   Откуда получаем, что $k(s)=\frac{c}{\xi}\varkappa(s)$.

   4) ⇒ 1). Уже доказывали.

□

4. Докажите, что неплоская линия является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда смешанное произведение $\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\,\frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right)=0$.

   Указания. Докажите, что для этой линии $k(s)=\lambda\varkappa(s)$.

5. **[Б]№1672** Докажите, что линия $x^2=3y$, $2xy=9z$ является обобщенной винтовой линией.

6. **[Б] №1673** Докажите, что линия $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$, $t>0$ является обобщенной винтовой линией.

7. **[А]№994** Докажите, что кривая, образованная концами отрезков постоянной длины, отложенных на главных нормалях некоторой кривой от каждой ее точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

Решение. Зададим исходную кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра s. Тогда вторая кривая γ_1 будет иметь уравнение $\vec{r}_1(s) = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$, где $c = const$ – длина отрезка (от начала координат O доходим по вектору $\vec{r}(s)$ до точки кривой γ, затем по стрелке орта главной нормали идем на длину отрезка c). Отметим, что для кривой γ_1 параметр s уже не будет натуральным.

Нам нужен угол между касательным вектором к γ_1 в точке со значением параметра s и ортом главной нормали $\vec{\nu}(s)$ для того же значения параметра. Находим касательный вектор

$$\vec{\tau}_1(s) = \frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + c\frac{d\vec{\nu}}{ds} =$$

Для кривой γ параметр s натуральный, следовательно можно применять формулы Френе.

$$= \vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$

Вычисляем скалярное произведение $\vec{\tau}_1(s)\vec{\nu}(s)$

$$\vec{\tau}_1(s)\vec{\nu}(s) = (\vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)))\vec{\nu}(s) = 0,$$

так как векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ перпендикулярны вектору $\vec{\nu}(s)$. □

§2.6. Плоские кривые.

6.1. Сведения из теории. Линия γ называется *плоской*, если все ее точки лежат в одной плоскости. Выберем прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, чтобы линия γ лежала в плоскости Oxy. В этой плоскости есть система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ – часть пространственной системы координат. Очевидно, что она тоже прямоугольная декартова. В этой системе координат линия γ задается векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Для плоской кривой направляющий вектор касательной вычисляется так же $\frac{d\vec{r}}{dt}$. В случае, если параметр натуральный (обозначается s), то это будет единичный вектор $\vec{\tau}(s)$. Касательная в точке со значение параметра t_0 задается уравнением

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Длина дуги кривой вычисляется также как и в общем случае

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\frac{d\vec{r}}{dt}|dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Кривизна и орт главной нормали определяются также как в общем случае: $\frac{d^2\vec{r}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s)$. Для произвольного параметра t формула вычисления кривизны

$$k(t) = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

приобретает вид

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Орт вектора бинормали постоянен и параллелен оси Oz. Поэтому интереса не представляет. В связи с этим для плоских линий главную нормаль называют просто нормалью.

Так как для плоской кривой кручение тождественно равно нулю, формулы Френе принимают вид

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s); \; \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s).$$

Из двух натуральных уравнений линии остается одно: $k = k(s)$.

6.2. Задачи.

1. **[Г]6.78а,б)** Задайте неявно линию, определенную своими параметрическими уравнениями: 1) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $t \in (0, \pi)$; 2) $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Решение. 1) Заметим, что $x + y = 1$ (по основному тригонометрическому тождеству). Другими словами, искомая линия – это часть прямой $x + y - 1 = 0$. Так как t меняется от нуля до π, x меняется от 1 до нуля, а y – от нуля до 1, то есть данная линия – промежуток прямой $x + y - 1 = 0$ с концами в точках (0,1) и (1,0). При этом сначала проходим по прямой от точки (1,0) до точки (0,1) (значения параметра меняются от нуля до $\frac{\pi}{2}$), а затем возвращаемся обратно (значения параметра меняются от $\frac{\pi}{2}$ до π).

   2) Здесь получаем $x^2 + y^2 = a^2$ – правую полуокружность, так как в данных параметрических уравнениях $0 < x \le a$ и $-a \le y \le a$. Это еще один способ задать окружность (точнее ее часть) с помощью параметрических уравнений (нам уже известен такой способ: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$). □

2. Найдите касательную, нормаль и кривизну эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его произвольной точке.

   Решение. Запишем параметрические уравнения эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда направляющий вектор касательной (в точке со значением параметра t_0) имеет координаты $(-a\sin t_0, b\cos t_0)$. Уравнение касательной в точке со значением параметра t_0 будет иметь вид

   $$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0}$$

   или $b\cos t_0 x + a\sin t_0 y = ab$. Умножим обе части на ab и обозначим $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$. Тогда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ или более привычно

   $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

   Нормаль проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно касательной. Следовательно, ее направляющий вектор – это вектор нормали для касательной, то есть вектор (b^2x_0, a^2y_0). Пишем уравнение нормали $\frac{x-x_0}{b^2x_0} = \frac{y-y_0}{a^2y_0}$ или $a^2y_0x - b^2x_0y = (a^2 - b^2)x_0y_0$.

   В частности, если эллипс является окружностью ($a = b$), то нормаль будет иметь такое красивое уравнение $y_0x - x_0y = 0$.

   Вычислим кривизну по формуле.

   $$k(t) = \frac{|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t|}{(\sqrt{a^2\sin^t + b^2\cos^2 t})^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin^t + b^2\cos^2 t})^3}.$$

   В частности, для окружности ($a = b$) получим $k(t) = \frac{1}{a}$, то есть кривизна окружности в каждой ее точке обратно пропорциональна ее радиусу. □

3. **[Г]6.82а)**Найдите угол под которым пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

   Решение. Найдем координаты точки пересечения этих линий. Решаем систему: $(2, 2)$ и $(2, -2)$. Так как окружность и парабола симметричны относительно оси Ox, их точки пересечения также симметричны и углы в этих точках будут равны. Поэтому нам достаточно вычислить только один из углов. Возьмем точку $(2, 2)$ – она находится в первом квадранте.

   Напомним, что угол между кривыми в точке их пересечения – это угол между их касательными в этой точке. Значит, нам нужно найти направляющие векторы касательных в этой точке. Для окружности мы можем сразу написать уравнение касательной (см. задачу выше): $x + y = 4$. Считываем направляющий вектор этой прямой: $\vec{p}(1, -1)$.

   Теперь разберемся с параболой. Зададим ее параметрически: $x = t^2$, $y = \sqrt{2}t$. Тогда касательный вектор имеет координаты $x'(t) = 2t$, $y'(t) = \sqrt{2}$. Это для точки со значением параметра t. А какое значение параметра соответствует точке $(2, 2)$? Подставим эти координаты в параметрические уравнения параболы: $2 = t^2$, $2 = \sqrt{2}t$, то есть $t = \sqrt{2}$. Тогда касательный вектор к параболе в точке $(2, 2)$ будет иметь координаты $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Нам все-равно какая длина у направляющего вектора касательной, поэтому мы перейдем к коллинеарному ему вектору $\vec{q}(2, 1)$, чтобы проще было считать. Векторы мы нашли. Теперь вычисляем косинус угла между ними. Нам помогает скалярное произведение векторов.

   $$\cos\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}} = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

   Итак, угол между кривыми равен $arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. □

4. **[А]№1010** Даны две гладкие кривые γ и γ_1. Докажите, что если между их точками можно установить соответствие так, чтобы в соответствующих точках они имели одну и ту же бинормаль, то эти кривые плоские.

Решение. Зададим кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ с естественным параметром. Тогда кривую γ_1 можно задать так: $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + \alpha(s)\vec{\beta}(s)$ (к точкам кривой γ_1 идем следующим образом: сначала доходим до точки $M \in \gamma$ по вектору $\vec{r}(s)$, а затем по общей бинормали в направлении орта бинормали кривой γ проходим отрезок длины $\alpha(s)$ до точки M_1 кривой γ_1, которая соответствует точке M). Заметим, что для кривой γ_1 параметр s уже не будет натуральным.

Продифференцируем вектор-функцию $\vec{r}_1(s)$ по параметру s и учтем формулы Френе, которые работают с вектор-функциями, определенными для γ.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + \alpha'(s)\vec{\beta}(s) + \alpha(s)\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau}(s) + \alpha'(s)\vec{\beta}(s) + \alpha(s)(-\varkappa(s)\vec{\nu}(s)).$$

Для каждого значения s вектор $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ есть направляющий вектор касательной, следовательно он перпендикулярен направляющему вектору $\vec{p}(s)$ бинормали кривой γ_1. Этот вектор параллелен орту бинормали $\vec{\beta}(s)$ кривой γ. Тогда вектор $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ перпендикулярен $\vec{\beta}(s)$ и раскладывается только по векторам $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ подвижного репера. Другими словами, коэффициент при $\vec{\beta}(s)$ в разложении этого вектора равен нулю, то есть $\alpha'(s) = 0$, то есть $\alpha(s) = \alpha$ – константа.

Вычислим вторую производную для вектор-функции $\vec{r}_1(s)$ (опять пользуемся формулами Френе, где это возможно).

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau}(s) - \alpha\varkappa(s)\vec{\nu}(s)) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} - \alpha(\varkappa'(s)\vec{\nu}(s) + \varkappa(s)\frac{d\vec{\nu}}{ds}) = k(s)\vec{\nu}(s) - \alpha\varkappa'(s)\vec{\nu}(s) - \alpha\varkappa(s)k(s)\vec{\tau}(s) - \alpha\varkappa^2(s)\vec{\beta}(s).$$

Таким образом,

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s) - \alpha\varkappa'(s)\vec{\nu}(s) - \alpha k(s)\varkappa(s)\vec{\tau}(s) - \alpha\varkappa^2(s)\vec{\beta}(s). \tag{2.9}$$

Вспомним, что для произвольной параметризации вторая производная вектор-функции, задающей кривую, для каждого значения s дает вектор параллельный соприкасающейся плоскости этой кривой в точке с тем же значением параметра s. Тогда этот вектор будет перпендикулярен вектору бинормали в этой точке. В нашем случае получаем, что для каждого s вектор $\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2}$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{p}(s)$ бинормали кривой γ_1, а он в свою очередь параллелен орту бинормали кривой γ. Следовательно, для каждого s векторы $\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2}$ и $\vec{\beta}(s)$ перпендикулярны. С учетом открывшихся обстоятельств умножим скалярно обе части равенства (2.9) на $\vec{\beta}(s)$.

$$0 = 0 - 0 + 0 - \alpha\varkappa^2(s).$$

Число $\alpha \neq 0$, иначе кривые γ и γ_1 совпадают, следовательно, $\varkappa(s) = 0$ для любого s. Итак, кривая γ имеет нулевое кручение в каждой точке, то есть это плоская линия. Тогда орт ее бинормали есть вектор постоянный, то есть $\vec{\beta}(s) = \vec{\beta}$ для любого s. Тогда из уравнения $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + \alpha\vec{\beta}$ получаем, что все точки кривой γ_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости кривой γ (кстати, находящейся на расстоянии α от плоскости кривой γ). □

6.3. Домашнее задание.

1. **[Г]6.78в,г)** Задайте неявно линию, определенную своими параметрическими уравнениями: 1) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 - 2$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Найдите касательную, нормаль и кривизну гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $y^2 = 2px$ в их произвольной точке.

3. **[Г]6.82б)**Найдите угол под которым пересекаются линии $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$.

4. **[Б]№1676** Докажите, что если все нормальные плоскости линии параллельны одному направлению, то эта линия плоская.

6.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что гладкая кривая в пространстве является окружностью или ее частью тогда и только тогда, когда ее главные нормали проходят через одну точку.

Пусть линия γ задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ относительно произвольного параметра t. Фиксируем значение параметра $t = t_0$. Тогда точка C, определяемая радиус-вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{\nu}(t)$ называется *центром кривизны* линии γ в точке со значением параметра t_0. Окружность с центром в точке C и радиусом $\frac{1}{k(t_0)}$ называется соприкасающейся окружностью линии γ в точке со значением параметра t_0.

2. Найдите уравнение соприкасающейся окружности к параболе $y = x^2$ в начале координат.

   Решение. Параметрические уравнения параболы $x = t$, $y = t^2$. Началу координат соответствует значение параметра $t = 0$. Вычислим кривизну параболы в начале координат.

   $$k(0) = \frac{2 - 0}{1} = 2.$$

   Тогда радиус соприкасающейся окружности равен $\frac{1}{2}$.

   Вычислим вектор $\vec{\nu}(0)$. Воспользуемся общей формулой для вычисления этого вектора. Для этого нужно сначала найти вектор

   $$\vec{\beta}(0) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}\right]\right|} = \frac{2\vec{k}}{2} = \vec{k}.$$

   Тогда $\vec{\nu}(0) = [\vec{\beta}(0), \vec{\tau}(0)] = [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$. Таким образом, радиус-вектор центра C соприкасающейся окружности будет таким: $\vec{p} = \vec{r}(0) + \frac{1}{k(0)}\vec{\nu}(0) = 0 + \frac{1}{2}\vec{j}$, то есть $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Наконец, уравнение соприкасающейся окружности $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. □

   Множество центров кривизны для всех точек данной линии γ называется ее *эволютой.* Обозначение γ_e. Сама линия γ называется эвольвентой линии γ_e.

3. Докажите, что главные нормали исходной линии (эвольвенты) являются касательными к ее эволюте. В этом случае говорят, что эвольвента является *ортогональной траекторией* касательных к эволюте.

4. **[Г] пример 6.22**Докажите, что эволютой эллипса является астроида.

5. **[Б] №1652** Докажите, что если все соприкасающиеся плоскости имеют общую точку, то кривая плоская.

6. Выведите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$.

7. **[С] стр. 90**Докажите, что тангенс угла μ, образованного касательной к линии $\rho = \rho(\varphi)$ с радиус-вектором проведенном в точку касания, задается формулой $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\varphi}}$. Проверьте, что угол μ у логарифмической спирали $\rho = Ca^{\varphi}$, $a > 0$ постоянный. Докажите, что этим свойством могут обладать только окружности и логарифмические спирали.

§2.7. Примерные варианты контрольной работы.

Задачи 1 – 4 являются обязательными для решения. Задача 5 дополнительная, в скобках указано количество баллов, которые можно получить при ее полном решении.

Расчет количества баллов, которое начисляется за решение каждой из обязательных задач:
5 баллов: задача решена полностью без недочетов;
4 балла: есть не существенные недочеты вычислительного характера, которые не приводят к качественным ошибкам, идея решения полностью верна;
3 балла: есть недочеты вычислительного характера, которые привели к качественной ошибке, идея решения может содержать незначительные недочеты;
2 балла: есть разумные намеки на идею решения задачи (не менее 50 процентов), но полностью идея решения задачи отсутствует, проведена часть вычислительной работы;
0 баллов: менее 50 процентов разумных намеков на идею решения задачи.

Вариант 1.

1. Докажите, что кривая $\gamma : x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$, $-2\pi \le t \le 2\pi$ гладкая и лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 2, а также на цилиндрической поверхности $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

2. Для кривой $\gamma : x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ написать уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

3. Покажите, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ параллельны плоскости Oxy.

4. Найдите угол под которым пересекаются линии $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$.

5. (+3 балла) Докажите, что гладкая кривая в пространстве является окружностью или ее частью тогда и только тогда, когда ее главные нормали проходят через одну точку.

Вариант 2.

1. Докажите, что кривая $\gamma: x = a\,tgt,\ y = b\cos t,\ z = b\sin t,\ 0 \le t < \frac{\pi}{2},\ a \ne 0,\ b \ne 0$ лежит на гиперболическом параболоиде.

2. Существуют ли точки на кривой $\gamma: x = t,\ y = t^3,\ z = t^2+4$, перпендикулярные плоскости $4x+4y+12z+1 = 0$?

3. Докажите, что линия $x = t + \ln t,\ y = t,\ z = \ln t,\ t > 0$ является плоской и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.

4. Найдите касательную, нормаль и кривизну гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в произвольной точке.

5. (+3 балла) Докажите, что неплоская линия является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда смешанное произведение $\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right) = 0$.

§2.8. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкая поверхность.

8.1. Задачи.

1. **[Г]7.3б)** Найдите частные производные вектор-функции: $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$, где a – некоторое фиксированное вещественное число.

   Решение. Координатами данной вектор-функции двух скалярных аргументов являются скалярные функции двух скалярных аргументов:
   $$x(u,v) = u\cos v;\ y(u,v) = u\sin v;\ z(u,v) = av.$$
   Находим их частные производные как в математическом анализе: чтобы найти частную производную функции по u, нужно посмотреть на v как на константу и продифференцировать по u. Аналогично для v. Вычисляем
   $$\begin{array}{lll} x_u = \cos v; & y_u = \sin v; & z_u = 0 \\ x_v = -u\sin v; & y_v = u\cos v; & z_v = a. \end{array}$$
   Тогда $\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0)$ и $\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a)$. Этот же результат можно записать в другом виде:
   $$\vec{r}_u = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j};\quad \vec{r}_v = -u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + a\vec{k}.$$
   □

2. **[Г]7.7г),е)** Для вектор-функции $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$ проверьте справедливость равенств $\vec{r}_v^2 - \vec{r}_u^2 = \vec{r}_{vv}^2$, $(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv}) = 0$.

   Решение. Для проверки этих равенств нужно вычислить частные производные первого и второго порядков. В предыдущей задаче мы уже вычислили
   $$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a).$$
   Дифференцируем по u и по v еще раз.
   $$\vec{r}_{uv} = (\vec{r}_u)_v(-\sin v, \cos v, 0);\ \vec{r}_{vv} = (\vec{r}_v)_v(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$
   Проверим первое равенство. В его левой части стоит разность скалярных квадратов вектор-функций $\vec{r}_v$ и $\vec{r}_u$. Мы знаем их координаты относительно ортонормированного базиса $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Применяем формулу для вычисления скалярного произведения векторов через их координаты, заданные относительно ортонормированного базиса.
   $$\vec{r}_v^2 - \vec{r}_u^2 = (u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2) - (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 + a^2 - 1.$$
   В правой части проверяемого равенства тоже стоит скалярный квадрат, но уже вектор-функции $\vec{r}_{vv}$. Вычисляем
   $$\vec{r}_{vv} = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2.$$
   Мы видим, что первое равенство, вообще говоря, не верно. Но если константа $a = 1$, то равенство становится верным.

   Проверим второе равенство. В его левой части стоит смешанное произведение вектор-функций. Вычисляем его.
   $$(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$
   Определитель равен нулю из-за третьего столбца. Следовательно, равенство для заданной линии верно. □

3. Задайте плоскость F, определенную точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и парой не коллинеарных векторов $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, с помощью параметрических уравнений и изобразите координатную сеть 1) если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны, 2) если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ произвольны.

Решение. Напомним, что в евклидовом пространстве E^3 мы фиксировали прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Относительно нее и заданы координаты точки и векторов в задаче. Вспоминаем курс аналитической геометрии: точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости F тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ компланарны. Тогда существуют числа u и v, такие что

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{p} + v\vec{q}.$$

По правилу треугольника получим $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$. Обозначим вектор $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$. Его координаты (x_0, y_0, z_0). Заметим, что вектор $\overrightarrow{OM}$ – это радиус-вектор, который рисует поверхность. Его мы обычно обозначаем $\vec{r}$. Итак, для плоскости получаем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{p} + v\vec{q}.$$

Это векторное параметрическое уравнение плоскости. Расписывая его в координатах (векторы равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов), мы получим параметрические уравнения плоскости (они нам знакомы из курса Аналитическая геометрия).

$$x = x_0 + p_1u + q_1v;\ y = y_0 + p_2u + q_2v;\ z = z_0 + p_3u + q_3v;\ u, v \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Найдем линии u и линии v. Рассмотрим линию u (вспоминаем, что на ней $v = v_0 = const$). Подставляем это значение в параметрические уравнения плоскости.

$$x = x_0 + p_1u + q_1v_0;\ y = y_0 + p_2u + q_2v_0;\ z = z_0 + p_3u + q_3v_0$$

или в другом виде

$$x = (x_0 + q_1v_0) + p_1u;\ y = (y_0 + q_2v_0) + p_2u;\ z = (z_0 + q_3v_0) + p_3u.$$

Параметр в этих уравнениях уже один – это u. В скобках стоят постоянные числа. Опять вспоминаем курс Аналитической геометрии и видим, что это параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0 + q_1v_0, y_0 + q_2v_0, z_0 + q_3v_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Меняя числа v_0 мы получим систему линий u. Это будут все прямые плоскости F, параллельные вектору $\vec{p}$. Аналогично убеждаемся, что линии v – это все прямые, параллельные вектору $\vec{q}$. Итак, координатная сеть в этом случае представляет из себя два семейства параллельных прямых. Чтобы однозначно задать точку плоскости F нужно сказать на какой линии u и на какой линии v лежит эта точка.

P.S. (для интересующихся) Пусть векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны и имеют единичные длины. Тогда на плоскости F возникает прямоугольная декартова система координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Для любой точки M плоскости имеем

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}_0 + u\vec{p} + v\vec{q} - \vec{r}_0 = u\vec{p} + v\vec{q}.$$

Мы видим, что криволинейные координаты u и v точки M на плоскости F оказались координатами точки M относительно прямоугольной декартовой системы координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Рассмотрим на плоскости F полярную систему координат с началом в точке M_0 и единичным вектором $\vec{p}$. Обозначим координаты относительно полярной системы координат (ρ, φ) (ρ – длина радиус-вектора точки, φ – ориентированный угол между вектором $\vec{p}$ и радиус-вектором точки). Тогда $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$. Подставим эти равенства в параметрические уравнения плоскости (2.10)

$$x = x_0 + p_1\rho\cos\varphi + q_1\rho\sin\varphi;\ y = y_0 + p_2\rho\cos\varphi + q_2\rho\sin\varphi;\ z = z_0 + p_3\rho\cos\varphi + q_3\rho\sin\varphi;\ \rho \geq 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Это тоже параметрические уравнения плоскости. Правда, точка M_0 станет проблемной (почему?) и ее придется выбросить из рассмотрения. В остальных точках уравнения работают хорошо. Это другая параметризация плоскости. Найдем вид координатных линий для этой параметризации. Фиксируем сначала параметр $\varphi = \varphi_0 = const$. Тогда получаем параметрические уравнения с одним параметром ρ

$$x = x_0 + p_1\rho\cos\varphi_0 + q_1\rho\sin\varphi_0;\ y = y_0 + p_2\rho\cos\varphi_0 + q_2\rho\sin\varphi_0;\ z = z_0 + p_3\rho\cos\varphi_0 + q_3\rho\sin\varphi_0;\ \rho \geq 0.$$

Если мысленно поменять параметр ρ на t, то мы отчетливо увидим параметрические уравнения прямой. Но область изменения параметра ограничена только неотрицательными числами. Значит, это не вся прямая, а луч. Его начало ($\rho = 0$) совпадает с точкой M_0. Итак, первое семейство координатных линий – лучи, выходящие из точки M_0. Теперь фиксируем первый параметр $\rho = \rho_0 = const$. Тогда получим параметрические уравнения

$$x = x_0 + p_1\rho_0\cos\varphi + q_1\rho_0\sin\varphi;\ y = y_0 + p_2\rho_0\cos\varphi + q_2\rho_0\sin\varphi;\ z = z_0 + p_3\rho_0\cos\varphi + q_3\rho_0\sin\varphi;\ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Что это за линии? Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} x - x_0 &= p_1\rho_0\cos\varphi + q_1\rho_0\sin\varphi \\ y - y_0 &= p_2\rho_0\cos\varphi + q_2\rho_0\sin\varphi \\ z - z_0 &= p_3\rho_0\cos\varphi + q_3\rho_0\sin\varphi. \end{aligned}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат, сложим и учтем, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны. Получим

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho_0^2.$$

Это сфера, то есть искомая линия лежит на сфере с центром в точке M_0. А также эта линия лежит на плоскости, проходящей через точку M_0. Пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, это окружность с радиусом, равным радиусу сферы. Следовательно, искомая линия – это окружность с центром в точке M_0 и радиусом ρ_0. Итак, второе семейство координатных линий – это концентрические окружности с центром в точке M_0.

Попробуйте написать параметрические уравнения плоскости так, чтобы координатными линиями были эллипсы и гиперболы. $\square$

4. **[Г] 7.13а)** Напишите параметрические уравнения сферы с центром в точке (a, b, c) и радиусом R. Определите вид координатных линий.

   Решение. Сначала расположим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, чтобы точка O была центром сферы. Обозначим через N и S точки пересечения оси Oz со сферой (северный и южный полюса). Тогда плоскость Oxy будет экваториальной, а окружность пересечения сферы и экваториальной плоскости будет экватором. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка сферы. Опустим перпендикуляр на экваториальную плоскость и обозначим его основание K. Угол между экваториальной плоскостью и вектором $\overrightarrow{OM}$ (это угол между векторами $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OM}$) обозначим v. Этот угол будет меняться от нуля до $\frac{\pi}{2}$, если мы находимся в северном полушарии и от $-\frac{\pi}{2}$ до нуля, если – в южном. Итого, параметр v будет меняться от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Через u обозначим угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OK}$. Он будет меняться от $-\pi$ до π. Тогда из треугольника OMK координата z точки M будет равна $R\sin v$. Координаты x и y у точки M такие же как и координаты точки K, лежащей в экваториальной плоскости Oxy. Для точки K находим $x = OK\cos u$, $y = OK\sin u$. Наконец, из треугольника OMK получим $OK = R\cos v$. Собирая все результаты, получим, что координаты точки M вычисляются по формулам

   $$x = R\cos v\cos u;\ y = R\cos v\sin u;\ z = R\sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

   Это параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в точке $O(0, 0, 0)$. Перейдем к системе координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (то есть поменяем начало системы координат) такой, что $O(a, b, c)$ в ней. Нам надо сейчас написать формулы перехода от одной системы координат к другой. Так как даны координаты точки O, старой системой координат будет система координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, а новой – $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Обозначим координаты в старой системе x', y', z', в новой – x, y, z (не совсем привычно, зато не нужно будет вводить переобозначения в полученных выше формулах). Тогда формулы перехода от старой системы координат к новой будут иметь вид (слева – старые координаты, справа – новые)

   $$x' = x + a;\ y' = y + b;\ z' = z + c.$$

   Переходим в параметрических уравнениях сферы к системе координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

   $$x' - a = R\cos v\cos u;\ y' - b = R\cos v\sin u;\ z' - c = R\sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

   Про первую систему координат можно забыть (она была вспомогательной). Теперь вторую систему координат называем $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и координаты в ней обозначаем x, y, z (вместо x', y', z' пишем x, y, z). В этих обозначениях сфера радиуса R с центром в точке (a, b, c) будет иметь параметрические уравнения

   $$x = a + R\cos v\cos u;\ y = b + R\cos v\sin u;\ z = c + R\sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

   $\square$

5. Пусть в плоскости Oxy прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дана окружность радиуса a с центром в точке O (назовем ее большой). Кроме того, в плоскости Oxz дана окружность радиуса b $(b < a)$ с центром на большой окружности (назовем ее маленькой окружностью). Маленькая окружность вращается вокруг оси Oz (ее центр едет по большой окружности), оставаясь перпендикулярной плоскости Oxy, и рисует в пространстве поверхность. Эта поверхность называется *тор.* Напишите параметрические уравнения тора. Определите вид координатных линий на нем.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка тора. Обозначим центр маленькой окружности, на которой лежит точка M, через Q и опустим перпендикуляр из точки M на плоскость Oxy. Обозначим его K. Точки O, Q, K лежат на одном луче, выходящем из точки O. Пусть v – угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OQ}$. Он будет меняться от $-\pi$ до π (этот угол показывает насколько повернулась маленькая окружность от первоначального положения). В самой маленькой окружности обозначим через T точку пересечения луча OQ с этой окружностью, причем точки лежат так $O - Q - T$. Тогда через u обозначим ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{QT}$ и $\overrightarrow{QM}$ (этот угол показывает насколько повернулась точка M на маленькой окружности). Он будет меняться от $-\pi$ до π. Тогда из треугольника QMK получим, что $z = QM \sin u = b \sin u$. Координаты x и y точки M такие же как и у точки K. Ее координаты

$$x = OK \cos v = (a \pm QK) \cos v = (a + b\cos u) \cos v$$
$$y = OK \sin v = (a \pm QK) \sin v = (a + b\cos u) \sin v.$$

Собираем все вместе и получаем параметрические уравнения тора

$$x = (a + b\cos u) \cos v;\ y = (a + b\cos u) \sin v;\ z = b \sin u;\ u, v \in [-\pi, \pi].$$

Выясним, что из себя представляют координатные линии. Пусть $u = u_0 = const$. Тогда параметрические уравнения линии v имеют вид

$$x = (a + b\cos u_0) \cos v;\ y = (a + b\cos u_0) \sin v;\ z = b \sin u_0.$$

Так как для точек этой линии третья координата z всегда равна одной и той же константе $b \sin u_0$, эта линия является плоской и лежит в плоскости, задаваемой уравнением $z = b \sin u_0$ (она параллельна плоскости Oxy). С другой стороны, возводя в квадрат первые два параметрических уравнения, получаем, что $x^2 + y^2 = (a + b\cos u_0)^2$. Это прямой круговой цилиндр с образующими параллельными оси Oz и радиусом $a + b\cos u_0$. Тогда искомая линия есть пересечение цилиндра и плоскости, то есть это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости Oxy (мысленно режем тор, а проще бублик, плоскостями, параллельными плоскости Oxy). Это одно семейство координатных линий на торе. Найдем другое семейство координатных линий. Теперь $v = v_0 = const$. Это множество точек тора, которые повернуты относительно оси Ox на угол v_0. Это будет маленькая окружность. Итак, второе семейство координатных линий – это все копии маленькой окружности в процессе ее движения вокруг оси Oz. □

6. Пусть в плоскости Oxz дана линия γ: $x = x(u)$, $y = 0$, $z = z(u)$, $u \in U$. Напишите параметрические уравнения поверхности вращения данной линии вокруг оси Oz.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности вращения. Она лежит на некоторой окружности, перпендикулярной оси Oz. Обозначим центр этой окружности Q. Эта окружность пересекает линию γ в точке K. Точка K имеет координаты $(x(u), 0, z(u))$. Третья координата у точки M такая же как и у K (обе точки лежат в плоскости, перпендикулярной оси Oz). Тогда получим $z = z(u)$. Разберемся с первыми двумя координатами точки M. Обозначим через v угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{QM}$ (угол, на который повернулась точка K). Тогда $x = QM \cos v = QK \cos v = |x(u)| \cos v$. Аналогично $y = QM \sin v = QK \sin v = |x(u)| \sin v$. Угол v меняется от $-\pi$ до π. Тогда раскрывая модуль, получим (знак плюс минус можно не писать, так как его учтет знак синуса и косинуса)

$$x = x(u) \cos v;\ y = x(u) \sin v;\ z = z(u), u \in U,\ v \in [-\pi, \pi].$$

□

7. **[Г] пример 7.5** Покажите, что вектор-функция

$$\vec{r}(u, v) = a\frac{1 + uv}{u + v}\vec{i} + b\frac{v - u}{u + v}\vec{j} + c\frac{uv - 1}{u + v},\ (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u \neq v$$

определяет однополостный гиперболоид. Каковы координатные линии поверхности при данной параметризации?

Решение. Запишем параметрические уравнения данной поверхности

$$x = a\frac{1 + uv}{u + v};\ y = b\frac{v - u}{u + v};\ z = c\frac{uv - 1}{u + v}.$$

Вычислим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{(1 + uv)^2}{(u + v)^2} + \frac{(v - u)^2}{(u + v)^2} - \frac{(uv - 1)^2}{(u + v)^2} = 1.$$

Рассмотрим семейство линий u: $v = v_0 = const$. Параметрические уравнения этих линий имеют вид

$$x = a\frac{1+uv_0}{u+v_0};\ y = b\frac{v_0-u}{u+v_0};\ z = c\frac{uv_0-1}{u+v_0}.$$

В задачнике, из которого взят этот пример, написано, как преобразовать эти уравнения, чтобы увидеть, что они задают прямую. Но как до этого додуматься?! Давайте представим, что у нас нет никаких идей относительно того, что это за линии. Первая идея, посчитать кривизну и кручение, чтобы хоть как то прикинуть, что это может быть (если очень повезет и кривизна будет нулевая во всех точках, то получим прямую, если кручение будет нулевым, то линия плоская и можно найти плоскость в которой она лежит, а затем пересечь с гиперболоидом). Параметр u вряд ли натуральный, следовательно, пользуемся общими формулами: $k(u) = \frac{|[\frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d^2\vec{r}}{du}]|}{|\frac{d\vec{r}}{du}|^3}$. Вычисляем

$$\begin{array}{lll} x' = a\frac{v_0^2-1}{(u+v_0)^2}; & y' = b\frac{-2v_0}{(u+v_0)^2}; & z' = c\frac{v_0^2+1}{(u+v_0)^2}; \\ x'' = -2a(v_0^2-1)\frac{1}{(u+v_0)^3}; & y'' = 4bv_0\frac{1}{(u+v_0)^3}; & z'' = -2c(v_0^2+1)\frac{1}{(u+v_0)^3}. \end{array}$$

Заметим, что первая и вторая производные пропорциональны – коэффициент пропорциональности $\frac{-2}{u+v_0}$. Следовательно, векторное произведение таких векторов в каждой точке кривой будет равно нулю, то есть у рассматриваемой линии кривизна нулевая в каждой точке. Таким образом, мы получили, что первое семейство координатных линий – это прямые (первое семейство прямолинейных образующих). Аналогично получается, что и второе семейство линий – это прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. □

8. **[Г] 7.11а)** Определите, какой поверхностью второго порядка является поверхность, заданная параметрическими уравнениями $x = u + \sin v$, $y = u + \cos v$, $z = u + a$. Определите вид координатных линий при данной параметризации.

Доказательство. Чтобы определить вид поверхности, найдем неявное уравнение, задающее поверхность. Выразим из третьего уравнения u, подставим в два первых первых и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$(x - z + a)^2 + (y - z + a)^2 = 1.$$

Это эллиптический цилиндр. Чтобы убедиться в этом нам нужно перейти к другой (аффинной) системе координат. Делают это так: скобки обозначают новыми переменными: $x' = x - z + a$, $y' = y - z + a$, а z оставляют прежним $z' = z$. Тогда формулы перехода к новой системе координат (старые координаты выражаем через новые) выглядят так:

$$\begin{array}{l} x = x' + z' - a \\ y = y' + z' - a \\ z = z' \end{array}$$

Определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, это действительно формулы перехода. В новой системе координат поверхность имеет уравнение $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Это уравнение эллиптического цилиндра.

Теперь находим координатные линии. Первое семейство:

$$x = u + \cos v_0;\ y = u + \sin v_0;\ z = u + a.$$

Это прямые, проходящие через точку $(\cos v_0, \sin v_0, a)$ параллельно вектору $(1, 1, 1)$.

Второе семейство координатных линий:

$$x = u_0 + \cos v;\ y = u_0 + \sin v;\ z = u_0 + a.$$

Это линия лежащая в плоскости $z = u_0 + a$. Кроме того, она лежит на поверхности $(x-u_0)^2 + (y-u_0)^2 = 1$. Это прямой круговой цилиндр с образующими параллельными оси Oz. Его разрезает плоскость $z = u_0 + a$ перпендикулярная оси Oz. В результате получаем окружность.

Итак, одно семейство координатных линий – это прямолинейные образующие, а второе семейство – это окружности, перпендикулярные прямолинейным образующим. □

9. **[Г] 7.20** Напишите параметрические уравнения кругового цилиндра, координатными линиями которого являются: а) винтовые линии и прямолинейные образующие, б) два семейства винтовых линий.

Решение. Возьмем прямой круговой цилиндр, который в ПДСК $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ задан уравнением $x^2+y^2=1$.

а) если фиксировать параметр v, то должна получиться прямая, параллельная оси Oz, то есть вектору $(0,0,1)$. Начинаем писать параметрические уравнения поверхности.

$$x = const;\ y = const;\ z = u + const.$$

Теперь при фиксировании u должна получиться винтовая линия. Исходя из этого подбираем выражения, которые обозначены *const*.

$$x = \cos v;\ y = \sin v;\ z = u + v,\ v \in [0, 2\pi], u \in \mathbb{R}.$$

Проверяем, что действительно получили цилиндр с нужной координатной сетью.

б) Рассуждаем аналогично. Теперь и при фиксации u и при фиксации v должны получиться винтовые линии, то есть для x должен быть косинус, для y – синус, для z – сами u и v. Исходя из этого подбираем параметрические уравнения

$$x = \cos(u+v);\ y = \sin(u+v);\ z = u+v,\ u, v \in \mathbb{R}$$

□

8.2. Домашнее задание.

1. **[Г]7.3а)** Найдите частные производные вектор-функции: $\vec{r}(u,v) = (2u-v)\vec{i} + (u^2+v^2)\vec{j} + (u^3-v^3)\vec{k}$. Будут ли существовать точки (u,v) в которых векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны?

2. **[Г]7.7а),б),ж)** Для вектор-функции $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$ проверьте справедливость равенств $\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$, $|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]| = |\vec{r}_v|$, $(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv})(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}) = \vec{r}_v^{\,2}$.

3. **[Г] 7.13б), в), е)** Напишите параметрические уравнения эллипсоида, двуполостного гиперболоида, эллиптического цилиндра.

   Указания. эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4. **[Г] 7.14** Составьте параметрические уравнения поверхностей вращения:
   а) катеноида, полученного вращением цепной линии $x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}$, $y = 0$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$ вокруг оси Oz.
   б) псевдосферы, полученной вращением трактрисы $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + \cos u)$, $u = [0,\pi)$ вокруг оси Oz.

5. **[Г] 7.11б),в)** Определите, какой поверхностью второго порядка является поверхность, заданная параметрическими уравнениями 1) $x = a(u+v)$, $y = b(v-u)$, $z = 2uv$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$; 2) $x = r\cos u\sin v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$, $u \in [0,2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Каковы координатные линии поверхности при данной параметризации?

6. **[Г] пример 7.6** Напишите параметрические уравнения гиперболического параболоида, если $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, приняв за координатные линии его прямолинейные образующие.

7. **[Г] 7.20** Напишите параметрические уравнения кругового цилиндра, координатными линиями которого являются: а) окружности и прямолинейные образующие, б) винтовые линий и окружности.

8.3. Дополнительные задачи.

1. Пусть поверхность образована вращением гладкой линии γ: $x = f(z)$, $y = 0$ вокруг оси Oz (поверхность вращения). Задайте ее в неявном виде. Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. Напишите параметрические уравнения поверхности вращения.

2. Винтовой поверхностью называется поверхность, полученная вращением плоской кривой γ вокруг оси, расположенной в ее плоскости, и одновременным переносом этой кривой вдоль той же оси со скоростью, пропорциональной углу поворота. Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. Напишите параметрические уравнения винтовой поверхности, если осью является ось Oz.

3. **[Г] пример 7.1** Дана вектор-функция $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Докажите, что функция $|\vec{r}(u,v)|$ постоянна тогда и только тогда, когда вектор $\vec{r}(u,v)$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ во всех точках $(u,v) \in G$.

4. **[Г]7.15** Даны две линии $\vec{r} = \vec{r}(u)$ и $\vec{p} = \vec{p}(v)$. Составьте векторное параметрическое уравнение поверхности, образованной серединами отрезков, концы которых лежат на данных линиях (*поверхность переноса*).

5. **[Г] 7.21** Для винтовой линии $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $z = bv$, $v \in \mathbb{R}$ составить уравнение поверхности, образованной а) ее касательными, б) ее бинормалями, в) ее главными нормалями.

§2.9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

9.1. Сведения из теории.Поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Тогда плоскость $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ называется *касательной плоскостью* поверхности F в точке M.

Вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ называется *вектором нормали.* Прямая $(M, \vec{N})$ называется *нормалью* поверхности F в точке M.

Уравнения касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

где значения производных вычисляются при значении параметром $u = u_0$, $v = v_0$, соответствующих точке $M(x_0, y_0, z_0)$ или

$$N_1(x-x_0) + N_2(y-y_0) + N_3(z-z_0) = 0.$$

Уравнения нормали

$$\frac{x-x_0}{N_1} = \frac{y-y_0}{N_2} = \frac{z-z_0}{N_3}.$$

Если поверхность F задана неявно с помощью уравнения $\Phi(x,y,z) = 0$, то касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ задается

$$\Phi_x(x-x_0) + \Phi_y(y-y_0) + \Phi_z(z-z_0) = 0,$$

где частные производные вычислены в точке (x_0, y_0, z_0). Нормаль задается так

$$\frac{x-x_0}{\Phi_x} = \frac{y-y_0}{\Phi_y} = \frac{z-z_0}{\Phi_z}.$$

9.2. Задачи.

1. **[Г] 7.22б)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнениями $x = u + v$, $y = u^2 - 2v$, $z = u^3 - uv$ в точке $M_0(2, -1, 0)$.

   Решение. Поверхность задана параметрическими уравнениями. Значит пишем уравнение касательной плоскости по точке и векторам $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ в этой точке. Сначала проверим, принадлежит ли точка поверхности:

   $$2 = u + v;\ -1 = u^2 - 2v;\ 0 = u^3 - uv.$$

   Чтобы точка принадлежала поверхности эти три равенства должны выполняться одновременно для некоторой пары (u, v). Попробуем ее найти. Выразим из первого уравнения $v = 2 - u$ и подставим в два остальных: $u^2 + 2u - 3 = 0$ и $u(u^2 + u - 2) = 0$. Значение u должно быть корнем как первого так и второго уравнения. Подходит только $u = 1$. Тогда $v = 1$. Итак, точка M_0 лежит на поверхности, а за одно мы нашли криволинейные координаты точки $M_0(1, 1)$.

   Находим частные производные

   $$\begin{array}{lll} x_u = 1; & y_u = 2u; & z_u = 3u^2 - v; \\ x_v = 1; & y_v = -2; & z_v = -u. \end{array}$$

   Находим их значения в точке M_0. Для этого нам потребуются ее криволинейные координаты.

   $$\begin{array}{lll} x_u = 1; & y_u = 2; & z_u = 2; \\ x_v = 1; & y_v = -2; & z_v = -1. \end{array}$$

   Наконец, пишем уравнение касательной плоскости.

   $$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

   Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид $2x + 3y - 4z - 1 = 0$.

   Напишем уравнение нормали. Для этого нам потребуется вектор перпендикулярный касательной плоскости (он будет параллелен нормали). Считываем его координаты из уравнения касательной плоскости $(2, 3, -4)$. Тогда канонические уравнения нормали имеют вид

   $$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}.$$

   □

2. **[А]№1059** Дана поверхность $xyz = 1$. Напишите уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

Решение. Поверхность F в этой задаче задана неявно с помощью уравнения

$$xyz - 1 = 0.$$

Вспомним, что уравнение касательной плоскости в этом случае мы умеем писать по точке и перпендикулярному вектору (вектору нормали к поверхности в этой точке). Точку мы не знаем, поэтому обозначим ее $M(x_0, y_0, z_0)$. Вычисляем частные производные левой части уравнения поверхности

$$\Phi_x = yz;\ \Phi_y = xz;\ \Phi_z = xy.$$

Теперь вычисляем их значения в точке M

$$\Phi_x = y_0z_0;\ \Phi_y = x_0z_0;\ \Phi_z = x_0y_0.$$

Все готово, чтобы написать уравнение касательной плоскости

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z - 3x_0y_0z_0 = 0.$$

Так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности F (то есть $x_0y_0z_0 = 1$), свободный член в уравнении касательной плоскости будет равен -3.

Чтобы ответить на вопрос задачи, нам нужно найти значения букв x_0, y_0, z_0. В условии говорилось, что искомая касательная плоскость должна быть параллельна плоскости $x + y + z - 1 = 0$. Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны.

$$\frac{y_0z_0}{1} = \frac{x_0z_0}{1} = \frac{x_0y_0}{1}.$$

Из этих равенств, учитывая, что $x_0y_0z_0 = 1$ (точка M принадлежит поверхности F) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (y_0 - x_0)z_0 = 0 \\ (y_0 - z_0)x_0 = 0 \\ x_0y_0z_0 = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем, что $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Итак, уравнение искомой касательной плоскости $x+y+z-3 = 0$. □

3. Докажите, что линия γ: $u + v = 1$, лежащая на поверхности F: $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, является прямой.

Решение. Выведем неявные уравнения линии. Их должно быть два и переменными там должны быть буквы x, y, z. Другими словами, нам нужно исключить параметры u и v, используя уравнение γ в криволинейных координатах и параметрические уравнения поверхности.

Сразу можем написать, что $x = 1$. Преобразуем y:

$$y = u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = 1 - 2uv.$$

Аналогичным образом поступим с z.

$$z = u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u + v)^2 - 3uv(u + v) = 1 - 3uv$$

Тогда из последних двух равенств получим $\frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$. Итак, неявные уравнения кривой γ имеют вид

$$x = 1;\ \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Это два линейных уравнения. Каждое из них задает плоскость, следовательно, вместе они задают прямую. □

4. **[Г]7.28а)** Докажите, что у поверхности $x = ve^u$, $y = ve^{-u}$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

Решение. Найдем направляющий вектор нормали в произвольной точке $M(u, v)$.

Вычисляем частные производные

$$\begin{array}{lll} x_u = ve^u; & y_u = -ve^{-u}; & z_u = 0 \\ x_v = e^u; & y_v = e^{-u}; & z_v = 1 \end{array}$$

Вычисляем векторное произведение

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ve^u & -ve^{-u} & 0 \\ e^u & e^{-u} & 1 \end{vmatrix} = -ve^{-u}\vec{i} - ve^u\vec{j} + 2v\vec{k}.$$

Заметим, что во всех точках линии v значение u постоянно. Обозначим это значение u_0 (оно не меняется вдоль одной линии v). Тогда векторы нормали вдоль линии v имеют координаты $\vec{N} = -ve^{-u_0}\vec{i} - ve^{u_0}\vec{j} + 2v\vec{k}$. Мы видим, что все такие векторы параллельны постоянному вектору $\vec{p} = -e^{-u_0}\vec{i} - e^{u_0}\vec{j} + 2\vec{k}$.

□

5. **[А]№1060** Докажите, что все плоскости, касательные к поверхности F: $z = x \sin^2 \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ проходят через одну точку.

Решение. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка поверхности F. Вычисляем частные производные для функции $\Phi(x, y, z) = z - x \sin^2 \frac{y}{x}$.

$$\Phi_x = -\sin^2 \frac{y}{x} + 2\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x};\ \Phi_y = -2 \sin \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x};\ \Phi_z = 1.$$

Пишем уравнение касательной плоскости.

$$(x - x_0)(-\sin^2 \frac{y_0}{x_0} + 2\frac{y_0}{x_0} \sin \frac{y_0}{x_0} \cos \frac{y_0}{x_0}) + (y - y_0)(-2 \sin \frac{y_0}{x_0} \cos \frac{y_0}{x_0}) + (z - z_0) = 0.$$

Так как точки (x_0, y_0, z_0) принадлежит поверхности, $z_0 - x_0 \sin^2 \frac{y_0}{x_0} = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости принимает вид

$$x(-\sin^2 \frac{y_0}{x_0} + 2\frac{y_0}{x_0} \sin \frac{y_0}{x_0} \cos \frac{y_0}{x_0}) + y(-2 \sin \frac{y_0}{x_0} \cos \frac{y_0}{x_0}) + z = 0.$$

Какую бы точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности мы не взяли, этому уравнению всегда будет удовлетворять координаты точки $O(0, 0, 0)$. Следовательно, касательная плоскость для любой точки поверхности F проходит через точку $(0, 0, 0)$. □

9.3. Домашнее задание.

1. **[Г] 7.22а),г)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически: 1) $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $(-1, 1, -1)$; 2) $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$ $(a, b \neq 0)$ в точке $u = 0$, $v = \frac{\pi}{3}$.

2. **[Г] 7.23б)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 = z$ в точке $(1, 1, 2)$.

3. Найдите все нормали поверхности $xyz = 1$, проходящие через начало координат.

4. **[Г]7.28б)** Докажите, что у поверхности $x = v \cos u$, $y = v \sin u$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

   P.S. (для интересующихся) Что это за поверхность? Как выглядят линии v? Как выглядят нормали к поверхности (нарисуйте) и убедитесь, что они действительно параллельны вдоль линии v. А что будет с нормалями, если их взять в произвольных точках поверхности?

5. **[Г] 7.32б)** Для поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv + 3$ найдите нормаль, проходящую через начало координат (обратите внимание, что начало координат не принадлежит поверхности).

9.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что все касательные плоскости поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, где f – гладкая функция, проходят через начало координат.

2. **[Б]№1692** Докажите, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскостью поверхности $xyz = 1$ не зависит от выбора точки касания на поверхности.

3. Напишите уравнение касательной плоскости в произвольной точке к сфере единичного радиуса с центром в начале координат и найдите на этой сфере множество точек, в которых касательные плоскости параллельны вектору $\vec{p}(1, 2, 3)$.

4. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a$, где $a > 0$, отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

5. Дана поверхность $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$. Докажите, что главная нормаль координатной линии u в каждой точке является нормалью к поверхности.

   Решение. Начнем с линии u. Напишем ее параметрические уравнения в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. На линии u постоянной является криволинейная координата v, то есть $v = v_0$ – это уравнение линии u в криволинейных координатах. Чтобы перейти к параметрическим уравнениям этой линии, нужно подставить $v = v_0$ в параметрические уравнения поверхности (линия u лежит на поверхности, следовательно, криволинейные координаты ее точке удовлетворяют уравнениям поверхности. А эти уравнения выдают координаты точек линии относительно уже пространственной ПДСК). Итак, линия u задается так:
$$x = au,\ y = \sin u,\ z = bv_0.$$
   Параметром здесь является буква u (можно поменять на t, чтобы было как обычно). Вспоминаем, как по параметрическим уравнениям кривой найти направляющий вектор главной нормали (заметим, что параметризация не является естественной): вычисляем касательный вектор $\frac{d\vec{r}}{du}$, вычисляем $\frac{d^2\vec{r}}{du^2}$, вычисляем их векторное произведение – это будет вектор $\vec{p}$, параллельный бинормали и, наконец, векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{du}, \vec{p}]$ дает вектор, параллельный главной нормали.

   Вычисляем
$$\frac{d\vec{r}}{du}(a, \cos u, 0);\ \frac{d^2\vec{r}}{du^2}(0, -\sin u, 0).$$
   Перед тем, как считать векторное произведение, мы можем заменить вектор $\frac{d^2\vec{r}}{du^2}$ на коллинеарный $(0, 1, 0)$. При этом мы все-равно попадем на направляющий вектор бинормали. Считаем по знакомой формуле. Получим $\vec{p} = -a\vec{k}$. Опять переходим к коллинеарному $(0, 0, 1)$ и считаем векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{du}, \vec{p}] = \cos u\vec{i} - a\vec{j}$. Итак, вектор $\vec{q}$, параллельный главной нормали, имеет координаты $(\cos u, -a, 0)$.

   Нам нужно доказать, что он параллелен вектору нормали поверхности. Поверхность задана параметрическими уравнениями. Значит, для нее быстрее вычислить вектора, параллельные касательной плоскости, то есть вектора $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда нужно проверить, что вектор $\vec{q}$ перпендикулярен этим векторам. Вычисляем
$$\vec{r}_u(a, \cos u, 0);\ \vec{r}_v(0, 0, b).$$
   Вычисляя скалярные произведения вектора $\vec{q}(\cos u, -a, 0)$ с данными векторами, мы убеждаемся, что $\vec{q}$ перпендикулярен как вектору $\vec{r}_u$, так и вектору $\vec{r}_v$, то есть параллелен вектору нормали к поверхности. □

6. Докажите, что касательная плоскость к гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ в точке $(a, b, 0)$ пересекает его по двум прямолинейным образующим.

   Решение. Поверхность задана неявно, поэтому касательную плоскость пишем через точку и перпендикулярный вектор. Сначала считаем частные производные и берем их значения в точке $(a, b, 0)$
$$\Phi_x = \frac{2}{a};\ \Phi_y = -\frac{2}{b};\ \Phi_z = -2.$$
   Это вектор нормали к касательной плоскости. Пишем уравнение плоскости.
$$\frac{2}{a}(x - a) - \frac{2}{b}(y - b) - 2z = 0.$$
   Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - z = 0.$$

Осталось пересечь эту плоскость с гиперболическим параболоидом и убедиться, что получится прямая. Пересечение – это система уравнений.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - z = 0. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения z и подставляем в первое. Выделяя в полученном равенстве полные квадраты, получим, что множество точек пересечения задается системой уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 - \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - z = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение распадается на два: $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0$. Каждое из уравнений задает плоскость. Тогда последняя система равносильна совокупности двух систем. В каждой из них пересекаются две плоскости, то есть каждая система задает прямую.

P.S. (для интересующихся) Найдите все точки гиперболического параболоида, такие что касательные плоскости, определенные в них, пересекают гиперболический параболоид по прямолинейным образующим. Всегда будут получаться две прямолинейные образующие? □

§2.10. Первая квадратичная форма. Длина дуги кривой на поверхности. Угол между кривыми.Площадь поверхности.

10.1. Сведения из теории.

Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Первая квадратичная форма

$$d\vec{r}^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2,$$

где

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u^2;\ \gamma_{12} = \vec{r}_u\vec{r}_v;\ \gamma_{22} = \vec{r}_v^2.$$

Длина дуги кривой γ, заданной параметрическими уравнениями в криволинейных координатах $u = u(t)$, $v = v(t)$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы нужно вычислить в точках кривой γ. Для этого вместо u нужно подставить $u(t)$, а вместо v подставить $v(t)$.

Угол между кривыми γ_1: $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ и γ_2: $u = u_2(\tau)$, $v = v_2(\tau)$ в точке их пересечения ($t = t_0$, $\tau = \tau_0$)

$$\cos\angle(\gamma_1, \gamma_2) =$$

$$\left|\frac{\gamma_{11}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\,\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\,\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}}{\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\,\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)^2}}\right|.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы нужно посчитать в точке пересечения кривых.

Площадь поверхности F_0 (или части поверхности), для которой параметры (u, v) меняются в области G

$$S(F_0) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\, dudv.$$

10.2. Задачи.

1. **[Г]7.42а),б)** Вычислите первую квадратичную форму поверхностей: 1) эллипсоида $x = a\cos u\cos v$, $y = b\sin u\cos v$, $z = c\sin v$ $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; 2) однополостного гиперболоида $x = \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\cos u$, $y = \frac{b}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\sin u$, $z = \frac{c}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \neq 0$.

   Решение. 1) Найдем первую квадратичную форму для эллипсоида. Для этого нужны частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$:

   $$\vec{r}_u(-a\sin u\cos v, b\cos u\cos v, 0); \quad \vec{r}_v(-a\cos u\sin v, -b\sin u\sin v, c\cos v).$$

   Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы.

   $$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \vec{r}_u^2 = a^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\cos^2 v; \\ \gamma_{12} &= \vec{r}_u\vec{r}_v = (a^2 - b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v; \\ \gamma_{22} &= \vec{r}_v^2 = a^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 v. \end{aligned}$$

Тогда первая квадратичная форма эллипсоида будет иметь вид

$$ds^2 = (a^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\cos^2 v)du^2 + 2((a^2-b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v)dudv + (a^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 v$$

В частности, для сферы ($a = b = c = r$) имеем

$$ds^2 = r^2\cos^2 v du^2 + r^2 dv^2.$$

А еще лучше первая квадратичная форма будет выглядеть для сферы единичного радиуса: $ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2$.

2) Вычислим первую квадратичную форму однополостного гиперболоида. Опять вычисляем частные производные:

$$\vec{r}_u\left(-\tfrac{a}{2}(v+\tfrac{1}{v})\sin u, \tfrac{b}{2}(v+\tfrac{1}{v})\cos u, 0\right); \quad \vec{r}_v\left(\tfrac{a}{2}\cos u(1-\tfrac{1}{v^2}), \tfrac{b}{2}\sin u(1-\tfrac{1}{v^2}), \tfrac{c}{2}(1+\tfrac{1}{v^2})\right).$$

Находим коэффициенты первой квадратичной формы.

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \tfrac{a^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})^2\sin^2 u + \tfrac{b^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})^2\cos^2 u;\\
\gamma_{12} &= \tfrac{b^2-a^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})(1-\tfrac{1}{v^2})\cos u\sin u;\\
\gamma_{22} &= \tfrac{a^2}{4}\cos^2 u(1-\tfrac{1}{v^2})^2 + \tfrac{b^2}{4}\sin^2 u(1-\tfrac{1}{v^2})^2 + \tfrac{c^2}{4}(1+\tfrac{1}{v^2})^2.
\end{aligned}$$

Опять получаем достаточно громоздкую формулу для первой квадратичной формы однополостного гиперболоида. Сфера – частный случай эллипсоида – имела гораздо более простую первую квадратичную форму, чем общий случай эллипсоида. Посмотрим и в случае однополостного гиперболоида частный случай, который бы существенно упростил бы вид первой квадратичной формы. Аналогом сферы здесь будет однополостный гиперболоид вида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ($a = b = c = 1$). Для него первая квадратичная форма будет иметь вид: $ds^2 = (v+\frac{1}{v})^2 du^2 + 2(1+\frac{1}{v^4})dv^2$. Действительно, получилось гораздо проще.

P.S. (для интересующихся) Наверняка первая квадратичная форма зависит от параметризации поверхности. Давайте посмотрим другую параметризацию однополостного гиперболоида:

$$x = a\cos u\operatorname{ch} v;\ y = b\sin u\operatorname{ch} v;\ z = c\operatorname{sh} v.$$

Какой будет первая квадратичная форма здесь?

$$\vec{r}_u(-a\sin u\operatorname{ch} v, b\cos u\operatorname{ch} v, 0); \quad \vec{r}_v(a\cos u\operatorname{sh} v, b\sin u\operatorname{sh} v, c\operatorname{ch} v).$$

Тогда

$$ds^2 = (a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)\operatorname{ch}^2 v du^2 + 2(b^2-a^2)\sin u\cos u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v dudv + ((a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)\operatorname{sh}^2 v + c^2\operatorname{ch}^2 v)du^2.$$

В частном случае однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ имеем $ds^2 = \operatorname{ch}^2 v du^2 + \operatorname{ch} 2v dv^2$. □

2. **[Г]7.46а)** Найдите длину дуги линии $v = au$, лежащей на поверхности $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ (это, кстати, конус) между точками пересечения с координатными линиями $u = 1$ и $u = 2$.

Решение. Смотрим на формулу для вычисления длины дуги. Там кривая задана параметрическими уравнениями в криволинейных координатах, а в задаче кривая задана неявным уравнением в криволинейных координатах. Переходим к параметрическим уравнениям: одну криволинейную координату обозначаем через t, а вторую выражаем через нее. Получаем γ: $u = t$, $v = at$. Теперь нужно найти от какого значения параметра t до какого мы будем вычислять длину дуги. В задаче сказано, что линию γ нужно пересечь с координатной линией $u = 1$. Решаем простую систему $v = au$, $u = 1$ и находим точку пересечения $u = 1, v = a$. Так как параметр $t = u$, первое значение параметра $t_0 = 1$. Аналогично находим $t_1 = 2$. Дальше смотрим на формулу для вычисления длины дуги. Там есть еще коэффициенты первой квадратичной формы и производные функций $u(t)$ и $v(t)$, задающих кривую γ, по t. Вычисляем

$$\vec{r}_u(2u, 2u, v); \quad \vec{r}_v(2v, -2v, u).$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2; \quad \gamma_{12} = uv; \quad \gamma_{22} = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2.$$

Вычисляем значения этих коэффициентов в точках кривой γ ($u = t$, $v = at$)

$$\gamma_{11} = 8t^2 + a^2t^2; \quad \gamma_{12} = at^2; \quad \gamma_{22} = 8a^2t^2 + t^2.$$

Производные по t

$$\frac{du}{dt} = 1; \ \frac{dv}{dt} = a.$$

Все подставляем в формулу для вычисления длины дуги

$$s = \int_1^2 \sqrt{(8+a^2)t^2 + 2a^2t^2 + (8a^2+1)t^2}dt = \int_1^2 \sqrt{9+11a^2}tdt = \sqrt{9+11a^2}\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3\sqrt{9+11a^2}}{2}.$$

Заметим, что из-под корня t выходит с модулем. Но так как t меняется от 1 до 2 (принимает только положительные значения) модуль раскрывается со знаком плюс. □

3. Найдите угол между линиями $\gamma_1 : u = t, v = t+1$ и $\gamma_2 : u = t, v = 3-t$, лежащими на эллиптическом параболоиде: $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

   Решение. Находим координаты общей точки линий: $t_1 = t_2 = 1$, $u = 1, v = 2$.

   Находим $\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 2u)$, $\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 0)$. Тогда $\gamma_{11} = 1+4u^2$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2$. В точке с криволинейными координатами $(1,2)$ получим $\gamma_{11} = 5$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = 1$.

   Теперь находим $\frac{du_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{dv_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{du_2}{dt}(t_2) = 1$, $\frac{dv_2}{dt}(t_2) = -1$. Подставляем все в формулу и находим $\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \frac{2}{3}$. □

4. **[Г]7.49а)** Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = \cos u\cos v$, $y = \sin u\cos v$, $z = \sin v$ $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Решение. К решению этой задачи можно подойти с двух сторон: если мы помним формулу для вычисления угла между координатными линиями $\cos\varphi = \frac{|\gamma_{12}|}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}$, то вычисляем по ней. Если эта формула не вспоминается, то задаем две координатные линии уравнениями $u = u_0$, $v = v_0$, их точка пересечения (u_0, v_0) и дальше вычисляем по общей формуле для угла между кривыми.

   Выберем первый способ. Для его реализации нам потребуются коэффициенты первой квадратичной формы (а значит, и частные производные вектор-функции, задающей поверхность). Так как всегда есть надежда, что угол будет прямым, а значит косинус будет нулем, то есть нулем будет γ_{12}, начинаем вычисления с нее. Если это так, то два других коэффициента первой квадратичной формы не нужно будет вычислять.

   Частные производные.

   $$\vec{r}_u(-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0); \ \vec{r}_v(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v).$$

   Тогда $\gamma_{12} = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0$. Следовательно, угол между координатными линиями прямой.

   P.S. (для интересующихся) Что это за поверхность? Как выглядят координатные линии? □

5. Поверхность F имеет первую квадратичную форму $ds^2 = \operatorname{ch}^2 v du^2 - 2dudv + dv^2$, $v \neq 0$. На ней дан криволинейный треугольник T, ограниченный линиями OC: $u = 0$, OB: $u = v$ и CB: $v = 1$. Найдите площадь этого треугольника.

   Решение. Первая квадратичная форма уже дана. Поэтому подставляем ее коэффициенты в формулу для вычисления площади

   $$S(T) = \iint_T \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - 1}dudv = \iint_T \operatorname{sh} vdudv = \int_0^1 du\int_0^u \operatorname{sh} vdv = \int_0^1 (\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} 1)du = (\operatorname{sh} u - \operatorname{ch} 1u)|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1.$$

   □

10.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.42в),г)** Вычислите первую квадратичную форму поверхностей: 1) однополостного гиперболоида $x = a\frac{1+uv}{u+v}$, $y = b\frac{v-u}{u+v}$, $z = c\frac{uv-1}{u+v}$, $u+v \neq 0$; 2) двуполостный гиперболоида $x = \frac{a}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\cos u$, $y = \frac{b}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\sin u$, $z = \frac{c}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \neq 0$.
2. **[Г]7.46б)**Найдите длину дуги линии $u - v = 1$ на поверхности $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ между точками пересечения с координатными линиями $u = 0$ и $u = \sqrt{2}a$.
3. **[Г]7.49б)** Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.
4. **[Г]7.63а)** Найти площадь треугольника ABC, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $I = (1+e^{2u})du^2 - 2e^{u+v}dudv + e^{2v}dv^2$, если AB: $v = 0$, BC: $u = 1$, AC: $u = v$.

10.4. Дополнительные задания. В дальнейшем нам часто придется вычислять первую квадратичную форму поверхности вращения, полученной вращением линии $x = x(u)$, $z = z(u)$, находящейся в плоскости Oxz, вокруг оси Oz. Получите эту формулу.

Пусть дана гладкая поверхность F уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и однопараметрическое семейство линий Λ: $f(u, v) = c = const$ на поверхности F. Линия, пересекающая все кривые семейства Λ под прямым углом, называют *ортогональной траекторией* семейства Λ. Получим уравнение ортогональной траектории. Пусть γ_2: $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$ – искомая ортогональная траектория, γ_1: $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ – кривая из семейства Λ. Тогда $f(u_1(t), v_1(t)) = c$ – тождество. Продифференцируем его по t, используя правило дифференцирования сложной функции

$$f_u \frac{du_1}{dt} + f_v \frac{dv_1}{dt} = 0$$

Это тождество мы можем записать в виде пропорции

$$\frac{\frac{du_1}{dt}}{f_v} = -\frac{\frac{dv_1}{dt}}{f_u} = \lambda.$$

Последнее равенство – это обозначение. Или по-другому

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda f_v; \ \frac{dv_1}{dt} = -\lambda f_u. \tag{2.11}$$

Так как угол между кривыми γ_1 и γ_2 прямой, косинус угла равен нулю, по формуле для вычисления угла между кривыми получаем

$$0 = \gamma_{11} \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} + \gamma_{12} \left(\frac{du_1}{dt} \frac{dv_2}{dt} + \frac{du_2}{dt} \frac{dv_1}{dt} \right) + \gamma_{22} \frac{dv_1}{dt} \frac{dv_2}{dt}$$

или, подставляя (2.11) и сокращая на λ, получим

$$\gamma_{11} f_v \frac{du_2}{dt} + \gamma_{12} \left(f_v \frac{dv_2}{dt} - \frac{du_2}{dt} f_v \right) - \gamma_{22} f_u \frac{dv_2}{dt}.$$

Это дифференциальное уравнение, проинтегрировав которое, мы получим параметрические уравнения для ортогональной траектории γ_2.

Эти рассуждения легко модифицировать для нахождения кривой, которая пересекает данное семейство кривых $f(u, v) = c$ поверхности F под постоянным углом α. Такая кривая называется *изогональной траекторией.*

1. Проверим полученное уравнение ортогональной траектории в простейшем случае. Пусть поверхность F – плоскость, семейство Λ – семейство параллельных прямых. Ожидаемая ортогональная траектория – это прямая, перпендикулярная прямым семейства Λ. Похоже, что ортогональная траектория – это не одна прямая, а много (на роль ортогональной траектории годятся все прямые, перпендикулярные прямым семейства Λ). Убедитесь в этом, проведя подробные вычисления. Если здесь взять вместо прямого угла какой-то угол α, то понятно, что тоже получатся прямые (они будут локсодромами). Получите это с помощью уравнения.

   А что будет, если в качестве семейства Λ взять все прямые плоскости, проходящие через одну точку? Его можно задать как $f(u, v) = const$? Если да, то что будет ортогональной траекторией? А что будет, если поменять угол с прямого на какой-нибудь другой, например, 45^0 или вообще α?

   Задачу можно усложнять, беря, например окружности $x^2 + y^2 = const$ или гиперболы $x^2 - y^2 = const$ и вычислять их ортогональные траектории.

2. **[Г]7.52в)** Найдите ортогональную траекторию линии $u - v = const$ на поверхности с первой квадратичной формой $I = e^u du^2 - 2e^u du dv + (e^u + 1) dv^2$.

3. На поверхности $x = u$, $y = v$, $z = uv$ найдите все линии, пересекающие координатные линии v под прямым углом.

4. **[Г] пример 7.11** Даны параметрические уравнения сферы: $x = r \cos v \cos u$, $y = r \sin v \cos u$, $z = r \sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Напишите уравнение в криволинейных координатах линии, пересекающие меридианы $v = const$ под постоянным углом α. Эти кривые называются *локсодромами.* По ним раньше плавали корабли.

5. На поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$ найдите кривые, пересекающие все координатныме линии v под углом 30^0.

§2.11. Программа коллоквиума.

1. Параметризованная кривая (кривая). Гладкая кривая и ее параметрические уравнения. Замена параметра. Натуральный параметр.
2. Касательная к гладкой кривой. Теорема о касательной.
3. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой.
4. Соприкасающаяся плоскость. Вывод ее уравнения. Репер Френе.
5. Формулы Френе.
6. Кручение кривой. Формула для вычисления кручения в естественной параметризации.
7. Кручение кривой. Теорема о геометрическом смысле кручения. Плоские кривые.
8. Вычисление кривизны, кручения и векторов репера Френе в произвольной параметризации.
9. Гладкая поверхность в параметрическом представлении (гладкая поверхность) и ее параметрические уравнения. Криволинейные координаты. Замена параметризации.
10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения (поверхность задана параметрическими уравнениями).
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения (поверхность задана неявно).
12. Первая квадратичная форма. Вычисление длины дуги кривой на поверхности.
13. Первая квадратичная форма. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
14. Первая квадратичная форма. Вычисление площади области на поверхности.

§2.12. Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна линии на поверхности. Индикатриса Дюпена.

12.1. Сведения из теории. Вторая квадратичная форма поверхности F, заданной уравнением $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$

$$II = b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2,$$

где

$$b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}; \quad b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}; \quad b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}$$

или альтернативные формулы

$$\begin{array}{lll} b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u; & b_{12} = -\vec{n}_u\vec{r}_v = -\vec{n}_v\vec{r}_u; & b_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \\ b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu}; & b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv}; & b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} \end{array}$$

Нормальная кривизна k_n кривой $\gamma \subset F$ в точке M вычисляется по формуле (все вычисляется в точке M)

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Уравнение индикатрисы Дюпена: $b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2 = \pm 1$ в системе координат $(M,\vec{r}_u,\vec{r}_v)$. Обратите внимание, что система координат, вообще говоря, не является прямоугольной декартовой, а значит вид уравнения линии второго порядка в ней не канонический.

Точка поверхности называется эллиптической, если ее индикатриса Дюпена эллипс (в частности, если эллипс является окружностью, точка называется омбилической).

Точка поверхности называется гиперболической, если ее индикатриса Дюпена есть пара сопряженных гипербол.

Точка поверхности называется параболической, если ее индикатриса Дюпена есть пара параллельных прямых.

12.2. Задачи.

1. **[Г]7.64а)б)** Вычислите вторую квадратичную форму поверхности: а) прямого геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$, $a \neq 0$; б) винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

   Решение. Проводим вычисления по формулам. Нам нужны коэффициенты второй квадратичной формы. Вычислим их через $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$ и $\vec{n}$. Вычисляем все эти вектор-функции:

$$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a).$$

$$\vec{r}_{uu}(0,0,0);\quad \vec{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0);\quad \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

   Вычисляем $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$.

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{i}a\sin v - \vec{j}a\cos v + \vec{k}u}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

   Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы

$$\begin{aligned} &b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0 \\ &b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \tfrac{-a\sin^2 v - a\cos^2 v}{\sqrt{a^2+u^4}} = \tfrac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ &b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = -au\sin v\cos v + au\sin v\cos v = 0. \end{aligned}$$

   Итак, вторая квадратичная форма для прямого геликоида имеет вид $II = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}dudv$.

   Аналогичным образом считаем вторую квадратичную форму для винтовой поверхности. Первые частные производные

$$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 1);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 1).$$

   Вторые частные производные

$$\vec{r}_{uu}(0,0,0);\quad \vec{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0);\quad \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

   Вектор нормали

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{i}(\sin v - u\cos v) - \vec{j}(\cos v + u\sin v) + \vec{k}u}{\sqrt{1+2u^2}}.$$

   Коэффициенты второй квадратичной формы

$$\begin{aligned} &b_{11} = 0; \\ &b_{12} = \tfrac{-\sin v(\sin v - u\cos v) + \cos v(-\cos v - u\sin v)}{\sqrt{1+2u^2}} = \tfrac{-1}{\sqrt{1+2u^2}}; \\ &b_{22} = \tfrac{-u\cos v(\sin v - u\cos v) - u\sin v(-\cos v - u\sin v)}{\sqrt{1+2u^2}} = \tfrac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}. \end{aligned}$$

   Итак, вторая квадратичная форма для винтовой поверхности $II = \frac{-dudv+u^2dv^2}{\sqrt{1+2u^2}}$. □

2. **[Г] 7.67** Выведите формулу для вычисления второй квадратичной формы поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

   Доказательство. Поверхность задана неявным образом, а мы умеем вычислять вторую квадратичную форму, если она задана параметрически. Значит, нужно перейти от неявного вида к параметрическим уравнениям. Обозначим x и y через u и v соответственно. Тогда поверхность будет задана так:

$$x = u;\ y = v;\ z = f(u, v).$$

   Теперь проводим вычисления как в предыдущей задаче.

$$\vec{r}_u(1, 0, f_u);\ \vec{r}_v(0, 1, f_v);$$

$$\vec{r}_{uu}(0, 0, f_{uu});\ \vec{r}_{uv}(0, 0, f_{uv});\ \vec{r}_{vv}(0, 0, f_{vv}).$$

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{-f_u\vec{i} - f_v\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Теперь считаем коэффициенты второй квадратичной формы.

$$b_{11} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}};\ b_{12} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}};\ b_{22} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Итак, для поверхности, заданной неявно уравнением $z = f(x, y)$, вторая квадратичная форма имеет вид

$$II = \frac{f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

□

3. **[Г] 7.68 а)** Найдите вторую квадратичную форму поверхности $z = ax^2 + by^2$.

Решение. Пользуемся формулой, выведенной в предыдущей задаче

$$II = \frac{2adx^2 + 2bdy^2}{\sqrt{4a^2x^2 + 4b^2y^2 + 1}}.$$

□

4. **[А] №1129.** Дана поверхность $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$ (эллиптический параболоид). Найдите нормальную кривизну линии γ: $u - \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}$ в точке A с криволинейными координатами $u = 1$, $v = 1$. Определите вид нормального сечения в точке A, соответствующего данной кривой. Найдите индикатрису Дюпена.

Решение. Смотрим на формулу для вычисления нормальной кривизны: нам нужно вычислить значения коэффициентов первой и второй квадратичных форм в точке A, а потом разобраться с дифференциалами du и dv для кривой γ в точке A. Имеем

$$\vec{r}_u(1, 0, 2u);\ \vec{r}_v(0, 1, 2v);\ \vec{r}_{uu}(0, 0, 2);\ \vec{r}_{uv}(0, 0, 0);\ \vec{r}_{vv}(0, 0, 2).$$

Так как при вычислении коэффициентов первой и второй квадратичных форм нет операции дифференцирования (где нам необходимо знать о значении вектор-функции не только в точке A, но и в соседних точках) мы можем вычислить значения вектор-функций $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в точке A, а потом применять формулы для вычисления коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Вычисляем значения $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в точке A (при $u = 1$, $v = 1$)

$$\vec{r}_u(1, 0, 2);\ \vec{r}_v(0, 1, 2).$$

Вычисляем коэффициенты γ_{ij}

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u\vec{r}_u = 5;\ \gamma_{12} = \vec{r}_u\vec{r}_v = 4;\ \gamma_{22} = \vec{r}_v\vec{r}_v = 5;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 3.$$

Теперь коэффициенты второй квадратичной формы.

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично получим $b_{12} = 0$, $b_{22} = \frac{2}{3}$.

Теперь разберемся с дифференциалами. Рассмотрим общую ситуацию: пусть γ – кривая поверхности F ($\vec{r} = \vec{r}(u, v)$) задана уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ в криволинейных координатах этой поверхности. Тогда радиус-вектор, который рисует кривую γ на поверхности F имеет такое выражение: $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Направляющий вектор касательной к кривой γ в точке M – это производная $\frac{\vec{r}}{dt}$, вычисленная при значении t, соответствующим этой точке. По правилу дифференцирования сложной функции в точке M получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt}.$$

Мы помним, что векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ – это базис направляющего пространства касательной плоскости к поверхности F в точке M. Тогда на пару чисел $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ можно посмотреть как на координаты касательного вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$ в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Назовем их криволинейными координатами касательного вектора к кривой γ. Мысленно умножим эти координаты на dt (это разность, хоть и бесконечно малая, двух значений параметра, то есть это число). В результате получим коллинеарный вектор, то есть тоже направляющий вектор касательной с координатами (du, dv). Так как нам не важна длина направляющего вектора касательной, а важно только направление, нам нужно знать отношение координат $\frac{du}{dv}$ или $\frac{dv}{du}$ в точке M. Его мы и будем искать, исходя из уравнения кривой γ, заданного в криволинейных координатах. Если это рассуждение сложно воспринимается, то переходите от одного уравнения γ в криволинейных координатах к двум параметрическим уравнениям вида $u = u(t)$, $v = v(t)$, находите производные по t и вычисляйте их в нужной точке.

Возвращаемся к задаче. Кривая γ задана в криволинейных координатах уравнением $u - \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}$. Представляем себе u и v, зависящими от t, дифференцируем по t и умножаем на dt. В результате получим

$$du - \frac{1}{2}2vdv = 0 \Leftrightarrow du - vdv = 0.$$

Теперь смотрим на отношение $\frac{du}{dv} = v$. Оно зависит от v. В точке A (где $v = 1$) оно будет равно 1. Теперь все готово для подстановки в формулу нормальной кривизны. В этой формуле разделим и числитель и знаменатель на $(dv)^2$:

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2} = \frac{b_{11}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2b_{12}\frac{du}{dv} + b_{22}}{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dv} + \gamma_{22}} = \frac{\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3}}{5 + 2\cdot 4 + 5} = \frac{2}{27}.$$

Определим вид нормального сечения. Для этого нужно провести через точку A плоскость, параллельную касательному вектору кривой γ и вектору нормали к поверхности F в этой точке. Вектор нормали к поверхности F будет иметь координаты

$$\vec{N}(A) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Теперь нам нужен какой-нибудь касательный вектор к γ в точке A. Мы уже выше выяснили, что касательными векторами к γ будут такие векторы с координатами (du, dv), что $\frac{du}{dv} = 1$. Например, в качестве такого вектора $\vec{p}$ можно взять вектор $(1, 1)$. Это координаты вектора в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Найдем его координаты в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{p} = 1\vec{r}_u + \vec{r}_v = \vec{i} + 2\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Осталось найти координаты точки A в ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Мы знаем ее криволинейные координаты $(1, 1)$. Подставим их в параметрические уравнения поверхности: $x = 1, y = 1, z = 2$, то есть $A(1, 1, 2)$. Теперь пишем уравнение плоскости по точке и паре параллельных ей векторов:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Итак, нормальное сечение – это пересечение эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$ (это наша поверхность F заданная в неявном виде) и плоскости $x - y = 0$. Мы видим, что это парабола, заданная уравнениями $x - y = 0$, $z = 2x^2$.

Найдем индикатрису Дюпена в точке A. Подставляем найденные коэффициенты второй квадратичной формы в общее уравнение индикатрисы Дюпена: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = \pm 1$. Минус единицу сразу убираем (она дает пустое множество). Осталось уравнение $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = \pm 1$. Напомним, что это уравнение было записано относительно системы координат $(A, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Заметим, что это не прямоугольная декартова система координат (длины векторов не 1 и они не перпендикулярны – взгляните на их координаты в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$!) Значит, полученное уравнение совсем необязательно уравнение окружности. Это линия второго порядка эллиптического типа, причем центр ее ей не принадлежит, вещественные точки на ней есть, например, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$. Значит, это эллипс. Убедимся, что это не окружность. Пусть $B(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$. Это точка принадлежит эллипсу. Вычислим длину отрезка AB

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\vec{r}_u)(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\vec{r}_u)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{5}.$$

С другой стороны, мы нашли нормальную кривизну $k_n = \frac{2}{27}$. Для нее на индикатрисе Дюпена существует точка C, такая что $AC = \frac{1}{|\sqrt{k_n}|} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ и это расстояние не равно AB. Значит, индикатриса Дюпена есть эллипс, отличный от окружности. □

5. **[Г] 7.71а),б)** Найдите нормальную кривизну координатных линий на а) геликоиде $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$, $a \neq 0$; б) на сфере $x = r\cos v\cos u$, $y = r\sin v\cos u$, $z = r\sin u$, $v \in [0, 2\pi)$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Доказательство. а) Рассмотрим геликоид и линию u на нем. Ее уравнение имеет вид $v = v_0$. Тогда направление касательной к этой линии в криволинейных координатах будет задаваться так: $(du, 0)$. Подставляем в формулу для нахождения нормальной кривизны:

$$k_n = \frac{b_{11}du^2}{\gamma_{11}du^2} = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}}.$$

Аналогично получаем для линии v.

$$k_n = \frac{b_{22}dv^2}{\gamma_{22}dv^2} = \frac{b_{22}}{\gamma_{22}}.$$

Значит, нам нужно вычислить коэффициенты b_{11}, b_{22}, γ_{11}, γ_{22}. Находим

$$\begin{array}{ll} \vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0); & \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a); \\ \vec{r}_{uu}(0,0,0); & \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0). \end{array}$$

Вычисляем коэффициенты $\gamma_{11} = 1$; $\gamma_{22} = u^2 + a^2$.

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = 0;\ b_{22} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{-u\cos v\sin v + u\cos v\sin v}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = 0.$$

Итак, нормальная кривизна координатных линий равна нулю.

б) Проводим аналогичные вычисления для сферы. Имеем

$$\vec{r}_u(-r\cos v\sin u, -r\sin v\cos u, r\cos u);\ \vec{r}_v(-r\sin v\cos u, r\cos v\cos u, 0);\ \gamma_{11} = r^2;\ \gamma_{22} = r^2\cos^2 u;\ \gamma_{12} = 0;$$
$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = r^2|\cos u|.$$

$$\vec{r}_{uu}(-r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, -r\sin u);\ \vec{r}_{vv}(-r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, 0).$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} -r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u & r\cos u \\ -r\sin v\cos u & r\cos v\cos u & 0 \\ -r\cos v\cos u & -r\sin v\cos u & -r\sin u \end{vmatrix} = r^3\cos u.$$

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{r^3\cos u}{r^2|\cos u|} = \frac{r^3\cos u}{r^2\cos u} = r;\ k_n = \frac{1}{r}.$$

Итак, мы нашли нормальную кривизну для линий u.

Для линий v вычисления аналогичны.

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} -r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u & r\cos u \\ -r\sin v\cos u & r\cos v\cos u & 0 \\ -r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, 0 & & \end{vmatrix} = r^3\cos^3 u.$$

Тогда $b_{22} = r\cos u$ и $k_n = \frac{r\cos u}{r^2\cos u} = \frac{1}{r}$.

P.S. (для интересующихся) Получите значения нормальной кривизны, не проводя такие громоздкие расчеты (используйте информацию о кривизне окружности и теорему Менье). □

6. **[Г]7.76б)** Найдите координаты омбилических точек эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Зададим эллипсоид вращения параметрическими уравнениями (уравнения такие же как у сферы, только вместо радиуса r стоят коэффициенты из знаменателей при x, y, z

$$x = a\cos v\cos u,\ y = a\sin v\cos u,\ z = c\sin u.$$

Находим вторую квадратичную форму эллипсоида вращения. Вычисляем

$$\vec{r}_u(-a\cos v\sin u, -a\sin v\sin u, c\cos u);\ \vec{r}_v(-a\sin v\cos u, a\cos v\cos u, 0).$$

$$\vec{r}_{uu}(-a\cos v\cos u, -a\sin v\cos u, -c\sin u);\ \vec{r}_{uv}(a\sin v\sin u, -a\cos v\sin u, 0);\ \vec{r}_{vv}(-a\cos v\cos u, -a\sin v\cos u, 0).$$

$$\gamma_{11} = a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u;\ \gamma_{12} = 0;\ \gamma_{22} = a^2\cos^2 u;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = a\cos u\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}.$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = a^2c\cos u;\ b_{11} = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}.$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}) = 0;\ b_{12} = 0.$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}) = a^2c\cos^3 u;\ b_{22} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}.$$

В омбилических точках нормальные кривизны по всем направлениям одинаковые. Значит отношение второй и первой квадратичных форм не зависит от выбранного направления. Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны, то есть

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}(a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}a^2\cos^2 u}$$

Откуда получаем, что $c^2\cos^2 u = a^2\cos^2 u$. Так как $a \neq c$, то есть эллипсоид вращения не является сферой, это равенство верно тогда и только тогда, когда $\cos u = 0$. Так как u меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, получаем, что равенство верно для $u = -\frac{\pi}{2}$ и $u = \frac{\pi}{2}$ – это точки пересечения эллипсоида с осью вращения. □

12.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.64а)б)** Вычислите вторую квадратичную форму поверхности: 1) тора $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a+b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0, 2\pi)$, $a > b > 0$; 2) псевдосферы $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$, $u \in [0, \pi)$, $v \in [0, 2\pi)$.

2. **[Г] 7.68 б)** Найдите вторую квадратичную форму поверхности $z = \frac{1}{xy}$.

3. **[Г] 7.71в** Найдите нормальную кривизну координатных линий на катеноиде $x = \sqrt{a^2+u^2}\cos v$, $y = \sqrt{a^2+u^2}\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{a^2+u^2})$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

4. **[Г] 7.72 а)в)** Найдите нормальную кривизну указанной линии на поверхности в заданной точке и напишите уравнения нормального сечения: а) $x = u$, $y = v$, $z = 2uv$, линия $u - 2v = 0$ в точке $(2, 1, 4)$; в) $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, линия $u = v^2$ в точке $u = 1$, $v = 1$. Определите вид индикатрисы Дюпена и нормального сечения в этой точке.

5. **[Г]7.76в),г)** (для интересующихся) Найдите координаты омбилических точек в) параболоида вращения $x^2 + y^2 = 2a^2z$; б) эллиптического параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

12.4. Дополнительные задачи.

1. Выведите уравнения для вычисления второй квадратичной формы для поверхности вращения, образованной вращением плоской линии $x = x(u)$, $z = z(u)$, $u \in U$ плоскости Oxz, вокруг оси Oz. Эта формула очень упростит жизнь в вычислениях домашнего задания.

2. **[А]№1125** Покажите, что в фиксированной точке поверхности сумма нормальных кривизн кривых, имеющих ортогональные направления, постоянна.

   Решение. Используем формулу Эйлера

   $$(k_n)_{\gamma_1} + (k_n)_{\gamma_2} = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha + k_1\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) + k_2\sin^2(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = k_1 + k_2.$$

   □

3. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии γ, то каждая точка этой линии является параболической.

   Решение. Заметим, что линия γ – плоская. Она лежит в касательной плоскости к поверхности. Тогда орт нормали к поверхности в каждой точке линии γ один и тот же. Тогда вдоль этой линии частные производные вектора нормали $\vec{n}$ будут равны нулю, то есть $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ во всех точках линии γ нулевые. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы $b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u$ и т.д. будут нулями во всех точках этой линии. Тогда $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$, то есть все точки линии γ параболические. □

§2.13. Асимптотические линии на поверхности.

13.1. Сведения из теории *Асимптотическим направлением* в данной точке поверхности F называется направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль. Другими словами, направление является асимптотическим, если для него нормальная кривизна нуль.

Кривая на поверхности, касательная к которой в каждой точке имеет асимптотическое направление, называется *асимптотической линией.*

Гладкая линия, заданная в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, будет асимптотической линией тогда и только тогда, когда

$$b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2 = 0.$$

13.2. Задачи.

1. **[Г]7.78** Найдите условие, при котором координатные линии произвольной поверхности являются асимптотическими линиями.

   Решение. Рассмотрим линию u. Напомним, что в криволинейных координатах она задается уравнением $v = v_0$, где v_0 – константа. По-другому это уравнение можно записать так: $u = t$, $v = v_0$. Она будет асимптотической тогда и только тогда, когда $b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2 = 0$, где du и dv нужно найти для линии u. Находим из ее параметрических уравнений: $du = dt$, $dv = 0$. Тогда получим $b_{11}dt^2 = 0$. Так как dt не нуль, нулем будет b_{11} во всех точках линии u.

   Итак, линия u будет асимптотической на поверхности F тогда и только тогда, когда во всех ее точках $b_{11} = 0$.

   Аналогично рассуждая, получаем, что линия v будет асимптотической тогда и только тогда, когда во всех ее точках $b_{22} = 0$. □

2. **[А]№1153** Найдите асимптотические линии на поверхности $z = xy^2$ и покажите, что одно семейство таких линий – прямолинейные образующие этой поверхности.

   Решение. Чтобы найти уравнения асимптотической линии, нужно записать дифференциальное уравнение асимптотической линии. Для этого сначала нужно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы поверхности. Если помните формулы, выведенные на одном из прошлых семинаров, для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы поверхности, заданной неявным уравнением $z = f(x, y)$, то считайте по ним. Если нет, то лучше воспользоваться стандартными формулами. Для этого нужно задать поверхность параметрическими уравнениями. В этой задаче это делается очень просто: обозначаем $x = u$, $y = v$. Тогда $z = uv^2$. Итак, параметрические уравнения поверхности:

   $$x = u,\ y = v,\ z = uv^2.$$

   Вычисляем частные производные.

   $$\vec{r}_u(1, 0, v^2);\ \vec{r}_v(0, 1, 2uv);\ \vec{r}_{uu}(0, 0, 0);\ \vec{r}_{uv}(0, 0, 2v);\ \vec{r}_{vv}(0, 0, 2u).$$

   Теперь вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы.

   $$\gamma_{11} = 1 + v^4;\ \gamma_{12} = 2uv^3;\ \gamma_{22} = 1 + 4u^2v^2.$$

   Теперь вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы.

   $$b_{11} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = 0;\ b_{12} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{2v}{\sqrt{1 + v^4 + 4u^2v^2}};\ b_{22} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{2u}{\sqrt{1 + v^4 + 4u^2v^2}};$$

   Составляем дифференциальное уравнение асимптотической линии.

   $$2\frac{2v}{\sqrt{1 + v^4 + 4u^2v^2}}dudv + \frac{2u}{\sqrt{1 + v^4 + 4u^2v^2}}dv^2 = 0.$$

   Знаменатель в нуль не обращается, на него умножаем обе части. Получаем совокупность дифференциальных уравнений

   $$\left[\begin{array}{l} dv = 0 \\ 2vdu + udv = 0. \end{array}\right.$$

   Первое уравнение дает решение $v = const$. Это линии u.

Второе уравнение запишем в виде

$$-2\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}.$$

Интегрируем $-2\ln u = \ln v + C$, то есть $u^{-2} = Cv$, где C – произвольная ненулевая константа. Еще это уравнение можно записать так: $u^2 v = const$. Это второе семейство асимптотических линий.

Выясним, что из себя представляют первое семейство асимптотических линий. Первое семейство $v = v_0$, где v_0 – константа. Подставляем в параметрические уравнения поверхности, получим параметрические уравнения линии в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$x = u;\ y = v_0;\ z = v_0^2 u.$$

Это прямые, проходящие через точку $(0, v_0, 0)$ параллельно вектору $(1, 0, v_0^2)$. □

3. **[Г] 7.81** Покажите, что если прямая лежит на поверхности, то она является асимптотической линией.

Решение. Фиксируем произвольную точку прямой. Нормальным сечением в этой точке с тем же направлением, что и прямая, будет она сама. Кривизна прямой равна нулю. Следовательно, нормальная кривизна, соответствующая направлению прямой в данной точке равна нулю, то есть направление прямой будет асимптотическим. Так как это верно для каждой точки прямой, она является асимптотической линией на поверхности. □

4. **[Г]7.80 в),г)** Найти уравнения асимптотических линий поверхности: в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. в) Воспользуемся уравнением асимптотической линии. В левой части этого уравнения стоит вторая квадратичная форма. Значит, ее нам и нужно вычислять. Поверхность задана в виде $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$. Для нее мы выводили формулу для вычисления второй квадратичной формы

$$II = \frac{f_{xx}du^2 + 2f_{xy}dudv + f_{yy}dv^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Применяем ее. Заметим, что для получения дифференциального уравнения асимптотической линии, нам потребуется приравнять II к нулю. Следовательно, знаменатель (всегда ненулевой) нас не интересует. Вычисляем

$$f_x = \frac{x}{a^2};\ f_y = -\frac{y}{b^2}.$$

$$f_{xx} = \frac{1}{a^2};\ f_{xy} = 0;\ f_{yy} = -\frac{1}{b^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид

$$\frac{1}{a^2}du^2 - \frac{1}{b^2}dv^2 = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}du - \frac{1}{b}dv = 0; \\ \frac{1}{a}du + \frac{1}{b}dv = 0 \end{array}\right.$$

Интегрируя каждое из них, получаем

$$bu - av = c_1 \equiv const;\ bu + av = c_2 \equiv const,$$

где c_1 и c_2 – произвольные константы.

P.S. (для интересующихся) Выясним как выглядят эти асимптотические линии. Рассмотрим, например, линию $bu - av = 0$ (мы взяли значение константы $c_1 = 0$). Заметим, что данная поверхность – это гиперболический параболоид. Вспоминаем, как перейти к параметрическим уравнениям кривой, заданной на поверхности в криволинейных координатах уравнением $u = u(v)$. Нужно одну букву (из u, v) обозначить через t, а затем подставляем их в параметрические уравнения поверхности. Имеем $u = at$, $v = bt$ и $x = at$, $y = bt$, $z = \frac{1}{2}(\frac{a^2t^2}{a^2} - \frac{b^2t^2}{b^2}) = 0$. Итак, мы получаем, что линия $bu - av = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат задается параметрическими уравнениями $x = at$, $y = bt$, $z = 0$. Это параметрические уравнения прямой. Итак, мы получаем, что рассматриваемая асимптотическая линия – прямая. Остальные случаи исследуются аналогично.

P.S. (для еще больше интересующихся) Докажите, что полученные семейства асимптотических линий – это два семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида, не производя ни одного вычисления.

г) Рассмотрим вторую поверхность. Это однополостный гиперболоид. Если при решении предыдущего пункта этой задачи вы еще не догадались, как решить ее, не производя почти никаких вычислений, то читайте приведенное ниже „лобовое“ решение.

Запишем параметрические уравнения однополостного гиперболоида

$$x = a\cos u\operatorname{ch} v;\ y = b\sin u\operatorname{ch} v;\ z = c\operatorname{sh} v$$

Как и предыдущем пункте, для дифференциального уравнения асимптотической линии от коэффициентов второй квадратичной формы нас будут интересовать только числители (на знаменатель мы умножим и забудем про него). Значит, нам нужно считать смешанные произведения $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и частных производных второго порядка. Вычисляем.

$$\vec{r}_u(-a\sin u\operatorname{ch} v, b\cos u\operatorname{ch} v, 0);\ \vec{r}_v(a\cos u\operatorname{sh} v, b\sin u\operatorname{sh} v, c\operatorname{ch} v).$$

$$\vec{r}_{uu}(-a\cos u\operatorname{ch} v, -b\sin u\operatorname{ch} v, 0);\ \vec{r}_{uv}(-a\sin u\operatorname{sh} v, b\cos u\operatorname{sh} v, 0);\ \vec{r}_{vv}(a\cos u\operatorname{ch} v, b\sin u\operatorname{ch} v, c\operatorname{sh} v).$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = -abc\operatorname{ch}^3 v;\ (\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}) = 0;\ (\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}) = abc\operatorname{ch} v.$$

Составляем дифференциальное уравнение асимптотической линии

$$-abc\operatorname{ch}^3 v du^2 + abc\operatorname{ch} v dv^2 = 0.$$

На abc и $\operatorname{ch} v$ делим, так как они положительны и получаем совокупность из двух дифференциальных уравнений $dv = \operatorname{ch} v du$, $dv = -\operatorname{ch} v du$. Это уравнения с разделяющимися переменными. Решим первое, а второе решается аналогично. Запишем дифференциальное уравнение в виде $\frac{dv}{\operatorname{ch} v} = du$ и проинтегрируем обе части. Правая часть интегрируется просто – это будет $u + const$. Рассмотрим левую часть.

$$\int\frac{dv}{\operatorname{ch} v} = \int\frac{\operatorname{ch} v dv}{\operatorname{ch}^2 v} = \int\frac{\operatorname{ch} v dv}{1+\operatorname{sh}^2 v} =$$

Воспользуемся подстановкой $\operatorname{sh} v = t$. Тогда $\operatorname{ch} v dv = dt$. Подставляем в интеграл

$$= \int\frac{dt}{1+t^2} =$$

Этот интеграл можно посмотреть в таблице интегралов

$$= \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} v.$$

Итак, в криволинейных координатах мы получили уравнение асимптотической линии $\operatorname{arctg}\operatorname{sh} v = u + const$. Формально задача решена. Но остается все-таки вопрос, что это за линии? Например, посмотрим линию $\operatorname{arctg}\operatorname{sh} v = u$. Перейдем к общим уравнениям этой линии в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Для этого заметим, что $\operatorname{sh} v = \operatorname{tg} u$. Тогда $\operatorname{sh}^2 v = \operatorname{tg}^2 u$, $1+\operatorname{sh}^2 v = 1+\operatorname{tg}^2 u$, $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\operatorname{ch} v = \frac{1}{\cos u}$. Подставляем эти соотношения в параметрические уравнения поверхности

$$x = a\cos u\frac{a}{\cos u};\ y = b\sin u\frac{1}{\cos u};\ z = c\operatorname{tg} u$$

или

$$x = a;\ y = b\operatorname{tg} u;\ z = c\operatorname{tg} u$$

или, исключая параметр u, получим систему уравнений $x = a$, $bz - cy = 0$. Это уравнения плоскостей, а значит, их система задает прямую. Итак, асимптотическая линия $\operatorname{arctg}\operatorname{sh} v = u$ на однополостном гиперболоиде – прямая. □

13.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.79а),в)** Найдите уравнения асимптотических линий следующих поверхностей: а)винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$; в) сферы $x = r\cos v\cos u$, $y = r\cos v\sin u$, $z = r\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. **[Г]7.80а),б)** Найдите уравнения асимптотических линий поверхностей: а) $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; б) $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

13.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что линия на поверхности является асимптотической тогда и только тогда, когда она прямая или имеет в каждой точке касательную плоскость к поверхности своей соприкасающейся плоскостью.

   Решение. Для любой кривой γ на поверхности F имеем

   $$k_n = k\cos\theta.$$

   Кривая будет асимптотической тогда и только тогда, когда $k_n = 0$, то есть $k\cos\theta = 0$. □

§2.14. Главные направления и главные кривизны. Линии кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности.

14.1. Сведения из теорииГлавное направление в точке M поверхности F – это главное направление относительно индикатрисы Дюпена.

Кривая, касательная в каждой точке которой имеет главное направление, называется линией кривизны на поверхности.

Направление $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ (другими словами, (du, dv)) является главным тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv & \gamma_{12}du + \gamma_{22}dv \\ b_{11}du + b_{12}dv & b_{12}du + b_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением линии кривизны, то есть решая это дифференциальное уравнение, мы получаем уравнение линии кривизны в криволинейных координатах.

Главные кривизны – это нормальные кривизны по главным направлениям.

Уравнение для нахождения главных кривизн:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{12} - k\gamma_{12} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Эта система уравнений позволяет вычислить по главным кривизнам главные направления и наоборот, а также проверить, какой главной кривизне какое направление соответствует.

$$\begin{cases} b_{11}du + b_{12}dv = k(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv) \\ b_{12}du + b_{22}dv = k(\gamma_{12}du + \gamma_{22}dv) \end{cases}$$

Полная кривизна поверхности в точке

$$K = k_1k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Средняя кривизна поверхности в точке

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}^2}.$$

14.2. Задачи.

1. **[A]№1129** Дана поверхность $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$. Найдите главные направления и главные кривизны в точке A с криволинейными координатами $u = 1$, $v = 1$. Найдите линии кривизны.

   Решение. Для того чтобы найти главные направления и главные кривизны в точке A (см. формулы для них выше), нам потребуются коэффициенты первой и второй квадратичных форм в этой точке. Вычисляем.

   $$\vec{r}_u(1, 0, 2u);\ \vec{r}_v(0, 1, 2v)$$

   В точке $A(1, 1)$ получим $\vec{r}_u(1, 0, 2)$, $\vec{r}_v(0, 1, 2)$. В той же точке коэффициенты первой квадратичной формы

   $$\gamma_{11} = 5;\ \gamma_{12} = 4;\ \gamma_{22} = 5;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 3.$$

   Вычисляем частные производные второго порядка

   $$\vec{r}_{uu}(0, 0, 2);\ \vec{r}_{uv}(0, 0, 0);\ \vec{r}_{vv}(0, 0, 2).$$

Все то же самое будет в точке A. Тогда

$$b_{11} = \frac{2}{3};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = \frac{2}{3}.$$

Подставляем найденные величины в уравнение для главных направлений

$$\begin{vmatrix} 5du + 4dv & 4du + 5dv \\ \frac{2}{3}du & \frac{2}{3}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем модуль $du^2 - dv^2 = 0$. Тогда мы получаем два направления $du = dv$ и $du = -dv$. В качестве векторов, задающих эти направления можно взять векторы $(d\vec{r})_1(1,1)$ и $(d\vec{r})_2(1,-1)$.

Нормальные кривизны по этим направлениям мы можем вычислить двумя способами: либо решить уравнение для нахождения главных кривизн, которое приведено выше, либо вычислить нормальную кривизну в найденных направлениях (как отношение второй и первой квадратичных форм). Выберем первый способ. Уравнение для нахождения главных кривизн будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - 5k & -4k \\ -4k & \frac{2}{3} - 5k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель и пользуемся формулой для разности квадратов:

$$(\frac{2}{3} - 9k)(\frac{2}{3} - k) = 0.$$

Откуда получаем две главные кривизны в точке A: $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = \frac{2}{27}$.

Выясним, какому направлению какая главная кривизна соответствует. Применяем систему уравнений, в которой есть и главные кривизны, и главные направления (нам достаточно взять только первое уравнение). Возьмем направление $(1,1)$.

$$\frac{2}{3} = k(5+4) \Rightarrow k = \frac{2}{27}.$$

Итак, направлению $(1,1)$ соответствует главная кривизна $k = \frac{2}{27}$. (Кстати, мы могли бы и из этих уравнений вычислить главные кривизны.) Тогда второму главному направлению $(1,-1)$ будет соответствовать главная кривизна $k = \frac{2}{3}$.

P.S. (для интересующихся) Изобразим на рисунке главные направления. Для этого найдем координаты векторов, задающих главные направления в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Имеем

$$(d\vec{r})_1 = \vec{r}_u + \vec{r}_v = (\vec{i} + 2\vec{k}) + (\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Аналогично для второго направления получим $(d\vec{r})_2 = \vec{i} - \vec{j}$. Теперь мы можем изобразить эллиптический параболоид, точку A на нем и нарисовать в точке A представители данных векторов.

Наконец, найдем линии кривизны эллиптического параболоида. Берем уравнение, с помощью которого мы находили главные направления и подставляем в него коэффициенты первой и второй квадратичных форм, вычисленные в произвольной точке (u, v) (а не только в точке A). Получим

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}du & (1+4u^2)du + 4uvdv \\ \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}dv & 4uvdu + (1+4v^2)dv \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его (он не нулевой), получим квадратное уравнение

$$uvdu^2 + (v^2 - u^2)dudv - uvdv^2 = 0.$$

Нам нужно найти соотношение du и dv из этого уравнения. Получаем

$$\frac{du}{dv} = \frac{u^2 - v^2 \pm \sqrt{(v^2-u^2)^2 + 4u^2v^2}}{2uv} = \frac{u^2 - v^2 \pm (u^2 + v^2)}{2uv}.$$

Получаем совокупность из двух дифференциальных уравнений:

1) $\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$ или $\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$. Интегрируя его, получим $\ln u = \ln v + C$, где C – константа. Так как эта линия кривизны должна проходить через точку $A(1,1)$, получаем $\ln 1 = \ln 1 + C$. Откуда $C = 0$. Итак, первая линия кривизны, проходящая через точку A, будет в криволинейных координатах задаваться уравнением $u = v$. Выясним, что это за линия. Подставим это равенство в параметрические уравнения параболоида: $x = u, y = u, z = 2u^2$. Сразу видно, что это не прямая. Но для этой линии $x = y$, то есть она лежит в

плоскости $x - y = 0$. Кроме того, она лежит на параболоиде. Плоскость $x - y = 0$ проходит через ось Oz и разрезает параболоид по параболе. Следовательно, первая линия кривизны – это парабола.

2) $\frac{du}{dv} = \frac{-v}{u}$ или $udu = -vdu$. Интегрируем это уравнение и получаем $u^2 = -v^2 + C$, где C опять находим из условия, что точка A лежит на искомой линии: $1 = -1 + C$, то есть $C = 2$. Итак, уравнение второй линии кривизны имеет вид $u^2 = -v^2 + 2$. Выясним, что это за линия. Мы видим, что для этой линии $u^2 + v^2 = 2$. Тогда из параметрических уравнений параболоида получаем, что $z = 2$. Другими словами вторая линия кривизны получается, если чашу параболоида разрезать плоскостью $z = 2$. В результате мы получим окружность. □

2. **[Г]7.90а)** Найдите главные направления конуса $x = av\cos u$, $y = av\sin u$, $z = cv$, $v > 0$, $u \in [0, 2\pi)$, $a, c = const$ в произвольной точке.

Решение. Конус является поверхностью вращения прямой $x(v) = av$, $z(v) = cv$ вокруг оси Oz. Поэтому мы можем воспользоваться общими формулами для коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности вращения:

$$\gamma_{11} = a^2 + c^2; \quad \gamma_{12} = 0; \quad \gamma_{22} = a^2;$$
$$b_{11} = \tfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}; \quad b_{12} = 0; \quad b_{22} = 0.$$

Записываем уравнение для нахождения главных направлений

$$\begin{vmatrix} (a^2 + c^2)du & a^2dv \\ \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}du & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $dudv = 0$, то есть главные направления в любой точке (в криволинейных координатах) имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Это касательные векторы к линиям u и v соответственно.

P.S. (для интересующихся) Выясним, что из себя представляют линии u и линии v для такой параметризации конуса. Напомним, что линии u определяются условием $v = v_0 = const$. Тогда параметрические уравнения линии u в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ будут иметь вид: $x = (av_0)\cos u$, $y = (av_0)\sin u$, $z = cv_0$. Это окружность с центром в нуле радиуса av_0, лежащая в плоскости $z = cv_0$. Другими словами, линии u – это окружности, получающиеся при пересечении конуса и плоскости, перпендикулярной его оси. Линии v имеют уравнения $x = av\cos u_0$, $y = av\sin u_0$, $z = cv$. Это прямые, проходящие через начало координат параллельно векторам $(a\cos u_0, a\sin u_0, c)$. Это прямолинейные образующие конуса. Таким образом, мы еще обнаружили и линии кривизны конуса – это окружности и прямолинейные образующие. □

3. **[Г] 7.98а)** Найдите главные кривизны геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $\neq 0$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$ в произвольной точке.

Решение. Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм

$$\gamma_{11} = 1; \quad \gamma_{12} = 0; \quad \gamma_{22} = u^2 + c^2$$
$$b_{11} = 0; \quad b_{12} = \tfrac{-c}{\sqrt{c^2+u^2}}; \quad b_{22} = 0.$$

Пишем уравнение для нахождения главных кривизн

$$\begin{vmatrix} -k & -\frac{c}{\sqrt{u^2+c^2}} \\ -\frac{c}{\sqrt{u^2+c^2}} & -k(u^2 + c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $k_{1,2} = \pm\frac{c}{u^2+c^2}$. □

4. **[Г] 7.100а)** Найдите полную и среднюю кривизну геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$, $c \neq 0$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$ в произвольной точке.

Решение. Используя результат предыдущей задачи, находим

$$K = k_1k_2 = \frac{c^2}{(u^2 + c^2)^2}; \; H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

Мы видим, что геликоид – это минимальная поверхность. □

5. **[Г]7.103, 104 а)** Выведите формулу для вычисления полной и средней кривизны поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$. Используя этот результат, найдите полную и среднюю кривизну поверхности $z = ax^2 + by^2$.

Решение. У нас уже найдены формулы для вычисления коэффициентов первой и второй квадратичных форм для поверхности с таким уравнением

$$\gamma_{11} = 1 + f_x^2;\ \gamma_{12} = f_x f_y;\ \gamma_{22} = 1 + f_y^2;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

$$b_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};\ b_{12} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};\ b_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

Подставим эти соотношения в формулы для полной и средней кривизны.

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2};\ H = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2f_{xy}f_x f_y}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Применяем выведенные формулы для вычисления полной K и средней H кривизн для эллиптического (гиперболического) параболоида.

$$f_x = 2ax;\ f_y = 2by;\ f_{xx} = 2a;\ f_{xy} = 0;\ f_{yy} = 2b.$$

$$K = \frac{4ab}{(1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2)^2};\ H = \frac{2b(1 + 4a^2x^2) + 2a(1 + 4b^2y^2)}{2(1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

P.S. (для интересующихся) в уравнении $z = ax^2 + by^2$ мы получаем эллиптический параболоид, когда $a, b > 0$ и гиперболический параболоид, если $a > 0, b < 0$ (сразу вопрос, а что будет, если $a, b < 0$ или $a < 0, b > 0$?). В случае эллиптического параболоида мы видим, что полная кривизна принимает наибольшее значение в его вершине – точке $(0, 0, 0)$. Полная кривизна в этой точке равна $K = 4ab > 0$. По мере удаления от вершины кривизна уменьшается, оставаясь все время положительной. Аналогичным образом можно проанализировать поведение полной кривизны и для гиперболического параболоида. Проведите рассуждения самостоятельно. □

6. **[Г] 7.92 б)**Найдите линии кривизны гиперболического параболоида $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Решение. Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм для гиперболического параболоида

$$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = 2 + v^2; & \gamma_{12} = uv; & \gamma_{22} = 2 + u^2; \\ b_{11} = 0; \& b_{12} = -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}}; & b_{22} = 0. & \end{array}$$

Составляем уравнение для нахождения линий кривизны

$$\left| \begin{array}{cc} (2 + v^2)du + uvdv & uvdu + (2 + u^2)dv \\ -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}}dv & -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}}du \end{array} \right| = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение

$$(2 + v^2)du^2 = (2 + u^2)dv^2.$$

Получаем совокупность двух уравнений: 1) $\frac{du}{\sqrt{2+u^2}} = \frac{dv}{\sqrt{2+v^2}}$ и 2) $\frac{du}{\sqrt{2+u^2}} = -\frac{dv}{\sqrt{2+v^2}}$.

1) Интегрируем первое уравнение $\ln|u + \sqrt{u^2+2}| = \ln|v + \sqrt{v^2+2}| + \ln C$ или $u + \sqrt{u^2+2} = C(v + \sqrt{v^2+2})$.

2) Интегрируем второе уравнение $\ln|u + \sqrt{u^2+2}| = -\ln|v + \sqrt{v^2+2}| + \ln C$ или $(u + \sqrt{u^2+2})(v + \sqrt{v^2+2}) = C$.

P.S. (для интересующихся) Выясним, что это за линии на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим первую линию и возьмем $C = 1$. Тогда мы получаем $u + \sqrt{u^2+2} = v + \sqrt{v^2+2}$. Оставляя слева один корень, переносим u направо и возводим в квадрат, приводим подобные: $(v - u)\sqrt{2 + v^2} = uv - v^2$. Еще раз возводим в квадрат: $(u - v)^2 = 0$. Подставляя в параметрические уравнения параболоида, получим, что линия кривизны лежит в плоскости $y = 0$. Кроме того, она лежит на самом гиперболоиде $x^2 - y^2 = 4z$. Пересекаем: $y = 0$, $x^2 = 4z$. Второе уравнение задает параболический цилиндр, который протянулся вдоль оси Oy, параболы вверх по Oz. Первое уравнение – это плоскость Oxz. В пересечении получаем параболу. Итак, первая линия кривизны (мы посмотрели линию, проходящую через точку $(0, 0)$ в криволинейных координатах, то есть через $(0, 0, 0)$ в пространственной системе координат) является параболой.

Рассмотрим аналогично вторую линию кривизны, которая проходит через точку $(0, 0)$ в криволинейных координатах ($C = 2$). Рассуждая аналогично, получим уравнение $(u + v)(u + \sqrt{2 + u^2}) = 0$. Вторая скобка всегда больше нуля. Тогда $u + v = 0$. Следовательно, $x = 0$. Это плоскость Oyz. Пересекаем ею гиперболический параболоид и получаем еще одну параболу. □

14.3. Домашнее задание.

1. **[Г] 7.90б)** Найдите главные направления винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ в произвольной точке.

2. **[Г] 7.99** Найдите главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.

3. **[Г] 7.100 в)** Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $z = xy$ в произвольной точке.

4. **[Г] 7.104** Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $xyz = 1$.

5. **[Г] 7.92 в)**Найдите линии кривизны поверхности $z = xy$.

14.4. Дополнительные задачи.

1. **[Г] 7.96** Найдите необходимые и достаточные условия того, что координатные линии поверхности являются линиями кривизны.

2. Докажите, что главные направления на прямом геликоиде делят пополам угол между прямолинейными образующими и винтовыми линиями.

3. **[Б]№1737** Докажите, что на плоскости и сфере любая линия является линией кривизны.

§2.15. Поверхности постоянной кривизны.

15.1. Сведения из теорииПоверхность F называется поверхностью постоянной полной (соответственно, средней) кривизны, если во всех точках этой поверхности $K = const$ $(H = const)$.

15.2. Задачи.

1. Докажите, что для плоскости (или ее части) $K = H = 0$.

   Решение. Зададим плоскость (или ее часть) с помощью параметрических уравнений

   $$x = x_0 + p_1u + q_1v;\ y = y_0 + p_2u + q_2v;\ z = z_0 + p_3u + q_3v;\ u, v \in G,$$

   где $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ – не коллинеарные векторы параллельные плоскости, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка этой плоскости. Если двумерный промежуток G совпадает с $\mathbb{R}^2$ (то есть параметры u и v принимают всевозможные значения), то мы получим плоскость. В противном случае мы получаем какую-то часть плоскости.

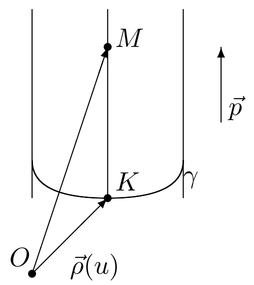
   Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм

   $$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2; & \gamma_{12} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3; & \gamma_{22} = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2; \\ b_{11} = 0, & b_{12} = 0, & b_{22} = 0. \end{array}$$

   Подставляя эти значения в формулы для полной и средней кривизн, получаем нули. □

2. Докажите, что векторное уравнение цилиндрической поверхности имеет вид $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{p}$, где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – уравнение направляющей γ, $\vec{p}$ – постоянный вектор, которому параллельны образующие. Найдите координатные линии цилиндрической поверхности.

   Решение. Напомним, что цилиндрическая поверхность получается так: через каждую точку направляющей γ проводится прямая, параллельная вектору $\vec{p}$. Множество точек всех таких прямых является цилиндрической поверхностью.

   Пусть M – произвольная точка цилиндрической поверхности. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u, v)$ можно представить в виде

   $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \vec{\rho}(u) + v\vec{p},$$

   где v – некоторое вещественное число. Тогда векторное параметрическое уравнение цилиндрической поверхности будет иметь вид

   $$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{p}.$$

Рассмотрим линии u. Для этого в векторном параметрическом уравнении цилиндрической поверхности фиксируем значение $v = v_0$. Тогда векторное параметрическое уравнение линии будет иметь вид $\vec{r}(u, v_0) = \vec{\rho}(u) + v_0\vec{p}$. Это линия γ, „сдвинутая“ на вектор $v_0\vec{p}$.

Векторное параметрическое уравнение линии v имеет вид $\vec{r}(u_0, v) = \vec{\rho}(u_0) + v\vec{p}$. Для каждого u_0 это уравнение задает прямую, проходящую через точку с радиус-вектором $\vec{\rho}(u_0)$ параллельно вектору $\vec{p}$. Таким образом, линии v – это прямолинейные образующие цилиндрической поверхности.

P.S. (для интересующихся) Вычислим полную и среднюю кривизну цилиндрической поверхности. Для этого нам нужны коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Вычисляем частные производные вектор-функции, задающей цилиндрическую поверхность.

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_v = \vec{p}.$$

Тогда коэффициенты первой квадратичной формы будут иметь вид

$$\gamma_{11} = (\vec{\rho}'(u))^2;\ \gamma_{12} = \vec{\rho}'(u)\vec{p};\ \gamma_{22} = \vec{p}^2.$$

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{(\vec{\rho}'(u))^2\vec{p}^2 - (\vec{\rho}'(u)\vec{p})^2} = |[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|.$$

Здесь мы воспользовались следующей формулой из аналитической геометрии

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\angle(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Вычисляем частные производные второго порядка

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\rho}''(u);\ \vec{r}_{uv} = \vec{0};\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Находим коэффициенты второй квадратичной формы

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(\vec{\rho}'(u)\vec{p}\vec{\rho}''(u))}{|[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = 0.$$

Тогда полная кривизна

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 0.$$

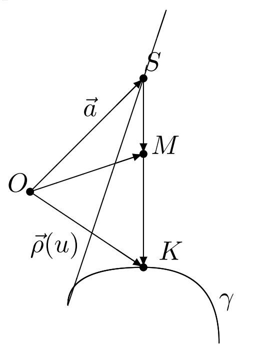
Находим среднюю кривизну

$$H = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}^2} = \frac{(\vec{\rho}'(u)\vec{p}\vec{\rho}''(u))\vec{p}^2}{2|[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|^3}.$$

□

3. Докажите, что векторное уравнение конической поверхности имеет вид $\vec{r}(u, v) = (1 - v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u)$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, задающий вершину конуса, $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – уравнение направляющей γ. Найдите координатные линии конуса.

Решение. Обозначим вершину конуса через S. Напомним, как получается коническая поверхность: точку S соединяем со всеми точками кривой γ прямыми. Полученное множество точек является конической поверхностью.



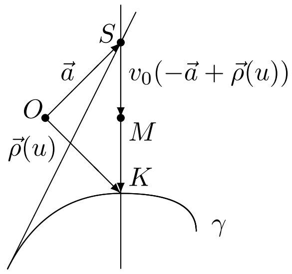
Пусть M – произвольная точка конуса. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u, v)$ можно выразить так:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM} = \vec{a} + v\overrightarrow{SK} = \vec{a} + v(-\vec{a} + \vec{\rho}(u)) = (1 - v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u).$$

Итак, векторное параметрическое уравнение конуса будет иметь вид

$$\vec{r}(u, v) = (1 - v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u).$$

Найдем координатные линии. Фиксируя $v = v_0$, получаем линии u: $\vec{r}(u, v_0) = (1 - v_0)\vec{a} + v_0\vec{\rho}(u)$. Чтобы представить себе, что это такое, запишем это уравнение в виде $\vec{r}(u, v_0) = \vec{a} + v_0(-\vec{a} + \vec{\rho}(u))$.



Тогда из рисунка видно, что произвольная точка M этой кривой будет получаться из соответствующей точки K кривой γ с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом v_0.

Рассмотрим линии v. Подставляем в уравнение конической поверхности $u = u_0$: $\vec{r}(u_0, v) = (1-v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u_0)$ или $\vec{r}(u_0, v) = \vec{a} + v(\vec{\rho}(u_0) - \vec{a})$. Это уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\vec{a}$ (это точка S) и направляющим вектором $\vec{\rho}(u_0) - \vec{a}$. Эти прямые – прямолинейные образующие конуса.

P.S. (для интересующихся) Интересно, чему равна полная и средняя кривизна конуса? Чтобы вычислить полную и среднюю кривизну, нужно найти коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Для этого вычисляем частные производные первого и второго порядка для вектор-функции, задающей конус.

$$\vec{r}_u = v\vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_v = -\vec{a} + \vec{\rho}(u).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = v^2(\vec{\rho}'(u))^2;\ \gamma_{12} = v\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a});\ \gamma_{22} = (\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2.$$

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{v^2(\vec{\rho}'(u))^2(\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2 - v^2(\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a}))^2} = |v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|.$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы нам потребуются частные производные второго порядка

$$\vec{r}_{uu} = v\vec{\rho}''(u);\ \vec{r}_{uv} = \vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Тогда

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(v\vec{\rho}'(u))(\vec{\rho}(u) - \vec{a})(v\vec{\rho}''(u))}{|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|} = \frac{v^2\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u)}{|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|} = \frac{|v|\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u)}{|[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|}.$$

$$b_{22} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(v\vec{\rho}'(u))(\vec{\rho}(u) - \vec{a})(\vec{\rho}'(u))}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что смешанное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

$$b_{22} = 0$$

из-за того, что $\vec{r}_{vv} = \vec{0}$. Тогда сразу видим, что полная кривизна конической поверхности $K = 0$. Вычислим среднюю кривизну

$$H = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{12} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)} = \frac{b_{11}\gamma_{22}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}.$$

$$H = \frac{(\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u))}{2|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|^3}(\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2.$$

Формула получилась громоздкая. Она немного упростится, если начало системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ выбрать в вершине конуса. Тогда $\vec{a} = \vec{0}$ и средняя кривизна будет вычисляться по формуле (аргумент u для краткости записи опустим, но он по-прежнему подразумевается)

$$H = \frac{|v|(\vec{\rho}'\vec{\rho}\vec{\rho}'')}{2|v||[\vec{\rho}', \vec{\rho}]|^3}\vec{\rho}^2.$$

Еще один интересный момент: имея полученную информацию, можно назвать асимптотические линии конической поверхности, не производя никаких вычислений. Как? Что это за линии? □

4. Докажите, что коническая и цилиндрические поверхности имеют нулевую полную кривизну.

Решение. В двух предыдущих задачах (в качестве дополнительных исследований) мы вычислили и полную и среднюю кривизны. Результаты и вычисления получились довольно громоздкие. Посмотрим, как упростятся вычисления, если найти нужно только полную кривизну. Вспомним, что полная кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Так как нам нужно доказать, что кривизна равна нулю, нам нужны только коэффициенты b_{ij}. Причем от них нужны только смешанные произведения $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$. Их мы и вычисляем, используя выведенные в предыдущих задачах векторные параметрические уравнения конической и цилиндрической поверхностей. С большой долей вероятности нулем будет b_{12}. С него и следует начать вычисления. Далее, один из коэффициентов b_{11} и b_{22} будет нулем. Вычисляем. Проведите подробные вычисления самостоятельно или посмотрите их в предыдущих задачах. Итак, для конической и цилиндрической поверхностей получим, что их полная кривизна в любой точке нулевая. □

5. Выведите формулы для вычисления полной и средней кривизны поверхности вращения и вычислите полную и среднюю кривизну сферы и псевдосферы.

   Доказательство. Напомним, что мы уже вычисляли коэффициенты первой и второй квадратичных форм для поверхности вращения:

$$\gamma_{11} = x'(u)^2 + z'(u)^2;\ \gamma_{12} = 0;\ \gamma_{22} = x(u)^2;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = x(u)\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}.$$

$$b_{11} = \frac{(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = \frac{x(u)z'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

   Мы задавали линию в плоскости Oxz с помощью параметрических уравнений $x = x(u)$, $z = z(u)$ и она вращалась вокруг оси Oz. Подставляя эти значения в формулы для полной и средней кривизны, находим

$$K = \frac{z'(u)(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{((x'(u))^2 + (z'(u))^2)^2 x(u)};\ H = \frac{z'(u)((x'(u))^2 + (z'(u))^2) + x(u)(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{2x(u)(x'(u))^2 + (z'(u))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

   Зададим сферу. Возьмем в плоскости Oxz половину окружности (находящуюся в первом и четвертом квадрантах) радиуса r с центром в начале системы координат . Ее параметрические уравнения будут иметь вид $x = r\cos u$, $z = r\sin u$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда имеем

$$x' = -r\sin u;\ z' = r\cos u;\ x'' = -r\cos u;\ z'' = -r\sin u.$$

   Подставляем в полученные формулы для полной и средней кривизны

$$K = \frac{1}{r^2};\ H = \frac{1}{r}.$$

   Итак, сфера является поверхностью постоянной полной и средней кривизны.

   Псевдосфера получается вращение трактрисы $x = a\sin u$, $z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)$ вокруг оси Oz. Находим

$$x'(u) = a\cos u;\ z'(u) = a\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\frac{1}{2} - \sin u\right) = a\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right);$$

$$x''(u) = -a\sin u;\ z'' = a(-\sin^{-2} u\cos u - \cos u) = a\cos u\left(-\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right);$$

   Подставляем в формулу для полной и средней кривизны

$$K = -\frac{1}{a^2};\ H = \frac{1}{a\operatorname{tg} 2u}.$$

   Итак, псевдосфера является поверхностью постоянной отрицательной полной кривизны. Ее средняя кривизна не является постоянной. □

6. **[Г] 7.105а)** Докажите, что катеноид $x = \operatorname{ch} u\cos v$, $y = \operatorname{ch} u\sin v$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$ является минимальной поверхностью.

   Решение. По параметрическим уравнениям мы видим, что это поверхность вращения (цепная линия вращается вокруг оси Oz). Параметрические уравнения цепной линии $x = \operatorname{ch} u$, $z = u$.

   Мы уже вывели формулу для вычисления средней кривизны поверхности вращения. Так как нам нужно показать, что средняя кривизна равна нулю, достаточно вычислить числитель в этой формуле. Вычисляем

$$x'(u) = \operatorname{sh} u;\ z'(u) = 1;\ x''(u) = \operatorname{ch} u;\ z''(u) = 0.$$

   Тогда

$$z'(u)((x'(u))^2 + (z'(u))^2) + x(u)(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u)) = 1(\operatorname{sh}^2 u + 1) + \operatorname{ch} u(\operatorname{sh} u \cdot 0 - \operatorname{ch} u \cdot 1) = 0.$$

   Итак, катеноид является примером минимальной поверхности. □

15.3. Домашнее задание.

1. Выясните, будет ли винтовая поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ минимальной.
2. **[Г] 7.105 г)** Докажите, что поверхность Эннепера $x = 3u + 3uv^2 - u^3$, $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ является минимальной.
3. **[А]№1145** На поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ найти линии, вдоль которых полная кривизна постоянна.

15.4. Дополнительные задачи.

1. Доказать, что если средняя кривизна поверхности во всех точках равна нулю, то асимптотическая сеть этой поверхности ортогональна.
2. Докажите, что если через некоторую точку поверхности проходит прямолинейная образующая, то полная кривизна в этой точке не положительна.
3. Поверхность образована нормалями некоторой поверхности вдоль ее линии кривизны. Докажите, что полная кривизна этой поверхности равна нулю.

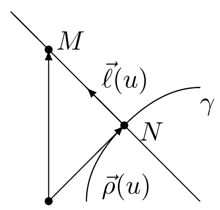
§2.16. Линейчатые поверхности.

16.1. Сведения из теории.Поверхность, являющаяся множеством точек прямых линий, называется *линейчатой поверхностью.* Если через каждую точку линейчатой поверхности проходит k прямых, целиком лежащих на этой поверхности, то она называется k-линейчатой.

Мы уже знакомы с примерами линейчатых поверхностей: цилиндрические и конические поверхности (1-линейчатые поверхности), однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид (2-линейчатые поверхности).

Мы будем строить линейчатые поверхности следующим образом. Пусть γ – гладкая кривая (она называется направляющей линейчатой поверхности) и она задается векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. В каждой точке этой кривой зададим единичный вектор $\vec{\ell} = \vec{\ell}(u)$ так, чтобы вектор-функция $\vec{\ell}(u)$ была бы гладкой. Через каждую точку $N \in \gamma$ (пусть ей соответствует значение параметра u) проведем прямую, параллельную вектору $\vec{\ell}(u)$ в этой точке. Получим семейство прямых, которые называются образующими линейчатой поверхности. Множество точек всех таких прямых является линейчатой поверхностью.

Выведем параметрическое уравнение линейчатой поверхности F.



Пусть M – произвольная точка линейчатой поверхности F. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u, v)$ будет получаться так:

$$\vec{r}(u, v) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u).$$

От точки O доходим до соответствующей точки кривой γ и затем идем по прямой, которая задана в этой точке с помощью вектора $\vec{\ell}$. Итак, векторное параметрическое уравнение линейчатой поверхности будет иметь вид

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u).$$

Линиями u будут линии $\vec{r}(u, v_0) = \vec{\rho}(u) + v_0\vec{\ell}(u)$. Это направляющая γ, „параллельно сдвинутая“ на вектор $v_0\vec{\ell}(u)$. Линиями v будут линии $\vec{r}(u_0, v) = \vec{\rho}(u_0) + v\vec{\ell}(u_0)$ – это прямолинейные образующие (задаются точкой с радиус-вектором $\vec{\rho}(u_0)$ параллельно вектору $\vec{\ell}(u_0)$.

Исследуем поведение нормали к линейчатой поверхности. Находим

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\ell}'(u); \; \vec{r}_v = \vec{\ell}(u).$$

Тогда направляющий вектор нормали (не обязательно единичный) будет иметь вид

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u)] + v[\vec{\ell}'(u), \vec{\ell}(u)].$$

Пусть точка движется по образующей, то есть u фиксировано, а v меняется. При этом векторы $[\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u)]$ и $[\vec{\ell}'(u), \vec{\ell}(u)]$ постоянны, так как зависят только от u. Тогда вектор $\vec{N}$ меняется только из-за изменения v. Выделим два случая:

1) (общий случай) $[\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u)] \neq \| [\vec{\ell}'(u), \vec{\ell}(u)]$ вдоль образующей. У вектора $\vec{N}$ первое слагаемое постоянно, а второе слагаемое меняется с изменением v. Касательная плоскость содержит образующую и поворачивается вокруг нее вместе с вектором $\vec{N}$. В этом случае линейчатая поверхность называется *косой.*

2) (специальный случай) $[\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u)] \| [\vec{\ell}'(u), \vec{\ell}(u)]$. Так как для вектора $\vec{N}$ первое слагаемое не меняется, а второе

будет параллельно первому слагаемому, то для всех точек образующей вектор $\vec{N}$ будет параллелен одной и той же прямой. Тогда касательная плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{N}$ будет неподвижной, то есть касательные плоскости во всех точках одной образующей будут совпадать. Такая линейчатая поверхность называется *развертывающейся.* Такие поверхности можно „развернуть“ на плоскость, то есть отобразить на плоскость с сохранением длин кривых этих поверхностей.

Получим критерий развертывающейся поверхности. Обозначим $\vec{p} = [\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u)] \| [\vec{\ell}'(u), \vec{\ell}(u)]$. Тогда по определению векторного произведения $\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}'(u)$ перпендикулярны вектору $\vec{p}$. Это означает, что $\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}'(u)$ компланарны для любого u, то есть их смешанное произведение равно нулю. Итак, линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда

$$(\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}'(u)) = 0.$$

16.2. Задачи.

1. **[Г]7.37** Поверхность образована касательными к некоторой линии γ. Докажите, что в каждой точке одной и той же касательной к линии γ касательная плоскость к поверхности одна и та же.

   Решение. Пусть линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\rho = \rho(u)$, где u – натуральный параметр. Запишем векторное параметрическое уравнение этой линии. От начала системы координат (точки O) идем сначала до точки линии γ по вектору $\vec{\rho}(u)$. Затем идем по касательной (то есть по прямой, параллельной вектору $\vec{\tau}(u)$, на сколько и в какую сторону идем, говорит параметр v). Тогда векторное параметрическое уравнение поверхности будет иметь вид

   $$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\tau}(u).$$

   Из сведений по теории мы видим, что касательная плоскость вдоль прямолинейной образующей будет одной и той же тогда и только тогда, когда поверхность является развертывающейся. Проверяем выполнение критерия развертывающейся поверхности:

   $$(\vec{\rho}'(u), \vec{\tau}(u), \vec{\tau}'(u)) =$$

   Так как u – натуральный параметр кривой, мы можем воспользоваться формулами Френе. Тогда

   $$= (\vec{\tau}(u), \vec{\tau}(u), \vec{\tau}'(u)) = 0,$$

   так как в смешанном произведении есть два одинаковых вектора. Итак, поверхность, образованная касательными к линии, является развертывающейся и касательные плоскости к ней вдоль одной прямолинейной образующей совпадают. □

2. **[Г]7.38** Поверхность F образована бинормалями к некоторой линии γ. Докажите, что касательная плоскость к поверхности в каждой точке линии γ совпадает со спрямляющей плоскостью линии γ, а нормалью к поверхности является главная нормаль линии γ.

   Решение. Зададим линию γ векторным параметрическим уравнением $\rho = \rho(u)$, где u – натуральный параметр. Тогда уравнение поверхности F будет иметь вид

   $$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\beta}(u).$$

   Найдем векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, которые определяют касательную плоскость к поверхности. Мы можем пользоваться формулами Френе для линии γ, так как параметр u для нее является натуральным.

   $$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\beta}'(u) = \vec{\tau}(u) + v(-\varkappa(u))\vec{\nu}(u);\ \vec{r}_v = \vec{\beta}(u).$$

   Во всех точках линии γ имеем $v = 0$. Тогда в этих точках

   $$\vec{r}_u = \vec{\tau}(u);\ \vec{r}_v = \vec{\beta}(u).$$

   Эти векторы определяют спрямляющую плоскость в точке $\vec{\rho}(u)$ линии γ.

   Найдем нормаль поверхности F в этих точках. Это будет вектор

   $$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{\tau}(u), \vec{\beta}(u)] = -\vec{\nu}(u),$$

   то есть нормаль к поверхности F параллельна вектору главной нормали линии γ, а значит совпадает с главной нормалью. □

3. **[Г]7.69** Гладкая линия γ задана уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$, где u – натуральный параметр линии γ. Поверхность F образована а) касательными к γ, б) главными нормалями к γ, в) бинормалями к γ. Вычислите первую и вторую квадратичные формы поверхности F в каждом из случаев.

Решение. 1. Как мы видели выше векторное параметрическое уравнение такой поверхности имеет вид

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\tau}(u).$$

Тогда, используя формулы Френе, получаем

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\tau}'(u) = \vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u);\ \vec{r}_v = \vec{\tau}(u).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u\vec{r}_u = (\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u))(\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u)) = 1 + v^2k(u)^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что векторы $\vec{\tau}(u)$ и $\vec{\nu}(u)$ единичные и взаимно перпендикулярные.

$$\gamma_{12} = (\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u))\vec{\tau}(u) = 1;\ \gamma_{22} = \vec{\tau}(u)\vec{\tau}(u) = 1.$$

Итак, первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = (1 + v^2k(u)^2)du^2 + 2dudv + dv^2.$$

Вычислим вторую квадратичную форму поверхности. Для этого нам потребуются вторые частные производные

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\tau}'(u) + v(k'(u)\vec{\nu}(u) + k(u)\vec{\nu}'(u)) = k(u)\vec{\nu}(u) + v(k'(u)\vec{\nu}(u) + k(u)(-k(u)\vec{\tau}(u) + \varkappa(u)\vec{\beta}(u))) =$$
$$= -vk(u)^2\vec{\tau}(u) + (k(u) + vk'(u))\vec{\nu}(u) + vk(u)\varkappa(u)\vec{\beta}(u).$$

$$\vec{r}_{uv} = k(u)\vec{\nu}(u);\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Воспользуемся тем, что репер Френе является правой прямоугольной декартовой системой координат, а значит мы можем применить формулу для вычисления смешанного произведения векторов через их координаты в репере Френе.

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} 1 & vk(u) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -vk(u)^2 & k(u) + vk'(u) & vk(u)\varkappa(u) \end{vmatrix} = v^2k(u)^2\varkappa(u).$$

Тогда

$$b_{11} = \frac{v^2k(u)^2\varkappa(u)}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{v^2k(u)^2\varkappa(u)}{|v|k(u)} = |v|k(u)\varkappa(u).$$

Вычисления для b_{12} и b_{22} еще проще. Там в определителях получаются нули. Следовательно, $b_{12} = 0$ и $b_{22} = 0$. Итак, вторая квадратичная форма поверхности F имеет вид

$$II = |v|k(u)\varkappa(u)du^2.$$

P.S. (для интересующихся) Теперь мы можем найти асимптотические линии, линии кривизны, определить полную и среднюю кривизны поверхности. Проведите вычисления самостоятельно.

2. Проведем аналогичные вычисления для поверхности, образованной главными нормалями. Записываем векторное параметрическое уравнение такой поверхности:

$$\vec{r}(u,v) = \rho(u) + v\vec{\nu}(u).$$

Вычисляем, используя формулы Френе,

$$\vec{r}_u = \vec{\tau}(u) + v(-k(u)\vec{\tau}(u) + \varkappa(u)\vec{\beta}(u)) = (1 - vk(u))\vec{\tau}(u) + v\varkappa(u)\vec{\beta}(u).$$

$$\vec{r}_v = \vec{\nu}(u).$$

Тогда

$$ds^2 = ((1 - v^2k(u)^2) + v^2\varkappa(u)^2)du^2 + dv^2.$$

Вторая квадратичная форма будет иметь вид

$$II = \frac{v\varkappa'(u) + v^2(k'(u)\varkappa(u) - k(u)\varkappa'(u))}{\sqrt{(1 - vk(u))^2 + v^2\varkappa(u)^2}}du^2 + 2\frac{\varkappa(u)}{\sqrt{(1 - vk(u))^2 + v^2\varkappa(u)^2}}dudv.$$

3. Вычислим первую и вторую квадратичные формы для поверхности бинормалей. Уравнение поверхности

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\beta}.$$

Первая квадратичная форма

$$ds^2 = (1 + v^2\varkappa^2(u))du^2 + dv^2.$$

Вторая квадратичная форма

$$II = \frac{k(u) - v\varkappa'(u) + v^2\varkappa(u)^2k(u)}{\sqrt{1+v^2\varkappa(u)^2}} + 2\frac{-\varkappa(u)}{\sqrt{1+v^2\varkappa(u)^2}}.$$

□

4. Докажите, что полная кривизна линейчатой поверхности равна нулю тогда и только тогда, когда она развертывающаяся.

Доказательство. Зададим линейчатую поверхность с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u)$, где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – векторное параметрическое уравнение направляющей в натуральной параметризации.

Вспомним, что полная кривизна поверхности вычисляется по формуле $K = \frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}$. Так как нам нужно работать с полной кривизной, которая равна нулю, знаменатель в этой дроби нам не потребуется. Кроме того, знаменатели при вычислении b_{ij} нам также не будут нужны. Поэтому важны для нас будут вторые частные производные $\vec{r}(u,v)$. Вычисляем

$$\begin{array}{lll} \vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\ell}'(u); & & \vec{r}_v = \vec{\ell}(u); \\ \vec{r}_{uu} = \vec{\rho}''(u) + v\vec{\ell}''(u); & \vec{r}_{uv} = \vec{\ell}'(u); & \vec{r}_{vv} = \vec{0}. \end{array}$$

Мы видим, что b_{22} нуль. Тогда b_{11} не нужно вычислять. Таким образом, полная кривизна линейчатой поверхности будет нулевой тогда и только тогда, когда $b_{12} = 0$, то есть $(\vec{\rho}'(u) + v\vec{\ell}'(u))\vec{\ell}(u)\vec{\ell}'(u) = 0$, то есть $(\vec{\rho}'(u)\vec{\ell}(u)\vec{\ell}'(u)) = 0$. Это означает, что линейчатая поверхность будет развертывающейся. □

§2.17. Программа экзамена.

17.1. Вопросы к экзамену.

1. Вектор- функция одного скалярного аргумента и техника дифференцирования.
2. Гладкие кривые. Длина дуги. Натуральный параметр. Замена параметризации. Неявное задание кривой.
3. Касательная к гладкой кривой. Теорема о существовании и единственности касательной. Уравнения касательной. Нормальная плоскость.
4. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой. Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Репер Френе.
5. Формулы Френе.
6. Кручение линии, формула вычисления. Теорема о геометрическом смысле кручения.
7. Формулы для вычисления кривизны и кручения линии, заданной в произвольной параметризации.
8. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты.
9. Замена параметризации в уравнениях поверхности. Неявные уравнения поверхности.
10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Различные способы задания и виды уравнений.
11. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины дуги.
12. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
13. Вычисление площади на поверхности.
14. Вторая квадратичная форма. Различные формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.
15. Нормальная кривизна линии на поверхности. Формула для ее вычисления.

16. Кривизна нормального сечения поверхности, свойства. Теорема Менье.

17. Индикатриса Дюпена.

18. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности. Критерий асимптотической линии. Теорема о количестве асимптотических направлений.

19. Главные направления поверхности. Теорема Родрига.

20. Главные кривизны поверхности. Теорема Эйлера.

21. Полная кривизна поверхности.

22. Средняя кривизна поверхности.

23. Поверхности постоянной полной кривизны.

17.2. Дополнительные вопросы к экзамену.

1. Зависит ли подвижной репер от выбора параметризации кривой?

2. Существуют ли кривые, все главные нормали которых проходят через одну точку? параллельны между собой?

3. На листе бумаги нарисованы восьмерка и четверка. Будут ли эти линии гладкими?

4. На бумаге нарисована плоская кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Изобразите векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.

5. Используя знания о циклоиде, объясните, почему грязь с дороги неизбежно попадает на спину велосипедисту, даже если заднее колесо прикрыто щитком.

6. Могут ли все коэффициенты первой квадратичной формы поверхности быть тождественно равны нулю? А какие-нибудь из трех?

7. Почему на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны?

8. Может ли поверхность, состоящая из касательных к данной пространственной кривой иметь эллиптические точки?

9. Может ли винтовая линия быть нормальным сечением некоторой поверхности?

10. Существуют ли асимптотические линии на поверхности положительной полной кривизны?

11. Каким может быть тип точки а) для 1-линейчатых поверхностей, б) 2-линейчатых поверхностей?

12. Существуют ли омбилические точки на параболоиде вращения, эллипсоиде вращения, однополостном гиперболоиде вращения?

13. На поверхности F в криволинейных координатах уравнение кривой задано линейным уравнением $Au + Bv + C = 0$. Верно ли, что это всегда уравнение прямой? Может ли прямая в криволинейных координатах иметь не линейное уравнение?

14. Почему индикатриса Дюпена не может быть параболой, парой совпавших прямых, парой пересекающихся прямых?

15. На рисунке изображена индикатриса Дюпена и указано несколько направлений. Определите, в каком направлении нормальная кривизна больше, а в каком меньше.

16. Запишите первую квадратичную форму плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, в аффинной системе координат, в полярной системе координат. Изобразите координатные линии в каждом случае.

17. На верхней окружности тора укажите главные направления и главные кривизны (не проводя вычислений).

18. Зависит ли нормальная кривизна линии от поверхности, на которой находится?

19. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии, то все точки линии параболического типа. (Можно ли параболоид вращения „положить“ на стол?)

20. Используя теорему Менье, выясните, можно ли на прямом круговом цилиндре нарисовать окружность (множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки), имеющую прямолинейную образующую цилиндра своей касательной? (Можно ли в круговом цилиндре вырезать круглую дырку?)

21. Изобразите индикатрису Дюпена для произвольной точки кругового цилиндра (конуса), укажите главные и асимптотические направления.

22. Как по картинке отличить эллиптическую точку от гиперболической?

23. Может ли асимптотическая линия быть линией кривизны?

24. Как известно, главные кривизны – это максимальное и минимальное значения нормальных кривизн в данной точке. Проиллюстрируйте это утверждение для а) эллиптической точки; б) для параболической точки; в) для гиперболической точки.