Классическая дифференциальная геометрия.

1 мая 2017 г.

Содержание

Литература.

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, Том 2, Москва, Просвещение, 1988.

2. Гусева Н.И. и др. Геометрия Том 2, Москва, Академия, 2013.

3. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей, Москва, Физматлит, 2006.

4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, Москва, УРСС, 2003.

[Г] Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии. Часть 2., Москва, Кнорус, 2012.

[Б] Сборник задач по геометрии под ред. Базылева В.Т., Москва, 1980.

[А] Атанасян, Атанасян Сборник задач по геометрии, Том 2

[С] Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии, Москва, Физматлит, 2007.

Введение

Аналитическая геометрия, которую мы изучали на первом курсе, основана на сопоставлении объектам геометрии объектов алгебры. Например, каждой точке пространства сопоставляется упорядоченный набор из трех чисел – координат этой точки, плоскости – линейного уравнения, прямой – системы двух таких уравнений и т.д. Благодаря такому сопоставлению геометрические задачи переводятся на язык алгебры, решаются с помощью ее мощного аппарата, а затем результат переводятся обратно на язык геометрии. Основной идеей здесь является привлечение к решению геометрических проблем сильных и действенных алгоритмов алгебры. При этом прогресс заключается не только (и не столько) в том, что старые задачи решаются более совершенными аналитическими методами, сколько в возможности существенно расширить сам круг геометрических проблем по сравнению с проблемами, доступными элементарной геометрии. Например, с помощью аналитических методов было проведено более полное исследование свойств линий второго порядка на плоскости и поверхностей второго порядка в пространстве.

Дифференциальная геометрия означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата дифференциального исчисления. При этом круг задач, решаемых новыми методами, снова расширяется. Основным объектом исследования (классической) дифференциальной геометрии являются кривые и поверхности в трехмерном пространстве. Например, винтовая линия, сфера, коническая поверхность, цилиндрическая поверхность и другие.

Некоторые виды таких объектов мы уже изучали в аналитической геометрии, например, прямые и линии второго порядка, плоскости и поверхности второго порядка. В курсе дифференциальной геометрии круг изучаемых кривых и поверхностей существенно расширится, но особенности дифференциального исчисления позволят изучать эти объекты только «в малом», то есть в некоторой окрестности каждой своей точки (проще говоря, мы будем изучать кривые и поверхности по кусочкам).

1. Лекции.

§1.1. Вектор-функция скалярного аргумента и техника дифференцирования.

1.1. Вектор-функция одного скалярного аргумента. Для изучения кривых в трехмерном евклидовом пространстве E^3 с помощью аппарата математического анализа нам потребуется новое понятие – вектор-функция одного скалярного аргумента.

Числовым промежутком будем называть множества (t_1, t_2), $(t_1, t_2]$, $[t_1, t_2)$, $[t_1, t_2]$, $(t_1, +\infty)$, $[t_1, +\infty)$, $(-\infty, t_2)$, $(-\infty, t_2]$, $(-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$ числовой прямой $\mathbb{R}$. Обычно будем обозначать числовые промежутки буквой U.

В курсе математического анализа было введено понятие функции одной переменной. Это отображение вида $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ или $U \to \mathbb{R}$ из некоторого промежутка $U \subset \mathbb{R}$ числовой прямой. Такая функция брала числа и по конкретному правилу ставила в соответствие им тоже числа. Функция обозначалась f или $f(x)$ (если нужно подчеркнуть, как обозначается переменная) или $y = f(x)$ (если нужно подчеркнуть как обозначается и переменная и значение функции). Эту функцию из математического анализа в нашем курсе будем называть *скалярной функцией*. Например, отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное формулой $y = x + 1$, мы теперь будем называть не просто функцией, а скалярной функцией. Ввод нового термина объясняется тем, что у нас появятся еще функции другого вида. Определим их.

Пусть дан числовой промежуток U (вспоминаем, что это или интервал, или полуинтервал, или луч или и так далее числовой прямой $\mathbb{R}$). Обозначим множество всех векторов через V^3. Отображение, которое каждому числу t из U ставит в соответствие однозначно определенный вектор $\vec{r}$, называется *векторной функцией скалярного аргумента* (или, короче, *вектор-функцией*). Промежуток U называется *областью определения* вектор-функции. Будем обозначать вектор-функцию по аналогии со скалярной функцией $\vec{r}$ или $\vec{r}(t)$ или $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Первое обозначение вектор-функции (аналогичное обозначению f для скалярной функции) совпадает с обозначением вектора. В конкретный случаях, что имеется в виду под этим обозначением – вектор или вектор-функция – будет ясно из контекста.

Пример 1.1**.** Фиксируем в V^3 два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зададим вектор-функцию следующей формулой $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{b}$. Здесь $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ – конкретное правило, по которому каждому вещественному числу t мы ставим в соответствие вектор. Областью определения U будет вся вещественная прямая $\mathbb{R}$.

Пусть даны вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и I – интервал, содержащийся в области определения этой вектор-функции U. Фиксируем произвольное число $t_0 \in I$.

Пределом вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется постоянный вектор $\vec{a}$, такой что длина $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$ при $t \to t_0$. Пишут $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Понятие предела вектор-функции нам потребуется для определения понятия производной вектор-функции. Сначала вспомним, как определялся предел функции $y = f(x)$ в математическом анализе. Была дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$. Брали число Δx и вычисляли значения функции f в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Затем вычисляли разность $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, делили на Δx, устремляли Δx к нулю и вычисляли предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Если он существовал, то функцию называли дифференцируемой в точке x_0, а значение предела – это какое-то определенное число – называли производной функции f в точке x_0. Обозначали так: $f'(x_0)$. Короткая запись была такая:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Для определения производной вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ мы поступим аналогичным образом. Рассмотрим интервал I из области определения U вектор-функции $\vec{r}$. Возьмем произвольную точку $t_0 \in I$ и возьмем число Δt так, чтобы число $t_0 + \Delta t \in I$. Вычислим значения вектор-функции $\vec{r}$ в обеих точках, составим разность и разделим ее на Δt:

$$\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Это тоже будет вектор-функция. Устреми Δt к нулю (то есть будем уменьшать, уменьшать и уменьшать). Если у этой вектор-функции будет существовать предел, то есть будет существовать такой постоянный (не зависящий от t) вектор $\vec{a}$, что длина разности

$$\left| \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} - \vec{a} \right|$$

стремится к нулю, то вектор-функция $\vec{r}$ будем называть *дифференцируемой* в точке t_0. Вектор $\vec{a}$ будем обозначать $\vec{r}\,'(t_0)$ и называть *производной* вектор-функции $\vec{r}$ в точке t_0. В дальнейших рассуждениях будут использоваться еще два обозначения производной

$$\dot{\vec{r}}(t_0); \qquad \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}.$$

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}$ в точке t_0 назовем вектор

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)dt,$$

где на величину dt мы будем смотреть как на число.

Итак, мы ввели понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ для точки $t_0 \in I \subset U$. Посчитаем производную $\vec{r}$ для каждой точки $t \in I$ (допустим, что она всегда вычисляется, то есть вектор-функция $\vec{r}(t)$ *дифференцируема* на интервале I). Тогда для каждого $t \in I$ мы получим однозначно определенный вектор $\vec{r}\,'(t)$. По определению это означает, что мы получаем новую вектор-функцию, которую будем обозначать $\vec{r} = \vec{r}\,'(t)$. (Здесь тоже просматривается полная аналогия с математическим анализом: функция $y = f(x)$ и ее производная $y = f'(x)$). Эту вектор-функцию мы будем называть *первой производной* вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Обозначения

$$\vec{r} = \vec{r}\,'(t); \quad \vec{r} = \dot{\vec{r}}(t); \quad \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Если первая производная $\vec{r} = \vec{r}\,'(t)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ является дифференцируемой вектор-функцией на интервале I, то для нее также можно вычислить первую производную. Полученная в результате вектор-функция называется *второй производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$. Обозначение

$$\vec{r} = \vec{r}\,''(t); \quad \vec{r} = \ddot{\vec{r}}(t); \quad \vec{r} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Другими словами,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

Если вектор-функция $\vec{r}\,''(t)$ является дифференцируемой, то мы можем по тому же принципу определить третью производную и так далее.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ является *гладкой на интервале* I, если она имеет производные любого порядка на этом интервале.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только гладкие вектор-функции.

1.2. Координаты вектор-функции. Пусть в пространстве векторов V^3 фиксирован правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда при любом фиксированном $t \in I$ вектор $\vec{r}(t)$ можно разложить по этому базису. Коэффициенты разложения (числа) обозначим $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (буква t в обозначении полученных чисел говорит о том, что эти числа будут, вообще говоря, разными для разных t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Если t будет меняться, то будут меняться и коэффициенты разложения. В результате этого мы получим три скалярные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ от переменной t. Они называются *координатами* вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Очевидно, что координаты вектор-функции имеют ту же область определения, что и сама вектор-функция.

Теорема 1.1. *Вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на интервале I тогда и только тогда, когда ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются дифференцируемыми функциями на интервале I. При этом координатами вектор-функции $\vec{r}\,'(t)$ являются скалярные функции $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на интервале I. По определению это означает, что она дифференцируема в каждой точке интервала I. Фиксируем произвольное $t_0 \in I$. Так как в этой точке вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируема, существует предел и он равен производной $\vec{r}\,'(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в этой точке, то есть

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0).$$

По определению предела вектор-функции это означает, что

$$\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} - \vec{r}\,'(t_0)\right| \to 0,\ \Delta t \to 0, \tag{1.1}$$

В левой части этого выражения стоит длина вектора. Разберемся с координатами этого вектора, чтобы вычислить его длину через координаты. По определению координат вектор-функции получаем, что для векторов следующие координаты:

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t)),\ \vec{r}(t_0)(x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$

Координаты вектора $\vec{r}\,'(t)$ мы пока не знаем, поэтому обозначим их (a, b, c). Вспоминаем, что координаты суммы векторов – это сумма координат слагаемых, а координаты произведения вектора на число – это произведение этого числа на координаты вектора. Смотрим на формулу (1.1). Здесь вычитаются два вектора, затем результат делится на число Δt и, наконец, вычитается вектор $\vec{r}\,'(t_0)$. Проделываем все эти операции в координатах и получаем, что вектор, для которого в (1.1) берется модуль, имеет координаты

$$\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-a, \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-b, \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-c\right).$$

Вспоминаем формулу для вычисления длины вектора через его координаты в ортонормированном базисе: $|\vec{p}| = \sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2}$. Применяем эту формулу в нашем случае и получаем, что (1.1) запишется в виде

$$\sqrt{\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-a\right)^2+\left(\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-b\right)^2+\left(\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-c\right)^2} \to 0.$$

Сумма квадратов может стремиться к нулю тогда и только тогда, когда каждое из выражений, стоящих под квадратом, стремится к нулю. В результате мы получаем три выражения:

$$\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-a \to 0;\ \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-b \to 0;\ \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-c \to 0; \Delta t \to 0.$$

Так как a, b и c – постоянные числа, то мы можем написать

$$\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} \to a;\ \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t} \to b;\ \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} \to c; \Delta t \to 0.$$

Это в точности определение производной скалярной функции в точке t_0. Другими словами, из этих выражений мы делаем вывод, во-первых, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются дифференцируемыми в точке t_0, а, во-вторых, что их производные равны

$$x'(t_0) = a;\ y'(t) = b;\ z'(t) = c.$$

Итак, мы показали, что если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то ее координаты $x(t), y(t), z(t)$ также дифференцируемы в точке t_0 и координаты вектора $\vec{r}\,'(t)(x'(t), y'(t), z'(t))$.

$\Leftarrow$). Пусть теперь дано, что координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ дифференцируемы в произвольной точке $t_0 \in I$. Рассмотрим вектор $\vec{p}$ с координатами $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, где $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ – производные скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точке t_0. Пока мы не знаем, как этот вектор связан с производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 и вообще существует ли эта производная. Будем раскручивать дифференцируемость функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. По определению производной функции из математического анализа получаем, что

$$\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} \to x'(t_0);\ \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t} \to y'(t_0);\ \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} \to z'(t_0),\ \Delta t \to 0.$$

Так как в этих выражениях справа стоят числа, мы можем переписать их в виде

$$\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x'(t_0)\to 0;\ \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-y'(t_0)\to 0;\ \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-z'(t_0)\to 0,\ \Delta t\to 0.$$

Если каждое из этих выражений стремится к нулю, то сумма их квадратов тоже стремится к нулю, а также и квадратной корень из этой суммы:

$$\sqrt{\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x'(t_0)\right)^2+\left(\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-y'(t_0)\right)^2+\left(\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-z'(t_0)\right)^2}\to 0.$$

В левой части этого выражения стоит длина вектора с координатами

$$\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x'(t_0),\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}-y'(t_0),\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}-z'(t_0)\right).$$

Постараемся в координатах увидеть этот вектор. Сначала заметим, что вычитаются вектора с координатами

$$\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right)-(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

Первый вектор в этой разности будет таким:

$$\frac{1}{\Delta t}(x(t_0+\Delta t)-x(t_0),y(t_0+\Delta t)-y(t_0),z(t_0+\Delta t)-z(t_0))-(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

Наконец, видим, что здесь записаны такие векторы:

$$\frac{1}{\Delta t}(\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0))-\vec{p}.$$

Итак, мы получили, что к нулю стремится длина такого вектора:

$$\left|\frac{1}{\Delta t}(\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0))-\vec{p}\right|\to 0,$$

а это означает, во-первых, что существует предел отношения

$$\frac{1}{\Delta t}(\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)),$$

то есть вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, во-вторых, этот предел равен $\vec{p}$, то есть

$$\vec{p}=\vec{r}\,'(t_0).$$

Другими словами, мы не только доказали, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, но и что $\vec{p}$, координаты которого $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ является производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0. Так как все рассуждения проводились для произвольной точки $t_0\in I$, мы можем сделать вывод, что вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на всем интервале I и ее производная $\vec{r}\,'(t)$ имеет координаты $(x'(t),y'(t),z'(t))$. $\square$

Доказанная теорема сводит дифференцирование вектор-функции к дифференцированию ее координат, то к дифференцированию скалярных функций. Это мы умеем делать благодаря курсу математического анализа.

1.3. Техника дифференцирования. В прикладных задачах нахождение производных вектор-функции сводится к нахождению производных координат этой вектор-функции. В теоретических рассуждениях не всегда выгодно переходить к координатам, и поэтому нужно развить технику дифференцирования вектор-функций, не использующую перехода к координатам.

Замечание 1.1. Прежде чем приступить к построению техники дифференцирования, разберемся в некоторых обозначениях.

1. Из курса математического анализа для нас является привычной запись $y = f(x)$. Она означает, что задана функция, называется она f и каждому числу x из какого-то числового промежутка она ставит в соответствие однозначно определенное число y. Другими словами, эта запись означает некоторый процесс. С другой стороны, если взять какое-нибудь одно (фиксированное) число x_0 и подставить в эту функцию, то получим однозначно определенное число $y_0 = f(x_0)$. Это конкретные числа. Но ведь фиксированное число можно обозначить не только x_0, но и x. Тогда вторая ситуация будет записываться также как и первая; $y = f(x)$, но смысл этой записи будет совершенно другой. Чтобы отличать первый случай от второго в краткой записи $y = f(x)$ мы будем говорить, что в первом случае x бегает, а во втором стоит на месте.

Аналогичная ситуация возникает и для вектор-функций: запись $\vec{r} = \vec{r}(t)$ может быть обозначением вектор-функции (если t бегает, меняется на промежутке U), а может быть обозначением вектора, если t фиксировано.

2. Вспомним определение равенства функций из математического анализа. Две функции f и g, определенные на одном числовом промежутке U, называются *равными* (что обозначается $f = g$), если для любого фиксированного $x \in U$ они выдают одинаковые значения: $f(x) = g(x)$. В этом равенстве x стоит на месте и никуда не бежит, хотя оно и произвольно.

Аналогичная ситуация для вектор-функций $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Будем говорить, что вектор-функции $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равны и писать $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, если для любого фиксированного $t \in U$ они выдают одинаковые векторы, то есть $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t)$.

Правила дифференцирования вектор-функций аналогичны правилам дифференцирования скалярных функций (обычные функции из математического анализа). Это четыре основные правила: правило дифференцирования суммы функций, правило дифференцирования произведения скалярной функции на вектор-функцию, правило дифференцирования произведения (скалярного и векторного) вектор-функций и правило дифференцирования сложной вектор-функции.

1. **Правило дифференцирования суммы двух вектор-функций.**

Для двух скалярных функций f и g мы знаем, что такое их сумма: это новая функция, которая обозначается $f+g$ и действует она так: любому числу $x \in \mathbb{R}$ она ставит в соответствие число $f(x)+g(x)$ (складываем числа $f(x)$ и $g(x)$). Коротко это можно записать так: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Аналогичным образом мы определим сумму двух вектор-функций $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и $\vec{r} = \vec{r}_2(t)$, определенных на одном числовом промежутке U. Будем называть *суммой* двух вектор-функций вектор-функцию $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)(t)$, которая каждому числу $t \in U$ ставит в соответствие вектор $\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$ (складываем два вектора – вектор, который ставит в соответствие числу t вектор-функция $\vec{r}_1(t)$, и вектор, который ставит в соответствие числу t вектор-функция $\vec{r}_2(t)$). Коротко это записывается так: $(\vec{r}_1+\vec{r}_2)(t)=\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$.

Из курса математического анализа мы знаем, как дифференцируется сумма двух скалярных функций:

$$(f+g)'=f'+g'.$$

Аналогичная формула имеет место для дифференцирования двух вектор-функций:

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'+\vec{r}_2{}'. \tag{1.2}$$

Доказывать эту формулу будем с использованием координат. Сначала выясним, как выражаются координаты суммы двух вектор-функций $\vec{r}=\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}=\vec{r}_2(t)$. По определению координат вектор-функции имеем

$$\vec{r}_1(t)=x_1(t)\vec{i}+y_1(t)\vec{j}+z_1(t)\vec{k};\ \vec{r}_2(t)=x_2(t)\vec{i}+y_2(t)\vec{j}+z_2(t)\vec{k},$$

где $\vec{r}_1(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$, $\vec{r}_2(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$ – координаты исходных вектор-функций. Складываем равенства и группируем слагаемые. Слева получится сумма вектор-функций, а справа получатся ее координаты:

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)(t)=(x_1(t)+x_2(t))\vec{i}+(y_1(t)+y_2(t))\vec{j}+(z_1(t)+z_2(t))\vec{k}.$$

Теперь считываем координаты: $(\vec{r}_1+\vec{r}_2)(x_1(t)+x_2(t),y_1(t)+y_2(t),z_1(t)+z_2(t))$.

Возвращаемся к доказательству формулы (1.2) (правило дифференцирования суммы двух вектор-функций). Рассмотрим левую часть этого равенства. По теореме 1.1 координаты суммы вектор-функций

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'((x_1(t)+x_2(t))',(y_1(t)+y_2(t))',(z_1(t)+z_2(t))').$$

Координаты – это обычные функции и их сумма дифференцируется по знакомым правилам из математического анализа:

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'(x_1'(t)+x_2'(t),y_1'(t)+y_2'(t),z_1'(t)+z_2'(t)).$$

Если теперь зафиксировать произвольное t, то получим вектор с указанными координатами.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (1.2). По теореме 1.1 координаты вектор-функции $\vec{r}_1'(x_1'(t),y_1'(t),z_1'(t))$, а для вектор-функции $\vec{r}_2'(x_2'(t),y_2'(t),z_2'(t))$. Если зафиксировать произвольное t, то получим два вектора с указанными координатами. Их сумма будет иметь такие координаты:

$$(\vec{r}_1'(t)+\vec{r}_2'(t))(x_1'(t)+x_2'(t),y_1'(t)+y_2'(t),z_1'(t)+z_2'(t)).$$

Итак, при для любого t левая и правая части доказываемой формулы выдают векторы с одинаковыми координатами, то есть эти векторы совпадают. Следовательно, вектор-функции равны.

2. **Правило дифференцирования произведения скалярной функции на вектор-функцию.**

Сначала разберемся, что получится, если умножить скалярную функцию $f(t)$, определенную на числовом промежутке U на вектор-функцию $\vec{r}(t)$, определенную на том же промежутке. Будем называть *произведением скалярной функции f на вектор-функцию $\vec{r}$* вектор-функцию $f\vec{r}$, которая для каждого числа $t \in U$ выдает вектор по формуле

$$(f\vec{r})(t) = f(t)\vec{r}(t).$$

Другими словами, вектор $(f\vec{r})(t)$ получается как произведение числа $f(t)$ (в функцию f подставили число t и посчитали результат) на вектор $\vec{r}(t)$ (в вектор-функцию $\vec{r}$ подставили t и посчитали результат).

Произведение скалярной функции f на вектор-функцию $\vec{r}$ дифференцируется по правилу

$$(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'. \tag{1.3}$$

Это правило называется *правилом Лейбница.*

Доказательство проводится аналогично пункту 1 через координаты. Обозначим его схематично. Подробности оставляем читателю. Координаты вектор-функции $(f\vec{r})(f(t)x(t), f(t)y(t), f(t)z(t))$. Тогда координаты вектор-функции $(f\vec{r})'((f(t)x(t))', (f(t)y(t))', (f(t)z(t))')$ или

$$(f\vec{r})'(f'(t)x(t) + f(t)x'(t), f'(t)y(t) + f(t)y'(t), f'(t)z(t) + f(t)z'(t)). \tag{1.4}$$

С другой стороны, координаты вектор-функций

$$f'\vec{r}(f'(t)x(t), f'(t)y(t), f'(t)z(t));\ f\vec{r}'(f(t)x'(t), f(t)y'(t), f(t)z'(t)).$$

Тогда координаты суммы этих вектор-функций будут

$$f'\vec{r} + f\vec{r}'(f'(t)x(t) + f(t)x'(t), f'(t)y(t) + f(t)y'(t), f'(t)z(t) + f(t)z'(t)). \tag{1.5}$$

Фиксируем произвольное t и вычисляем значения вектор-функций (1.4) и (1.5). Мы получаем два вектора с одинаковыми координатами. Значит, равенство (1.3) верно.

3. **Правило дифференцирования произведения (скалярного и векторного) двух вектор-функций.**

Пусть даны две вектор-функции $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, заданные на одном числовом промежутке U. Их скалярным произведением называется скалярная функция $(\vec{r}_1\vec{r}_2)(t)$, которая вычисляется по формуле

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t).$$

Другими словами, значение функции $\vec{r}_1\vec{r}_2$ в точке t вычисляется так: вычисляется значение вектор-функции $\vec{r}_1$ в t (это вектор), вычисляется значение вектор-функции $\vec{r}_2$ в t (это тоже вектор) и эти два вектора скалярно умножаются. В результате получается число, которое и ставится в соответствие t скалярной функцией $\vec{r}_1\vec{r}_2$.

Скалярное произведение двух вектор-функций дифференцируется по формуле

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)' = \vec{r}_1'\vec{r}_2 + \vec{r}_1\vec{r}_2'. \tag{1.6}$$

Это формула также называется *правилом Лейбница.*

Обозначим схему доказательства. Подробности оставляем читателю. Сначала разберемся как вычисляется скалярная функция $\vec{r}_1\vec{r}_2$ через координаты. По определению

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t) =$$

В правой части равенства стоит скалярное произведение двух векторов (при произвольном фиксированном t). Их скалярное произведение в ортонормированном базисе вычисляется так: первая координата на первую, плюс вторая на вторую, плюс третья на третью.

$$= x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t).$$

Находим производную.

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)'(t) = (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t))' =$$

Теперь работают правила дифференцирования из математического анализа для суммы функций и произведения функций.

$$= x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t).$$

Итак, левую часть равенства (1.6) мы раскрутили полностью. Займемся правой. Опять фиксируем произвольное t и находим скалярное произведение векторов

$$\vec{r}_1'(t)(x_1'(t), y_(' t), z_1'(t));\ \vec{r}_2(x_2(t), y_2(t), z_2(t)).$$

Опять пользуемся формулой для нахождения скалярного произведения векторов.

$$(\vec{r}_1'\vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t) = x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t) + z_1'(t)z_2(t).$$

Аналогично вычислите $(\vec{r}_1\vec{r}_2')(t)$, сложите с предыдущим и убедитесь, что получилось то же, что и в вычислениях для левой части равенства (1.6).

Векторное произведение двух вектор-функций определяется аналогично скалярному произведению:

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2](t) = [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)],$$

то есть значение вектор-функции $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ в произвольной точке t из области определения – это вектор $[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$.

Правило дифференцирования выглядит так:

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}\,'_1, \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}\,'_2].$$

Доказательство этой формулы также проводится с использованием координат. Проведите его самостоятельно (для этого нужно будет еще вспомнить, как вычисляется векторное произведение векторов в правом ортонормированном базисе).

4. **Правило дифференцирования сложной функции.**

Пусть дана вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенная на числа промежутке U и скалярная функция $t = \varphi(\tau)$, определенная на числовом промежутке V, таком что если переменная τ пробегает весь промежуток V, то значения функции $t = \varphi(\tau)$ пробегают промежуток U. Тогда определяется новая вектор-функция по формуле

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi(\tau)).$$

Разберемся, как она действует. Берем число τ из числового промежутка V. Сначала скалярная функция φ пересчитывает его в число t, а затем это число подставляется в вектор-функцию $\vec{r}$, которая перерабатывает его в вектор. Полученная вектор-функция (будем обозначать ее $\vec{r} = \vec{R}(\tau)$) называется *композицией* вектор-функции $\vec{r}(t)$ и скалярной функции $\varphi(\tau)$.

Пусть у вектор-функции $\vec{r}(t)$ координаты $(x(t), y(t), z(t))$. Тогда у вектор-функции $\vec{r}(\varphi(\tau)$ координатами будут функции $(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)), z(\varphi(\tau)))$. Тогда производная вектор-функции $\vec{R}(\tau)$ по переменной τ будет иметь координаты (так как здесь две переменные, то удобнее обозначать производную не привычным штрихом, а в виде $\frac{d}{dt}$)

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau}\left(\frac{x(\varphi(\tau))}{d\tau}, \frac{y(\varphi(\tau))}{d\tau}, \frac{z(\varphi(\tau))}{d\tau}\right).$$

По правилу дифференцирования сложной скалярной функции, которое известно нам из математического анализа, мы получаем (учитываем, что $t = \varphi(\tau)$)

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{dy}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{dz}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\right).$$

Первые множители в координатах – это координаты производной вектор-функции $\vec{r}(t)$. Они умножаются на производную $\frac{d\varphi}{d\tau}$, следовательно, в векторном виде это запишется так

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

или, вспоминая, что мы обозначили за $\vec{R}$

$$\frac{d\vec{r}(\varphi(\tau))}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Это формула дифференцирования сложной функции.

1.4. Вспомогательная лемма. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, определенная на промежутке U. Определим отображение $|\vec{r}(t)| : U \to \mathbb{R}$, которое каждому значению $t \in U$ ставит в соответствие длину вектора $\vec{r}(t)$. Это скалярная функция переменной t. Она называется *длиной* вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *имеет постоянную длину*, если функция $|\vec{r}(t)|$ является константой.

Лемма 1.1. *(о векторе постоянной длины). Пусть непрерывная вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на промежутке U и дифференцируема на любом интервале I из U. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ имеет постоянную длину на любом интервале I из U тогда и только тогда, когда для любого $t \in I$ векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны.*

Замечание 1.2. Прежде чем доказывать лемму, вспомним очень полезную формулу из аналитической геометрии. Пусть дан вектор $\vec{a}$. Тогда квадрат его длины равен его скалярному квадрату: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a}$. Эта формула позволяет переходить от длины вектора к скалярному произведению.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть вектор-функция $\vec{r}$ имеет постоянную длину, то есть для любого t из области ее определения длина вектора $\vec{r}(t)$ одна и та же. Обозначим ее через a. Значит, a – это фиксированное (неотрицательное) число. Таким образом, для любого фиксированного t имеем

$$|\vec{r}(t)| = a.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и применим формулу из замечания.

$$\vec{r}(t)\vec{r}(t) = a^2.$$

и воспользуемся свойством скалярного произведения векторов (квадрат длины вектора равен скалярному квадрату этого вектора)

$$\vec{r}(t)\vec{r}(t) = a^2.$$

Если теперь мы отпустим t, то в левой части этого равенства будет стоять скалярная функция $\vec{r}\vec{r}$ (скалярное произведение вектор-функции $\vec{r}$ на себя), а справа будет стоять постоянная скалярная функция (она каждому t ставит в соответствие число a^2).

$$\vec{r}\vec{r} = a^2.$$

Это равенство мы можем продифференцировать по t. Применяем правило дифференцирования скалярного произведения и учтем, что производная постоянной скалярной функции тождественно равна нулю.

$$\vec{r}\,'\vec{r} + \vec{r}\vec{r}\,' = 0.$$

Так как скалярное произведение коммутативно (то есть $\vec{r}\,'\vec{r} = \vec{r}\vec{r}\,'$), мы получаем, что

$$\vec{r}\,'\vec{r} = 0.$$

Другими словами, для любого фиксированного t выполняется равенство

$$\vec{r}\,'(t)\vec{r}(t) = 0.$$

Вспоминаем, что скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они перпендикулярны. Следовательно, для любого фиксированного t векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}(t)$ перпендикулярны.

$\Leftarrow$). Пусть теперь для любого фиксированного t из области определения вектор-функции $\vec{r}$ векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}(t)$ перпендикулярны. Нам нужно доказать, что вектор-функция $\vec{r}$ имеет постоянную длину.

Запишем условие перпендикулярности

$$\vec{r}\,'(t)\vec{r}(t) = 0.$$

Это верно для любого t из области определения вектор-функции $\vec{r}$, а значит, скалярное произведение вектор-функции $\vec{r}\,'$ на вектор-функцию $\vec{r}$ есть скалярная функция, тождественно равная нулю. Коротко это записывается так:

$$\vec{r}\,'\vec{r} = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на 2 и, воспользовавшись коммутативностью скалярного произведения, получим

$$\vec{r}\,'\vec{r} + \vec{r}\vec{r}\,' = 0.$$

Левая часть этого равенства может быть записана в виде

$$(\vec{r}\vec{r})' = 0.$$

Слева стоит производная скалярной функции $\vec{r}\vec{r}$ по t и эта производная равна нулю. Какой должна быть эта скалярная функция? Математический анализ говорит нам, что это константа. Обозначим эту константу через c.

$$\vec{r}\vec{r} = c.$$

Так как в правой части этого равенства для каждого t стоит скалярный квадрат вектора, константа c неотрицательна. Вспоминаем формулу: скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины и получаем

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{c} \text{ для любого } t.$$

Это означает, что вектор-функция $\vec{r}$ имеет постоянную длину. □

§1.2. Гладкая линия. Касательная к гладкой линии.

2.1. Определение линии. Рассмотрим евклидово пространство E^3.

Замечание 1.3. Напомним, что в курсе Топология мы отождествляли евклидово трехмерное пространство с арифметическим пространством $\mathbb{R}^3$ (для этого использовали систему координат и отождествляли точке с тройками чисел). В пространстве $\mathbb{R}^3$ мы рассматривали каноническую метрику ρ. Она превращала $\mathbb{R}^3$ в метрическое пространство. С помощью этой метрики мы вводили понятие открытого шара, а используя его мы вводили понятие открытого множества, то есть множества, которое с каждой своей точкой содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке. Семейство всех определенных нами открытых множеств образовывало топологию. Эта топология называлась естественной топологией. Другими словами, мы превращали $\mathbb{R}^3$, а вместе с ним и E^3 в топологическое пространство. Аналогичные построения мы проводили для прямой и плоскости. Значит, мы можем использовать понятия непрерывного отображения и гомеоморфизма для прямой, плоскости и пространства. Любое подмножество точек пространства E^3 тоже можно превратить в топологическое пространство, индуцировав там топологию естественной топологией пространства E^3. Значит, и для подмножеств точек из E^3 имеет смысл говорить о непрерывных отображениях и гомеоморфизмах.

Простейшей линией будем называть прямую, интервал, полуинтервал, отрезок и луч с началом или без начала.

Элементарной линией будем называть любое множество точек из E^3, гомеоморфное одной из простейших линии.

Примерами элементарных линий служат полуокружность (с концами или без них), парабола, синусоида. Гипербола не является элементарной линией (она состоит из двух кусков, которые в свою очередь являются элементарными линиями).

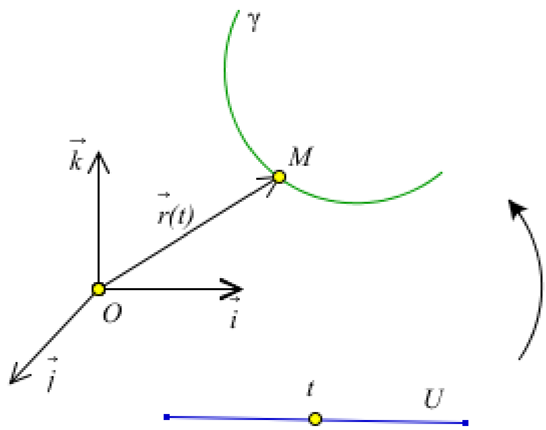
Простой линией будем называть связное множество γ точек из E^3, таких, что для каждой точки M из этого множества γ существует открытый шар $B_r(M)$ с центром в этой точке, такой, что его пересечение с множеством γ есть элементарная линия. Другими словами, берем любую точку из γ и подбираем в пространстве E^3 открытый шар с центром в этой точке, который вырезает из множества γ элементарную линию. Очевидно, что любую простую линию можно представить как объединение элементарных линий (они могут накладываться друг на друга).

Окружность является примером простой линии, отличной от элементарной (она не гомеоморфна ни прямой, ни лучу, ни отрезку, но для каждой ее точки можно подобрать маленький открытый шар, который вырежет из нее открытую дугу; эта дуга будет гомеоморфна прямой). А вот восьмерка не будет простой линией. У нее происходит сбой в точке самопересечения. Но ее можно разрезать, например, на три простые линии (как?).

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые линии или линии, которые состоят из конечного или счетного числа простых линий. Будем называть их просто *линиями*. Также будет употребляться термин кривая, как синоним термина линия.

Итак, мы определили себе объект исследования – простые линии – и теперь нам нужно присоединить к ним инструмент исследования. Вспомним, что в аналитической геометрии мы, вводя систему координат, связывали с множествами точек алгебраические уравнения, которые потом исследовали методами алгебры. Аналогичным образом мы свяжем с линиями вектор-функции, которые будем изучать с помощью методов математического анализа и делать выводы о тех или иных свойствах линий.

2.2. Аналитическое задание элементарной линии. Пусть дана элементарная линия γ. По определению это множество точек из пространства E^3, гомеоморфное прямой, интервалу, полуинтервалу, лучу или отрезку, которое обозначим U. На прямую мы можем посмотреть как на числовую прямую $\mathbb{R}$. Тогда каждой точке прямой (отрезка, луча) будет соответствовать вещественное число. Будем обозначать эти числа буквой t. В результате простейшие линии превращаются в числовые промежутки, с помощью которых мы вводили понятие вектор-функции.



Гомеоморфизм (на рисунке изображен черной стрелкой справа) между множеством U и множеством точек линии γ можно задать следующим образом. Берем число $t \in U$, ему при гомеоморфизме соответствует точка $M \in \gamma$. Тогда пара точек O (начало выбранной системы координат) и точка M задает вектор $\overrightarrow{OM}$. Обозначим его $\vec{r}(t)$ (буква t подчеркивает, что этот вектор будет меняться при изменении t). В результате мы получаем вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in U$.
Эта вектор-функция называется *векторным параметрическим уравнением* линии γ. Переменная t называется *параметром*.

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, задающую линию γ. Фиксируем t. Этому числу соответствует точка $M \in \gamma$. По нашему заданию вектор-функции $\vec{r}(t)$ мы получаем, что $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. Теперь вспоминаем про систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. По ней можно разложить оба вектора, записанные в этом равенстве. Слева мы получим разложение радиус-вектора точки M, то есть в качестве коэффициентов разложения будут фигурировать координаты точки M (вспоминаем курс аналитической геометрии), а справа координаты вектор-функции $\vec{r}(t)$, вычисленные в точке t:

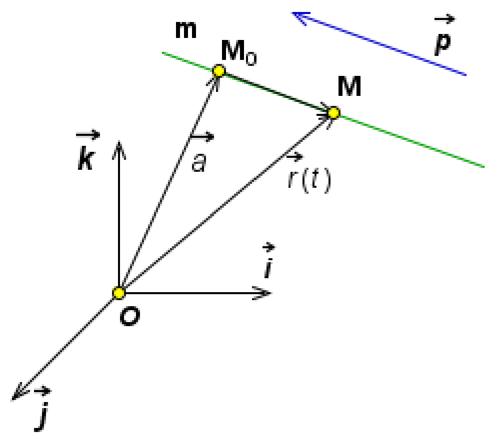
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

В силу единственности разложения вектора по базису (или в силу линейной независимости векторов базиса) получаем три равенства

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Если теперь отпустить t, то получится три функции, которые задают изменение координат точки M. Когда t пробегает весь числовой промежуток U, точка M пробегает всю линию γ. Эти равенства называются *параметрическими уравнениями* элементарной линии γ.

Пример 1.2**.** Рассмотрим прямую m. По нашему определению – это простейшая линия. Но ее также можно считать и элементарной, так как прямая гомеоморфна самой себе. Запишем векторное параметрическое уравнение прямой m.



Векторное уравнение прямой – это уравнение, задающее зависимость радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ от параметра t при условии, что точка M пробегает всю прямую. Пусть прямая m задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (обозначим радиус-вектор этой точки $\vec{a}$) и направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Тогда точка M принадлежит прямой m в том и только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{p}$, то есть $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Параметр появился. Осталось в этом равенстве появиться радиус-вектору точки M. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Собирая все вместе и учитывая, что $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, получим

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{p}.$$

Это векторное параметрическое уравнение прямой. Чтобы получить параметрические уравнения прямой, подставим в векторное параметрическое уравнение выражение векторов через их координаты

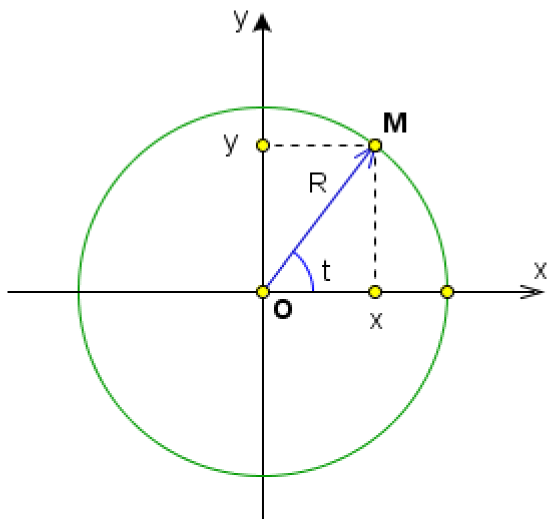
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}).$$

Собираем коэффициенты при базисных векторах. Так как базисные векторы линейно независимы, все коэффициенты при них должны быть равны нулю. В итоге получаем три равенства на координаты (x, y, z) точки M

$$x = x_0 + p_1 t; \quad y = y_0 + p_2 t; \quad z = z_0 + p_3 t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Это знакомые нам из курса аналитической геометрии параметрические уравнения прямой.

Пример 1.3**.** Рассмотрим окружность ω. Это не элементарная линия (почему?). Но ее можно представить в виде объединения двух дуг без концевых точек (так как концевые точки в дуги не входят, они должны заходить друг на друга, чтобы закрыть всю окружность). Значит, окружность является простой линией. Несмотря на то, что окружность не является элементарной линией, мы сможем задать ее всю одним набором параметрических уравнений. Пусть окружность располагается в плоскости Oxy, ее началом является точка O – начало системы координат и ее радиус равен R.



Параметрические уравнения линии по своей сути – это зависимость координат (x, y, z) точки M, которая бегает по окружности и рисует ее, от одного параметра. Обозначим этот параметр t. Нам нужно будет сначала выбрать какую-то величину в качестве параметра, а затем через нее выразить координаты точки M. Для окружности такой величиной удобно выбрать значение направленного угла, который образует радиус-вектор точки M с осью Ox (то есть с вектором $\vec{i}$). Теперь выражаем координаты.

Сразу можем написать выражение для координаты z. Так как окружность целиком лежит в плоскости Oxy, третья координата каждой ее точки равна нулю. Дальше разбираемся с x и y. Вспоминая тригонометрию, получаем, что $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Таким образом, получаем, что параметрические уравнения окружности имеют вид

$$x = R\cos t; \quad y = R\sin t; \quad z = 0.$$

Наконец, выясним, какой числовой промежуток должен пробежать параметр t. Чтобы конец радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ нарисовал всю окружность, нужно, чтобы угол t пробежал значения от 0 до 2π (а лучше, чтобы не было разногласий с курсом аналитической геометрии, от $-\pi$ до π). В этом случае радиус-вектор нарисует всю окружность. Итак, окончательный ответ

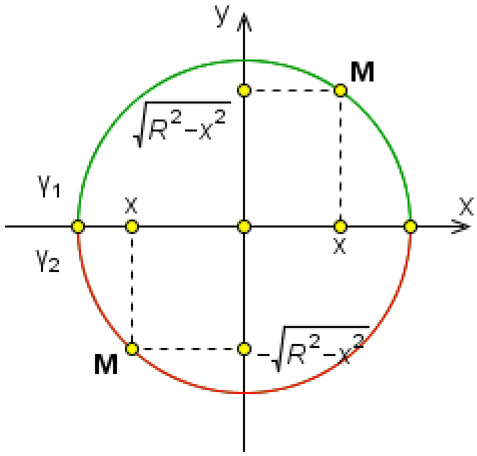
$$x = R\cos t; \quad y = R\sin t; \quad z = 0, \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{1.7}$$

Замечание 1.4. В предыдущем примере мы написали уравнение окружности радиуса R, лежащей в плоскости Oxy с центром в точке O (начале системы координат). Мы можем провести проверку полученного ответа. Вспомним, что на плоскости Oxy в прямоугольной декартовой системе координат данная окружность задается уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, где (x, y), удовлетворяющие этом уравнению, – это координаты точки M, бегающей по окружности. Они же фигурируют в параметрических уравнениях окружности (первые два равенства). Поэтому, если мы не ошиблись в выводе параметрических уравнений, подставив эти два равенства в уравнение окружности мы должны получить тождество. Проверяем

$$(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2.$$

Применяя в левой части основное тригонометрическое тождество, убеждаемся, что для всех t это равенство верно.

Пример 1.4. Опять рассмотрим окружность, лежащую в плоскости Oxy с центром в точке O радиуса R. Представим эту окружность как объединение двух элементарных линий: верхнюю полуокружность γ_1 и нижнюю полуокружность γ_2. Эти линии мы можем задать с помощью параметрических уравнений (1.7), взяв параметр $t \in [0, \pi]$ для γ_1 и $t \in [-\pi, 0]$ для γ_2. Но эти линии мы можем задать параметрическими и другими параметрическими уравнениями.



Пусть точка M бегает по линии γ_1 (верхняя полуокружность). По-прежнему ее третья координата равна нулю. Если первая ее координата равна x, то вторая может быть найдена из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$. Так как для точек верхней полуокружности вторая координата всегда неотрицательна, то она равна $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Осталось сообразить, что будет параметром. Смотрим, что получилось

$$z = 0; \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Параметром будет x, то есть $x = t$. Тогда

$$x = t; \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}; \quad z = 0.$$

Наконец, чтобы нарисовать всю верхнюю полуокружность, нужно, чтобы параметр t (он же x пробежал от -1 до 1. Итак, окончательный ответ

$$x = t; \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}; \quad z = 0; \quad t \in [-1, 1].$$

Рассуждая аналогично (проведите подробные рассуждения самостоятельно), получаем параметрические уравнения нижней полуокружности γ_2

$$x = t; \quad y = -\sqrt{R^2 - t^2}; \quad z = 0; \quad t \in [-1, 1].$$

Вывод: у элементарной линии может быть не один набор параметрических уравнений.

2.3. Гладкие линии. Элементарная линия называется *гладкой*, если ее можно задать с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ – гладкая вектор-функция (то есть имеющая производные любого порядка на любом интервале из числового промежутка U, на котором она задана), и

$$\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in U.$$

Так как вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ является гладкой тогда и только тогда, когда гладкими являются ее координаты, то есть скалярные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, и $\vec{r}\,'(t)(x'(t), y'(t), z'(t))$, то гладкость линии можно проверять по ее параметрическим уравнениям:

1. Нужно проверить, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ имеют производные любого порядка по t на промежутке U.

2. Нужно проверить, что $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0$ для всех $t \in U$.

Пример 1.5. Окружность является гладкой линией. Действительно, расположим начало прямоугольной декартовой системы координат в ее центре, а саму окружность разместим в плоскости Oxy. Тогда ее параметрические уравнения будут иметь вид

$$x = R\cos t; \quad y = R\sin t; \quad z = 0, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Все три функции имеют производные любого порядка на указанном отрезке (проведите дифференцирование самостоятельно). Кроме того,

$$x'(t) = -R\sin t; \quad y'(t) = R\cos t; \quad z'(t) = 0, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

и $(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + 0^2 = R^2 \neq 0$. Следовательно, окружность является гладкой линией.

Если у элементарной линии γ условия гладкости нарушается в конечном или счетном множестве точек, то такая линия называется *кусочно-гладкой*. Такая линия распадается на не более, чем счетное число „кусков“, которые являются гладкими элементарными линиями. Методы дифференциальной геометрии позволяют изучать свойства этих „кусков“. Примером кусочно гладкой кривой является циклоида. Мы рассмотрим ее на семинаре.

2.4. Замена параметра. Натуральный параметр. Одну и ту же гладкую линию γ можно задать с помощью разных параметрических уравнений. Например, прямую ℓ, проходящую через точку $(0,0,0)$ параллельно вектору $(1,1,1)$ можно задать так

$$x = t; \quad y = t; \quad z = t, \, t \in \mathbb{R}$$

и так

$$x = 1 + t; \quad y = 1 + t; \quad z = 1 + t, \, t \in \mathbb{R}.$$

Строго говоря, во втором наборе параметрических уравнений прямой параметр не тот же самый, что и в первом. А значит, мы должны обозначать его другой буквой. Например, τ. Тогда вторая группа параметрических уравнений будет выглядеть так

$$x = 1 + \tau; \quad y = 1 + \tau; \quad z = 1 + \tau, \, \tau \in \mathbb{R}.$$

При этом говорят, что заданы две параметризации прямой ℓ. В этом примере легко видеть, что для перехода от первой параметризации ко второй нужно в первую группу параметрических уравнений подставить $t = 1 + \tau$. Другими словами, для перехода от первой параметризации ко второй нужно использовать функцию $t = 1 + \tau$, то есть нужно знать как первый параметр зависит от второго. Попробуем рассмотреть такую функцию: $t = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, чтобы перейти к параметру μ. Так как μ^2 принимает только неотрицательные значения, то всю прямую мы не получим. Значит, такая функция для замены параметра нам не годится. Чтобы избежать такого рода неприятностей, мы потребуем, чтобы зависимость старого параметра t от нового параметра τ была бы строго монотонной функцией. Будем обозначать эту функцию $t = \varphi(\tau)$.

Чтобы сформулировать еще два требования на функцию $t = \varphi(\tau)$, рассмотрим общий случай элементарной линии, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (старый параметр зовут t). Переходим к новому параметру τ с помощью функции $t = \varphi(\tau)$. Подставим эту функцию в векторное параметрическое уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi(\tau)) \equiv \vec{R}(\tau).$$

Чтобы изучать линию с использованием нового уравнения (с параметром τ) мы должны иметь возможность это уравнение дифференцировать по τ. По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d\vec{r}(\varphi(\tau))}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{1.8}$$

Таким образом, мы должны потребовать от функции $t = \varphi(\tau)$ иметь производную по τ. Так как мы хотим дифференцировать какое угодно число раз, то она должна иметь производные любого порядка по τ.

Наконец, для гладкой линии у нас было условие $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ для любого t. Выполнение этого же условия мы ожидаем от нового векторного параметрического уравнения. (Позже мы увидим, что это требование обеспечит нам работу с касательными к линиям). Это будет выполняться (посмотрите на формулу (1.8)) тогда и только тогда, когда $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ для любого τ из области его изменения. Итак, собирая все требования вместе, получим, что замена параметра t на параметр τ с помощью функции $t = \varphi(\tau)$ будет называться *допустимой*, если

1) функция $t = \varphi(\tau)$ является строго монотонной;

2) функция $t = \varphi(\tau)$ имеет производные любого порядка по переменной τ;

3) первая производная функции $t = \varphi(\tau)$ нигде не обращается в нуль.

Пример 1.6**.** Пусть дана кривая γ параметрическими уравнениями $x = t$, $y = t^2$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Это парабола (почему?) Пусть задана функция $t = \tau^3 + \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Выясним, будет ли эта функция заменой параметра. Из курса математического анализа мы знаем, что указанная функция имеет производные любого порядка. Кроме того,

$$\frac{dt}{d\tau} = 3\tau^2 + 1 > 0, \, \forall\tau \in \mathbb{R},$$

следовательно, такая функция является допустимой заменой параметра. В новой параметризации параметрические уравнения параболы будут иметь вид

$$x = \tau^3 + \tau; \quad y = (\tau^3 + \tau)^2; \quad z = 0, \, \tau \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим функцию $t = \tau^2$, $\tau \in \mathbb{R}$. Эта функция не является строго монотонной, а значит, не задает замену параметра.

2.5. Натуральный параметрРассмотрим очень важный пример параметризации.

Пусть элементарная линия γ задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in U$ (или что эквивалентно параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in U$). Фиксируем на линии γ точку со значением параметра t_0 и зададим функцию

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Это интеграл с переменным верхним пределом и он вычисляет длину дуги кривой со знаком от точки со значением параметра t_0 до точки со значением параметра t. Если $t > t_0$, то интеграл выдаст длину дуги с плюсом, а если меньше, то с минусом. Таким образом, мы получаем функцию $s = s(t)$. Это строго возрастающая функция (длина дуги растет), она имеет производные всех порядков по t (правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и гладкость линии γ), и $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \neq 0$ (последнее условие в определении гладкой линии). Итак, функция $s = s(t)$ является допустимой заменой параметра t на параметр s. Параметр s называется *натуральным параметром.* Также говорят, что кривая задана в *естественной параметризации.*

Натуральный параметр очень удобен при доказательстве теорем (это мы увидим в дальнейших рассуждениях), но так как интегралы вычисляются сложно и далеко не всегда в элементарных функциях, то натуральным параметром редко пользуются в конкретных вычислениях.

Отметим одно замечательное свойство натурального параметра: скалярных квадрат первой производной вектор-функции $\vec{r}(s)$ по натуральному параметру всегда равен 1, то есть

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = 1,\ \forall s.$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции и обратной функции получим

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = \frac{(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t)) + (z'(t))^2})^2}{(x'(t))^2 + (y'(t)) + (z'(t))^2} = 1$$

2.6. Неявные уравнения кривой. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что прямая в пространстве E^3 задается не только параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + p_1 t;\quad y = y_0 + p_2 t;\quad z = z_0 + p_3 t,$$

но еще и общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases},$$

где $A_i, B_i, C_i, D_i,\ i = 1, 2$ – это вещественные числа, причем $A_i, B_i, C_i,\ i = 1, 2$ одновременно не равны нулю. Эти уравнения мы называли общими уравнениями прямой в пространстве. В связи с этим возникает следующая идея: записать аналогичную систему уравнений, но в их левых частях вместо линейных функций поставить какие-то произвольные функции от переменных x, y, z, то есть

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Эта система задаст какое-то множество G точек в E^3 (возможно пустое). Какие требования нужно наложить на функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$, чтобы множество G было гладкой линией?

Пусть дана фиксированная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ из множества G. Тогда, используя теорему о неявной функции (известна из курса математического анализа), можно показать, что если

1) ранг матрицы

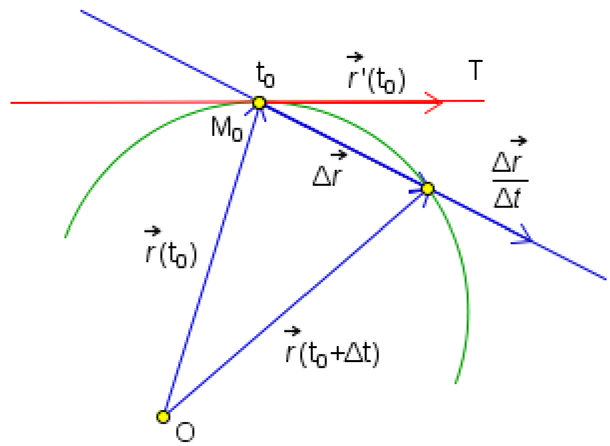
$$\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ \Phi_x(x_0, y_0, z_0) & \Phi_y(x_0, y_0, z_0) & \Phi_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

составленной из частных производных функций F и Φ, вычисленных в точке M_0, равен 2 и

2) существуют все частные производные функций F и Φ в точке M_0,

то существует некоторый открытый шар с центром в точке M_0, такой, что его пересечение с множеством G является гладкой элементарной линией.

2.7. Касательная. Пусть задана гладкая линия γ векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$.



Фиксируем на кривой γ произвольную точку M_0. Пусть ей соответствует значение параметра t_0. Вблизи точки M_0 (стоящей на одном месте) двигается точка M. Пусть ей соответствует значение параметра $t_0 + \Delta t$ (Δt меняется – точка M двигается). Обозначим

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

Мы видим, что $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, то есть векторы $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллельны. Пусть теперь $\Delta t \to 0$, то есть $M \to M_0$. Тогда секущая M_0M стремится к своему предельному положению M_0T. Предельное положение секущей называется *касательной к линии* γ, то есть прямая M_0T является касательной к кривой γ точке M_0. Мы получаем, что при $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \| M_0M \to \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0} \| M_0T.$$

Другими словами, мы получили, что производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 есть направляющий вектор касательной к кривой в точке M_0.

Как мы знаем, одна и та же кривая может задаваться разными векторными параметрическими уравнениями. Пусть та же самая линия γ задается в другой параметризации так: $\vec{r} = \vec{R}(\tau)$. В такой параметризации точке M_0 (в которой мы определяем касательную к γ) соответствует какое-то значение параметра τ_0 и направляющий вектор касательной будет вычисляться так: $\left.\frac{d\vec{R}}{d\tau}\right|_{\tau_0}$. Возникает вопрос: если мы проведем через точку M_0 прямую параллельную вектору $\left.\frac{d\vec{R}}{d\tau}\right|_{t_0}$, будет ли она совпадать с прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$? Чтобы эти две прямые совпадали, надо, чтобы векторы $\left.\frac{d\vec{R}}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}$ и $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$ были бы коллинеарны. Проверим, что это так. Так как оба векторных уравнения задают одну и ту же кривую, их параметры связаны некоторой зависимостью $t = \varphi(\tau)$ и $\vec{r}(\varphi(\tau)) = \vec{R}(\tau)$ для всех τ. Продифференцируем это равенство по τ (используем правило дифференцирования сложной функции):

$$\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

и вычислим значение обеих частей равенств при $\tau = \tau_0$:

$$\left.\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau_0} = \left.\frac{\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=\varphi(\tau_0)=t_0} \left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau_0}.$$

Мы видим, что в точке M_0 векторы $\left.\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau_0}$ и $\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t_0}$ отличаются на число $\left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau_0}$. Другими словами, мы замене параметризации в векторном параметрическом уравнении мы получили ту же самую касательную. В этом случае говорят, что понятие касательной в точке M_0 гладкой линии не зависит от выбора параметризации (то есть какое бы векторное параметрическое уравнение кривой мы не взяли, мы всегда будем получать одну и ту же касательную). Тем самым мы доказали теорему.

Теорема 1.2. *В каждой точке M_0 гладкой кривой γ существует единственная касательная, определяемая точкой M_0 и направляющим вектором $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}$.*

Пример 1.7. Пусть дана линия γ: $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$, a, b – некоторые положительные константы, $t \in [0, 2\pi]$ (если кто не узнал, это эллипс). Напишем уравнение касательной в точке M_0 со значением параметра t_0.

Начнем с того, что запишем кроме векторного параметрического уравнения кривой γ еще и параметрические уравнения:

$$x = a\cos t;\ y = b\sin t;\ z = 0;\ t \in [0, 2\pi].$$

По доказанной теореме для получения уравнения касательной нужно, во-первых, координаты точки M_0, в которой проводится касательная, и, во-вторых, координаты направляющего вектора. Точка $M_0 \in \gamma$ и ей соответствует значение параметра t_0. Подставляем t_0 в параметрические уравнения: $M_0(a\cos t_0, b\sin t_0, 0)$. Чтобы найти координаты направляющего вектора касательной, продифференцируем векторное параметрическое уравнение γ:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + b\cos t\vec{j}.$$

Подставим в него значение параметра t_0:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0} = -a\sin t_0\vec{i} + b\cos t_0\vec{j}$$

и считываем координаты направляющего вектора касательной $(-a\sin t_0, b\cos t_0, 0)$. Запишем канонические уравнения касательной к кривой γ, используя общую формулу

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3},$$

получим

$$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0};\ z = 0.$$

Или в более удобном виде, заменяя $a\cos t_0 = x_0$, $b\sin t_0 = y_0$:

$$\begin{cases} xx_0b^2 + yy_0a^2 - a^2b^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

2.8. Угол между линиями. *Углом* между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

В курсе аналитической геометрии была выведена формула для вычисления угла между прямыми: пусть заданы две прямые ℓ_1 (точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}$) и прямая ℓ_2 (точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{q}$). Угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\ell_1, \ell_2) = \left|\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\right|. \tag{1.11}$$

Благодаря модулю, нам не нужно думать, на какие направляющие векторы прямых мы попали, формула всегда считает не тупой угол, образованный данными прямыми.

Пусть даны гладкие линиями $\gamma_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и $\gamma_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2(\tau)$. Пусть они пересекаются в точке M_0. На первой кривой этой точке соответствует значение параметра t_0, а на второй соответствует τ_0. Чтобы вычислить угол между линиями γ_1 и γ_2, нужно найти направляющие векторы касательных к этим линиям в точке M_0 и вычислить угол между этими касательными по формуле (1.11).

§1.3. Кривизна линии. Репер Френе.

3.1. Кривизна линии. Пусть гладкая линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$, где s – натуральный параметр. Как мы видели выше вектор

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

является, во-первых, направляющим вектором касательной, и, во-вторых, единичным для любого значения $s \in I$. Вообще говоря, при движении вдоль кривой γ этот вектор меняется, поэтому мы написали ему аргумент s. Вектор $\vec{\tau}(s)$ для каждого $s \in I$ называется *касательным вектором.*

Найдем вторую производную вектор-функции $\vec{r}(s)$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Для каждого значения $s \in I$ опять получим вектор, он будет меняться при движении вдоль линии γ. Полученный вектор называется *вектором кривизны* кривой γ в точке со значением параметра s. Его длина $\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$ называется *кривизной* кривой γ в точке со значением параметра s. Если в этой точке вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ отличен от нуль-вектора, то его можно представить в виде

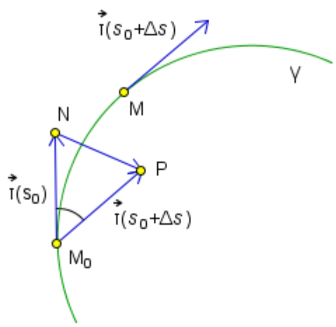
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s), \tag{1.12}$$

где $k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$, $\vec{\nu}(s)$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором кривизны (орт вектора кривизны). Вектор $\vec{\nu}(s)$ называется *ортом главной нормали* кривой γ в точке M (со значением параметра s). Прямая, проходящая через точку M параллельно орту главной нормали, называется *главной нормалью кривой* в точке M.

Выясним геометрический смысл кривизны кривой.

Теорема 1.3. *Кривизна гладкой кривой γ в точке M_0 есть предел, к которому стремится отношение угла между касательными в точках M_0 и M к γ к длине дуги M_0M, когда точка M, оставаясь на γ, стремится к M_0.*

Решение. Пусть задана гладкая кривая γ векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – натуральный параметр.



Точка M_0 (ей соответствует значение натурального параметра s_0) стоит на месте. Для нее определен касательный вектор $\vec{\tau}(s_0)$ (для краткости обозначим его через $\vec{\tau}_0$). Точка M двигается по кривой γ. Ее параметр меняется: от точки M_0 (значение параметра s_0) мы должны отъехать по дуге кривой до точки M на Δs (Δs будет положительной величиной, если мы движемся в сторону увеличения параметра s и отрицательной в противном случае). Тогда у точки M будет значение параметра $s_0 + \Delta s$. Для этой точки также определен касательный вектор $\vec{\tau}(s_0+\Delta s)$, который для краткости мы обозначим $\vec{\tau}$.

Отложим его представитель от точки M_0. В результате получим равнобедренный треугольник M_0NP (так как параметр натуральный, векторы $\vec{\tau}_0$ и $\vec{\tau}$ единичные). Во введенных обозначениях нам нужно доказать, что

$$k(s_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{|\Delta s|}.$$

Отметим, что $|\Delta s|$ будет как раз длиной дуги M_0M в силу определения натурального параметра. Из равнобедренного треугольника M_0NP получим

$$NP = 2M_0N \sin \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2} = 2 \sin \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2} = |\vec{\tau} - \vec{\tau}_0| = |\Delta \vec{\tau}|. \tag{1.13}$$

Имеем

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}}{\sin \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2 \sin \frac{\angle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau})}{2}}{|\Delta s|} =$$

Первый предел, согласно первому замечательному пределу, равен 1. Второй множитель с учетом (1.13) приобретает вид

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{|\Delta s|} = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| =$$

Приращение вектор-функции к приращению аргумента – это производная вектор-функции в точке со значением параметра s_0 (см. § 1.1.).

$$= \left| \left. \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|_{s_0} \right| = \left| \left. \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|_{s_0} \right| = k(s_0).$$

Тем самым теорема доказана. $\square$

Следствие 1.1. Гладкая кривая γ является прямой или ее частью тогда и только тогда, когда во всех ее точках кривизна равна нулю.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть дана прямая γ (или ее часть), проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Тогда параметрические уравнения этой прямой будут иметь вид

$$x = p_1 t + x_0; \quad y = p_2 t + y_0; \quad z = p_3 t + z_0,\ t \in U$$

(если $t \in \mathbb{R}$, то получим всю прямую, а если будем ограничивать изменение t какими-то промежутками, то будем получать части прямой). Для того чтобы вычислить кривизну прямой, нам эти уравнения не годятся, так как не факт, что параметр здесь натуральный. Перейдем к натуральной параметризации прямой. Для этого возьмем точку со значением параметра $t = 0$ и от нее будем отсчитывать длину „дуги“ прямой по формуле для вычисления длины дуги

$$s = \int_0^t \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} dt = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} t = |\vec{p}| t.$$

Мы получили связь между параметром t, который стоит в параметрических уравнениях и натуральным параметром s. Переходим к естественной параметризации: выражаем $t = \frac{s}{|\vec{p}|}$ и подставляем в параметрические уравнения прямой

$$x = p_1 \frac{s}{|\vec{p}|} + x_0; \quad y = p_2 \frac{s}{|\vec{p}|} + y_0; \quad z = p_3 \frac{s}{|\vec{p}|} + z_0.$$

Все готово, чтобы вычислить вектор кривизны. Параметрические уравнения дают координаты вектор-функции $\vec{r}(s)$, задающей прямую. Сначала вычисляем касательные векторы $\vec{\tau}(s)$ – первая производная вектор-функции $\vec{r}(s)$. Ее координаты

$$x' = \frac{p_1}{|\vec{p}|}; \quad y' = \frac{p_2}{|\vec{p}|}; \quad z' = \frac{p_3}{|\vec{p}|}.$$

Вектор кривизны – это производная от вектор-функции $\vec{\tau}(s)$. Ее координаты

$$x'' = 0; \quad y'' = 0; \quad z'' = 0.$$

Итак, для любого значения параметра s вектор кривизны нулевой, следовательно, его длина нулевая и кривизна прямой в каждой ее точке нулевая.

$\Leftarrow$). Пусть дана гладкая кривая γ, у которой во всех точках кривизна равна нулю. Зададим кривую γ параметрическими уравнениями в естественной параметризации:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s).$$

Мы знаем, что кривизна

$$k(s) = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2} = 0.$$

Тогда

$$x''(s) = 0,\ y''(s) = 0,\ z''(s) = 0.$$

Зададимся вопросом: как должны выглядеть функции $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$, чтобы их производные были бы нулевыми? Они должны быть константами (причем эти константы могут быть произвольными). Обозначим это так:

$$x'(s) = x_0,\ y'(s) = y_0,\ z'(s) = z_0.$$

Опять задаемся вопросом: какими должны быть функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, чтобы их производные были бы константами? Эти функции должны быть линейны:

$$x = p_1 s + x_0,\ y = p_2 s + y_0,\ z = p_3 s + z_0,$$

где $p_1, p_2, p_3; x_0, y_0, z_0$ – произвольные константы. Если все три числа p_1, p_2, p_3 равны нулю, то такие уравнения не будут задавать гладкую кривую (этот случай выбрасываем). Все оставшиеся случаи задают прямую (если параметр s принимает всевозможные значения и часть прямой, если его значения ограничены какими-либо условиями). □

Замечание 1.5. Точки линии, в которых кривизна равна нулю, называются *точками спрямления.* например, все точки прямой являются точками спрямления. Такие точки мы будем исключать из дальнейшего рассмотрения.

Замечание 1.6. Еще раз посмотрим на рисунок к теореме 1.3 и подумаем, куда будет направлен вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в точке M_0 (рассмотрим случай, когда точка M справа от точки M_0, то есть $\Delta s > 0$, второй случай рассматривается аналогично). (Посмотрите еще динамический рисунок Направление вектора кривизны кривой на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24) Из доказательства теоремы мы видим, что в точке M_0

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}.$$

Величина Δs – это число, становящееся все меньше и меньше, следовательно, вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ направлен „примерно также как“ вектор $\Delta\vec{\tau}$. А он направлен „внутрь “ кривой.

3.2. Соприкасающаяся плоскость. Пусть линия γ задана уравнением относительно натурального параметра $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$ и все точки этой кривой не являются точками спрямления.

Соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 параллельно векторам $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке.

Замечание 1.7. Для того чтобы в точке M_0 соприкасающаяся плоскость была определена однозначно необходимо и достаточно чтобы векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке были не параллельны.

Покажем, что эти векторы параллельны тогда и только тогда, когда кривизна $k(s)$ линии γ в этой точке равна нулю. Другими словами, соприкасающаяся плоскость не определяется только в точках спрямления (поэтому мы их и выбросили из дальнейшего рассмотрения).

Пусть $k(s) = 0$ в точке M_0. Тогда вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в этой точке равен нулю (см. формулу (1.12)). Так как нуль-вектор по определению параллелен любому вектору, векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ параллельны.

Обратно, пусть векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ параллельны. Так как кривая задана относительно натурального параметра, вектор-функция $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет постоянную длину (равна 1). Тогда по лемме 1.1 она при каждом значении параметра s перпендикулярна своей производной, то есть для любого значения параметра s вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ перпендикулярен вектору $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Мы получаем, что в точке M_0 два вектора одновременно параллельны и перпендикулярны. При этом вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет длину

1, то есть не нулевой. Следовательно, нулевым должен быть второй вектор, то есть вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Тогда по формуле (1.12) мы получаем, что в точке M_0 кривизна $k(s) = 0$.

Замечание 1.8. В конкретных задачах линии далеко не всегда задаются относительно натурального параметра, переход от произвольного параметра к натуральному часто весьма трудоемок, а уравнение соприкасающейся плоскости все-равно писать нужно. Оказывается, что если кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ с помощью произвольного параметра, то векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ в точке M_0 также параллельны соприкасающейся плоскости (доказать не семинаре). В случае, если они не коллинеарны (часто так и бывает) по ним можно написать уравнение соприкасающейся плоскости.

Итак, общее уравнение соприкасающейся плоскости к линии γ заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (со значением параметра $t = t_0$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

3.3. Репер Френе. Нормаль к соприкасающейся плоскости к кривой γ в рассматриваемой точке называется *бинормалью кривой.*

Найдем направляющий вектор бинормали. Его можно получить, например, так: взять два не коллинеарных вектора, которые параллельны соприкасающейся плоскости, и найти их векторное произведение. Полученный вектор будет перпендикулярен соприкасающейся плоскости, а значит, параллелен бинормали.

Пусть кривая γ задана в произвольной параметризации векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Фиксируем на ней произвольную точку M. Согласно замечанию 1.8 векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ параллельны соприкасающейся плоскости. Тогда вектор

$$\vec{p} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$$

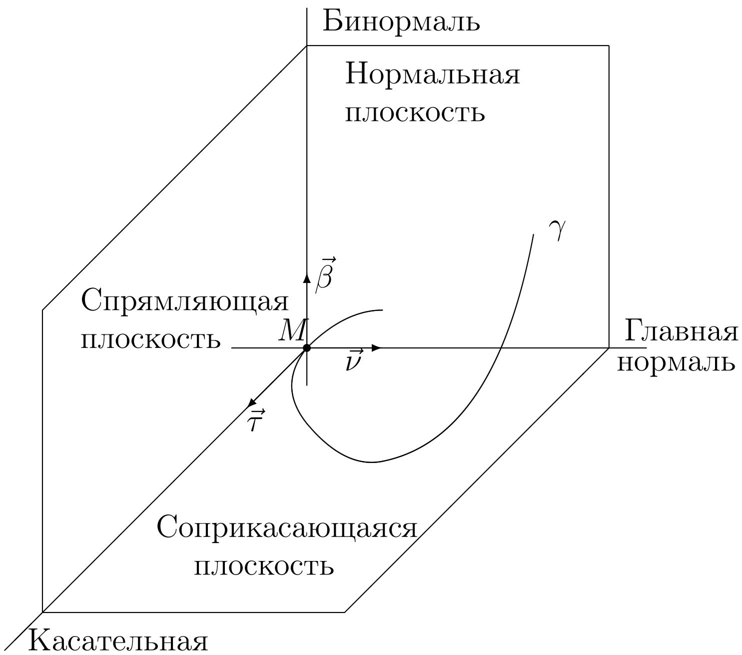
будет направляющим вектором бинормали кривой γ в точке M.

Пусть кривая γ задана в естественной параметризации. Тогда можно построить еще один вектор, параллельный бинормали. Он хорош тем, что составляет с векторами $\vec{\tau}(s)$ (касательный вектор в точке M) и $\vec{\nu}(s)$ (орт главной нормали в точке M) правый ортонормированный базис. Мы обозначим этот вектор $\vec{\beta}(s)$:

$$\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)].$$

Он называется *ортом бинормали.*

Таким образом, с каждой точкой M линии γ естественным образом связывается прямоугольная декартова система координат, начало которой совпадает с точкой M, а оси определяются ортами: $\vec{\tau}(s)$ – касательной, $\vec{\nu}(s)$ – главной нормали, $\vec{\beta}(s)$ – бинормали. Прямоугольная декартова система координат $(M, \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ изменяется при движении точки M по кривой γ (движется не только точка, но и поворачиваются векторы базиса). Поэтому ее называют *подвижным репером.* Также есть еще названия: *репер Френе* и *сопровождающий трехгранник.* (С термином „репер" вы уже встречались в курсе аналитической геометрии. Каждой системе координат взаимно однозначно ставится в соответствие репер: от начала системы координат откладываются представители векторов базиса. Получаем упорядоченную систему четырех точек. Это репер. Поэтому термины репер и система координат употребляют как синонимы. Здесь мы как раз встретились с таким случаем.)



Координатные плоскости подвижного репера носят следующие названия: $(M, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ – соприкасающаяся плоскость, $(M, \vec{\tau}, \vec{\beta})$ – спрямляющая плоскость, $(M, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – нормальная плоскость. Оси координат подвижного репера: $(M, \vec{\tau})$ – касательная, $(M, \vec{\nu})$ – главная нормаль, $(M, \vec{\beta})$ – бинормаль.

§1.4. Кручение и кривизна кривой. Формулы Френе.

4.1. Формулы Френе. Пусть линия γ задана в естественной параметризации векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$. В каждой точке этой линии определяется репер Френе $(M, \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$. При движении точки M по линии γ векторы $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$ меняются. Выясним, как. Это изменение характеризуется первой производной данных векторов. Поэтому наша ближайшая задача выразить производные $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$, $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ через векторы $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$.

Согласно формуле (1.12) и определению касательного вектора имеем

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s),$$

где $k(s)$ – кривизна кривой γ в точке со значением параметра s. Напомним, что точки, в которых кривизна обращается в нуль (точки спрямления), мы исключили из рассмотрения.

Найдем $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$. Так как $\vec{\nu}(s)$ является единичным вектором в каждой точке, согласно лемме о векторе постоянной длины (лемма 1.1) его производная будет перпендикулярна ему в каждой точке, следовательно, при его разложении по базису $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ коэффициент при векторе $\vec{\nu}$ будет нулевым. Остальные два коэффициента обозначим $\alpha(s)$ и $\varkappa(s)$:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \alpha(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем коэффициент $\alpha(s)$. Так как при каждом значении s векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{\tau}(s)\vec{\nu}(s) = 0$. Продифференцируем это равенство по s:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{\nu}(s) + \vec{\tau}(s)\frac{d\vec{\nu}}{ds} = 0$$

и подставим в него выражения для обеих производных (мы их знаем)

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{\nu}(s) + \vec{\tau}(s)(\alpha(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)) = 0.$$

Раскрываем скобки и учитываем, что векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ имеют длину 1, то есть их скалярные квадраты равны 1, а вектор $\vec{\tau}(s)$ для каждого s перпендикулярен вектору $\vec{\beta}(s)$, а значит их скалярное произведение будет нулем. Таким образом, получаем

$$k(s) + \alpha(s) = 0,$$

то есть коэффициент $\alpha(s) = -k(s)$. Коэффициент $\varkappa(s)$ ни через какие введенные ранее величины выражен быть не может. Это новая характеристика кривой. Она называется *кручением* линии γ. Итак, *кручение линии* γ – это коэффициент при $\vec{\beta}(s)$ в формуле

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$. Напомним, что $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$. Тогда по правилам дифференцирования вектор-функции получим

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}(s), \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right] =$$

Подставляем производные

$$= [k(s)\vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s)] + [\vec{\tau}(s), -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)] =$$

Вспоминаем курс аналитической геометрии. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нуль-вектору, векторное произведение векторов линейно (это для второго слагаемого)

$$= \vec{0} - k(s)[\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s)] + \varkappa(s)[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] =$$

Осталось вычислить $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)]$. Это векторное произведение векторов двух единичных векторов. Полученный вектор тоже должен иметь длину 1 (площадь параллелограмма построенного на векторах сомножителях) и должен быть перпендикулярен векторам $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$. Таких векторов два: $\vec{\nu}(s)$ и $-\vec{\nu}(s)$. Чтобы выбрать один из них, вспомним, что тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s), [\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)])$ должна быть правой. Если предположить, что $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] = \vec{\nu}(s)$, то тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\nu}(s))$ – правая, следовательно (меняем два вектора местами) тройка $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ – левая. Но, с другой стороны, по определению $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$ имеем $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ – правая тройка. Следовательно, $[\vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s)] = -\vec{\nu}(s)$. Таким образом, получаем

$$= -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Собираем полученные формулы вместе

$$\tfrac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s); \quad \tfrac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s); \quad \tfrac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Эти формулы называются *формулами Френе.*

4.2. Кручение линии. При выводе формул Френе мы получили функцию $\varkappa = \varkappa(s)$ от параметра s, которую назвали кручением линии. При каждом фиксированном значении s эта функция выдает число, которое как-то характеризует эту линию. Выясним, как и научимся это число вычислять.

Пусть кривая γ задана относительно натурального параметра s с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Выведем формулу для вычисления кручения $\varkappa(s)$. Начнем со вспомогательной формулы для третьей производной вектор-функции $\vec{r}(s)$. Будем использовать формулы Френе.

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) = \frac{d}{ds}(k(s)\vec{\nu}(s)) = k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)\frac{d\vec{\nu}}{ds} = k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$

Вычислим смешанное произведение (вспоминаем связь между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов), используя выведенную формулу,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = \left[\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = [\vec{\tau}(s), k(s)\vec{\nu}(s)](k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s))) =$$

Пользуясь линейностью векторного произведения векторов, выносим $k(s)$ из скобок векторного произведения и вспоминаем определение орта бинормали $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$. Остается раскрыть скобки со скалярным произведением, учитывая ортогональность векторов (значит скалярные произведения нулевые), а также единичную длину вектора $\vec{\beta}(s)$.

$$= k(s)\vec{\beta}(s)(k'(s)\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s))) = (k(s))^2\varkappa(s).$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = (k(s))^2\varkappa(s). \tag{1.14}$$

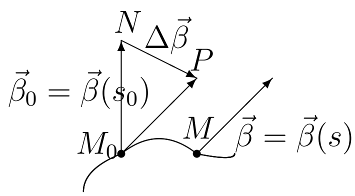
Напомним, что кривизну $k(s)$ мы получали как длину вектора $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, когда вводили орт главной нормали $\vec{\nu}(s)$ по формуле $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s)$. Тогда $(k(s))^2 = \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2$, то есть квадрат кривизны (для каждого значения параметра s) – это скалярный квадрат вектора $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Подставляя это в формулу (1.14), получим формулу для вычисления кручения кривой, заданной с помощью натурального параметра:

$$\varkappa(s) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}.$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл кручения кривой.

Теорема 1.4. *В точке M_0 гладкой линии γ, в которой кривизна отлична от нуля, абсолютное значение кручения γ равно пределу, к которому стремится отношение угла между бинормалями в точках M_0 и M к длине дуги M_0M, когда точка M, оставаясь на линии γ стремится к точке M.*

Доказательство. Пусть точке M_0 соответствует значения параметра s_0 и орт бинормали $\vec{\beta}_0 = \vec{\beta}(s_0)$. Эта точка стоит на месте. Точка M со значением параметра $s = s_0 + \Delta s$ и ортом бинормали $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ двигается по кривой γ к точке M_0.



Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3. Отложим представитель вектора $\vec{\beta}$ от точки M_0. Тогда

$$\overrightarrow{NP} = \vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}_0 = \Delta\vec{\beta}$$

и из равнобедренного треугольника NPM_0 получим

$$|\Delta\vec{\beta}| = NP = 2\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}}{\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{2}}{|\Delta s|} = 1 \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\Delta\vec{\beta}|}{|\Delta s|} = \left|\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s}\right| = \left|\left.\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|_{s=s_0}\right| = |-\varkappa(s_0)\vec{\nu}(s_0)| = |\varkappa(s_0)|.$$

□

Гладкая линия называется *плоской*, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Теорема 1.5. *Гладкая линия будет плоской тогда и только тогда, когда кручение во всех ее точках равно нулю.*

Доказательство. Пусть линия γ плоская. Нам нужно доказать, что в каждой ее точке кручение равно нулю. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы γ лежала в координатной плоскости Oxy. Тогда γ задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, для которого $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$. Следовательно, векторы $\frac{d\vec{r}}{ds} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}$ будут параллельны плоскости Oxy. Так как эти векторы определяют соприкасающуюся плоскость кривой γ, в каждой точке линии γ она будет совпадать с плоскостью Oxy. Значит, в каждой точке γ орт вектора бинормали будет перпендикулярен одной и той же плоскости Oxy, то есть это постоянный вектор. Тогда $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$ и по третьей формуле Френе $-\varkappa(s)\vec{\nu}(s) = \vec{0}$ для каждого значения параметра s. Следовательно, $\varkappa(s) = 0$.

Обратно, пусть для линии γ кручение равно нулю в каждой точке. Нам нужно доказать, что кривая плоская, то есть все ее точки лежат в одной плоскости. Пусть опять линия γ задана векторным параметрическим уравнением относительно натурального параметра: $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Так как кручение γ в каждой точке равно нулю, по третьей формуле Френе получим, что $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$ для всех s. Напомним, что в естественной параметризации $\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$. Тогда из ортогональности векторов $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ получаем, что $\vec{\beta}(s)\frac{d\vec{r}}{ds} = 0$. Продифференцируем скалярное произведение

$\vec{r}(s)\vec{\beta}(s)$

$$\frac{d}{ds}(\vec{r}(s)\vec{\beta}(s)) = \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{\beta}(s) + \vec{r}(s)\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau}(s)\vec{\beta}(s) + \vec{r}(s)\cdot\vec{0} = 0.$$

Итак,

$$\frac{d}{ds}(\vec{\beta}(s)\vec{r}(s)) = 0,$$

то есть $\vec{\beta}(s)\vec{r}(s) = c$, где c – константа. Так как производная вектор-функции $\vec{\beta}(s)$ нулевая, вектор бинормали не изменяется,то есть в каждой точке линии γ он один и тот же, поэтому обозначим его $\vec{\beta}$, а его координаты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Это три вещественных числа, одновременно не равные нулю. Вектор $\vec{r}(s)$ при изменении s меняется и выдает точки кривой γ. Их координаты $(x(s), y(s), z(s))$. Тогда записывая уравнение $\vec{\beta}(s)\vec{r}(s) = c$ в координатах, получим, что координаты $(x(s), y(s), z(s))$ точек кривой γ удовлетворяют уравнению

$$\beta_1 x(s) + \beta_2 y(s) + \beta_3 z(s) = c.$$

Это линейное уравнение и оно задает плоскость. Откуда мы видим, что все точки линии γ лежат в этой плоскости, то есть γ является плоской линией. $\square$

Замечание 1.9**.** Итак, мы выяснили, что кривизна линии характеризует ее отличие от прямой, а кручение – отличие линии от плоской линии.

4.3. Вычисление кривизны и кручения для линии, заданной в произвольной параметризации. Научимся вычислять кривизну и кручение линии, если она задана относительно произвольного параметра t.

Пусть гладкая линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Найдем формулы для вычисления ее кривизны $k(t)$ и кручения $\varkappa(t)$. Мы знаем, что для натурального параметра кривизна и кручения вычисляются по формулам

$$k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|; \quad \varkappa(s) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}. \tag{1.15}$$

Пусть параметры s и t связаны с помощью функции $s = s(t)$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}(s)\frac{ds}{dt}.$$

Так как вектор $\vec{\tau}(s)$ при любом значении s имеет длину 1, получим

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \tag{1.16}$$

Вычисляем вторую производную (используя формулы Френе)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}(s)\frac{d^2 s}{dt^2} = k(s)\vec{\nu}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}(s)\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Вычислим векторное произведение первой и второй производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ по t (раскрываем скобки с учетом линейности векторного произведения и равенства нулю векторного произведения коллинеарных векторов)

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left[\vec{\tau}(s)\frac{ds}{dt}, k(s)\vec{\nu}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}(s)\frac{d^2s}{dt^2}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k(s)\vec{\beta}(s).$$

Таким образом, мы получили

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k(s)\vec{\beta}(s). \tag{1.17}$$

Это равенство двух векторов при каждом значении t (мы помним, что $s = s(t)$, то есть s тоже можно выразить через t). Следовательно, длины этих векторов также равны. С учетом равенства (1.16), положительности $k(s)$ и единичности $\vec{\beta}(s)$, получим

$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 k(s(t))$$

или окончательная формула для вычисления кривизны кривой, заданной с помощью произвольного параметра

$$k(t) = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}. \tag{1.18}$$

Замечание 1.10**.** Попутно мы можем получить формулы для вычисления векторов подвижного репера для линии, заданной в произвольной параметризации. Выразим кривизну из формулы (1.18) и подставим в формулу (1.17).

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}\vec{\beta}(s(t)).$$

Откуда находим, что $\vec{\beta}(t) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}$. Тогда вся троица векторов подвижного репера будет вычисляться по формулам:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|};\ \vec{\beta}(t) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|};\ \vec{\nu}(t) = [\vec{\beta}(t), \vec{\tau}(t)].$$

Выведем формулу для вычисления кручения для произвольной параметризации. Вычислим третью производную вектор-функции $\vec{r}(t)$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3} =$$

$$= \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Вычисляем смешанное произведение, используя выведенные формулы

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right) =$$

Нам нужно упростить смешанное произведение векторов. Раскрываем скобки, учитывая равенство нулю смешанного произведения компланарных векторов

$$= \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Таким образом, мы получили

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Воспользуемся вторым равенством из (1.15) и (1.16)

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \varkappa(s)\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6 =$$

Вспоминаем, что скалярный квадрат вектора – это квадрат его длины, а также формулу для вычисления кривизны (1.18)

$$= \varkappa(s(t))\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^6}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6.$$

Откуда получаем формулу для вычисления кручения линии, заданной с помощью произвольного параметра

$$\varkappa(t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Замечание 1.11**.** Можно доказать, что для любой гладкой линии γ определяются две функции $k = k(s)$ и $\varkappa = \varkappa(s)$ длины дуги s (зависимость кривизны и кручения линии от параметра s). Эти уравнения называются *натуральными уравнениями кривой*. Для них имеет место следующая теорема. Если на двух гладких линиях γ и γ_1 можно ввести натуральные параметры s и s_1 так, чтобы во всех точках с одинаковым значением этих параметров совпадали бы значения кривизн k и k_1, а также значения кручений $\varkappa$ и $\varkappa_1$, то линии γ и γ_1 отличаются лишь положением в пространстве.

Другими словами, зная кривизну и кручение линии в каждой ее точке, мы можем восстановить эту линию с точностью до положения в пространстве.

§1.5. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Координатные линии. Замена параметризации.

5.1. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Мы по-прежнему находимся в трехмерном евклидовом пространстве E^3 и у нас есть трехмерное пространство векторов V^3.

Пусть U_1, U_2 – два числовых промежутка. Тогда их декартово произведение $G = U_1 \times U_2$ называется *двумерным числовым промежутком*, то есть

$$G = \{(u, v),\ u \in U_1, v \in U_2\}.$$

Другими словами, G состоит из упорядоченных пар чисел, первое меняется в числовом промежутке U_1, а второе – в числовом промежутке U_2.

Если каждой паре чисел (u, v) двумерного числового промежутка G по некоторому закону сопоставлен однозначно определенный вектор $\vec{r}(u, v)$ векторного пространства V^3, то говорят, что на промежутке G задана *вектор-функция* $\vec{r}(u, v)$ *двух скалярных аргументов* u и v.

Пусть дана вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ двух скалярных аргументов. Фиксируем в ней значение $v = v_0$ (проще говоря, в ней везде вместо v подставим число v_0. Тогда мы получим вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ одного скалярного аргумента u. Для вектор-функции одного скалярного аргумента определено понятие производной в точке u_0 (если вектор-функция в этой точке дифференцируема). Эту производную будем называть *частной производной вектор-функции двух скалярных аргументов* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ *по переменной* u *в точке* (u_0, v_0). Другими словами, частной производной по переменной u в точке (u_0, v_0) называется предел

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

(если он существует). Обозначение для частной производной

$$\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|_{(u_0, v_0)} \equiv \vec{r}\,'_u(u_0, v_0).$$

Если изменять значения u_0 и v_0, то мы получим новую вектор-функцию двух скалярных аргументов, которая называется частной производной по u вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и обозначается

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \equiv \vec{r}\,'_u.$$

Аналогично, фиксируя u_0, получаем функцию одного скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$. Для нее берем производную в точке v_0. Эта производная называется частной производной по v в точке (u_0, v_0) для вектор-функции двух скалярных аргументов $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Другими словами, частной производной по v вектор-функции двух скалярных аргументов $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ в точке (u_0, v_0) называется предел

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}$$

(если он существует). Частная производная по v в точке (u_0, v_0) обозначается

$$\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_0, v_0)} \equiv \vec{r}\,'_v(u_0, v_0).$$

Если изменять значения u_0 и v_0, то мы получим новую вектор-функцию двух скалярных аргументов, которая называется частной производной по v вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и обозначается

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \vec{r}\,'_v.$$

Так как частные производные вектор-функции двух скалярных аргументов сами являются вектор-функциями двух скалярных аргументов, беря их частные производные, мы получим частные производные второго порядка для исходной вектор-функции.

Вектор

$$d\vec{r}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)du + \vec{r}_v(u_0, v_0)dv$$

называется *дифференциалом вектор-функции* $\vec{r}(u, v)$ в точке (u_0, v_0). На величины du и dv смотрим как на скаляры.

Если вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ имеет частные производный любого порядка, то она называется *гладкой*. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие вектор-функции, если не оговорено противное. Фиксируем в евклидовом пространстве E^3 прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда для любой точки $(u, v) \in G$ вектор $\vec{r}(u, v)$ можно разложить по векторам этой системы координат:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

Если точка (u, v) меняется, то меняются числа $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ и мы получаем три функции, которые называются *координатами* вектор-функции $\vec{r}(u, v)$.

Следующая теорема описывает связь между дифференцированием вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ и ее координат. Она доказывается аналогично теореме о дифференцировании координат вектор-функции одной переменной и это доказательство мы оставляем читателю.

Теорема 1.6. *Пусть вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ задана на двумерном промежутке G своими координатами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ и (u, v) – точка из G. Тогда вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ имеет в точке (u, v) частные производные тогда и только тогда, когда функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют частные производные в этой точке. При этом выполняются соотношения:*

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\vec{k};$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\vec{k};$$

$$d\vec{r}(u, v) = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}du + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}dv\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial y(u, v)}{\partial u}du + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}dv\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial z(u, v)}{\partial u}du + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}dv\right)\vec{k}.$$

Для частных производных функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ будем также использовать обозначения $x_u(u, v)$, $x_v(u, v)$ и т.д.

Приведем еще две технические теоремы (их доказательства можно посмотреть в [2])

Теорема 1.7. *(о векторе постоянной длины) Пусть вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ задана на двумерном промежутке G и дифференцируема в каждой точке этого промежутка. Длина данной вектор-функции постоянна тогда и только тогда, когда в каждой точке $(u, v) \in G$ вектор $\vec{r}(u, v)$ перпендикулярен векторам частных производных $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.*

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{r}(u, v)$, заданная на двумерном промежутке G, *сохраняет свое направление*, если существует единичный постоянный вектор $\vec{e}$, такой что $\vec{r}(u, v) = |\vec{r}(u, v)|\vec{e}$.

Теорема 1.8. *(о векторе постоянного направления) Пусть вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ определена на двумерном промежутке G и дифференцируема в каждой точке этого промежутка.*

Вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ сохраняет свое направление во всех точках промежутка G тогда и только тогда, когда в каждой точке G вектор $\vec{r}(u,v)$ параллелен векторам частных производных $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

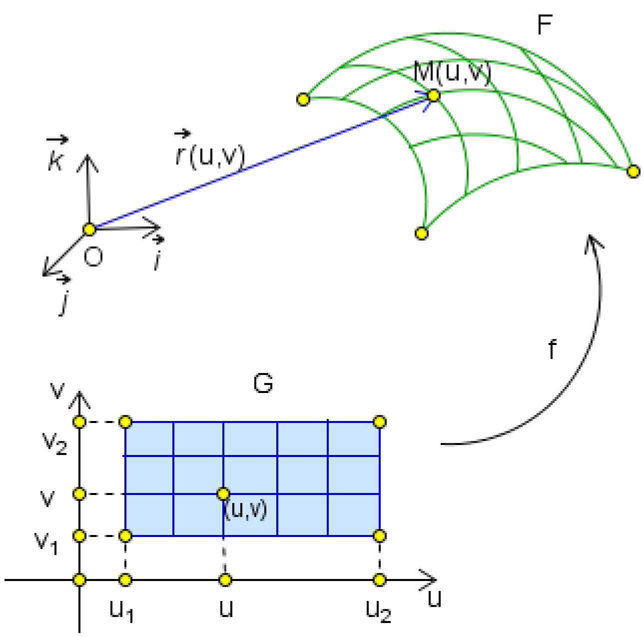
5.2. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты. Введем понятие гладкой поверхности по аналогии с понятием гладкой линии.

Пусть дано пространство E^3. *Простейшей поверхностью* назовем плоскость, полуплоскость с границей, прямоугольник в E^3.

Элементарной поверхностью назовем множество точек из E^3, гомеоморфное простейшей поверхности.

Простой поверхностью называется связное множество F точек из E^3, удовлетворяющее условию: для любой точки $M \in F$ существует открытый шар $B_r(M)$ с центром в этой точке такой, что множество $B_r(M) \cap F$ является элементарной поверхностью. Другими словами, для любой точки $M \in F$ найдется шар в E^3, который вырежет из F множество, гомеоморфное простейшей поверхности. В результате получаем, что на простую поверхность можно смотреть как на объединение элементарных поверхностей.

В дальнейшем мы будем рассматривать простые поверхности. Если условие из определение простой поверхности нарушается в „небольшом числе“ точек множества F, то мы будем выбрасывать эти точки и изучать оставшееся множество.



Пусть F – элементарная поверхность. Построим ее аналитическое задание с помощью вектор-функции двух скалярных аргументов. По определению элементарной поверхности F – множество гомеоморфное плоскости, полуплоскости или прямоугольнику G. Множество точек $G \subset E^3$ мы можем отождествить с множеством упорядоченных пар вещественных чисел. Множество G лежит в плоскости.

В этой плоскости введем прямоугольную декартову систему координат с осями, которые параллельны сторонам прямоугольника или одна ось параллельна границе полуплоскости или произвольно в случае плоскости. Обозначим эти оси u и v. Теперь каждая точка из G получила свою пару чисел и это соответствие взаимно однозначно. Вспоминаем, что G и F гомеоморфны. Обозначим этот гомеоморфизм f. Тогда каждой паре $(u,v) \in G$ взаимно однозначно будет ставиться в соответствие точка $M \in F$. Из точки M и точки O – начала прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ делаем вектор $\overrightarrow{OM}$. Таким образом, мы построили вектор-функцию двух скалярных аргументов. Эта вектор-функция определена на двумерном числовом промежутке G. Она каждой паре чисел (u, v) ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{OM}$. Эта вектор-функция называется *векторным параметрическим уравнением* элементарной поверхности F или *параметризацией* F.

Если записать координаты вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то получим уравнения

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v), \, (u, v) \in G,$$

которые называются *параметрическими уравнениями* поверхности F.

Заметим, что у каждой точки $M \in F$ появилась своя пара чисел (u, v) (та точка из G, из которой получалась M при гомеоморфизме f). Эта пара чисел называется *криволинейными координатами* точки M. Криволинейные координаты играют ту же роль на поверхностях, что и координаты точки на плоскости в аффинной системе координат – по ним можно отличать одну точку от другой. Так как точка M вместе с поверхностью находится в пространстве E^3, то для нее определены еще и координаты относительно ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Обозначим их (x, y, z). Выясним, как они связаны с криволинейными координатами (u, v) этой же точки M. Числа (x, y, z) – это координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M, а этот вектор – это значение вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ для пары (u, v). Получаем

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

В силу линейной независимости получим

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v), \tag{1.19}$$

то есть для пересчета криволинейных координат точки M в обычные, нужно подставить их в параметрические уравнения поверхности F. Можно пересчитать и наоборот: если известно, что точка M лежит на поверхности F и известны ее координаты относительно ПДСК, то решив систему уравнений (1.19), найдем u и v – криволинейные координаты этой точки.

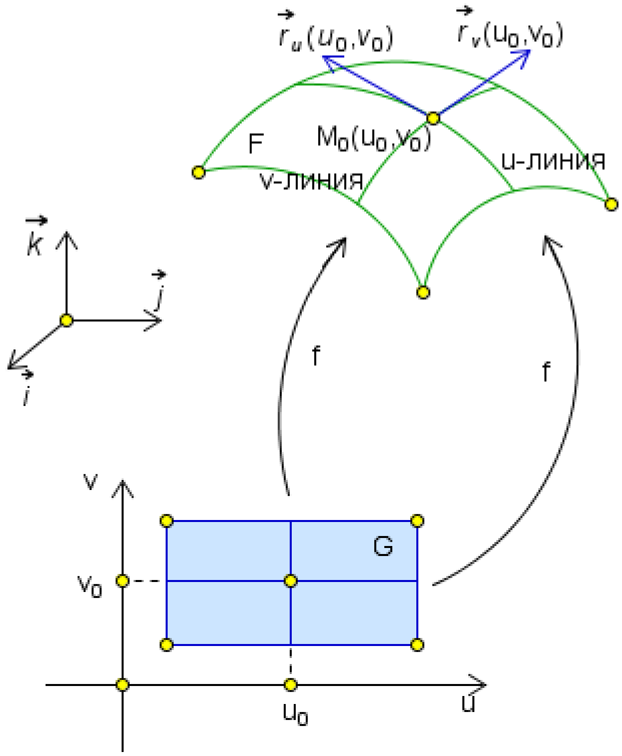
Элементарную поверхность F будем называть *гладкой*, если у нее существует гладкая параметризация (другими словами, если эту поверхность можно задать гладкой вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$) и если для каждой точки $(u, v) \in G$ векторы частных производных $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны.

Согласно теореме 1.6 векторы $\vec{r}_u(u, v)$ и $\vec{r}_v(u, v)$ имеют координаты

$$\vec{r}_u(x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)); \, \vec{r}_v(x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)).$$

Тогда не коллинеарность, векторов равносильна не пропорциональности их координат, которую в этом случае удобно записать в виде условия на ранг матрицы:

$$rg \begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix} = 2. \tag{1.20}$$



Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Фиксируем значение v (положим его равным $v = v_0$) так, чтобы $(u, v_0) \in G$ при всех допустимых u. Подставим это значение в векторное параметрическое уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$.

Мы получили вектор-функцию одного скалярного аргумента. Она задает гладкую линию. Так как исходная вектор-функция задавала поверхность F, то эта линия будет лежать на F. Она называется *u-линия* (*линия u*). Касательным вектором к этой линии в точке (u_0, v_0) будет производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ при $u = u_0$, то есть частная производная $\vec{r}_u(u_0, v_0)$.

Фиксируя аналогичным образом $u = u_0$, получим *v-линию* (или *линию v*). Касательным вектором в точке (u_0, v_0) к v-линии будет частная производная $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Отметим, что любые две различные u-линии не пересекаются, так как для одной всегда $v = v_1$, а для другой $v = v_2$ и эти числа различны. Рассмотрим произвольную линию u (для нее всегда $v = v_0$) и линию v (для нее всегда $u = u_0$). Тогда для их общих точек будет выполняться требование $u = u_0$, $v = v_0$. Так как точка (u_0, v_0) – единственная в G, любая линия u пересекает любую v-линию только в одной точке.

Итак, мы получаем на гладкой поверхности F два семейства линий, причем любые две линии одного семейства не пересекаются, а любые две линии разных семейств имеют единственную общую точку. Это семейство линий называется *координатной сетью поверхности.*

5.3. Замена параметризации. Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v),\ (u, v) \in G. \tag{1.21}$$

Пусть дан еще один двумерный промежуток G', его элементы будем обозначать (α, β). Пусть G' гомеоморфен G. Тогда мы получаем непрерывную биекцию, которая задается формулами

$$u = u(\alpha, \beta); \quad v = v(\alpha, \beta).$$

Если эти выражения подставить в параметрические уравнения (1.21) поверхности F, то получим уравнения

$$x = x(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \equiv x(\alpha,\beta);\ y = y(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \equiv y(\alpha,\beta);\ z = z(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \equiv z(\alpha,\beta).$$

Эти уравнения задают тоже самое множество точек F в E^3. Кроме того, выразив α, β через u и v мы можем вернуться к первоначальным параметрическим уравнениям.

К новым параметрическим уравнениям мы хотим предъявить те же требования, что и к старым (см. определение гладкой поверхности): существование частных производных любого порядка по α и β и требование на ранг матрицы:

$$rg\begin{pmatrix} x_\alpha(\alpha,\beta) & y_\alpha(\alpha,\beta) & z_\alpha(\alpha,\beta) \\ x_\beta(\alpha,\beta) & y_\beta(\alpha,\beta) & z_\beta(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = 2. \tag{1.22}$$

Во-первых, функции $x = x(\alpha,\beta)$, $y = y(\alpha,\beta)$, $z = z(\alpha,\beta)$ должны иметь частные производные любого порядка по переменным α и β. По правилу дифференцирования сложной функции, например, получим

$$\frac{\partial x(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}.$$

Мы видим, чтобы производная существовала, нужно, чтобы существовали частные производные $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial v}{\partial\alpha}$. Рассуждая аналогично для других равенств, получим, что функции $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$ должны иметь частные производные любого порядка по обеим переменным.

Во-вторых, должно выполняться условие (1.22), то есть

$$rg\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha} & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta} & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta} \end{pmatrix} = 2.$$

Это означает, что хотя бы один из трех возможных определителей, которые можно составить для этой матрицы, отличен от нуля. Пусть для определенности это определитель, составленный из первых двух столбцов, то есть

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial\alpha} & \frac{\partial v}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial\beta} & \frac{\partial v}{\partial\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Второй определитель в произведении отличен от нуля, так как u и v являются криволинейными координатами. Значит, нужно потребовать, чтобы второй определитель также был отличен от нуля для всех пар значений (α,β). Матрица, для которой вычисляется этот определитель, называется *матрицей Якоби* отображения $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$.

Итак, взаимно биекция $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$ будет определять новые криволинейные координаты (α,β) на поверхности F, если 1) функции $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$ будут иметь частные производные любого порядка, 2) матрица Якоби этого отображения будет отлична от нуля для любой пары $(\alpha,\beta) \in G'$.

Переход от криволинейных координат (u,v) к криволинейным координатам (α,β) называется *заменой параметризации гладкой поверхности.*

5.4. Неявные уравнения поверхности. Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями
$$x = x(u,v);\ y = y(u,v);\ z = z(u,v),\ (u,v) \in G.$$
По определению гладкой поверхности имеем
$$rg \begin{pmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} = 2.$$
Это значит, что один из определителей 2×2, составленный из столбцов этой матрицы отличен от нуля. Пусть это будут первые два столбца (остальные случаи рассматриваются аналогично). Из курса математического анализа мы знаем, что в этом случае из уравнений $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ мы можем выразить буквы u и v через x и y, то есть получить соотношения
$$u = u(x,y); \quad v = v(x,y).$$
Подставим эти выражения в третье параметрическое уравнение поверхности:
$$z = z(u(x,y), v(x,y)).$$
Перенесем все слагаемые в одну часть и обозначим $\Phi(x,y,z) = z - z(u(x,y), v(x,y))$. Тогда уравнение примет вид $\Phi(x,y,z) = 0$. Это уравнение называется *общим уравнением поверхности* и говорят, что поверхность F *задана в неявном виде.*

Возникает вопрос: в каком случае множество точек пространства E^3, заданное уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$, будет гладкой поверхностью? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы примем без доказательства (доказывается в курсе математического анализа)

Теорема 1.9. *Пусть функция $\Phi(x,y,z)$ имеет частные производные любого порядка и Ω – множество точек из E^3, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x,y,z) = 0$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка этого множества, в которой частные производные функции $\Phi(x,y,z)$ одновременно не равны нулю, то есть в этой точке*
$$rg(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = 1.$$
Тогда существует открытый шар $B(M_0)$ с центром в этой точке, такой что пересечение $B(M_0)$ с множеством Ω будет гладкой поверхностью.

§1.6. Касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма поверхности.

6.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрическими уравнениями. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Будем говорить, что *линия принадлежит поверхности*, если каждая ее точка принадлежит этой поверхности.

Поскольку каждая точка поверхности F определяется парой чисел $(u, v) \in G$, а каждая точка линии определяется значением одного параметра t, то для каждой точки $M(u, v)$ гладкой линии, принадлежащей поверхности, параметры u и v являются функциями параметра t

$$u = u(t),\ v = v(t),$$

причем параметр t пробегает значения такого числового промежутка U, что соответствующее значение $(u(t), v(t))$ принадлежало двумерному промежутку G. Это *параметрические уравнения гладкой линии* на поверхности в криволинейных координатах поверхности.

Получим векторное параметрическое уравнение этой линии. Так как линия лежит на поверхности, значения $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяют уравнению $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ поверхности F. Подставляя их в это уравнение, получим

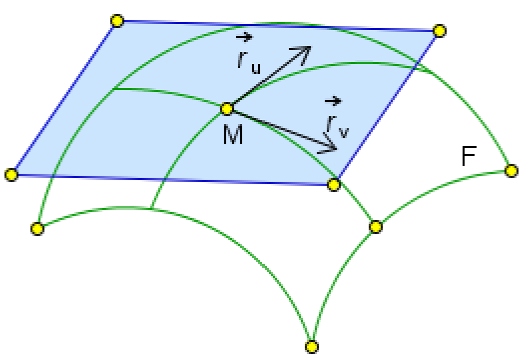
$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)).$$

Обозначая $\vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{R}$, получим уравнение линии, лежащей на поверхности $\vec{r} = \vec{R}(t)$.

Пусть дана поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, фиксируем точку M (ей соответствует значение параметра t) на ней и рассмотрим всевозможные линии γ поверхности, проходящие через точку M. Касательные векторы в точке M к этим кривым будут вычисляться по формуле (используем правило дифференцирования сложной функции)

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{1.23}$$

(В правой части равенства производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ вычисляем в в точке со значением параметра t, а частные производные $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ вычисляются в точке со значениями параметров $u(t), v(t)$.)



Плоскость, определяемая точкой M и не коллинеарными векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, называется *касательной плоскостью* к поверхности F в точке M. Упорядоченная пара $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ векторов является базисом направляющего подпространства этой плоскости.

Покажем, что перебирая все кривые γ, лежащие на плоскости и проходящие через точку M, мы получим все векторы, параллельные касательной плоскости. Другими словами, какую бы пару чисел (p_1, p_2) мы не взяли, всегда существует кривая γ, проходящая через точку M, у которой касательный вектор в этой точке имеет координаты (p_1, p_2) в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Возьмем произвольные числа (p_1, p_2) (конечно, одновременно не равные нулю) и зададим кривую γ с помощью уравнений в криволинейных координатах (u, v): $u = u_0 + p_1 t$, $v = v_0 + p_2 t$, где (u_0, v_0) – криволинейные координаты точки M. Согласно формуле (1.23) координатами касательного вектора к кривой γ в точке M относительно базиса $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ будут производные $\frac{du}{dt}$ и

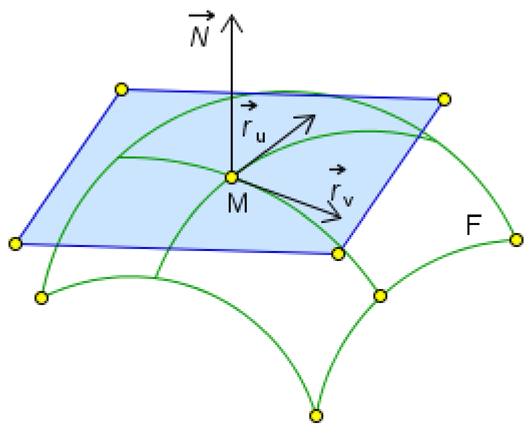
$\frac{dv}{dt}$, вычисленные при значении t, которое соответствует точке M. Для кривой γ получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(u_0 + p_1 t) = p_1; \ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u_0 + p_2 t) = p_2.$$

Итак, все векторы направляющего пространства касательной плоскости являются касательными векторами кривых поверхности F, проходящих через точку M. Направляющее касательное пространство касательной плоскости называется *касательным пространством* поверхности F в точке M.

Так как в любой точке M гладкой поверхности F векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны, определяется вектор

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v].$$



Этот вектор перпендикулярен всем векторам направляющего пространства касательной плоскости (а, значит, он перпендикулярен и самой касательной плоскости) и называется *вектором нормали*. Прямая, проходящая через точку M параллельно вектору нормали, называется *нормалью к поверхности в точке* M.

Из определения гладкой поверхности (векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны в каждой точке) следует, что в каждой ее точке существует единственная касательная плоскость и единственная нормаль.

Пусть гладкая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v); \ y = y(u,v); \ z = z(u,v).$$

Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в прямоугольной декартовой системе координат (та, которая была фиксирована в самом начале) имеют координаты

$$\vec{r}_u(x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)); \ \vec{r}_v(x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$$

(сначала ищем частную производную, а затем в нее подставляем значения параметров u, v точки M). По формуле для вычислении координат векторного произведения векторов в правом ортонормированном базисе получим, что координаты вектора нормали имеют вид

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения нормали в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности F будут иметь вид

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ можно записать в двух видах (по точке и паре параллельных ей векторов; по точке и перпендикулярному вектору)

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

где значения производных вычисляются при значении параметром $u = u_0$, $v = v_0$, соответствующих точке M.

Теорема 1.10. *Касательная плоскость и нормаль не зависят от выбора параметризации на поверхности. Говорят, что они имеют геометрический смысл.*

Доказательство. Сначала поймем, в чем здесь может возникнуть проблема. Если взять другую параметризацию (α, β) поверхности F и вычислить $\vec{r}_\alpha$, $\vec{r}_\beta$ и $\vec{n} = [\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta]$, то a priory может получиться, что плоскость определенная точкой M и векторами $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$ может не совпасть с плоскостью, определенной точкой M и векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. А следовательно и нормаль к поверхности, определенная в разных параметризациях, может быть различной. Убедимся, что это не так.

Вспомним, что одну параметризацию мы можем выразить через другую с помощью формул $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$. Тогда для точки M по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

то есть вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Аналогично получаем, что вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$ есть линейная комбинация этих векторов. Таким образом, мы получили, что векторы $\vec{r}_\alpha$, $\vec{r}_\beta$ также как и векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ определяют одну и ту же касательную плоскость. Раз касательная плоскость получается одной и той же, то и нормаль (перпендикуляр к касательной плоскости, проходящий через точку M) будет одним и тем же при обеих параметризациях. □

6.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно (на семинар). Пусть гладкая поверхность F задана неявным уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Пусть γ – кривая, лежащая на поверхности F, задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Тогда координаты любой точки M кривой γ удовлетворяют уравнению поверхности F, то есть $\Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Продифференцируем это равенство по параметру t (применяем правило дифференцирования сложной функции)

$$\Phi_x \frac{dx}{dt} + \Phi_y \frac{dy}{dt} + \Phi_z \frac{dz}{dt} \equiv 0.$$

Посмотрим на левую часть этого тождества как на скалярное произведение векторов с координатами (Φ_x, Φ_y, Φ_z) и $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. Второй вектор – это направляющий вектор касательной для кривой γ в точке M. Тогда последнее равенство показывает, что вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) перпендикулярен касательному вектору кривой γ. Так как мы рассматриваем все кривые γ, лежащие на поверхности F и проходящие через точку M, вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) будет перпендикулярен касательному вектору к любой кривой проходящей через точку M, то есть будет перпендикулярен касательной плоскости. Оказалось, что вектор (Φ_x, Φ_y, Φ_z) – это вектор нормали. Тогда касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности F имеет уравнение (по точке и перпендикулярному вектору)

$$\Phi_x(x - x_0) + \Phi_y(y - y_0) + \Phi_z(z - z_0) = 0,$$

а нормаль – уравнения (по точке и направляющему вектору)

$$\frac{x - x_0}{\Phi_x} = \frac{y - y_0}{\Phi_y} = \frac{z - z_0}{\Phi_z}.$$

6.3. Первая квадратичная форма. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Запишем ее дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$. Найдем скалярный квадрат дифференциала $d\vec{r}$

$$d\vec{r}^2 = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12}dudv + \gamma_{21}dvdu + \gamma_{22}(dv)^2, \tag{1.24}$$

где $\gamma_{11} = \vec{r}_u\vec{r}_u$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u\vec{r}_v$, $\gamma_{22} = \vec{r}_v\vec{r}_v$. Выражение в правой части (1.24) называется *первой квадратичной формой* поверхности F.

Первая квадратичная форма позволяет вычислить длину кривой на поверхности F. Пусть на поверхности F дана кривая γ. Параметрические уравнения кривой γ в локальных координатах поверхности будут иметь вид $u = u(t), v = v(t)$. Так как кривая лежит на поверхности F, криволинейные координаты (u, v) ее точек будут удовлетворять параметрическим уравнениям поверхности F, а значит, в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторное параметрическое уравнение кривой γ имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Как мы знаем, длина дуги кривой от точки M_0 (со значением параметра $t = t_0$) до точки M_1 (со значениями параметра $t = t_1$) в E_3 вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt.$$

Вычислим $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ в нашем случае. Используя правило дифференцирования сложной функции и обозначение коэффициентов первой квадратичной формы, получим

$$\left|\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}} = \sqrt{(\vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt})(\vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt})} =$$
$$\sqrt{\gamma_{11}(\frac{du}{dt})^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}(\frac{dv}{dt})^2}.$$

Откуда получаем формулу для вычисления длины дуги кривой на поверхности F

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt. \tag{1.25}$$

Замечание 1.12**.** В предыдущей формуле под интегралом стоит дифференциал длины дуги, то есть ds (формула $s = \int ds$ известна из математического анализа – чтобы вычислить длину дуги, нужно вычислить длины маленьких кусочков и сложить их), то есть

$$ds = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt.$$

Вносим dt под корень и переходим к дифференциалам (формула $df = \frac{df}{dt}dt$, то есть мысленно сокращаем на dt^2). Чтобы не возиться с корнем, возведем обе части в квадрат.

$$ds^2 = \gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2. \tag{1.26}$$

Эта формула объясняет распространенное обозначение для первой квадратичной формы ds^2.

Пример 1.8**.** Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Рассмотрим u линию $v = v_0$ и вычислим ее длину между точками ее пересечения с v линиями, заданными уравнениями $u = u_0$ и $u = u_1$. Смотрим на формулу (1.25): чтобы ее применить, нужно задать u линию с помощью параметрический уравнений в криволинейных координатах (относительно параметра t), вычислить значения параметра t для точек пересечения u линии с v линиями и вычислить производные.

Зададим u линию с помощью параметрический уравнений (они должны быть вида $u = u(t)$, $v = v(t)$). Сначала заметим, что для всех точек u линии значение криволинейной координаты v всегда равно v_0. Значит, второе параметрическое уравнение будет иметь вид $v = v_0$. Координата u на u линии меняется. Ее мы обозначим через параметр t. Тогда получим $u = t$, $v = v_0$.

u линия $u = t$, $v = v_0$ пересекает v линию $u = u_0$ в точке со значением параметра $t = u_0$. Аналогично, вторая точка пересечения имеет значение параметра $t = u_1$.

Вычисляем производные $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{dv}{dt} = 0$. Тогда

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2}dt = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\gamma_{11}}dt.$$

Аналогичную формулу можно получить для v линии (проведите вычисления самостоятельно).

Пусть даны две линии γ_1 и γ_2 на поверхности F, пересекающиеся в точке M_0. Найдем угол между этими кривыми в точке M_0. Напомним, что углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, кривые γ_1 и γ_2 в криволинейных координатах заданы уравнениями $u = u_1(t), v = v_1(t)$ и $u = u_2(\tau), v = v_2(\tau)$ соответственно. Обозначим координаты точки $M_0(u_0, v_0)$ в криволинейных координатах.

Пусть точке M_0 соответствует значение параметра t_0 на линии γ_1 и значение параметра τ_0 на второй линии. Тогда $u_0 = u_1(t_0) = u_2(\tau_0)$ и $v_0 = v_1(t_0) = v_2(\tau_0)$. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ линии γ_1 и γ_2 задаются следующим образом

$$\gamma_1 : \vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t)); \quad \gamma_2 : \vec{r} = \vec{r}(u_2(\tau), v_2(\tau)).$$

Найдем какой-нибудь вектор, параллельный касательной к γ_1 в точке M_0. Как мы знаем, вектор $\left.\frac{d\vec{r}(u_1(t),v_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$ будет касательным к γ_1. Обозначим его $\vec{\xi}_1$. С учетом правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\vec{\xi}_1 = \left.\frac{d\vec{r}(u_1(t), v_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du_1(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Аналогично получаем вектор

$$\vec{\xi}_2 = \left.\frac{d\vec{r}(u_2(\tau), v_2(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du_2(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0},$$

касательный к кривой γ_2 в точке M.

По определению скалярного произведения векторов получим

$$\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \frac{\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2}{|\vec{\xi}_1||\vec{\xi}_2|} = \frac{\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2}{\sqrt{(\vec{\xi}_1)^2}\sqrt{(\vec{\xi}_2)^2}}.$$

Вычислим числитель крайне правой части последнего равенства. Частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ здесь вычисляются в точке (u_0, v_0). Из-за громоздкости в следующей формуле мы опускаем обозначение этой точки.

$$\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2 = (\vec{r}_u \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0})(\vec{r}_u \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}) =$$
$$= \gamma_{11} \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12} \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}.$$

В знаменателе получим

$$\sqrt{(\vec{\xi}_1)^2} = \sqrt{(\vec{r}_u \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0})(\vec{r}_u \left.\frac{u_1}{dt}\right|_{t=t_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0})} =$$
$$= \sqrt{\gamma_{11}\left(\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0}\right)^2 + 2\gamma_{12} \left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0} + \gamma_{22}\left(\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}\right)^2}$$

Аналогично получаем

$$\sqrt{(\vec{\xi}_2)^2} = \sqrt{\left(\vec{r}_u \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)\left(\vec{r}_u \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \vec{r}_v \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)} =$$
$$= \sqrt{\gamma_{11}\left(\left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)^2 + 2\gamma_{12} \left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} \left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\left(\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)^2}$$

Объединяя вычисления, получаем

$$\cos\angle(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) =$$

$$= \frac{\gamma_{11}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{12}\,\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\,\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}}{\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_1}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)^2}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)^2 + 2\gamma_{12}\,\frac{du_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\frac{dv_2}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} + \gamma_{22}\left(\frac{dv_2}{d\tau}\right.}}$$

Так как, выбирая направляющие векторы касательных к кривым, мы могли выбрать их так, что угол между этими векторами тупой, для нахождения угла между самими касательными (не тупой угол между прямыми) нужно взять модуль полученного числа, то есть

$$\cos\angle(\gamma_1,\gamma_2) = |\cos\angle(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)|.$$

Пример 1.9. Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Найдем угол между координатными линиями этой поверхности.

Напомним, что u линия задается в криволинейных координатах уравнением $v = v_0$ (или с параметром t: $u = t$, $v = v_0$), а v линия – уравнением $u = u_0$ (или с параметром τ: $u = u_0$, $v = \tau$. Точка пересечения этих линий (обозначим ее M_0) имеет криволинейные координаты (u_0, v_0). Для этой точки значение параметра на первой линии будет $t = u_0$, а на второй линии будет $\tau = v_0$. Считая производные, сразу подставляем их в формулу (1.27).

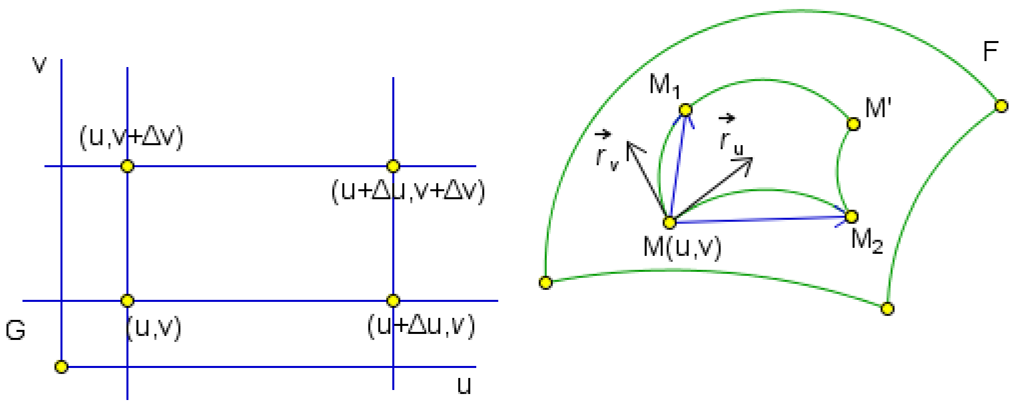
$$\cos\angle(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) = \frac{\gamma_{11}\cdot 1\cdot 0 + \gamma_{12}\cdot 1\cdot 1 + \gamma_{12}\cdot 0\cdot 0 + \gamma_{22}\cdot 0\cdot 1}{\sqrt{\gamma_{11}\,(1)^2 + 2\gamma_{12}\cdot 1\cdot 0 + \gamma_{22}\,(0)^2}\sqrt{\gamma_{11}\,(0)^2 + 2\gamma_{12}\cdot 0\cdot 1 + \gamma_{22}\,(1)^2}} = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}}.$$

Тогда угол между u линией и v линией (обозначим его φ) будет равен

$$\cos\varphi = \frac{|\gamma_{12}|}{\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}}.$$

Заметим, что если $\gamma_{12} = 0$, то u линия перпендикулярна v линии.

Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$. Разобьем область G конечным числом прямых линий $u = const$ и $v = const$ на параллелограммы со сторонами Δu и Δv.



Рассмотрим один из таких параллелограммов (произвольный). Обозначим его вершину с наименьшими значениями через (u, v), а остальные вершины как показано на рисунке. Переходим к поверхности F. Обозначим через M точку поверхности F, которая определяется радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$, через M_1 – радиус-вектором $\vec{r}(u, v+\Delta v)$, через M_2 – радиус-вектором $\vec{r}(u+\Delta u, v)$, через M' – радиус-вектором $\vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Остальные пары значений параметров, которые лежат на сторонах и внутри выделенного параллелограмма, определять на поверхности F так называемый криволинейный параллелограмм $MM_1M'M_2$. Площадь ΔS криволинейного параллелограмма $MM_1M'M_2$ будет приблизительно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Вычислим эту площадь. Для вектора $\overrightarrow{MM_1}$ получим

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u, v) \approx \vec{r}_u \Delta u.$$

Аналогично для вектора $\overrightarrow{MM_2}$ получим

$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u, v) \approx \vec{r}_v \Delta v.$$

Тогда, используя тот факт, что площадь параллелограмма, построенного на векторах, равна длине их векторного произведения, получим

$$\Delta S \approx |[\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}]| \approx |[\vec{r}_u \Delta u, \vec{r}_v \Delta v]| = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \Delta u \Delta v. \tag{1.28}$$

Вспомним формулу из аналитической геометрии, которая позволяет свести вычисление длины векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к вычислению скалярных произведений.

$$(\vec{a}\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a})^2(\vec{b})^2 - |[\vec{a}\vec{b}]|^2,$$

то есть

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = \sqrt{(\vec{a})^2(\vec{b})^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Применим эту формулу в нашем случае для $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$.

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{(\vec{r}_u)^2(\vec{r}_v)^2 - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}. \tag{1.29}$$

Возвращаемся к формуле (1.28)

$$\Delta S \approx \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\Delta u \Delta v.$$

Составим сумму таких площадей

$$\sum \Delta S \approx \sum \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\Delta u \Delta v.$$

Будем теперь бесконечно уменьшать Δu и Δv (увеличивая число параллелограммов). Тогда левая часть приближенного равенства будет стремиться к площади поверхности F, а правая часть – двойной интеграл по области G, то есть

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}dudv.$$

Не для любой поверхности существует площадь (те поверхности, для которых площадь существует называются *квадрируемыми*). Не вдаваясь далеко в вопросы существования, мы будем предполагать, что поверхность квадрируема и двойной интеграл существует. Также нужно доказать, что полученная формула не зависит от выбора параметризации поверхности (желающие могут ознакомиться с подробными рассуждениями в [4, стр. 232]).

Итак, мы показали, что первая квадратичная форма позволяет вычислять длины дуг кривых на поверхности, углы между кривыми и площади поверхностей (или их частей), не выходя в объемлющее евклидово пространство E^3.

§1.7. Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна кривой на поверхности.

7.1. Вторая квадратичная форма. Пусть дана гладкая поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Рассмотрим произвольную кривую γ, лежащую на поверхности и заданную в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное параметрическое уравнение кривой γ будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Первая производная получается так: берем производную по t от вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Переходим от производных к дифференциалам (мысленно умножаем обе части на dt)

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Это первый дифференциал вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$. Для нахождения второго дифференциала нам нужна вторая производная.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\frac{dv}{dt}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v \partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\frac{dv}{dt}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{d^2 v}{dt^2}. \quad (1.30)$$

Переходим к дифференциалам (мысленно умножаем обе части на dt^2) и учитываем, что порядок взятие частных производных по u и v не важен, так как исходная вектор-функция гладкая.

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv} dv^2 + \vec{r}_u d^2 u + \vec{r}_v d^2 v. \quad (1.31)$$

Фиксируем произвольную точку M поверхности F и рассмотрим единичный вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности F (Раньше мы считали вектор нормали $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, его длина нас не волновала). Он вычисляется по формуле

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$$

Умножим обе части равенства (1.31) скалярно на $\vec{n}$. Так как $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, последние два слагаемых будут нулями, а в остальных введем обозначения (учитываем равенство (1.29))

$$b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$
$$b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$
$$b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}};$$

Тогда скалярное произведение $\vec{n}d^2\vec{r}$ запишется в виде

$$\vec{n}d^2\vec{r} = b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2. \tag{1.32}$$

Теперь отпускаем точку M поверхности F (которую мы фиксировали, когда начинали считать скалярные и векторные произведения). Величины b_{11}, b_{12}, b_{22} начинают меняться при изменении точки M (а значит и ее криволинейных координат), то есть они являются функциями переменных u и v.

Правая часть в равенстве (1.32) называется *второй квадратичной формой поверхности.*

Получим для коэффициентов второй квадратичной формы другие формулы. Единичный вектор нормали меняется при переходе от точки к точке поверхности, то есть является функцией от переменных u и v, а на кривой γ эти переменные зависят от t, следовательно $\vec{n} = \vec{n}(u(t), v(t))$. Другими словами, вектор $\vec{n}$ тоже вектор-функция. Дифференцируем очевидные тождества $\vec{n}\vec{r}_u = 0$ и $\vec{n}\vec{r}_v = 0$ (орт нормали $\vec{n}$ перпендикулярен касательным векторам).

$$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0; \; \vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0; \; \vec{n}_v\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vv} = 0; \; \vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vu} = 0.$$

Тогда для коэффициентов b_{ij} окончательно получаем

$$\begin{array}{lll} b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u; & b_{12} = -\vec{n}_u\vec{r}_v = -\vec{n}_v\vec{r}_u; & b_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \\ b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu}; & b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv}; & b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} \end{array} \tag{1.33}$$

Теорема 1.11. *Вторая квадратичная форма поверхности равна нулю во всех точках поверхности тогда и только тогда, когда поверхность является плоскостью или ее частью.*

Доказательство. Пусть F – плоскость или ее часть. Выберем прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, чтобы F содержалась в координатной плоскости Oxy. Тогда параметрические уравнения F имеют вид $x = u$, $y = v$, $z = 0$, $(u, v) \in G$. Тогда $\vec{r}_u(1, 0, 0)$, $\vec{r}_v(0, 1, 0)$, $\vec{r}_{uu}(0, 0, 0)$, $\vec{r}_{vv}(0, 0, 0)$, $\vec{r}_{uv}(0, 0, 0)$. Смотрим на определения коэффициентов b_{ij} и видим, что в числителях стоят смешанные произведения векторов, среди которых есть нулевой. Следовательно, все b_{ij} будут нулями.

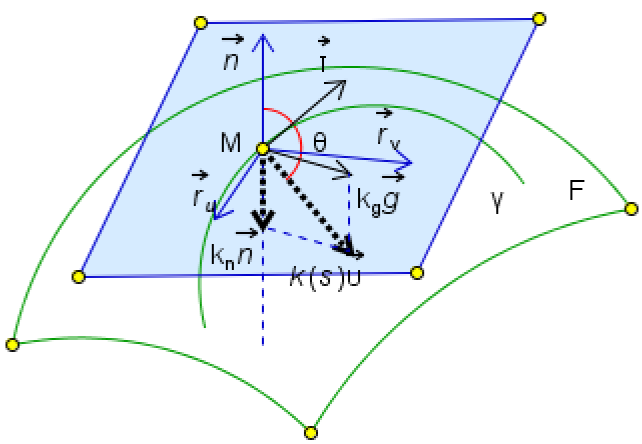
Пусть дана поверхность F, для которой в каждой точке $b_{11} = 0$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$. Тогда из формул (1.33) следует, что векторы $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярны векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ (скалярные произведения нулевые). Кроме того, так как вектор $\vec{n}$ имеет одну и ту же длину в каждой точке (он единичный), в каждой точке он перпендикулярен своим частным производным. Итак, мы получаем, что в каждой точке из промежутка G каждый из векторов $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярен одновременно трем не компланарным векторам. Это векторы $\vec{n}$, $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Следовательно, векторы $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ нулевые. Значит, вектор $\vec{n}$ постоянный. Тогда тождество $\vec{n}d\vec{r} = 0$ можно записать в виде $d(\vec{n}\vec{r}) = 0$, то есть $\vec{n}\vec{r} = c = const$. Обозначим координаты вектора $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ относительно ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = c,$$

где $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ – координаты вектор-функции $\vec{r}(u,v)$, а также координаты (относительно ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) точек поверхности F. Это уравнение плоскости или ее части в зависимости от того, в каком двумерном промежутке меняются (u,v). □

Точки, в которых вторая квадратичная форма обращается в нуль, называются точками *уплощения*. Например, все точки плоскости являются точками уплощения.

7.2. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Пусть гладкая поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. На F гладкая кривая γ задана в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, $s \in I$ в естественной параметризации. Тогда ее векторное параметрическое уравнение будет $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$. Рассмотрим на кривой γ произвольную точку M. Ей соответствует значение параметра s и она, как точка поверхности F, имеет криволинейные координаты (u,v).



Касательный вектор к кривой γ в точке M

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}.$$

Так как $\vec{\tau}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, параллельных касательной плоскости к поверхности F в точке M, то и касательный вектор к кривой γ будет параллелен этой плоскости.

Вторая производная по s радиус-вектора $\vec{r}(u(s), v(s))$ кривой γ будет определять кривизну $k(s)$ и орт главной нормали $\vec{\nu}(s)$ по формуле $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s)$ (см. § 1.3.).

Представим вектор кривизны $k(s)\vec{\nu}(s)$ в виде суммы векторов, один из которых параллелен касательной плоскости в точке M, а второй параллелен нормали к поверхности в этой точке:

$$k(s)\vec{\nu}(s) = \vec{A}(s) + \vec{B}(s),$$

где $\vec{A}(s)$ параллелен касательной плоскости, а $\vec{B}(s) \| \vec{n}(s)$. Так как $\vec{B}(s) \| \vec{n}$, $\vec{B}(s) = k_n \vec{n}$, где k_n – некоторое число (может быть как положительным, так и отрицательным и нулем тоже). Вектор $\vec{A}(s) = k_g \vec{g}$, где $\vec{g}$ – орт вектора $\vec{A}(s)$, то есть число k_g – длина вектора $\vec{A}(s)$ (число неотрицательное).

Число k_n называется *нормальной кривизной* кривой γ в точке M на поверхности F, а число k_g называется *геодезической кривизной* кривой γ в точке M на поверхности F.

Замечание 1.13. Вспомним, что кривизна линии характеризует скорость изменения касательного вектора при движении по этой линии. Представим, что на поверхности F живет двумерное разумное существо. Назовем его Двумерным. Оно не знает про третье пространственное измерение, то есть для него доступна информация только о векторах, параллельных касательным плоскостям. Тогда, двигаясь по кривой γ, расположенной на F, Двумерный будет воспринимать изменение своей скорости только по проекции вектора кривизны на касательную плоскость. Второе слагаемое из кривизны Двумерному недоступно. Для него поверхность F плоская, он не чувствует ее кривизны. Вся информация о кривизне самой поверхности заложена во втором слагаемом, то есть в $k_n\vec{n}(s)$. В нашем курсе мы рассмотрим нормальную кривизну кривой на поверхности, так как она отвечает за искривленность самой поверхности, а геодезическую кривизну, ответственную за искривленность кривой на поверхности мы оставим на спецкурс.

Вторая производная радиус-вектора кривой, лежащей на поверхности уже вычислена (см. формулу (1.30)). Подставляем ее в левую часть последнего равенства.

$$k(s)\vec{\nu}(s) = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Умножим скалярно обе части на орт нормали $\vec{n}$ к поверхности F в точке M и учтем, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

или

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = b_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + b_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{1.34}$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Используем определение скалярного произведения векторов и учтем, что векторы $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{n}$ имеют единичные длины.

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{n} = k(s)\cos\angle(\vec{\nu}(s),\vec{n}) \equiv k(s)\cos\theta.$$

Мы обозначили угол между векторами $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{n}$ (орт вектора нормали в точке M) через θ. Тогда

$$k_n = k(s)\cos\theta.$$

Возвращаясь к формуле (1.34), получаем формулу для вычисления нормальной кривизны кривой на поверхности, если эта кривая задана в натуральной параметризации:

$$k_n = k(s)\cos\theta = b_{11}(u(s),v(s))\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12}(u(s),v(s))\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + b_{22}(u(s),v(s))\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{1.35}$$

Выведем формулу для вычисления нормальной кривизны кривой, если она задана в произвольной параметризации. Имеем параметрические уравнения кривой γ относительно натурального параметра: $u = u(s)$, $v = v(s)$. Если эта кривая задана еще и относительно произвольного параметра t, то мы имеем формулы, связывающие эти два параметра: $s = s(t)$, причем параметрические уравнения кривой γ в произвольной параметризации имеют вид

$$u = u(s(t)) \equiv \tilde{u}(t);\ v = v(s(t)) \equiv \tilde{v}(t). \tag{1.36}$$

Находим производные этих функций по t:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt};\ \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Выражаем из этих формул $\frac{du}{ds}$ и $\frac{dv}{ds}$ и подставляем в (1.35):

$$k_n = \frac{b_{11}(u(s(t)), v(s(t)))\left(\frac{d\tilde{u}}{dt}\right)^2 + 2b_{12}(u(s(t)), v(s(t)))\frac{d\tilde{u}}{dt}\frac{d\tilde{v}}{dt} + b_{22}(u(s(t)), v(s(t)))\left(\frac{d\tilde{v}}{dt}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2};$$

При работе с первой квадратичной формой (вывод формулы для вычисления длины дуги линии на поверхности), мы получили, что

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11}(u(t), v(t))\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}(u(t), v(t))\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}(u(t), v(t))\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Подставляя эту формулу и (1.36) в предыдущую, получим, что нормальная кривизна кривой γ, которая задана параметрическими уравнениями $u = \tilde{u}(t)$, $v = \tilde{v}(t)$ относительно произвольного параметра t вычисляется по формуле

$$k_n = \frac{b_{11}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\left(\frac{d\tilde{u}}{dt}\right)^2 + 2b_{12}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\frac{d\tilde{u}}{dt}\frac{d\tilde{v}}{dt} + b_{22}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\left(\frac{d\tilde{v}}{dt}\right)^2}{\gamma_{11}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\left(\frac{d\tilde{u}}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\frac{d\tilde{u}}{dt}\frac{d\tilde{v}}{dt} + \gamma_{22}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\left(\frac{d\tilde{v}}{dt}\right)^2}.$$

Переходя к дифференциалам, эту формулу обычно записывают в виде

$$k_n = \frac{b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2}{ds^2} = \frac{b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2}{\gamma_{11}du^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}dv^2}. \tag{1.37}$$

Таким образом, нормальная кривизна линии на поверхности в данной точке равна отношению второй квадратичной формы к первой квадратичной форме, вычисленной в данной точке и для дифференциалов du и dv, определяющих касательный вектор линии в этой точке.

7.3. Кривизна нормального сечения поверхности. Выясним, что означают дифференциалы du, dv для данной линии γ в данной точке M. Начинаем опять с того, что поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, линия γ на ней задана в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ будет векторным параметрическим уравнением для кривой γ. Если продифференцировать вектор-функцию $\vec{r}(u(t), v(t))$ по t и вычислить значения производной в точке M (ей соответствует значение параметра t_0), то получим вектор – касательный вектор к кривой γ в точке M:

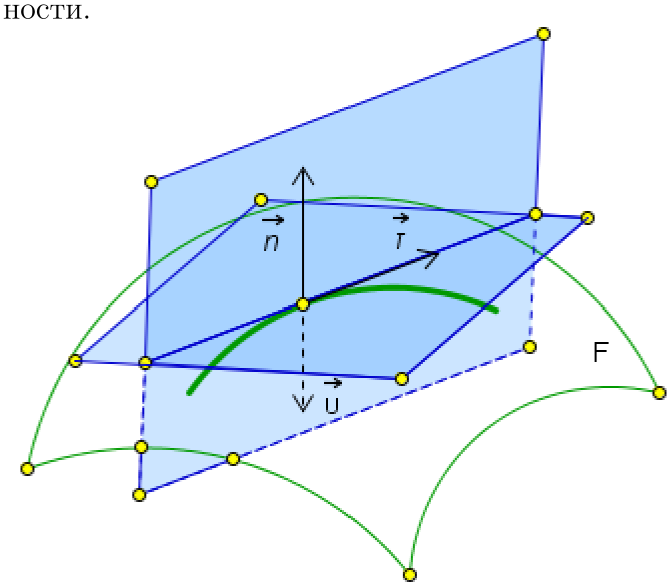
$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}\vec{r}_u + \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}\vec{r}_v,$$

где частные производные вычислены тоже в точке M. Напомним, что упорядоченная пара $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ образует базис касательного пространства и числа $\left(\frac{du}{dt}\Big|_{t=t_0}, \frac{dv}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)$ являются координатами касательного вектора в этом базисе. Теперь сделаем шаг назад. Продифференцируем по t, но подставлять t_0 пока не будем. Тогда для переменной точки M в переменном базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ (меняется при переходе от точки к точке) пара $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ будет координатами касательного вектора. На дифференциал dt мы можем посмотреть как на число, которое меняется при переходе от точки к точке. На него умножим обе координаты $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$. Тогда для каждой точки M получим новый вектор с координатами (du, dv), который будет параллелен прежнему, а значит тоже будет направляющим вектором касательной в переменной точке M. Если точку M фиксировать, то получим направляющий вектор касательной с координатами (du, dv) в этой точке.

Посмотрим на формулу (1.37). В ней под дифференциалами du и dv как раз и понимаются координаты направляющего вектора касательной в точке M. Более того, значение нормальной кривизны зависит только от отношения du к dv (или наоборот). Чтобы в этом убедиться, достаточно разделить числитель и знаменатель дроби на du^2 (или dv^2 в зависимости от того, какая из этих координат гарантированно не нулевая). Другими словами, нормальная кривизна k_n в данной точке M зависит от направления касательной к кривой. Но тогда для всех кривых, проходящих через точку M и имеющих одну и ту же касательную нормальная кривизна будет одной и той же. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.12. *Все линии поверхности, проходящие через данную точку и имеющие в ней общую касательную, имеют в этой точке одинаковую нормальную кривизну.*

Таким образом, при рассмотрении нормальной кривизны линии γ, лежащей на поверхности F, ее можно заменить другой линией поверхности с той же касательной в этой точке поверхности.



Обычно ее заменяют плоской линией γ_0, являющейся пересечением данной поверхности и плоскости, проходящей через данную точку параллельно вектору нормали к поверхности и направляющему вектору касательной к линии γ. Кривая γ_0 называется *нормальным сечением поверхности.*

Для нормального сечения γ_0 орт главной нормали параллелен плоскости нормального сечения и перпендикулярен вектору касательной, следовательно, параллелен вектору нормали к поверхности.

Тогда по формуле (1.35) получаем, что

$$k_n = k(s) \cos \angle(\vec{\nu}(s), \vec{n}) = \pm k_0,$$

где k_0 – кривизна нормального сечения в точке M. Тогда получим

$$k_n = \pm k_0.$$

Мы получили

Теорема 1.13. *Нормальная кривизна, соответствующая данному направлению, с точностью до знака равна кривизне нормального сечения поверхности, определенного данным направлением.*

Следствие 1.2. Кривизна k кривой γ на поверхности F в точке M равна кривизне k_0 нормального сечения γ_0 в этой точке, имеющего с γ общую касательную, деленной на косинус угла между соприкасающейся плоскостью кривой γ и плоскостью нормального сечения (если этот угол отличен от прямого).

Доказательство. По доказанной теореме имеем $k_0 = |k_n|$. С другой стороны, по определению нормальной кривизны получаем $k_n = k\cos\theta$, где $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{\nu})$ в точке M (то есть угол между вектором нормали к поверхности и вектором главной нормали к кривой γ). По определению двугранного угла (так как $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ перпендикулярны касательной) для плоскости нормального сечения и соприкасающейся плоскости кривой γ (касательная для них общая прямая) угол θ будет либо величиной двугранного угла между этими плоскостями, либо величиной смежного с ним угла. Тогда

$$k_0 = |k\cos\theta| = k|\cos\theta|.$$

Так как $|\cos\theta|$ будет равен косинусу угла между плоскостью нормального сечения и соприкасающейся плоскостью кривой, мы получили требуемое утверждение □

Следствие 1.3. Все кривые, проходящие через данную точку поверхности и имеющие общую соприкасающуюся плоскость, имеют одинаковую кривизну в этой точке.

Будем называть доказанную теорему вместе с двумя следствиями *теоремой Менье.*

7.4. Асимптотические линии поверхности. Пусть дана поверхность F векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Фиксируем точку M этой поверхности.

Направление в точке M будем называть *асимптотическим*, если соответствующая ему нормальная кривизна равна нулю.

Выясним, сколько асимптотических направлений может существовать в произвольной точке поверхности F. Рассмотрим кривую γ, проходящую через точку M (например, нормальное сечение). Зададим ее параметрическими уравнениями в криволинейных координатах $u = u(s)$, $v = v(s)$. Тогда касательный вектор к этой кривой $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$ имеет координаты $(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds})$ в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Используем формулу (1.34) для вычисления нормальной кривизны:

$$k_n = b_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + b_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Для краткости обозначим $\frac{du}{ds} = p_1$, $\frac{dv}{ds} = p_2$. Тогда вектор (p_1, p_2) будет иметь асимптотическое направление ($k_n = 0$) тогда и только тогда, когда

$$b_{11}(p_1)^2 + 2b_{12}p_1p_2 + b_{22}(p_2)^2 = 0.$$

Так как p_1 и p_2 одновременно не могут быть нулями, разделим на то из них, которое не нуль. Пусть для определенности это p_2. Тогда мы получим уравнение

$$b_{11}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 + 2b_{12}\frac{p_1}{p_2} + b_{22} = 0. \tag{1.38}$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений (любое $\frac{p_1}{p_2}$ является решением) тогда и только тогда, когда $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$. Точки, в которых вторая квадратичная форма тождественно равна нулю, называются *точками уплощения*. Из этого следует, что M – точка уплощения.

Если M не является точкой уплощения, то уравнение (1.38) является уравнением порядка не выше 2, а значит, может иметь не более двух корней.

Тем самым мы доказали теорему.

Теорема 1.14. *В точке уплощения поверхности любое направление является асимптотическим. Если точка поверхности не является точкой уплощения, то в ней существует не более двух асимптотических направлений.*

Линия на поверхности называется *асимптотической*, если касательная в каждой ее точке имеет асимптотическое направление.

Получим дифференциальное уравнение для асимптотической линии. Пусть линия γ асимптотическая. Тогда в каждой ее точке направление касательной, определяемое парой (du, dv), является асимптотическим ($k_n = 0$). Тогда из формулы (1.37) получим

$$b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2 = 0.$$

Это дифференциальное уравнение, решая которое мы можем получить уравнение вида $u = u(v)$ или $v = v(u)$ для асимптотической линии.

7.5. Индикатриса нормальной кривизны. Как мы видели выше, кривизна любой линии, лежащей на поверхности, может быть вычислена через кривизну нормального сечения. Поэтому для изучения кривизны произвольной линии поверхности достаточно исследовать свойства кривизны всевозможных нормальных сечений поверхности.

Пусть F – гладкая поверхность, заданная векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Зафиксируем на ней точку M. Если M – точка уплощения ($k_n = 0$ в любом направлении), то каждое направление является асимптотическим. Этот случай мы уже изучили. Поэтому предположим, что точка M не является точкой уплощения. В точке M сразу же возникает касательная плоскость и нормаль. В касательной плоскости есть система координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Через нормаль проведем плоскость и будем ее крутить. Каждое положение этой плоскости вырезает в поверхности нормальное сечение, а в касательной плоскости – касательную к этому нормальному сечению. Будем откладывать на этих касательных по обе стороны от точки M отрезки, равные $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, где k_n – нормальная кривизна в точке M, соответствующая этой касательной (напомним, что с точностью до знака – это кривизна нормального сечения). В точках, для которых $k_n = 0$, отрезки не откладываем. Множество концов всех таких отрезков является линией в касательной плоскости. Эта линия называется *индикатрисой нормальной кривизны* или *индикатрисой Дюпена.*

Найдем уравнение индикатрисы Дюпена в системе координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ (вообще говоря, не прямоугольной декартовой). Пусть $P(x, y)$ – произвольная точка касательной плоскости. Тогда она принадлежит индикатрисе Дюпена γ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{MP} = \pm\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\vec{\tau} = \pm\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right).$$

С другой стороны, по определению координат точки в аффинной системе координат получим

$$\overrightarrow{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v.$$

Тогда $\pm\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right) = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v$. В силу линейной независимости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ получим

$$\frac{du}{ds} = \pm\sqrt{|k_n|}x;\ \frac{dv}{ds} = \pm\sqrt{|k_n|}y.$$

Подставим эти выражения в формулу (1.34) (напомним, что ее левую часть мы обозначили k_n и назвали нормальной кривизной). Тогда получим

$$k_n = b_{11}|k_n|x^2 + 2b_{12}|k_n|xy + b_{22}|k_n|y^2.$$

Раскрывая модуль в правой части уравнения и сокращая на k_n (которое мы предполагаем отличным от нуля), получим

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1.$$

Это уравнение линии второго порядка. Мы знаем девять видом линий второго порядка (эти девять видов разбиваются на три типа: эллиптический, гиперболический и параболический). Выясним, какими из них может быть индикатриса Дюпена. Во-первых, заметим, что по построению индикатрисы Дюпена точка M является ее центром. Во-вторых, этот центр не принадлежит самой индикатрисе, так как величина $\frac{1}{|k_n|}$ всегда отлична от нуля. В-третьих, индикатриса не пустое множество, так как направлений, в которых нормальная кривизна k_n равна нулю не более двух (асимптотические направления).

1) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 > 0$ – линия эллиптического типа (это может быть эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых). Так как индикатриса имеет вещественные точки, мнимый эллипс отпадает. Так как центр индикатрисы не может принадлежать ей, отпадает пара мнимых пересекающихся прямых. Таким образом, в этом случае остается только эллипс. Обратим внимание, что индикатриса Дюпена задается двумя уравнениями. Одно из этих уравнений и будет уравнением эллипса. Второе будет задавать пустое множеств точек (иначе это

должен быть эллипс, не совпадающий с первым эллипсом и центром в точке M. Но тогда на каждом луче, выходящем из точки M, будет по две точки, для которых расстояние от точки M равно $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$. Это противоречие.) Точка M называется *эллиптической точкой*. В частности, если индикатриса является окружностью, то точка M называется *омбилической* или *шаровой*.

2) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 < 0$ – линия гиперболического типа (это может быть гипербола или пара пересекающихся прямых). Пара пересекающихся прямых отпадает, так как центр индикатрисы не принадлежит ей. Остается гипербола. Опять получаем два уравнения (они отличаются только свободным членом). Каждое из них будет задавать гиперболу. Асимптотические направления и асимптоты гиперболы не зависят от свободного члена, следовательно, для этих гипербол одни и те же. В этом случае точка M называется *гиперболической*.

3) если $\Delta = b_{11}b_{12} - b_{12}^2 = 0$ – линия параболического типа (это может быть парабола, пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых, пара совпавших прямых). Парабола не подходит, так как у нее нет центра. Пара мнимых параллельных прямых не имеет вещественных точек. Пара совпавших прямых проходит через точку M. Поэтому остается только пара параллельных прямых. В этом случае точка M называется *параболической точкой*.

Теорема 1.15. *Направление в данной точке поверхности является асимптотическим тогда и только тогда, когда оно является асимптотическим относительно индикатрисы Дюпена в этой точке.*

Доказательство. Пусть в точке M поверхности F направление будет асимптотическим. Тогда нормальная кривизна в этом направлении будет равна нулю. Тогда касательная, имеющая это направление, не пересекается с индикатрисой Дюпена, то есть является асимптотой. Тогда ее направление будет асимптотическим относительно индикатрисы Дюпена.

Обратно, пусть направление является асимптотическим относительно индикатрисы. Тогда в этом направлении нет точки индикатрисы, то есть нормальная кривизна в этом направлении была нулевой. Тогда это направление асимптотическое по определению. □

§1.8. Главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности.

8.1. Главные направления поверхности. Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Главными направлениями в точке M поверхности F называются главные направления относительно индикатрисы Дюпена поверхности F в точке M.

Напомним, что направление называется главным относительно линии второго порядка, если оно сопряжено перпендикулярному. Условие сопряженности двух направлений $\vec{p}(p_1, p_2)$ и $\vec{q}(q_1, q_2)$ относительно линии второго порядка γ: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Возвращаемся к поверхности F в точку M. Получим уравнение для нахождения главных направлений относительно индикатрисы Дюпена. Напомним, что индикатриса Дюпена расположена в касательной плоскости и ее уравнение записано относительно аффинной системы координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Рассмотрим два направления (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$, то есть два вектора

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \; \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v.$$

Они будут главными тогда и только тогда, когда они 1) перпендикулярны (их скалярное произведение равно нулю), то есть

$$(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = 0$$

и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена

$$b_{11} du \delta u + b_{12} du \delta v + b_{12} dv \delta u + b_{22} dv \delta v = 0. \tag{1.39}$$

Используя определение первой квадратичной формы, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} du \delta v + \gamma_{12} dv \delta u + \gamma_{22} dv \delta v = 0 \\ b_{11} du \delta u + b_{12} du \delta v + b_{12} dv \delta u + b_{22} dv \delta v = 0. \end{cases}$$

Посмотрим на эту систему как на систему двух линейных уравнений с неизвестными δu, δv. Так как для любой линии второго порядка всегда существуют главные направления (для окружности любое направление главное, а для остальных линий существует два и только два главных направления), эта система уравнений всегда имеет ненулевое решение δu, δv, а значит, ее определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} du + \gamma_{12} dv & \gamma_{12} du + \gamma_{22} dv \\ b_{11} du + b_{12} dv & b_{12} du + b_{22} dv \end{vmatrix} = 0.$$

Это необходимое и достаточное условие того, что направление $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ является главным направлением.

Теорема 1.16**.** *(Родрига) Направление $d\vec{r}$ в данной точке поверхности будет главным тогда и только тогда, когда*

$$d\vec{n} = -k_n d\vec{r},$$

где $d\vec{n}$ – дифференциал единичного вектора нормали поверхности, соответствующий направлению $d\vec{r}$, k_n – нормальная кривизна по направлению $d\vec{r}$.

Доказательство. Рассмотрим условие сопряженности направлений $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ (см. формулу (1.39)). Подставляя в него выражения для коэффициентов второй квадратичной формы (см. формулу (1.33)), мы можем записать его в двух видах

$$\vec{n}_u \vec{r}_u du \delta u + \vec{n}_v \vec{r}_u du \delta u + \vec{n}_u \vec{r}_v dv \delta u + \vec{n}_v \vec{r}_v dv \delta v = 0; \quad \vec{n}_u \vec{r}_u du \delta u + \vec{n}_u \vec{r}_v du \delta u + \vec{n}_v \vec{r}_u dv \delta u + \vec{n}_v \vec{r}_v dv \delta v = 0.$$

Группируя слагаемые, получим

$$\vec{n}_u \delta u(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) + \vec{n}_v \delta v(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = 0; \quad \vec{n}_u du(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) + \vec{n}_v dv(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = 0$$

или

$$(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u \delta u + \vec{n}_v \delta v) = 0; \quad (\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = 0$$

или

$$d\vec{r}\delta\vec{n} = 0; \quad \delta\vec{r}d\vec{n} = 0. \tag{1.40}$$

Итак, мы получили еще два эквивалентных вида записи условия сопряженности направлений $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$.

Пусть $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ – различные главные направления поверхности F в данной точке M. Тогда они перпендикулярны (следовательно, образуют базис направляющего пространства касательной плоскости) и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена в этой точке. Так как вектор $\vec{n}$ во всех точках поверхности F имеет единичную длину (является вектором постоянной длины), его частные производные $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ перпендикулярны $\vec{n}$, а значит, и вектор $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ перпендикулярен $\vec{n}$. Следовательно, вектор $d\vec{n}$ в каждой точке поверхности параллелен касательной плоскости в этой точке. В частности, это выполняется в точке M. Тогда вектор $d\vec{n}$ можно разложить по векторам $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$.

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r} + \mu\delta\vec{r},$$

где λ и μ – некоторые вещественные числа. Умножим скалярно обе части этого равенства на $\delta\vec{r}$. Учитывая равенство (1.40), получим

$$0 = \mu(\delta\vec{r})^2.$$

Так как вектор $\delta\vec{r}$ не нулевой, $\mu = 0$. Тогда

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $d\vec{r}$

$$d\vec{n}d\vec{r} = \lambda(d\vec{r})^2.$$

Вспоминаем, что скалярный квадрат вектора $d\vec{r}$ – это первая квадратичная форма. С другой стороны, из тождества $\vec{n}d\vec{r} = 0$ (вектор нормали к поверхности перпендикулярен вектору, параллельному касательной плоскости) следует, что $d(\vec{n}d\vec{r}) = 0$ или (правило Лейбница) $d\vec{n}d\vec{r} + \vec{n}d^2\vec{r} = 0$, то есть $d\vec{n}d\vec{r} = -\vec{n}d^2\vec{r}$. Последнее скалярное произведение есть вторая квадратичная форма. Тогда число λ есть отношение второй и первой квадратичных форм со знаком минус. А это отношение есть нормальная кривизна, то есть

$$\lambda = \frac{d\vec{n}d\vec{r}}{(d\vec{r})^2} = -\frac{\vec{n}d^2\vec{r}}{(d\vec{r})^2} = -k_n.$$

Обратно, пусть для направления $d\vec{r}$ в точке M выполняется равенство из условия теоремы. Рассмотрим направление $\delta\vec{r}$, параллельное касательной плоскости и перпендикулярное направлению $d\vec{r}$. Умножим скалярно равенство $d\vec{n} = -k_n d\vec{r}$ на вектор $\delta\vec{r}$. Тогда в правой части получим нуль из-за перпендикулярности направлений. Следовательно, $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$. Согласно (1.40) это означает, что направления $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ сопряжены. Получаем, что направление $d\vec{r}$ является главным по определению. □

Линия на поверхности, касательная к которой в каждой точке имеет главное направление, называется *линией кривизны.*

Равенство, которое мы получили как критерий главного направления, можно рассматривать как дифференциальное уравнение, задающее линии кривизны на поверхности.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv & \gamma_{12}du + \gamma_{22}dv \\ b_{11}du + b_{12}dv & b_{12}du + b_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение мы получаем уравнение линий кривизны в виде $u = u(v)$ или $v = v(u)$.

Если точка поверхности не является точкой уплощения или омбилической точкой, то через нее проходят две и только две линии кривизны, причем они взаимно перпендикулярны.

Для точки уплощения любое направление будет асимптотическим и индикатриса Дюпена для такой точки не определена. Поэтому будем по определению считать любую линию, проходящую через точку уплощения, линией кривизны. Для омбилической точки (индикатриса Дюпена – окружность) любое направление будет главным и в каждом направлении будет проходить линия кривизны.

8.2. Главные кривизны.Нормальные кривизны, соответствующие главным направлениям поверхности в данной точке, называются *главными кривизнами.*

Получим уравнение для нахождения главных кривизн. Фиксируем на поверхности F точку M. Будем искать главные кривизны в этой точке. Воспользуемся теоремой Родрига. Пусть $d\vec{r}$ – главное направление в точке M. Обозначим соответствующую ему нормальную кривизну через k (вместо стандартного обозначения k_n). Тогда по теореме Родрига получим $d\vec{n} = -kd\vec{r}$. В развернутом виде это равенство имеет вид

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -k(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv).$$

Умножим скалярно обе части этого равенства сначала на вектор $\vec{r}_u$, а потом на вектор $\vec{r}_v$ и воспользуемся формулами для коэффициентов первой и второй квадратичных форм

$$\begin{aligned} b_{11}du + b_{12}dv &= k(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv) \\ b_{12}du + b_{22}dv &= k(\gamma_{12}du + \gamma_{22}dv). \end{aligned}$$

Рассматривая эти равенства как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных du, dv (они задают главное направление), получаем, что эта система должна иметь ненулевое решение (так как главные направления всегда есть). Это означает, что определитель этой системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{12} - k\gamma_{12} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

В развернутом виде это уравнение принимает вид

$$k^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.41}$$

Главные кривизны k_1 и k_2 являются решениями этого уравнения.

Теорема 1.17. *(Эйлер) Нормальная кривизна k_n, соответствующая произвольному направлению $d\vec{r}$ поверхности, выражается через главные кривизны k_1 и k_2 формулой*

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ – угол между направлением $d\vec{r}$ и направлением $d_1\vec{r}$, которому соответствует кривизна k_1. Эта формула называется формулой Эйлера.

Доказательство. Выберем криволинейные координаты (u, v) так, чтобы они являлись линиями кривизны поверхности (это можно сделать, так как через каждую точку проходит две линии кривизны). Тогда направления $(du, 0)$ и $(0, dv)$ будут главными направлениями. так как эти направления взаимно перпендикулярны, получим

$$0 = (\vec{r}_u du)(\vec{r}_v dv) = \gamma_{12} du dv.$$

Так как du и dv не нули, получаем, что в выбранных криволинейных координатах коэффициент γ_{12} первой квадратичной формы будет равен нулю.

Аналогичным образом из условия сопряженности направлений $(d_1u, 0)$ и $(0, d_2v)$ получим

$$b_{12} d_1u d_2v = 0.$$

Откуда получаем, что $b_{12} = 0$. Таким образом, в криволинейных координатах, в которых линии u и v являются линиями кривизны, первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$I = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2;\ II = b_{11}(du)^2 + b_{22}(dv)^2.$$

При этом главные кривизны k_1 и k_2 соответствуют в данном случае направлениям $(d_1u, 0)$ и $(0, d_2v)$ и вычисляются по формулам

$$k_1 = \frac{b_{11}(d_1u)^2}{\gamma_{11}(d_1u)^2} = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}};\ k_2 = \frac{b_{22}(d_2v)^2}{\gamma_{22}(d_2v)^2} = \frac{b_{22}}{\gamma_{22}}$$

Формула для вычисления нормальной кривизны в произвольном направлении $d\vec{r}(du, dv)$ имеет вид

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Запишем это выражение в виде

$$k_n = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}} \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} + \frac{b_{22}}{\gamma_{22}} \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} = k_1 \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2} + k_2 \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}. \tag{1.42}$$

Вычислим косинус угла между направлениями $d\vec{r}(du, dv)$ и $(d_1u, 0)$ (обозначим этот угол φ). Имеем, учитывая, что $\gamma_{12} = 0$,

$$\cos^2 \varphi = \frac{((\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u d_1u))^2}{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 (\vec{r}_u d_1u)^2} = \frac{\gamma_{11}^2 (du)^2 (d_1u)^2}{(\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2)\gamma_{11}(d_1u)^2} = \frac{\gamma_{11}(du)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Тогда

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{\gamma_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{22}(dv)^2}.$$

Подставляя полученные равенства в (1.42), получим формулу Эйлера. □

Следствие 1.4. Главные кривизны есть наибольшее и наименьшее значения среди всех нормальных кривизн в данной точке поверхности.

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи для главных кривизн k_1 и k_2:

1) $k_1 = k_2$. Тогда по формуле Эйлера $k_n = k_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = k_1$. Таким образом, если главные кривизны в точке равны между собой, то им равны и все нормальные кривизны в этой точке (это значит, что точка омбилическая). Формально мы можем назвать в этом случае k_1 и k_2 наименьшей и наибольшей нормальной кривизной (наименьшее совпадает с наибольшем).

2) $k_1 < k_2$. Тогда, заменив $\cos^2\varphi$ на $1 - \sin^2\varphi$, запишем формулу Эйлера в виде

$$k_n = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\varphi. \tag{1.43}$$

Второе слагаемое правой части этого равенства строго положительно. Оно принимает наименьшее значение 0 при $\varphi = 0$ и наибольшее значение $k_2 - k_1$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда наименьшее значение правой части равенства равно k_1, а наибольшее равно k_2. Все остальные нормальные кривизны расположены между этими значениями.

3) $k_1 > k_2$. Тогда из формулы (1.43) получаем, что в ее правой части второе слагаемое отрицательно. При этом наибольшее значение правой части соответствует значению $\varphi = 0$, то есть $k_n = k_1$, а наименьшее – значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть $k_n = k_2$. Опять получаем, что k_1 и k_2 наибольшее и наименьшее из значений всех возможных нормальных кривизн. □

8.3. Полная и средняя кривизна. Произведение главных кривизн поверхности в данной точке называется полной кривизной поверхности в этой точке:

$$K = k_1 k_2.$$

Так как k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения (1.41), по теореме Виета получим

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

В знаменателе стоит число $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2$, то есть число положительное, знак полной кривизны K совпадает со знаком числа $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$. А это число есть число Δ для индикатрисы Дюпена в данной точке. Из этого получаем:

1) точка является эллиптической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней больше нуля ($K > 0$);

2) точка является гиперболической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней меньше нуля ($K < 0$);

3) точка является параболической тогда и только тогда, когда полная кривизна в ней равна нулю.

Поверхность, во всех точках которой полная кривизна $K = 0$, называется *развертывающейся*.

Это название связано с тем, что каждый достаточно малый кусок такой поверхности можно деформировать посредством изгибания (то есть сохраняя длины всех линий) в кусок плоскости (то есть развернуть на плоскость). Благодаря такому свойству развертывающиеся поверхности находят широкое применение в технике, поскольку их удобно изготовлять из листового материала (путем надлежащего изгибания плоских листов).

Примерами развертывающихся поверхностей являются цилиндрические и конические поверхности (мы докажем это на семинаре, вычислив их полную кривизну).

Поверхность, в каждой точке которой полная кривизна $K = const$ (то есть одна и та же), называются поверхностями постоянной кривизны.

Примерами поверхностей постоянной кривизны являются сфера и псевдосфера.

Полусумма главных кривизн поверхности в данной точке называется *средней кривизной* поверхности в этой точке.

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

По теореме Виета из уравнения (1.41) получим

$$H = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Название „средняя кривизна“ оправдывается следующим фактом, непосредственно вытекающим из формулы Эйлера: полусумма нормальных кривизн, соответствующих произвольной паре ортогональных направлений, равна средней кривизне поверхности. Действительно,

$$\frac{1}{2}(k_\varphi + k_{\varphi+\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2}(k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi + k_1\cos^2(\varphi + \frac{\pi}{2}) + k_2\sin^2(\varphi + \frac{\pi}{2})) =$$
$$= \frac{1}{2}(k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi + k_1\sin^2\varphi + k_2\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Поверхность, средняя кривизна в каждой точке которой равна нулю, называется *минимальной поверхностью*.

Свойства минимальных поверхностей:

1. Полная кривизна минимальных поверхностей отрицательна.

Действительно, из равенства $0 = H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ получаем, что $k_1 = -k_2$ и $K = k_1k_2 = -(k_1)^2 < 0$.

2. Асимптотические линии минимальной поверхности ортогональны.

Действительно, для минимальной поверхности имеем $k_1 = -k_2$. Тогда по формуле Эйлера

$$k_n = k_1\cos^2\varphi - k_1\sin^2\varphi = k_1\cos 2\varphi.$$

Для асимптотических линий $k_n = 0$. Тогда получим $k_1\cos 2\varphi = 0$. Так как мы исключили из рассмотрения точки уплощения ($k_1 = k_2 = 0$), то из этого следует, что $\cos 2\varphi = 0$. Это уравнение имеет два корня (мы рассматриваем углы от нуля до π) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Другими словами, направление будет асимптотическим ($k_n = 0$) тогда и только тогда, когда угол между ним и одним из главных (k_1) равен $\frac{\pi}{4}$ (или $\frac{3\pi}{4}$). Между этими асимптотическими направлениями угол будет равен $\frac{\pi}{2}$.

3. (без доказательства) Пусть дана поверхность F конечной площади $S(F)$, ограниченная пространственной кривой γ. Если F имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, ограниченных кривой γ, то во всех точках поверхности F средняя кривизна $H = 0$.

Другими словами, поверхность, натянутую на кривую γ и имеющую наименьшую площадь, нужно искать среди минимальных поверхностей. Этим и объясняется название минимальная.

2. Семинары.

§2.1. Вектор-функция скалярного аргумента.

1.1. Сведения из теории. *Вектор-функция* – это отображение, которое каждому числу t из некоторого числового промежутка U ставит в соответствие вектор, который обозначается $\vec{r}(t)$. Обозначение вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $\vec{r}(t)$ или $\vec{r}$ (по аналогии с обозначениями из математического анализа для функций: $y = f(x)$ или $f(x)$ или f).

Если фиксирована прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то у вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ появляются координаты – это три скалярные функции, определяемые равенством

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Производная $\vec{r}\,'(t_0)$ (или $\frac{d\vec{r}}{dt}|_{t_0}$) вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Если посчитать производную вектор-функции в каждой точке некоторого интервала $I \subset U$, то получим новую вектор-функцию $\vec{r}\,'(t)$, которая называется производной вектор-функции $\vec{r}(t)$.

На практике этим определением пользоваться почти не будем. Большую часть вычислений производных вектор-функций будем сводить к вычислению производных их координат

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Для производных 2-го и далее порядков все аналогично.

Правила дифференцирования

1. (сумма вектор-функций)

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1)' + (\vec{r}_2)';$$

2. (скалярное произведение вектор-функций)

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)' = (\vec{r}_1)'\vec{r}_2 + \vec{r}_1(\vec{r}_2)';$$

3. (векторное произведение вектор-функций)

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [(\vec{r}_1)', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, (\vec{r}_2)'];$$

4. (произведение скалярной функции на вектор-функцию) Здесь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, $f(t)$ – скалярная функция

$$(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f(\vec{r})';$$

Правили дифференцирования разных видов произведений (пункты 2,3, 4 будем называть правилом Лейбница.

5. (сложная функция) Здесь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – вектор-функция, $t = \varphi(\tau)$ – скалярная функция

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r}(\varphi(\tau))\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

1.2. Задачи.

1. Разобрать доказательства, оставленные в лекции.

2. **[Г], стр.214** Пусть дана вектор-функция

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sin^2 t\vec{j} - \cos^2 t\vec{k},\ t \in [0, 2\pi).$$

Докажите, что вектор $\vec{r}''(t)$ параллелен плоскости Oyz при всех значениях $t \in [0, 2\pi)$. Найдите вектор, которому будет параллелен вектор $\vec{r}''(t)$ при всех значениях $t \in [0, 2\pi)$.

Решение. Находим производную вектор-функции „по-координатно“ . Сначала первую производную:

$$\vec{r}'(t) = 1\vec{i} + 2\sin t\cos t\vec{j} + 2\cos t\sin t\vec{k} = 1\vec{i} + \sin 2t\vec{j} + \sin 2t\vec{k}.$$

Затем еще раз дифференцируя, находим вторую производную:

$$\vec{r}''(t) = 0\vec{i} + 2\cos 2t\vec{j} + 2\cos 2t\vec{k}.$$

Списываем координаты вектора $\vec{r}''(t)(0, 2\cos 2t, 2\cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Фиксируем произвольное $t \in [0, 2\pi)$ и найдем скалярное произведение вектора $\vec{r}''(t)$ и вектора $\vec{i}(1, 0, 0)$. Так как у нас фиксирована прямоугольная система координат, а значит ее базис является ортонормированным, и скалярное произведение векторов вычисляется через их координаты по формуле $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$:

$$\vec{r}''(t)\vec{i} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2\cos 2t + 0 \cdot 2\cos 2t = 0.$$

Так как плоскость Oyz перпендикулярна вектору $\vec{i}$ и вектор $\vec{r}''(t)$ перпендикулярен вектору $\vec{i}$, получаем, что вектор $\vec{r}''(t)$ параллелен плоскости Oyz.

Напомним, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Посмотрим на вектор $\vec{r}''(t)(0, 2\cos 2t, 2\cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$ – произвольное фиксированное число. Если мы попали на такое t, что $\cos 2t = 0$ (чему равны такие t?), то вектор $\vec{r}''(t) = \vec{0}$. Такой вектор параллелен любому вектору (по определению). Если мы выбрали t, для которого $\cos 2t \neq 0$, то вектор $\vec{r}''(t)$ будет параллелен вектору $\vec{a}(0, 1, 1)$ (из-за пропорциональности координат). Объединяем оба случая и получаем, что для любого $t \in [0, 2\pi)$ вектор $\vec{r}''(t)$ параллелен вектору $\vec{a}(0, 1, 1)$. □

3. **[Г], стр.217** Пусть дана вектор-функция $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi)$. Докажите, что 1) $\vec{r}'(t) = \vec{r}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\vec{r}''(t) = -\vec{r}(t)$.

Решение. Находим производные и пользуемся формулами приведения:

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} = \cos\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)\vec{j}; \quad \vec{r}\,''(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.$$

Смотрим на полученные равенства и видим, что мы получаем требуемые соотношения. □

4. **[Г], стр. 216** Найдите производные функций: 1) $|\vec{r}|(t)$, 2) $(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,'')(t)$.

Решение. Вспоминаем, какие правила дифференцирования у нас есть: суммы вектор-функций, произведения вектор-функции на обычную функцию, скалярное произведение и векторное произведение вектор-функций. Поэтому нужно выразить то, что нам дано через эти четыре операции с вектор-функциями:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}(t).$$

Заметим, что $(\vec{r}\vec{r})(t)$ (скалярное произведение двух вектор-функций) – это обычная функция и взять производную от нее в степени $\frac{1}{2}$ мы можем по обычным правилам математического анализа. Имеем

$$|\vec{r}|'(t) = \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r})^{-\frac{1}{2}}(t)(\vec{r}\vec{r})'(t) = \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r})^{-\frac{1}{2}}(t)(\vec{r}\,'(t)\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\vec{r}\,'(t)) = \frac{1}{2|\vec{r}(t)|}2(\vec{r}\vec{r}\,')(t) = \frac{(\vec{r}\vec{r}\,')(t)}{|\vec{r}(t)|}.$$

Далее, напомним, что смешанное произведение векторов определяется так: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$ (векторно умножаем первые два вектора и полученный вектор скалярно умножаем на третий вектор). Тогда

$$(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,'')'(t) = ([\vec{r}, \vec{r}\,']\vec{r}\,'')'(t) = ([\vec{r}, \vec{r}\,']'\vec{r}\,'' + [\vec{r}, \vec{r}\,']\vec{r}\,''')(t) = ([\vec{r}\,', \vec{r}\,']\vec{r}\,'' + [\vec{r}, \vec{r}\,'']\vec{r}\,'' + [\vec{r}, \vec{r}\,']\vec{r}\,''')(t) =$$
$$= (0 + 0 + [\vec{r}, \vec{r}\,']\vec{r}\,''')(t) = (\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,''')(t).$$

Здесь мы воспользовались тем, что векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нуль-вектору, то есть $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'](t) = \vec{0}$, и тем, что каждый из векторов векторного произведения перпендикулярен векторному произведению, то есть $\vec{r}\,'' \perp [\vec{r}, \vec{r}\,'']$ и их скалярное произведение равно нулю. □

5. **[Г], стр. 217, 6.7** Дана вектор-функция $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$, где a, b – постоянные числа. Доказать, что длина вектора $\vec{r}\,''(t)$ постоянна при всех значениях t.

Решение. Чтобы найти длину вектора $\vec{r}\,''(t)$, надо сначала найти его самого:

$$\vec{r}\,'(t) = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}; \quad \vec{r}\,''(t) = -a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j}.$$

Получаем координаты вектора $\vec{r}\,''(t)(-a\cos t, -a\sin t, 0)$. Так как базис ортонормированный, формула для вычисления длины вектора через его координаты имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$. Применяем ее к вектору $\vec{r}\,''(t)(-a\cos t, -a\sin t, 0)$.

$$|\vec{r}\,''(t)| = \sqrt{(-a\cos t)^2 + (-a\sin t)^2} = |a|.$$

Мы получили константу. Она не зависит от t, то есть длина вектора $\vec{r}\,''(t)$ постоянна. □

1.3. Домашнее задание.

1. ([Г], стр. 216, 6.3(а,в,г,е)) Вычислите производные функций 1) $\vec{r}\vec{r}$, 2) $\vec{r}\,'\vec{r}\,''$, 3) $[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']$, 4) $\sqrt{[\vec{r},\vec{r}\,']^2}$.

   Ответ. 1) $2\vec{r}\vec{r}\,'$; 2) $\vec{r}\,''\vec{r}\,''+\vec{r}\,'\vec{r}\,'''$; 3) $[\vec{r}\,',\vec{r}\,''']$; 4) $\frac{[\vec{r},\vec{r}\,']}{\sqrt{[\vec{r},\vec{r}\,']^2}}[\vec{r}\vec{r}\,'']$.

2. ([Г], стр. 217, 6.6 (в,г)) Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$, $t\in[0,2\pi)$. Доказать, что 1) $\vec{r}\,'''(t)=-\vec{r}\,'(t)$, 2) $\vec{r}\,'''\vec{r}\,'=-1$.

3. ([Г], стр. 217, 6.8) Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$, где a – постоянное число, $t\in[0,2\pi)$. Проверьте справедливость равенств для любого $t\in[0,2\pi)$: 1) $\vec{r}^{\,2}=(\vec{r}\,'')^2$, 2) $|\vec{r}\,'(t)|=|\vec{r}\,'''(t)|$, 3) $\vec{r}(t)+\vec{r}\,'(t)+\vec{r}\,''(t)+\vec{r}\,'''(t)=\vec{0}$, 4) $\vec{r}(t)\vec{r}\,''(t)=\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,'''(t)$.

1.4. Дополнительные задачи.

1. **[Г]6.9** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t)=\sin 2t\vec{i}+(1-\cos 2t)\vec{j}+2\cos t\vec{k}$, $t\in[0,2\pi)$ лежит на сфере. Найдите радиус сферы.

   Решение. Сначала объясним, что такое траектория вектор-функции. На данный момент в векторном пространстве выбран ортонормированный базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ относительно которого и задана вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in U$. Возьмем в точечном пространстве E^3 точку O и фиксируем ее. В результате в E^3 получим прямоугольную декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Пусть значение параметра t меняется в промежутке U, тогда вектор-функция $\vec{r}(t)$ для каждого t выдает определенный вектор. Будем откладывать представитель этого вектора от точки O – начала системы координат. Конец представителя каждого из векторов определит точку. Множество всех таких точек называется *траекторией вектор-функции*. Другими словами, представляем себе стрелку, выходящую из начала координат. При изменении t она будет двигаться и своим концом будет описывать траекторию вектор-функции $\vec{r}(t)$.

   Возвращаемся к задаче. Точки кривой будут лежать на сфере тогда и только тогда, когда длина вектора $\vec{r}(t)$ одна и та же при всех значениях t. Фиксируем произвольное $t\in[0,2\pi)$ и вычисляем длину получившегося вектора

   $$|\vec{r}(t)|=\sqrt{\sin^2 2t+(1-\cos 2t)^2+4\cos^2 t}=\sqrt{2-2\cos 2t+4\cos^2 t}=\sqrt{2-2(2\cos^2 t-1)+4\cos^2 t}=2.$$

   Итак, длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, следовательно, точки кривой лежат на сфере. Длина этого вектора есть радиус сферы, то есть радиус сферы равен 2. □

2. **[Г]6.13** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t)=\cos t\vec{p}+\sin t\vec{q}+\vec{r}_0$, есть эллипс, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны и отрезок прямой, если коллинеарны.

   Решение. Рассмотрим случай, когда $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны. Попробуем представить себе траекторию заданной вектор-функции. От точки O нужно пройти по постоянному вектору

$\vec{r}_0$ до точки, которую мы обозначим M_0, а затем двигаться по различным линейным комбинациям векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, доходя до точек M данной траектории. Из этого сразу видим, что траектория данной вектор-функции лежит в плоскости, которая определяется точкой M_0 и парой векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Обозначим ее через α. В этой плоскости введем аффинную систему координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Траектория – это множество точек, а множество точек, в случае наличия системы координат, можно задать уравнением (неравенством, их системой или совокупностью). Напишем уравнение траектории в аффинной системе координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Для обозначения координат в ней нам нужны две буквы. Возьмем греческие буквы ξ и η. По определению координат точки в аффинной системе координат, чтобы найти эти координаты, нам нужно разложить радиус-вектор $\overrightarrow{M_0M}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}.$$

Найдем вектор $\overrightarrow{M_0M}$. У нас есть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Ее значения при каждом t – это радиус-векторы точки M относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то есть вектор $\overrightarrow{OM}$. Кроме того, вектор $\vec{r}_0$ – это радиус-вектор точки M_0. Тогда

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \vec{r}_0 = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q} + \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = \cos t\vec{p} + \sin t\vec{q}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получаем, что

$$\xi = \cos t;\ \eta = \sin t.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Это уравнение траектории в аффинной системе координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$ (буквы ξ и η играют здесь роль x и y). Первый порыв сказать, что это уравнение окружности. Но это не так. Такой вид уравнение окружности имеет только в прямоугольной декартовой системе координат, а у нас аффинная. Поэтому мы пока только можем сказать, что это линия второго порядка. Линия эллиптического типа (почему?) Пользуемся классификацией линий второго порядка: линий эллиптического типа три – эллипс, мнимый эллипс и пара мнимых пересекающихся прямых. Наше множество не может быть мнимым эллипсом, так как содержит вещественные точки (например, точку $(0,1)$). Так же не может быть парой мнимых пересекающихся прямых, так как ее центр $(0,0)$ ей не принадлежит (а у пары мнимых пересекающихся прямых принадлежит). Поэтому мы получили эллипс.

Постарайтесь самостоятельно разобраться со случаем коллинеарности векторов. □

3. **[Г] 6.14** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = \pm \operatorname{ch} t\vec{p} + \operatorname{sh} t\vec{q} + \vec{r}_0$, есть гипербола, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

4. **[Г] 6.15** Докажите, что траектория, описываемая вектор-функцией $\vec{r}(t) = t\vec{p} + t^2\vec{q} + \vec{r}_0$, есть парабола, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны и прямая, если коллинеарны.

§2.2. Гладкие линии. Длина дуги. Натуральный параметр.

2.1. Сведения из теории. Пусть гладкая линия γ в трехмерном евклидовом пространстве E^3 задана с помощью векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I,$$

где I – интервал из области определения вектор-функции $\vec{r}(t)$. Чтобы кривая была гладкой, вектор-функция $\vec{r}(t)$ должна иметь все производные по t в каждой точке $t \in I$ и, кроме того, в каждой точке $t \in I$ вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

Если в E^3 фиксировать прямоугольную декартову систему координат, то кривая γ будет задаваться параметрическими уравнениями

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t),\ t \in I.$$

Гладкость кривой означает, что функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют все производные по t для каждого $t \in I$ и первые производные $x'(t), y'(t), z'(t)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке $t \in I$.

Кривая γ может быть задана в неявном виде, как система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Чтобы показать, что эта система уравнений в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ задает гладкую кривую, нужно:

1) проверить, что функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ имеют частные производные всех порядков по всем переменным;

2) посчитать значения первых частных производных функций $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ в точке M_0, составить из них матрицу
$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}$$
и проверить, что ее ранг равен 2.

3) если точка M_0 не указана, то вычислить частные производные по x, y, z и составить из них матрицу; выяснить, в каких точках ранг этой матрицы будет меньше 2 и выкинуть эти точки. Для остальных точек пространства E^3 будут существовать окрестности, в которых данная система уравнений задает гладкую кривую.

Пусть кривая γ задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Длина ее дуги от точки со значением параметра t_1 до точки со значением параметра t_2 вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Натуральным параметром линии называется длина ее дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

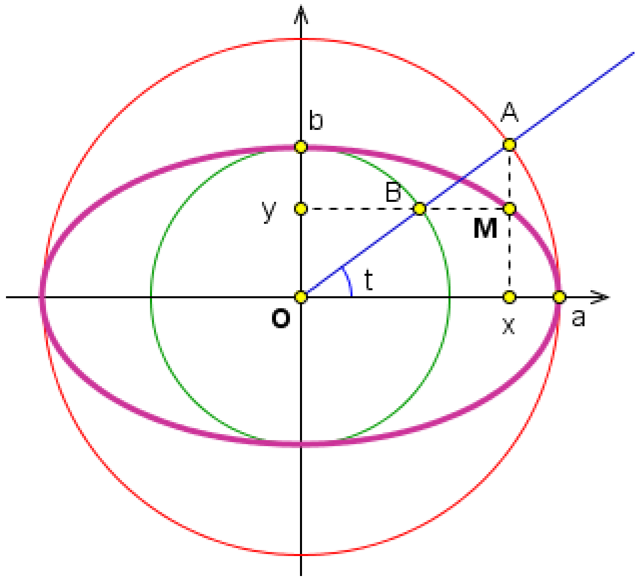
2.2. Задачи.

1. **[Г] 6.23** Напишите параметрические уравнения следующих линий а)эллипса; б) гиперболы. Покажите, что это гладкие линии.

   Решение. Рассмотрим эллипс. Выберем систему координат с началом в центре эллипса и осями Ox, Oy, направленными по большой и малой осям эллипса. Про эллипс, кроме определения, мы знаем каноническое уравнение, если эллипс расположен в плоскости Oxy:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
   где a и b – это полуоси эллипса. Заметим, что величины $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{a}$ меняются от -1 до 1, а значит, мы можем обозначить их через $\cos t$ и $\sin t$. Тогда параметрические уравнения эллипса примут вид
$$x=a\cos t;\ y=b\sin t;\ z=0.$$
   Осталось определить, как меняется t. Чтобы указанные уравнения описывали все точки эллипса, нужно, чтобы $t\in[-\pi,\pi]$.

   Покажем, что эллипс является гладкой кривой. Все три функции $x(t)=a\cos t$, $y=b\sin t$ и $z(t)=0$ имеют производные любых порядков по t. Кроме того,
$$x'(t)=-a\sin t;\quad y'(t)=b\cos t;\quad z'(t)=0,$$
   а значит,
$$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\neq 0$$
   для любого $t\in[-\pi,\pi]$.

   Замечание 2.1. Вспомним, что аналогичные уравнения мы получали для окружности (см. лекции). Там параметр t был направленным углом между радиус-вектором точки M, которая рисовала окружность, и вектором $\vec{i}$ системы координат. Посмотрим, чем является t здесь. Вроде бы пределы изменения параметра говорят о том, что это тоже угол. Выясним, угол для какого вектора.



На рисунке показано, как угол t связан с координатами точки M. Заметим, что первая координата точки M, то есть $a\cos t$ совпадает с первой координатой точки A, а вторая координата $b\sin t$ совпадает со второй координатой точки B.

Посмотрите модель „Параметрические уравнения эллипса“здесь:
http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24

Рассмотрим гиперболу. Поместим начало системы координат в центр гиперболы, а оси Ox и Oy направим по осям симметрии гиперболы. Для получения параметрических уравнений гиперболы нам потребуется вспомнить гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \ \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Это соответственно гиперболический косинус и синус. Для этих функций существует аналог основного тригонометрического тождества $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Используя это тождество, из канонического уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получим

$$x = a\operatorname{ch} t; \ y = b\operatorname{sh} t; \ z = 0.$$

Из определения гиперболического косинуса видно, что при изменении t по всей числовой прямой $\mathbb{R}$, x будем получать только положительные. Значит, эти параметрические уравнения задают только правую ветвь гиперболы. Левая ветвь гиперболы будет задаваться уравнениями

$$x = -a\operatorname{ch} t; \ y = b\operatorname{sh} t; \ z = 0.$$

Аналогично случаю эллипса здесь легко видеть, что гипербола является гладкой кривой.

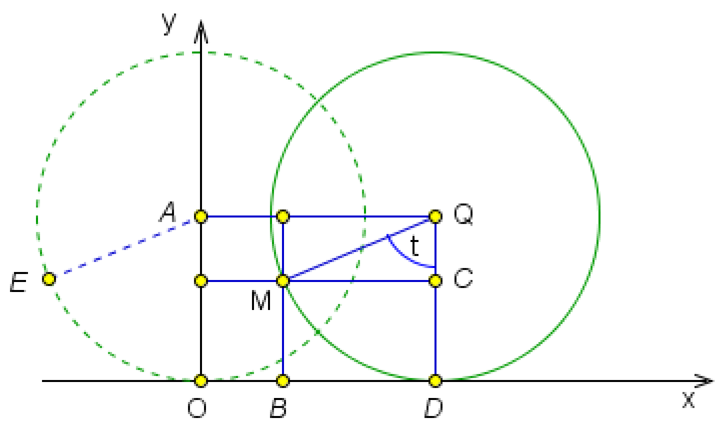
Рассмотрим параболу. Поместим начало системы координат в вершину параболы, ось Ox направим по оси параболы, а ось Oy направим перпендикулярно. В такой системе координат каноническое уравнение параболы будет иметь вид $y^2 = 2px$. Одну переменную

возьмем в качестве параметра. Пусть $y = t$. Тогда, выражая x, получим параметрические уравнения параболы
$$x = \frac{1}{2p}t^2; \quad y = t; \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Все три функции имеют производные любого порядка для всех $t \in \mathbb{R}$ и их сумма квадратов не нулю для любого t. Значит, парабола является гладкой линией.

$\square$

2. Окружность радиуса r равномерно катится по прямой (все происходит в одной плоскости). На окружности фиксирована точка M. Точка M рисует линию. Эта линия называется *циклоидой*. Выведите параметрические уравнения циклоиды.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы окружность и прямая лежали плоскости Oxy, прямая совпадала с осью Ox и в начальном положении центр окружности лежал на оси Oy.

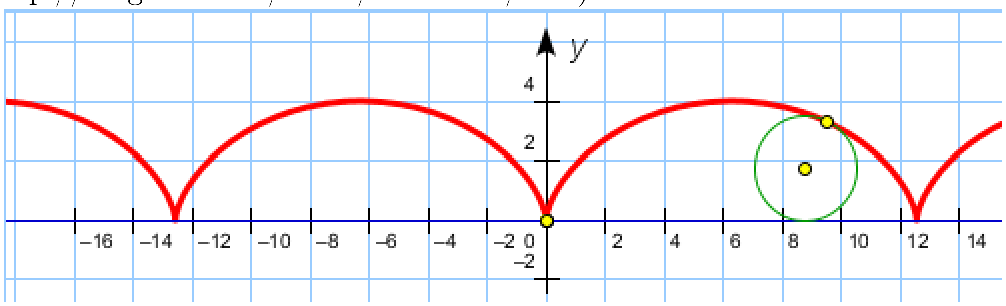


Начальное положение окружности нарисовано пунктиром. В этом положении точка M совпадает с точкой O. Теперь окружность начинает двигаться вправо. Точка M поехала вверх. Рассмотрим момент времени, когда точка M образует угол t с радиусом QD. Этот угол мы возьмем в качестве параметра.

Рассмотрим случай, когда точка M находится в третьей четверти окружности (как на рисунке). Остальные три случая рассмотрите самостоятельно.

Первая координата точки M – это длина отрезка OB. Имеем
$$OB = OD - BD = AQ - MC.$$
Длина отрезка AQ – это расстояние, которое проехала точка A, а оно равно длине дуги DM. Если угол измеряется в радианах (как в нашем случае), то длина дуги будет равна
$$\breve{DM} = rt.$$
Длину MC вычисляем из прямоугольного треугольника MCQ: $MC = r\sin t$. Итак, первая координата точки M будет $x = rt - r\sin t$. Находим вторую координату точки M. Это длина отрезка MB:
$$MB = CD = QD - QC = r - r\cos t.$$
Мы рассмотрели случай, когда параметр t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Аналогично рассматриваются случаи, когда параметр t меняется в остальных четвертях тригонометрического

круга. В результате точка M нарисует линию, которая называется одной аркой циклоиды. Дойдя до 2π мы не будем останавливаться, а будем изменять параметр дальше. Значения синусов и косинусов будут повторяться и точка M нарисует вслед за первой аркой циклоиды еще одну такую же. А если разрешить параметру t меняться от $-\infty$ до $+\infty$, то мы получим линию, которая называется циклоидой. На рисунке изображена циклоида, для которой радиус окружности равен 2. (Динамический рисунок циклоида смотрите на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24)



Итак, параметрические уравнения циклоиды

$$x = rt - r\sin t; \quad y = r - r\cos t; \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Циклоида не является гладкой линией. Действительно, найдем производные функций из ее параметрических уравнений

$$x'(t) = r - r\cos t; \quad y'(t) = r\sin t; \quad z'(t) = 0.$$

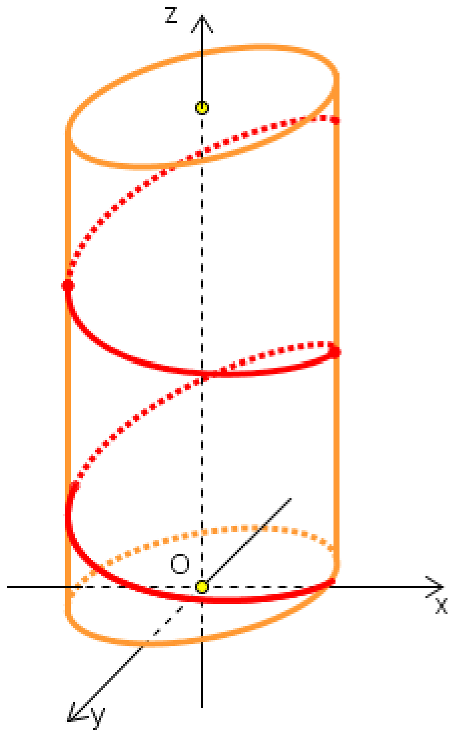
Тогда

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 2r^2 - 2r^2\cos t.$$

Существуют t, при которых это выражение обращается в нуль. Это $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Итак, на циклоиде имеется счетное число точек, в которых условие гладкости линии нарушается. Значит, циклоида является примером кусочно-гладкой линии. $\square$

3. **[Г] 6.27** Прямой круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz, а радиус равен a, вращается вокруг оси с постоянной скоростью. Точка M, лежащая на поверхности цилиндра, движется вдоль образующей с постоянной скоростью b. Написать параметрические уравнения траектории точки M. Это (обыкновенная) *винтовая линия.*

Доказательство. Траектория движения точки – это линия в пространстве.



Обозначим ее γ. Нам нужно написать параметрические уравнения линии γ, то есть найти зависимость координат (x, y, z) движущейся точки M от параметра t. Посмотрим на t как на время. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка M находилась на оси Ox, то есть имела координаты $(a, 0, 0)$. Точка M вращается вместе с цилиндром вокруг оси Oz. При этом движении из трех ее координат (x, y, z) меняются только x, y, а z остается неизменной. При этом движении точка M описывает окружность, то есть ее координаты меняются так: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Теперь вспомним, что точка M еще и движется с постоянной скоростью b вдоль оси Oz. При этом движении ее координаты x, y не меняются, а меняется только координата z. Так как скорость движения b, то за время t точка M сдвинется по оси Oz на $z = bt$. Наконец, соединим оба движения вместе:

$$x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ z = bt.$$

Это и будут искомые параметрические уравнения винтовой линии. При $t = 0$ мы получаем точку $(a, 0, 0)$ (как и требовалось). Мы выводили их для $t \geq 0$, но их можно распространить и для значений $t < 0$.

По смыслу задачи понятно, что винтовая линия лежит на цилиндре. Используя это, можно оценить правильность написанных нами параметрических уравнений. Сначала вспомним уравнение кругового цилиндра. Если его ось совпадает с осью Oz, то уравнение имеет очень простой вид:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Так как винтовая линия должна лежать на цилиндре, координаты ее точек должны удовлетворять уравнению цилиндра. Координаты точек, лежащих на винтовой линии вычисляются ее параметрическими уравнениями. Поэтому, если мы подставим выражения для x, y и z из параметрических уравнений в уравнение цилиндра, то мы должны получить верное равенство для любых значений t. Действительно,

$$(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2.$$

Это верно всегда. Такой результат придает нам уверенности в том, что результат правильный, хотя и не гарантирует на 100 процентов его правильность. $\square$

4. **[Г]№6.34 а)** Вычислите длину дуги линии $x = 3a\cos t$, $y = 3a\sin t$, $z = 4at$ (a – положительная константа) от точки пересечения с плоскостью Oxy до точки с произвольным значением параметра t. Запишите параметрические уравнения этой линии в естественной параметризации.

Решение. Для применения формулы вычисления длины дуги нам нужно найти значение параметра точки пересечения кривой с плоскостью Oxy. Эта точка имеет третью нулевую координату, то есть $z = 0$. Так как точка принадлежит кривой, получим $0 = 4at$, то есть $t = 0$.

Применяем формулу

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(-3a\sin t)^2 + (3a\cos t)^2 + (4a)^2}dt = 5a|_0^t = 5t.$$

Итак, длина кривой $5t$. Переходим к натуральному параметру $s = 5t$, то есть выражаем $t = \frac{s}{5}$ и подставляем в параметрические уравнения линии. Тогда уравнения линии в естественной параметризации будут иметь вид

$$x = 3a\cos\tfrac{s}{5};\quad y = 3a\sin\tfrac{s}{5};\quad z = 4a\tfrac{s}{5}.$$

$\square$

5. **[А] №942** Пусть линия γ задана в неявном виде системой уравнений $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z - 1 = 0$. Докажите, что это гладкая линия и напишите ее параметрические уравнения.

Решение. Смотрим на условие и видим, что кривая γ задана в неявном виде как пересечение двух поверхностей: прямого кругового цилиндра и плоскости. Переносим все слагаемые налево (оставляя справа только нули). Тогда

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1;\quad \Phi(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Из курса математического анализа мы знаем, что эти функции имеют частные производные любого порядка.

Вычислим первые частные производные:

$$\begin{array}{lll} F_x(x,y,z) = 2x; & F_y(x,y,z) = 2y; & F_z(x,y,z) = 0; \\ \Phi_x(x,y,z) = 1; & \Phi_y(x,y,z) = 1; & \Phi_z(x,y,z) = 1. \end{array}$$

Так как точка не указана, составляем матрицу из найденных частных производных:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что ранг этой матрицы во всех точках кроме точек $(0, 0, z)$ равен 2. Но эти точки не принадлежит кривой γ, так как их координаты не удовлетворяют системе уравнений (сбой в первом уравнении). Следовательно, для любой точки линии γ ранг матрицы равен 2, то есть линия γ является гладкой.

Напишем ее параметрические уравнения. Первый способ „в лоб“. В системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

одну из переменных обозначаем через t. Обычно выбирают ту из букв x, y, z, через которую легче выразить остальные две буквы. Пусть $x = t$. Тогда из первого уравнения мы видим, что $-1 \le x \le 1$, то есть $-1 \le t \le 1$. Выражаем y и z: $y = \pm\sqrt{1-t^2}$, $z = 1 - t \mp \sqrt{1-t^2}$. Следовательно, линия γ получается как объединение двух элементарных линий, которые задаются уравнениями

$$\gamma_1 : \, x = t; \; y = \sqrt{1-t^2}; \; z = 1 - t - \sqrt{1-t^2};$$
$$\gamma_2 : \, x = t; \; y = -\sqrt{1-t^2}; \; z = 1 - t + \sqrt{1-t^2}.$$

Эти параметрические уравнения для γ не удобны. Постараемся найти другую, более удобную параметризацию. Для этого заметим (из первого уравнения системы), что $-1 \le x \le 1$ и $-1 \le y \le 1$, следовательно, мы можем обозначить $x = \cos t$, $y = \sin t$. Когда t меняется от 0 до 2π, x, y будут меняться от -1 до 1. В результате выбора такого параметра точки кривой потеряны не будут. Тогда $z = 1 - \cos t - \sin t$. В результате кривая γ будет задаваться следующими параметрическими уравнениями:

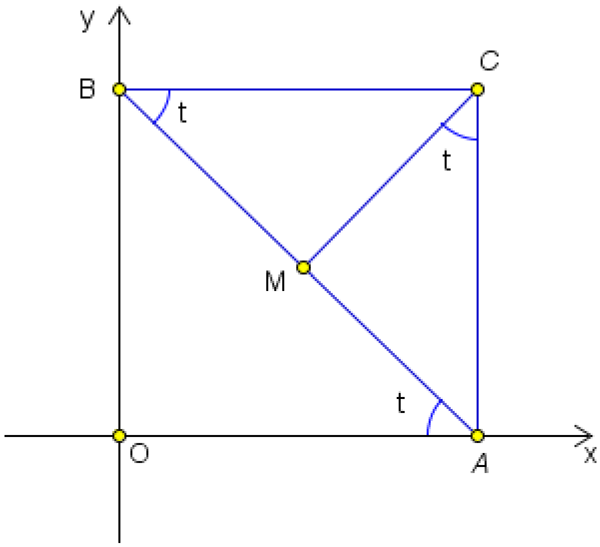
$$\gamma : \, x = \cos t; \; y = \sin t; \; z = 1 - \cos t - \sin t; \; t \in [0, 2\pi].$$

□

6. **[C] стр. 58** Лестница AB длины a скользит своими концами по осям прямоугольной декартовой системы координат, которую студенты заботливо натерли мылом. Прямые AC и BC, параллельные координатным осям, пересекаются в точке C, из которой проведен перпендикуляр CM к лестнице AB. Точка M обозначена этой буквой не случайно, поскольку перепуганный монтер, почуяв скольжение лестницы, сползает вместе с ней вниз так, что сливается с точкой M в одно перепуганное целое. Найдите параметрическое задание траектории монтера. Это часть кривой, называемой *астроидой*.

   Решение. Обозначим искомую кривую через γ. Сначала заметим, что все действие происходит в плоскости Oxy. У всех точек этой плоскости третья координата равна нулю, а значит и в параметрических уравнениях кривой γ третье уравнение будет иметь вид $z = 0$.

   Найдем первые два уравнения. Обозначим через t угол наклона лестницы к оси Ox. Тогда $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Фиксируем произвольный момент времени t_0. В этот момент времени точки A, B и M имеют координаты в плоскости Oxy следующего вида: $A(a\cos t_0, 0)$ и $B(0, a\sin t_0)$, $M(x, y)$.



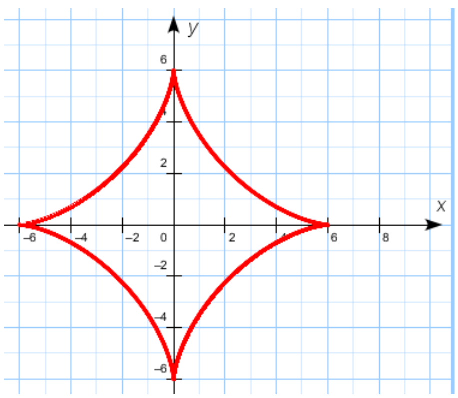
Из подобия треугольников BMC и BCA получим

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow BM = \frac{BC^2}{BA} = \frac{(a\cos t_0)^2}{a} = a\cos^2 t_0.$$

Тогда первая координата точки M: $x = BM\cos t_0$, то есть $x = a\cos^3 t_0$, а вторая координата точки M: $y = a\sin t_0 - BM\sin t_0 = a\sin^3 t_0$.

Теперь отпускаем точку t_0, стирая у нее нуль. В результате получаем, что траектория монтера задается параметрическими уравнениями

$$x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t;\ z = 0,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

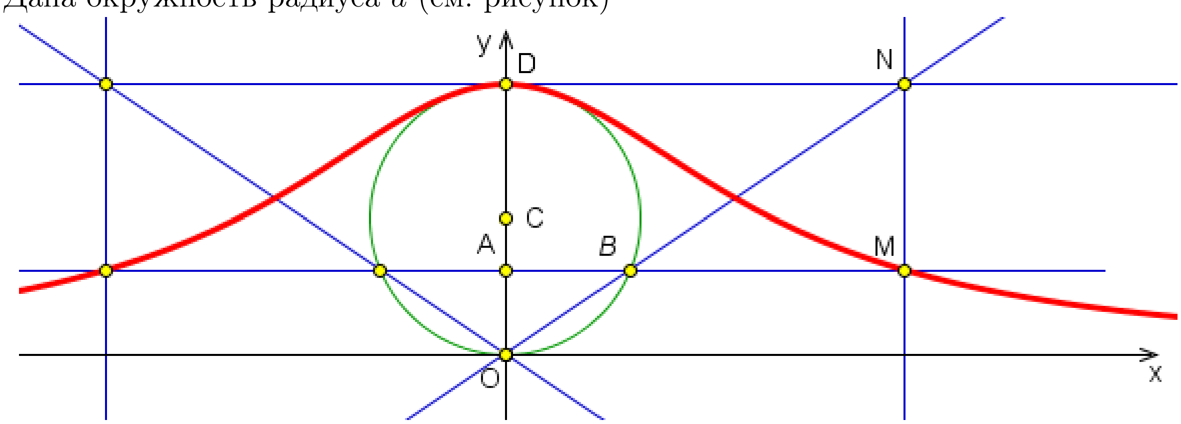


Чтобы получить параметрические уравнения всей астроиды, нужно разрешить параметру t изменяться от нуля до 2π. Из свойств симметрии синуса и косинуса следует, что это кривая симметрична относительно начала координат и осей Ox, Oy. Поэтому чтобы ее изобразить, достаточно нарисовать ее часть, лежащую в первом квадранте. Постройте несколько точек астроиды из первого квадранта и изобразите кривую. (Динамический рисунок астроиды смотрите на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24)

□

2.3. Домашнее задание.

1. Дана окружность радиуса a (см. рисунок)



Точка B движется по окружности. Из нее опущен перпендикуляр на диаметр OD (основание – точка A). Луч OB пересекает прямую, проходящую через D параллельно оси Ox в точке N. Из этой точки опущен перпендикуляр на прямую AB и получена точка M. Когда точка B пробегает окружность, точка M рисует кривую (на рисунке она изображена красной). Эта кривая называется верзьерой Аньези (или локоном Аньези). Возьмите в качестве параметра угол между лучами OA и OB и напишите параметрические уравнения этой кривой. Затем перейдите к общему уравнению, то есть найдите зависимость y от x. (Динамический рисунок локона Аньези смотрите на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24)

2. При выводе параметрических уравнений циклоиды, мы рассмотрели только один случай расположения точки M на окружности. Рассмотрите остальные три и убедитесь, что если по-прежнему отсчитывать величину угла от отрезка QD, то параметрические уравнения останутся такими же.

3. **[Г]№6.34 г)** Вычислите длину дуги линии $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ между точками со значениями параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$. Запишите уравнения этой кривой в естественной параметризации.

4. Линия γ задана в неявном виде системой уравнений $y^2 = 2z$, $x - y + z = 1$. Докажите, что это гладкая линия и напишите ее параметрические уравнения.

5. Напишите параметрические уравнения окружности, эллипса и гиперболы, лежащих в плоскости Oxy, с осями симметрии, параллельными координатным осям и центром в точке $(a, b, 0)$.

2.4. Дополнительные задачи.

1. Доцент кафедры геометрии Мария Ивановна недавно освоила программу 1С Математический конструктор. Она с его помощью нарисовала эллипс, циклоиду, астроиду и несколько других плоских линий по их параметрическим уравнениям. Картинки получились красивыми. И захотелось Марии Ивановне нарисовать в этой программе винтовую линию. Это уже не плоская линия. Но в Математическом конструкторе нет встроенной 3D графики! Помогите Марии Ивановне нарисовать винтовую линию в Математическом конструкторе.

   Решение. Напомним, что изображение пространственной фигуры F на плоскости σ получается следующим образом. Берут плоскость σ изображения и ненулевой вектор $\vec{p}$, не параллельный этой плоскости. Через каждую точку пространственной фигуры F проводят прямую, параллельную вектору $\vec{p}$ и пересекают эту прямую с плоскостью σ. Полученное множество $\bar{F}$ точек на плоскости σ называют изображением фигуры F. (Точнее множество, которое получается из $\bar{F}$ некоторым преобразованием подобия. Оно нужно, чтобы менять масштаб картинке, если она получится слишком большой или слишком маленькой.)

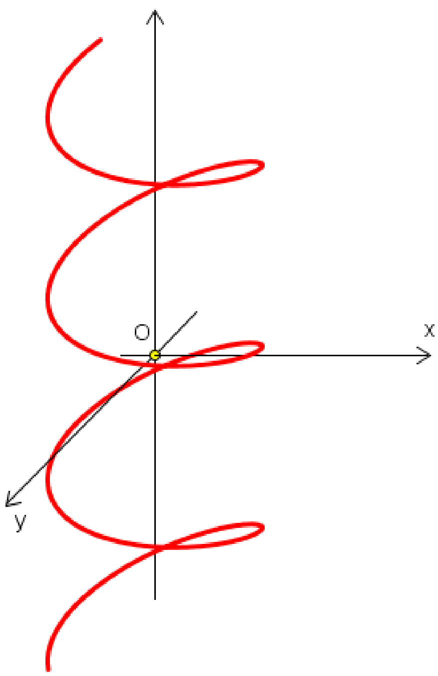
   В нашей задаче как раз возникла такая ситуация. Нужно пространственную линию изобразить на плоскости. В качестве плоскости σ мы возьмем плоскость Oxz, а в качестве вектора $\vec{p}$ возьмем вектор с координатами $(1, 2, 1)$. (Можно выбрать и другой вектор, тогда получится другой ракурс.)

Берем винтовую линию

$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = bt.$$

Через ее точку $(a\cos t, a\sin t, bt)$ проводим прямую ℓ (запишем ее канонические уравнения)

$$\frac{x - a\cos t}{1} = \frac{y - a\sin t}{2} = \frac{z - bt}{1}.$$



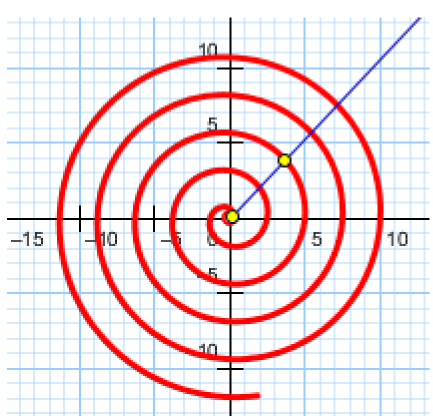
Пересекаем с плоскостью Oxz. Эта плоскость задается уравнением $y = 0$. Значит, нам нужна система уравнений прямой ℓ и плоскости Oxz. Решая эту систему, мы находим координаты (x, z) точки пересечения прямой ℓ и плоскости Oxz, то есть изображение этой точки на плоскости Oxz. Итак,

$$x = a\cos t - \frac{a}{2}\sin t; \quad z = bt - \frac{a}{2}\sin t.$$

Меняем t. Точка $(a\cos t, a\sin t, bt)$ побежала по винтовой линии, а вмести с ней побежала ее проекция, рисуя изображение винтовой линии на плоскости Oxz.

Вот какая кривая получилась. Если теперь еще нарисовать изображение оси Oy (убедитесь самостоятельно, что эта прямая будет задаваться уравнением $z = x$ в плоскости изображения Oxz), то получим наглядное изображение винтовой линии. □

2. Пусть точка M движется в плоскости Oxy равномерно по лучу, выходящему из точки O, со скоростью a и вращается вокруг O. Тогда точка M описывает в плоскости Oxy линию, которая называется *спиралью Архимеда*.



Параметрические уравнения спирали Архимеда имеют вид $x = at\cos t$, $y = at\sin t$. Пусть кроме того, точка M движется с той же скоростью a вдоль оси Oz. Такая линия называется обобщенной винтовой линией и она имеет уравнения

$$x = at\cos t; \quad y = at\sin t; \quad z = at.$$

Найдите параметрические уравнения изображения этой линии на плоскости Oxz. Вектор для проектирования выберите самостоятельно.

Постарайтесь нарисовать эту линию. Выясните, на какой поверхности она располагается.

3. Напишите параметрические уравнения параболы с фокальным параметром p в системе координат, начало которой находится в фокусе параболы, а ось Ox параллельна оси параболы (парабола находится в плоскости Oxy).

4. Напишите параметрические уравнения эллипса в системе координат с началом в его фокусе и осями, параллельными осям эллипса (эллипс лежит в плоскости Oxy).

5. Напишите параметрические уравнения правой ветви гиперболы в системе координат с началом в ее фокусе и осями, параллельными осям гиперболы (гипербола лежит в плоскости Oxy).

6. **[Г]6.25** Отрезок постоянной длины b скользит своими концами A и B по осям декартовой системы координат Oxy. Точка M делит отрезок в отношении λ. Написать неявные уравнения ее траектории.

7. **[Б]№1642** Найдите длину дуги линии $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$ (a – ненулевая константа) между плоскостями $y = \frac{a}{3}$ и $y = 9a$.

8. Найдите длину астроиды.

§2.3. Касательная.

3.1. Сведения из теории. Пусть гладкая линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и дана точка M_0 на ней (обозначим значение соответствующего ей параметра через t_0). Касательной к кривой γ в точке M_0 называется предельное положение секущей. Касательная – это прямая, которая однозначно задается для гладкой кривой точкой M_0 и направляющим вектором $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ (Вот где пригодилось требование $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ из определения гладкой кривой. Оказывается оно обеспечивает гладкую кривую в каждой точке единственной касательной).

Плоскость, проходящая через точку $M_0 \in \gamma$ перпендикулярно касательной к кривой γ в этой точке, называется нормальной плоскостью.

Углом между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

В курсе аналитической геометрии была выведена формула для вычисления угла между прямыми: пусть заданы две прямые ℓ_1 (точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}$) и прямая ℓ_2 (точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{q}$). Угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\ell_1, \ell_2) = \left|\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\right|.$$

Благодаря модулю, нам не нужно думать, на какие направляющие векторы прямых мы попали, формула всегда считает не тупой угол, образованный данными прямыми.

Пусть даны гладкие кривые γ_1: $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$ и γ_2: $\vec{r} = \vec{r}_2(\tau)$. Пусть они пересекаются в точке M_0. На первой кривой этой точке соответствует значение параметра t_0, а на второй соответствует τ_0. Чтобы вычислить угол между кривыми, нужно вычислить угол между их касательными.

3.2. Задачи.

1. **[Г] 6.40 а)** Для кривой $\gamma : x = \frac{t^4}{4},\ y = \frac{t^3}{3},\ z = \frac{t^2}{2}$ написать уравнение касательной, параллельной плоскости $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

   Решение. Линия γ является гладкой кривой во всех своих точках, кроме точки $(0, 0, 0)$ (почему?) Во всех этих точках есть касательные, но не известно в какой именно касательная будет параллельна данной плоскости. Поэтому обозначим координаты точки M_0, удовлетворяющей условию задачи, через $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а значение параметра, который соответствует этой точке, через t_0.

   Направляющий вектор $\vec{p}$ касательной – это
$$\left(\frac{dx}{dt}\bigg|_{t_0}, \frac{dy}{dt}\bigg|_{t_0}, \frac{dz}{dt}\bigg|_{t_0} \right),$$
   то есть
$$((t_0)^3, (t_0)^2, t_0). \tag{2.1}$$
   Вспоминаем критерий параллельности вектора и плоскости: вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ параллелен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$.

   Применяем критерий параллельности в нашем случае:
$$(t_0)^3 + 3(t_0)^2 + 2t_0 = 0.$$
   Откуда находим, что $t_0 = 0$, $t_0 = -1$, $t_0 = -2$, то есть получаем три возможные точки. Но при $t_0 = 0$ точка $M_0 \in \gamma$ имеет координаты $(0, 0, 0)$ (подставили значение $t_0 = 0$ в параметрические уравнения γ). Как мы видели, в этой точке нарушается условие гладкости и там нет касательной (действительно, для $t_0 = 0$ направляющий вектор касательной получается нулевым, а он не определяет прямой). Итак, мы получили два значения: $t_0 = -1$, $t_0 = -2$. Для каждого из них вычисляем координаты точки M_0 и координаты направляющего вектора:

   1) $t_0 = -1$. Тогда (подставляем в параметрические уравнения γ) $M_0\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Направляющий вектор (подставляем в (2.1)) $\vec{p}(-1, 1, -1)$.

   Уравнения касательной напишем в виде канонических уравнений. Их общий вид для прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ имеет вид
$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}.$$
   В нашем случае получим
$$\frac{x - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}.$$
   2) Аналогичные рассуждения для $t_0 = -2$ приводят к следующему ответу:
$$x = 4t + 4;\ y = -2t - \frac{8}{3};\ z = t + 2.$$
   Здесь для разнообразия записаны параметрические уравнения касательной. □

2. **[Г] 6.41 а)** Существуют ли точки на кривой $\gamma : x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$, в которых касательная перпендикулярна плоскости $x - 5y + 6z - 7 = 0$?

Решение. Опять обозначаем значение параметра искомой точки через t_0. Координаты направляющего вектора касательной для кривой γ мы уже вычислили в предыдущей задаче. Это (2.1).

Задумаемся, как выразить в виде равенства (равенств) условие перпендикулярности вектора и плоскости. Система координат – прямоугольная декартова, а в ней вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B, C) будет перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ будет перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}$ и $\vec{p}$ параллельны, то есть их координаты должны быть пропорциональны, то есть

$$\frac{p_1}{A} = \frac{p_2}{B} = \frac{p_3}{C}.$$

В нашей задаче вектор $\vec{n}(1, -5, 6)$, $\vec{p}(((t_0)^3, (t_0)^2, t_0)$ и условие параллельности будет иметь вид

$$\frac{(t_0)^3}{1} = \frac{(t_0)^2}{-5} = \frac{t_0}{6},$$

то есть $6(t_0)^3 = t_0$ и $6(t_0)^2 = -5t_0$. В точке со значением параметра $t_0 = 0$ гладкость кривой нарушается, поэтому мы выбрасываем это значение. У нас остаются точки, для которых значения параметра t_0 находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 6(t_0)^2 = 1 \\ 6t_0 = -5 \end{cases}$$

Мы видим, что эта система не совместна, следовательно, точек, в которых касательная к γ перпендикулярна данной плоскости, нет.

P.S. (для интересующихся). Мы увидели пример плоскости, для которой не существует касательной к кривой γ, перпендикулярной этой плоскости. А существуют ли плоскости, для которых есть перпендикулярные касательные? Очевидно, что да. Попробуем найти все такие плоскости.

Чтобы плоскость была перпендикулярна касательной, направляющий вектор касательной должен быть перпендикулярен плоскости, то есть плоскость должна иметь уравнение вида

$$(t_0)^2 x + t_0 y + z + D = 0.$$

Здесь мы сразу выбросили точку со значением параметра $t_0 = 0$. Для удобства обозначим $t_0 = \lambda$, $D = \mu$. При этом заметим, что λ – любое ненулевое число, μ – произвольное число (это два параметра):

$$\lambda^2 x + \lambda y + z + \mu = 0.$$

Говорят, что получено двупараметрическое семейство плоскостей. Например, этому семейству принадлежит плоскость $x + y + z + 2 = 0$. □

3. **[Б]№1650** Пусть кривая γ задана в неявном виде, то есть в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Выведите уравнения касательной и нормальной плоскости к γ, проходящих через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\gamma$.

Решение. Запишем параметрические уравнения кривой γ:

$$x=x(t);\ y=y(t);\ z=z(t),\ t\in I.$$

Если в правые части этих уравнений подставлять различные значения t, то, вычисляя их, мы будем получать координаты точек кривой γ. Так как эти точки принадлежат γ, подставляя их координаты в уравнения (2.2), мы получаем верные тождества для любых $t\in I$, то есть

$$\begin{cases} F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0 \\ \Phi(x(t),y(t),z(t))\equiv 0 \end{cases}$$

Продифференцируем оба тождества по t (вспоминаем правило дифференцирования сложной функции):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\equiv 0;\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\equiv 0;$$

Эти тождества верны в любой точке кривой γ, в частности, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (ей соответствует значение параметра t_0), то есть

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}\equiv 0;\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}+\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}+\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{M_0}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}\equiv 0; \tag{2.3}$$

Добавленные символы означают, что мы сначала считаем производную по соответствующей переменной, а затем подставляем вместо переменных x,y,z соответствующие значения x_0,y_0,z_0, а вместо t – подставляем t_0.

Как мы знаем упорядоченная тройка чисел $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0},\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0},\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}\right)$ является набором координат для направляющего вектора касательной в точке M_0. Если мы обозначим через (X,Y,Z) координаты произвольной точки M, принадлежащей касательной к кривой γ в точке M_0, то вектор $(X-x_0,Y-y_0,Z-z_0)$ будет параллелен вектору $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0},\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0},\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}\right)$, а значит, их координаты будут пропорциональны

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}=\lambda(X-x_0);\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}=\lambda(Y-y_0);\ \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}=\lambda(Z-z_0),$$

где λ – какое-то ненулевое число. Подставим полученные выражения в (2.3) и сократим на λ:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(X-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(Y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(Z-z_0)=0; \\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0}(X-x_0)+\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0}(Y-y_0)+\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{M_0}(Z-z_0)=0; \end{cases} \tag{2.4}$$

Обратите внимание, что переменные здесь обозначены не обычно (X, Y, Z), что не меняет их сути – это переменные.

Получим уравнение нормальной плоскости. Для того, чтобы написать уравнение плоскости, нужны точка и вектор нормали (система координат у нас прямоугольная декартова, а значит этот способ вполне допустим). Обозначим искомую плоскость через α. По определению нормальной плоскости $M_0 \in \alpha$, то есть точка у нас есть. Нужен еще нормальный вектор (то есть перпендикулярный плоскости α). Заменим, что касательная в точке M_0 перпендикулярна нормальной плоскости, а значит направляющий вектор касательной – это то, что нам нужно. Осталось считать координаты направляющего вектора касательной из ее уравнений (2.4). Опять вспоминаем 1 курс. Пусть прямая в пространстве задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда направляющий вектор $\vec{p}$ этой прямой имеет следующее разложение по базису

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Применим эту формулу в нашем случае.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Все есть для написания уравнения плоскости по точке и нормальному вектору. Осталось только вспомнить саму формулу:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0, \tag{2.6}$$

где (n_1, n_2, n_3) – координаты нормального вектора, (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, через которую проходит плоскость. Терпеливому и трудолюбивому читателю предлагаю самостоятельно достать координаты нормального вектора для нашего случая из формулы (2.5), подставить их в формулу (2.6) и получить ответ.

P.S. (для тех, кто не любит долго вычислять). Посмотрим на формулу (2.5) внимательно. Ведь это же координаты векторного произведения векторов, координаты которых стоят во второй и третьей строках! А левая часть формулы (2.6) – это скалярное произведение векторного произведения указанных векторов на вектор с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Векторное произведение двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор – это смешанное произведение этих трех векторов. Для них есть формула для вычисления в ортонормированном базисе:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Применяя ее в нашем случае, сразу выписываем уравнение нормальной плоскости в удобном виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} \end{vmatrix} = 0.$$

□

4. **[Г] 6.41 г)** Существуют ли точки на кривой γ: $z = x^2 + y^2$, $y = x$, в которых касательные перпендикулярны плоскости $2x - y + 3 = 0$?

Решение. Нам нужно написать уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Кривая задана в неявном виде, поэтому применяем выведенные в предыдущей задаче уравнения. В нашем случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $\Phi(x, y, z) = x - y$. Тогда

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2x_0 & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} = 2y_0 & \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} = -1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{M_0} = 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{M_0} = -1 & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{M_0} = 0. \end{array}$$

Подставляем в (2.4)

$$\begin{cases} 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \\ (x - x_0) - (y - y_0) = 0 \end{cases}$$

Вычисляем направляющий вектор касательной

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x_0 & -2y_0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + (-2x_0 + 2y_0)\vec{k}.$$

Этот вектор должен быть параллелен нормальному вектору плоскости $2x - y + 3 = 0$, то есть вектору $(2, -1, 0)$. Вектора параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. В нашем случае получим

$$\frac{-1}{2} = \frac{-1}{-1}; \ -2x_0 + 2y_0 = 0.$$

Первое равенство противоречиво, то есть точек, в которых касательные перпендикулярны данной плоскости нет. □

5. Пусть дан прямой круговой цилиндр с осью Oz радиуса a. На нем взята точка $M(a, 0, 0)$. Сначала цилиндр крутится в одну сторону. Точка M крутится вместе с ним и еще движется

вдоль оси Oz с постоянной скоростью b. В результате точка M описывает винтовую линию γ_1. Затем цилиндр вращается в другую сторону с той же скоростью и точка M движется вместе с ним и вдоль Oz с той же скоростью b. Получаем винтовую линию γ_2. Найдите углы между винтовыми линиями γ_1 и γ_2 в точках их пересечения.

Решение. Параметрические уравнения винтовой линии мы уже знаем

$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = bt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Это уравнения линии γ_1. Разберемся со второй винтовой линией, линией γ_2. Когда точка M на линии γ_1 поворачивается на угол t, то на второй она повернется на угол $-t$. А во вверх обе точки едут одинаково. Значит, параметрические уравнения второй винтовой линии выглядят так

$$x = a\cos(-t); \quad y = a\sin(-t); \quad z = -bt,\ t \in \mathbb{R}$$

или, воспользовавшись четностью косинуса и нечетностью синуса, получим

$$x = a\cos t; \quad y = -a\sin t; \quad z = bt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Обратите внимание, что параметры у обеих линий не просто обозначены одинаково, они действительно так связаны между собой. В общем случае, когда нам даны две линии, для их совместного исследования мы должны были бы обозначать их параметры по-разному.

Найдем точки пересечения двух винтовых линий. Если точка общая для двух линий, то ее координаты (x, y, z), выдаваемые параметрическими уравнениями обеих линий, одинаковые. Значит, для нахождения общих точек нам нужно приравнять правые части параметрических уравнений обеих линий

$$a\cos t = a\cos t; \quad a\sin t = -a\sin t; \quad bt = bt.$$

Откуда получаем значения параметров общий точек: $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если мы подставим найденные значения в параметрические уравнения любой из двух винтовых линий, то мы получим координаты общих точек $M_k(a, 0, b\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее, найдем координаты направляющих векторов касательных в общих точках. Для этого нужно найти производные для первой и второй винтовой линии

$$x' = -a\sin t;\ y' = a\cos t;\ z' = b;$$
$$x' = -a\sin t;\ y' = -a\cos t;\ z' = b.$$

Тогда направляющие векторы касательных (обозначим их соответственно $\vec{p}_k$ и $\vec{q}_k$) будут иметь координаты

$$\vec{p}_k(0, \pm a, b); \quad \vec{q}_k(0, \mp a, b).$$

(мы подставили найденные значения параметра t в производные). Наконец, находим угол между касательными (обозначим его α)

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2}.$$

Заметим, что углы между касательными во всех общих точках обеих винтовых линий одинаковые. □

6. Пусть на плоскости Oxy дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ (Расстояние между его фокусам c связано с буквами a и b следующим образом $b^2 = a^2 - c^2$). Как мы знаем, его параметрические уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi)$. Возьмем на эллипсе точку со значением параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Координаты этой точки (подставляем t_0 в параметрические уравнения) будут $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$. Обозначим ее A. Через точку A проходит единственная гипербола, которая имеет те же фокусы, что и данный эллипс. Такая гипербола называется *софокусной* эллипсу. Покажем, что угол в этой точке между эллипсом и софокусной гиперболой прямой.

   Найдем уравнение гиперболы. Сначала заметим, что система координат эллипса будет канонической и для гиперболы (так как фокусы для них одни и те же). Тогда гипербола будет иметь уравнение
$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{f^2} = 1,$$
   где d^2 и f^2 нужно выразить через буквы, характеризующие эллипс, то есть через a^2, b^2, c^2. Набираем уравнения для выражения букв d и f. Две буквы – два уравнения. Во-первых, точка A лежит на гиперболе, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, то есть $\frac{a^2}{2d^2} - \frac{b^2}{2f^2} = 1$. Во-вторых, так как фокусы у эллипса одни и те же, расстояние между фокусами c для гиперболы будет удовлетворять равенству $f^2 = c^2 - d^2$. Решаем полученную систему уравнений относительно d^2 и f^2. Получим 1) $d^2 = a^2$ и $f^2 = c^2 - a^2$. Но последнее равенство противоречиво $(c < a)$. Его откидываем. 2) $d^2 = \frac{c^2}{2}$ и $f^2 = \frac{c^2}{2}$. Тогда уравнение софокусной гиперболы, проходящей через точку A будет иметь вид
$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)} = 1.$$
   Перейдем к параметрическим уравнениям линий:
   эллипс: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = 0$;
   гипербола: $x = \frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau$, $y = \frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau$, $z = 0$.
   Обратите внимание, что у гиперболы параметр мы обозначили другой буквой, так как параметр у эллипса и параметр у гиперболы никак не зависят друг от друга. Точке A на гиперболе соответствует значение параметра $\tau = \tau_0$. Чему оно конкретно равно, мы пока не знаем. Находим направляющие вектора касательных в точке A.
$$\text{эллипс: } \vec{p}(-a\cos\frac{\pi}{4}, b\sin\frac{\pi}{4}); \text{ гипербола: } \vec{q}(\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0, \frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0).$$
   Напомним, что мы должны доказать, что эллипс и гипербола перпендикулярны, то есть скалярное произведение направляющих векторов касательных равно нулю. Вычисляем

(помним, что в пространстве у нас фиксирована прямоугольная декартова система координат, базис у нее ортонормированный)

$$-a\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0+b\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0=$$

Встает вопрос, чему равен τ_0? Даже достаточно найти $\operatorname{ch}\tau_0$ и $\operatorname{sh}\tau_0$. Вспоминаем, что τ_0 – значение параметра для точки A на гиперболе. Следовательно, если подставить τ_0 в параметрические уравнения гиперболы, то получим координаты точки A, которые (из параметрических уравнений эллипса) равны $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$. Тогда $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\tau_0$, $\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\tau_0$. Откуда находим $\operatorname{ch}\tau_0=\frac{a}{c}$, $\operatorname{sh}\tau_0=\frac{b}{c}$. Подставляем эти выражения в прерванную цепочку равенств

$$=-\frac{ac}{2}\frac{b}{c}+\frac{bc}{2}\frac{a}{c}=0.$$

Итак, мы показали, что данный эллипс и софокусная гипербола в точке A перпендикулярны.

P.S. (для интересующихся) Если мы возьмем любую другую точку эллипса, то через нее также проходит единственная софокусная гипербола. Какой угол она будет образовывать с эллипсом в точке их пересечения?

3.3. Домашнее задание.

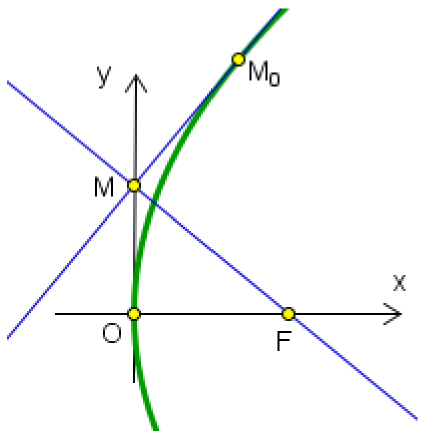
1. **[Г]6.40 б)** Для кривой $\gamma: x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\operatorname{tg}t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ напишите уравнение касательной, параллельной плоскости $x-y-3=0$.
2. **[Г]6.41 б)** Существуют ли точки на кривой $\gamma: x=t,\ y=t^3,\ z=t^2+4$, касательные в которых перпендикулярны плоскости $4x+4y+12z+1=0$?
3. **[Г]6.43** Докажите, что касательная к кривой γ: $x^2=3y$, $2xy=9z$ во всех ее точках образует постоянный угол с вектором $\vec{p}(1,0,1)$. А нормальная плоскость?
4. Для произвольной точки винтовой линии найдите угол между ней и прямолинейной образующей цилиндра, проходящей через эту же точку.

3.4. Дополнительные задания. Пусть даны линия γ и точка C. Обозначим через M' ортогональную проекцию точки C на касательную MT к линии γ в точке $M\in\gamma$. Фигура $\gamma'=\{M',\ M\in\gamma,$ состоящая из всех точек M', называется *подэрой* линии γ относительно точки C.

1. **[Б]№1638** Найти подэру параболы относительно ее фокуса.

Решение. Начнем с того, что зададим параболу γ с помощью уравнений. Пусть парабола лежит в плоскости Oxy. В этой плоскости каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, где p – это фокальный параметр параболы (расстояние от фокуса до директрисы). Уравнение самой плоскости Oxy в пространстве имеет вид $z=0$. Тогда точка пространства $M(x,y,z)$ будет принадлежать параболе тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений $y^2 = 2px$ и $z = 0$. Это и будет неявным заданием параболы в пространстве.

Теперь обратимся к определению подэры. Там сказано, что нам нужно делать дальше: во-первых, записать уравнение касательной в произвольной фиксированной точке параболы; во-вторых, написать уравнение прямой, перпендикулярной касательной и проходящей через фокус F; в-третьих, найти координаты точки пересечения касательной и перпендикулярной ей прямой. Координаты этих точек будут удовлетворять каким-то уравнениям (их и надо найти). Эти уравнения и будут уравнениями подэры.



Обозначим через $M_0(x_0, y_0, 0)$ произвольную точку на параболе и фиксируем ее. Третью координату сразу обозначаем нулем, так как все точки параболы лежат в плоскости Oxy, а там третьи координаты нулевые. Уравнение касательной в точке M_0 будет иметь вид (проведите вычисления самостоятельно)

$$\begin{cases} -2p(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Так как $M_0 \in \gamma$, получим $y_0^2 = 2p_0$ и первое уравнение касательной упростится: $y_0 y = p(x + x_0)$.

Уравнение прямой $\ell \subset Oxy$, проходящей через точку $F(\frac{p}{2}, 0)$ перпендикулярно касательной будет иметь уравнение $\left(x - \frac{p}{2}\right) y_0 + py = 0$ (проведите вычисления самостоятельно). Точка $M'(x,y,z)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} y_0 y = p(x + x_0) \\ \left(x - \frac{p}{2}\right) y_0 + py = 0 \\ y_0^2 = 2px_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Нам нужно из этих уравнений получить уравнения на x, y, z, а все лишние буквы убрать (не должно быть координат точки M_0). Заметим, что при этом должно остаться два уравнения, чтобы задать подэру (это ведь линия) в неявном виде. Для этого выразим x_0 и y_0 из первых двух уравнений и подставим в третье. В результате получим, что останется два уравнения: $x(y^2 + (x - \frac{p}{2})^2) = 0$ и $z = 0$. В первом уравнении в левой части в скобках стоит положительная величина, так как точка $(\frac{p}{2}, 0)$ не может быть основанием перпендикуляра, опущенного на касательную), следовательно, на эту величину можно сократить. Таким образом, уравнения подэры параболы относительно ее фокуса будет иметь вид: $x = 0$, $z = 0$. Это прямая, а именно ось Oy.

P.S. (для интересующихся) Мы получили очень красивый ответ для фокуса: сложно определяемое множество точек вдруг оказалось простой прямой. А какими множествами будут подэры параболы относительно других точек. Будут ли среди точек плоскости Oxy такие же хорошие точки, как фокус? Выведите уравнение подэры параболы относительно вершины (получится кривая, называемая циссоидой Диокла). Какие подэры будут у эллипса и гиперболы относительно их фокусов? А относительно других точек? (Посмотрите Подеры линий на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka/0-24)

Легко видеть, что подэра окружности относительно ее центра есть сама окружность (подэра окружности относительно других точек – кривая, которая называется улиткой Паскаля); подэра прямой относительно любой точки, не лежащей на ней, есть сама прямая. А интересно, есть ли еще линии, которые совпадают со своими подэрами? □

2. **[Г]6.42** Найдите линию, по которой касательные к кривой $\vec{r} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}e^t$, $t \in \mathbb{R}$, пересекают плоскость Oxy.

Решение. Фиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда точка $M_0(\cos t_0, \sin t_0, e^{t_0}) \in \gamma$. Напишем уравнение касательной к γ в точке M_0. Для этого ищем направляющий вектор касательной в этой точке

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} = -\vec{i}\sin t_0 + \vec{j}\cos t_0 + \vec{k}e^{t_0}.$$

Пишем канонические уравнения касательной

$$\frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0} = \frac{y-\sin t_0}{\cos t_0} = \frac{z-e^{t_0}}{e^{t_0}}.$$

Точка пересечения (x, y, z) касательной и плоскости Oxy определяется системой

$$\begin{cases} \frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0} = \frac{y-\sin t_0}{\cos t_0} = \frac{z-e^{t_0}}{e^{t_0}} \\ z = 0 \end{cases}$$

Отпустим точку t_0 бегать по кривой γ (чтобы подчеркнуть это обозначим ее через t) и выразим x, y, z через параметр t. Это будут параметрические уравнения искомой кривой.

$$x = \cos t + \sin t; \quad y = \sin t - \cos t; \quad z = 0; \; t \in \mathbb{R}.$$

Выясним, что это за кривая. Очевидно, что она плоская (лежит в плоскости Oxy). Тогда нам достаточно получить ее уравнение в этой плоскости с использованием координат x, y. Первые два уравнения мы можем записать в виде

$$x = \sqrt{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t) = \sqrt{2}\cos(t - \tfrac{\pi}{4});$$
$$y = \sqrt{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t) = \sqrt{2}\sin(t - \tfrac{\pi}{4}$$

Возводя в квадрат обе части уравнений и складывая, получим $x^2 + y^2 = 2$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. □

3. **[Г] 6.42 а)** Найдите линию, по которой пересекают плоскость Oxy касательные к кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

4. Напишите уравнения нормальных плоскостей к кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$, проходящих через точку $(0, 0, 1)$. Обратите внимание, что точка не лежит на кривой.

5. **[А]№947** Докажите, что кривая $x = t^2 \cos t$, $y = t^2 \sin t$, $z = t^2$, $t > 0$ гладкая и лежит на конической поверхности. Определите угол между этой кривой и образующей конуса в точке со значением параметра $2\sqrt{6}$.

6. Эллипс и гипербола называются софокусными, если они имеют одну и ту же пару фокусов. Найдите угол между софокусными эллипсом и гиперболой.

   Указания. Фокусы в точках c и $-c$, полуоси a и $\tilde{a}$ соответственно (эллипс и гипербола) Тогда $b^2 = a^2 - c^2$, $\tilde{b}^2 = c^2 - \tilde{a}^2$. решаем систему канонических уравнений и находим точку пересечения $(\frac{a\tilde{a}}{c}, \frac{b\tilde{b}}{c})$. Параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, гиперболы $x = \tilde{a}\operatorname{ch} t$, $y = \tilde{b}\operatorname{sh} t$. Для точки пересечения $\cos t = \frac{\tilde{a}}{c}$, $\sin t = \frac{\tilde{b}}{c}$, $\operatorname{ch} t = \frac{a}{c}$, $\operatorname{sh} t = \frac{b}{c}$. Касательные векторы $(-a\sin t, b\cos t)$ и $\tilde{a}\operatorname{sh} t, \tilde{b}\operatorname{ch} t)$ в скалярном произведении в точке пересечения дают нуль.

§2.4. Кривизна кривой. Репер Френе.

4.1. Сведения из теории. В этой теме нужно уметь находить направляющие векторы касательной, главной нормали и бинормали, а также писать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей.

Направляющий вектор касательной – это первая производная правой части векторного параметрического уравнения, то есть $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Если кривая задана относительно натурального параметра, то этот вектор всегда будет единичным.

Два способа вычисления направляющего вектора бинормали:
1) (произвольная параметризация) $\vec{p} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$;
2) (естественная параметризация) $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$. Здесь всегда будет единичный вектор.

Хуже всего обстоит дело с направляющим вектором главной нормали. К сожалению, вторая производная вектор-функции, задающей кривую, будет направляющим вектором главной нормали (причем еще и не единичным) только для естественной параметризации. Поэтому находить направляющий вектор главной нормали можно двумя способами:
1) Перейти к естественной параметризации (в общем случае бывает сложно – не берутся интегралы) и вычислять вторую производную, то есть $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Это будет нужный вектор.
2) Не переходя к естественной параметризации, вычислить направляющий вектор касательной $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Затем вычислить вторую производную $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ и найти векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}]$. Это будет направляющий вектор бинормали. Обозначим его $\vec{q}$. Тогда векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{q}]$ будет вектором, перпендикулярным и касательной и бинормали, то есть будет параллелен главной нормали. Если нужно, его можно сделать единичным. Это будет орт главной нормали.

Общее уравнение соприкасающейся плоскости к кривой γ заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (со значением параметра $t = t_0$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Нормальная плоскость задается параллельными ей векторами главной нормали и бинормали. Так как вектор главной нормали искать трудно, на нормальную плоскость лучше задать как плоскость перпендикулярную касательному вектору. Так как фиксированная система координат является прямоугольной декартовой, то здесь работает уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором: $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$.

Спрямляющая плоскость задается параллельными ей векторами касательной и бинормали. Находить мы их умеем и уравнение этой плоскости записывается по точке и паре параллельных ей векторов.

4.2. Задачи.

1. Пусть линия задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ относительно произвольного параметра. Докажите, что вектор $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ в каждой точке параллелен соприкасающейся плоскости.

   Решение. Напомним, что соприкасающаяся плоскость линии определяется как плоскость, проходящая через точку M линии, параллельно векторам $\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\vec{\nu}(s) \| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ (производные вычислены для точки M). В определении важна натуральная параметризация. А нам нужно показать, что в любой параметризации вектор второй производной от функции $\vec{r}(t)$ будет параллелен соприкасающейся плоскости, то есть нам нужно показать, что он является линейной комбинацией векторов $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.

   Рассмотрим произвольную параметризацию линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$. У этой линии есть также естественная параметризация. Обозначим вектор-функцию, задающую линию в естественной параметризации через $\vec{r} = \vec{R}(s)$. Эти две параметризации связаны между собой функцией. Обозначим ее так: $s = s(t)$. Если мы эту функцию подставим в вектор-функцию $\vec{R}(s)$, то должны получить вектор-функцию $\vec{r}(t)$, то есть

   $$\vec{r}(t) = \vec{R}(s(t)).$$

   Дифференцируем по t, используя правило дифференцирования сложной функции

   $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

   Дифференцируем еще раз, используя правило Лейбница и правило дифференцирования сложной функции,

   $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{dt}) = \frac{d^2\vec{R}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Получаем равенство
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$
Вычисляем обе части для значений параметров, соответствующих точке M. Тогда вектор $\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{\tau}(s)$ – касательный вектор, $\frac{d^2\vec{R}}{ds^2}$ – вектор кривизны, он параллелен вектору $\vec{\nu}(s)$, а остальные функции превратились (после подстановки параметра точки M) в числа. Итак, мы получили, что для произвольной точки вектор второй производной для любой параметризации параллелен соприкасающейся плоскости. □

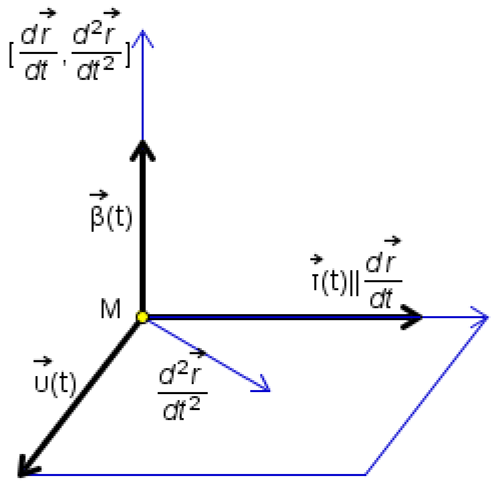
2. Пусть дана винтовая линия
$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = bt,\ t \in \mathbb{R}.$$
Найдите ее репер Френе (векторы, прямые, плоскости) в каждой точке.

Решение. В случае винтовой линии переход к натуральному параметру достаточно прост (мы проводили его на одном из прошедших семинаров). Поэтому для нее найти репер Френе проще, перейдя к естественной параметризации. Мы посмотрим другой, более длинный способ, которой годится для любой линии.

Начнем с касательного вектора. Фиксируем произвольную точку M на винтовой линии. Тогда вектор, параллельный касательному вектору τ в точке M, – это первая производная вектор-функции (не зависимо от параметризации). Он будет иметь такие координаты
$$x' = -a\sin t; \quad y' = a\cos t; \quad z' = b,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$
Чтобы вычислить сам вектор τ (это вектор единичной длины), нам нужно разделить найденный вектор на его длину. Длина будет $\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда
$$\tau(t) = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}.$$
Для нахождения соприкасающейся плоскости нам потребуется вторая производная. Находим вторую производную
$$x'' = -a\cos t; \quad y'' = -a\sin t; \quad z'' = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$
Координаты первой и второй производных вектор-функции, задающей винтовую линию, не пропорциональны, а значит, эти векторы не коллинеарны. Как мы видели выше, оба вектора параллельны соприкасающейся плоскости, следовательно, вся информация для написания уравнения соприкасающейся плоскости у нас есть: координаты точки M выдают параметрические уравнения, а координаты векторов направляющего подпространства соприкасающейся плоскости выдают формулы (2.7) и (2.8):
$$\begin{vmatrix} x - a\cos t & y - a\sin t & z - bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим общее уравнение соприкасающейся плоскости. Непривычной в нем будет буква t – параметр. При фиксированной точке M буква t такая же как буквы a и b. Это число. При изменении точки M это число будет меняться. Таким образом, в одном выражении мы получили уравнения соприкасающихся плоскостей во всех точках винтовой линии. В таких случаях говорят, что уравнение задает однопараметрическое семейство плоскостей (параметр, позволяющий выделить один объект из этого семейства, – это t).

Далее, найдем вектор, параллельный бинормали.



Этот вектор должен быть перпендикулярен соприкасающейся плоскости, то есть перпендикулярен векторам $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Если есть два вектора, чтобы получить вектор, перпендикулярный им обоим, нужно взять их векторное произведение. Вычисляем

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + a^2\vec{k}.$$

На лекциях мы немного позже докажем, что вычисляя таким образом вектор, параллельный бинормали, мы всегда получаем вектор, сонаправленный с ортом бинормали $\vec{\beta}$. Следовательно, чтобы получить орт бинормали, нам нужно полученный вектор разделить на его длину. Сначала вычислим длину:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Можем записать координаты орта бинормали.

$$\vec{\beta}(t) = \frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} - \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}.$$

Наконец, найдем орт главной нормали $\vec{\nu}(t)$. Он должен быть единичным, перпендикулярным $\vec{\tau}(t)$ и $\vec{\beta}(t)$ и тройка $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – правая тройка. Опять нас выручает векторное произведение. У нас есть $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$. Осталось сообразить, в какой последовательности их векторно перемножить. Самостоятельно убедитесь, что следующий порядок нужный

$$[\vec{\beta}(t), \vec{\tau}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.$$

Оказалось, что орт главной нормали (а значит, и сама главная нормаль винтовой линии) в любой точке линии параллелен плоскости Oxy.

Для написания уравнений нормальной и спрямляющей плоскостей вся информация есть. Напишите их самостоятельно аналогично уравнению соприкасающейся плоскости.

Наконец, напишем уравнения касательной, главной нормали и бинормали. В качестве направляющего вектора касательной возьмем вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Тогда канонические уравнения касательной будут

$$\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}.$$

Здесь записаны касательные во всех точках винтовой линии. Если выбрать конкретную точку M, то для нее определится конкретное значение t, которое в этих уравнениях будет такой же константой как буквы a и b.

Канонические уравнения главной нормали

$$\frac{x - a\cos t}{-\cos t} = \frac{y - a\sin t}{-\sin t},\ z - bt = 0.$$

Канонические уравнения бинормали

$$\frac{x - a\cos t}{ab\sin t} = \frac{y - a\sin t}{-ab\cos t} = \frac{z - bt}{a^2}$$

□

3. Докажите, что главные нормали винтовой линии пересекают ось цилиндра, на котором лежит винтовая линия, под прямым углом.

Решение. В предыдущей задаче мы уже нашли направляющий вектор бинормали: $\vec{\beta}(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$. Точка M, через которую проводится бинормаль имеет координаты $(a\cos t, a\sin t, bt)$. Что мы знаем про ось цилиндра? Она проходит через точку $(0, 0, 0)$ параллельно вектору $\vec{k}(0, 0, 1)$. Скалярное произведение $\vec{\beta}(t)$ (для любого t) и $\vec{k}$

$$\vec{\beta}(t)\vec{k} = (-\cos t)\cdot 0 + (-\sin t)\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

показывает перпендикулярность.

Осталось доказать, что ось и бинормаль пересекаются. Подумаем, как еще они в принципе могут располагаться? Совпадать не могут и параллельными быть не могут, так как угол между ними прямой. Следовательно, альтернатива пересечению – скрещивание. Чем отличаются эти два случая? Возьмем одну точку на одной прямой и еще одну точку на другой прямой. Эти точки зададут вектор. Если прямые пересекаются, то полученный вектор будет компланарен с направляющими векторами этих прямых, а если скрещиваются, то нет. На оси возьмем точку $O(0, 0, 0)$, а на бинормали точку $M(a\cos t, a\sin t, bt)$. Тогда вектор

$\overrightarrow{OM}((a\cos t, a\sin t, bt)$. Проверяем на компланарность

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ a\cos t & a\sin t & bt \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что векторы компланарны. $\square$

4. **[A]№996** От каждой точки кривой $x = \cos t$, $y = t$, $z = \sin t$ в положительном направлении главной нормали отложены отрезки длиной $\ell = 1$. Найдите уравнение кривой, образованной концами этих отрезков.

Доказательство. В этой задаче нужно нужно работать с ортом главной нормали (нам важно его направление, так как откладывать единичные отрезки нужно в том направлении, в котором он показывает). Поэтому придется перейти к натуральному параметру.

Перейдем для данной кривой γ к натуральному параметру (напомним, что $s = \int_0^t \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$:

$$s = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t} dt = \sqrt{2}t.$$

Тогда уравнения кривой γ относительно натурального параметра s будут иметь вид

$$\gamma: \, x = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \, y = \frac{s}{\sqrt{2}}, \, z = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}.$$

В такой параметризации направляющий вектор главной нормали – это вторая производная по s. Находим ее.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = -\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Находим его орт (вычисляем его длину и делим).

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\vec{\nu}$ – орт вектора главной нормали будет иметь вид

$$\vec{\nu}(s) = -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} - \sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Найдем вектор-функцию, которая будет задавать искомую кривую γ_1. Чтобы прийти в точку кривой γ_1 нужно сначала от точки O (начало фиксированной прямоугольной декартовой системы координат в трехмерном евклидовом пространстве) пройти по вектору $\vec{r}(s)$ до точки кривой γ, а затем по вектору $\vec{\nu}(s)$ дойти до точки на кривой γ_1. В результате мы получаем вектор-функцию

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(s) + \vec{\nu}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Это прямая, а именно ось Oy. Заметим, что для нее параметр s уже не будет натуральным (докажите это самостоятельно).

P.S. (для интересующихся) Ответ ожидаемый. Исходная линия γ – это винтовая линия, она накручивается на прямой круговой цилиндр радиуса 1 (посмотрите на уравнение кривой и вспомните, как от параметрических уравнений кривой перейти к неявным уравнениям). Главные нормали будут перпендикулярны оси цилиндра, орт вектора главной нормали будет направлен внутрь цилиндра. Если от каждой точки винтовой линии γ отложить орт главной нормали, то их концы в точности попадут на ось цилиндра.

А что будет, если сдвинуться по орту главной нормали еще на 1, то есть отложить от точки кривой по направлению орта главной нормали отрезки длины 2? Что это за кривая?

Что интересного можно сказать о бинормалях винтовой линии? Какая линия получится, если в положительном направлении каждой бинормали отложить отрезок постоянной длины? $\square$

5. **[A] №973** Покажите, что нормальные плоскости кривой $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\cos t$ проходят через одну точку. Найдите координаты этой точки.

Доказательство. Вспоминаем, что нормальная плоскость – это плоскость, параллельная векторам главной нормали и бинормали. Вектор главной нормали искать достаточно трудно. Поэтому постараемся посмотреть на нормальную плоскость с другой стороны. Эта плоскость перпендикулярна направляющему вектору касательной, причем все равно единичный вектор мы берем или нет. Он вычисляется в произвольной параметризации (правда не всегда попадем на единичный вектор, но это и не важно в данной задаче). Поэтому нормальную плоскость будем задавать с помощью уравнения по точке и перпендикулярному вектору.

Находим направляющий вектор касательной:

$$x'(t) = 2a\sin t\cos t;\ y'(t) = a(\cos^2 t - \sin^2 t);\ z'(t) = -a\sin t.$$

Тогда применяя формулу $(x-x_0)n_1 + (y-y_0)n_2 + (z-z_0)n_3 = 0$ для уравнения плоскости по точке (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярному вектору (n_1, n_2, n_3), получим, что уравнение нормальной плоскости, проходящей через точку $M(a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ перпендикулярно вектору $(2a\sin t\cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a\sin t)$ имеет вид

$$(2\sin t\cos t)x + (\cos^2 t - \sin^2 t)y - \sin t z = 0.$$

Мы видим, что все такие плоскости проходят через точку с координатами $(0, 0, 0)$, то есть через начало фиксированной прямоугольной декартовой системы координат. $\square$

6. **[A]№984** Из произвольной точки кривой $z = \frac{x^2}{3}$, $xy = 1$ опущен перпендикуляр на ось Ox. Покажите, что бинормаль кривой в этой точке образует с перпендикуляром прямой угол.

Решение. Заметим сначала, что кривая в этой задаче задана в неявном виде, а с бинормалью мы умеем работать только при параметрическом задании кривой (вид параметризации не важен). Поэтому придется переходить к параметрическим уравнениям. Применяем самый простой способ: одну (удобную) букву обозначаем через t, а две остальные выражаем через нее.

$$x = t;\ y = t^{-1};\ z = \frac{1}{3}t^2,\ t \neq 0.$$

Нужно найти угол между бинормалью и перпендикуляром. Значит нужны направляющие векторы бинормали (все равно какой) и перпендикуляра. Сначала найдем направляющий вектор бинормали. Хотя параметризация у кривой произвольная, первая и вторая производные правой части ее векторного параметрического уравнения будут параллельны соприкасающейся плоскости и их векторное произведение будет направляющим вектором бинормали (напомним, что бинормаль перпендикулярна соприкасающейся плоскости). Вычисляем

$$\begin{array}{lll} x'(t) = 1; & y'(t) = -t^{-2}; & z'(t) = \frac{2}{3}t \\ x''(t) = 0; & y''(t) = 2t^{-3}; & z''(t) = \frac{2}{3}. \end{array}$$

Возиться с дробями не хочется, поэтому перейдем от найденных векторов к коллинеарным им векторам (каждый умножим на 3, а второй еще разделим на 2). При этом их векторное произведение не перестает быть параллельным бинормали. Вычисляем векторное произведение.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3t^{-2} & 2t \\ 0 & 3t^{-3} & 1 \end{vmatrix} = -9t^{-2}\vec{i} - 3\vec{j} + 9t^{-3}\vec{k}.$$

Итак, направляющий вектор бинормали $\vec{p}(3t, t^3, -3)$, $t \neq 0$ (опять чтобы не возиться с дробями мы разделили на -3 и умножили на t^3).

Теперь найдем направляющий вектор перпендикуляра, опущенного из точки $M(t, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$ кривой на ось Ox. Обозначим основание перпендикуляра через H. Так как точка H лежит на оси Ox, вторая и третья координаты у нее нулевые, а первую мы не знаем. Поэтому обозначим ее через a, то есть $H(a, 0, 0)$. Нужно найти a. А что это означает в данной задаче? Ситуация такая: точка M движется по данной кривой γ (то есть меняется значение параметра t, его подставляем в параметрические уравнения γ и вычисляем координаты точки M). Вместе с точкой M двигается перпендикуляр MH, а значит и точка H. Ее положение также однозначно определяется значением параметра t. Таким образом, нам нужно выразить неизвестное a через t. Воспользуемся тем, что $\overrightarrow{HM}(t - a, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$ перпендикулярно Ox, то есть вектору $\vec{i}(1, 0, 0)$. По формуле для вычисления скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе получаем $(t - a)1 = 0$, то есть $a = t$. Итак, $H(t, 0, 0)$. А нам нужен направляющий вектор перпендикуляра. Годится вектор $\overrightarrow{HM}$. Его координаты $(0, t^{-1}, \frac{1}{3}t^2)$.

Направляющие векторы бинормали и перпендикуляра на ось Ox есть, вычисляем их скалярное произведение

$$(3t)0 + (t^3)t^{-1} + (-3)\frac{1}{3}t^2 = 0.$$

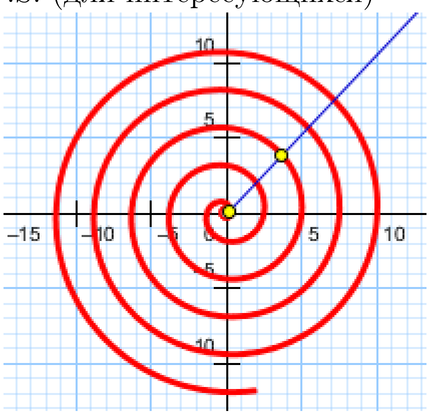
Скалярное произведение нуль, следовательно, векторы перпендикулярны. □

4.3. Домашнее задание.

1. Найдите репер Френе (векторы, прямые, плоскости) для винтовой линии, перейдя к естественной параметризации.

2. Пусть дана линия $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t > 0$. Покажите, что эта линия лежит на конусе. Найдите ее репер Френе (векторы, прямые, плоскости) в произвольной точке.

   P.S. (для интересующихся)

   Линия, лежащая в плоскости Oxy и задающаяся уравнениями $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $t > 0$, где a – константа, называется *спиралью Архимеда*. Она получается следующим образом: луч с началом в начале системы координат вращается с единичной скоростью. Точка M, лежащая на луче вращается вместе с ним и еще равномерно движется по лучу со скоростью a.

   В данной задаче точка M в плоскости Oxy как раз движется по спирали Архимеда (посмотрите на первые два уравнения, причем ее скорость движения по лучу равна скорости вращения луча). Кроме того, третье уравнение говорит о том, что точка M с такой же единичной скоростью движется вдоль оси Oz. Будем называть эту линию *конической винтовой линией*.

   Для винтовой линии мы увидели, что главные нормали перпендикулярны оси цилиндра и пересекают ее, и угол между ней и прямолинейной образующей в их общей точке постоянен. Будут ли эти свойства сохраняться для конической винтовой линии?

3. **[А]№978** Покажите, что все нормальные плоскости кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ проходят через некоторую фиксированную точку. Определите координаты этой точки.

4. **[А]№987** На кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ найдите значения параметров точек, главные нормали в которых пересекают ось Ox.

4.4. Дополнительные задачи.

1. **[А]№994** (эта задача будет последней в следующем семинаре) Докажите, что кривая, образованная концами отрезков постоянной длины, отложенных на главных нормалях некоторой кривой от каждой ее точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

   Решение. Зададим исходную кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра s. Тогда вторая кривая γ_1 будет иметь уравнение $\vec{r}_1(s) = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$, где $c = const$ – длина отрезка (от начала координат O доходим по вектору $\vec{r}(s)$ до точки кривой γ, затем по стрелке орта главной нормали идем на длину отрезка c). Отметим, что для кривой γ_1 параметр s уже не будет натуральным.

   Нам нужен угол между касательным вектором к γ_1 в точке со значением параметра s и ортом главной нормали $\vec{\nu}(s)$ для того же значения параметра. Находим касательный вектор
$$\vec{\tau}_1(s) = \frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + c\frac{d\vec{\nu}}{ds} =$$
   Для кривой γ параметр s натуральный, следовательно можно применять формулы Френе.
$$= \vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$
   Вычисляем скалярное произведение $\vec{\tau}_1(s)\vec{\nu}(s)$
$$\vec{\tau}_1(s)\vec{\nu}(s) = (\vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)))\vec{\nu}(s) = 0,$$
   так как векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ перпендикулярны вектору $\vec{\nu}(s)$. □

2. **[А]№986** Напишите уравнение главной нормали винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(a > 0,\ b > 0)$ и покажите, что все главные нормали этой линии лежат на поверхности $y = x\frac{b}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{b}$.

3. Покажите, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ параллельны плоскости Oxy.

4. **[А] №997** От каждой точки кривой $x = \cos\alpha\cos t$, $y = \cos\alpha\sin t$, $z = t\sin\alpha$, $\alpha = const$ на бинормалях отложены отрезки единичной длины. Определите угол θ, под которым бинормали новой кривой, образованной концами этих отрезков, пересекают бинормали заданной кривой.

5. **[А]№980** Дана кривая $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Докажите, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к этой кривой в любой ее точке имеет постоянное направление.

§2.5. Кривизна и кручение линии. Формулы Френе.

5.1. Сведения из теории. Формулы Френе для линии, заданной в натуральной параметризации $\vec{r} = \vec{r}(s)$:
$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s);\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s);\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Формулы для вычисления кривизны и кручения для линии, заданной векторным параметрическим уравнением в произвольной параметризации

$$k(t) = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}; \quad \varkappa(t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

1. Линия является прямой (или ее частью) тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кривизна равна нулю.
2. Линия является плоской тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кручение равно нулю. При этом линия лежит в своей соприкасающейся плоскости.

Воспоминания из аналитической геометрии:
1. Формула для вычисления векторного произведения векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Формула для вычисления длины вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

3. Формула для вычисления смешанного произведения векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5.2. Задачи.

1. Найдем кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbb{R}$.

   Решение. Пользуемся формулами для вычисления кривизны и кручения. Переход к натуральной параметризации здесь не выгоден. В предыдущих семинарах мы уже получили часть нужной для этих формул информации. Вспомним ее. Есть

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(-a\sin t, a\cos t, b);$$
$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + a^2\vec{k};$$
$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt}\right]\right| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

   Находим

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

И еще потребуется третья производная вектор-функции $\vec{r}(t)$. Вторая производная была уже вычислена

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0).$$

Тогда третья производная будет

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(a\sin t, -a\cos t, 0).$$

Смотрим в формулы для кривизны и кручения и видим, что еще нужно вычислить смешанное произведение

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = ba^2.$$

Все подставляем в формулы

$$k(t) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2};\ \varkappa(t) = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Мы видим, что кривизна и кручения винтовой линии постоянны. $\square$

2. Найдите кривизну и кручение линии, заданной неявно уравнениями $x^2+y^2=1$, $x-z+2=0$ в точке $(1,0,3)$.

Доказательство. Вычислять кривизну и кручение для кривой, заданной неявно, мы не умеем. Поэтому либо нужно выводить новые формулы, либо переходить к параметрическому заданию кривой. Выберем второй путь. Параметрические уравнения данной кривой имеют вид

$$x(t) = \cos t;\ y(t) = \sin t;\ z(t) = 2+\cos t.$$

Для кручения мы можем сразу дать ответ (какой и почему?) Остается вычислить две производные, необходимые для нахождения кривизны.

$$\begin{aligned} &x'(t) = -\sin t; && y'(t) = \cos t; && z'(t) = -\sin t \\ &x''(t) = -\cos t; && y''(t) = -\sin t; && z''(t) = -\cos t. \end{aligned}$$

Так как нам нужно вычислить кривизну в конкретной точке, дальнейшие вычисления мы можем проводить только для векторов в этой точке. Для этого вычислим значение параметра t, которое соответствует точке $(1,0,3)$. Подставляем в параметрические уравнения: $1=\cos t$, $0=\sin t$, $3=2+\cos t$. Откуда получаем, что $t=0$. Тогда координаты векторов первой и второй производных в точке со значением параметра $t=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} &x'(0) = 0; && y'(0) = 1; && z'(0) = 0 \\ &x''(0) = -1; && y''(0) = 0; && z''(0) = -1. \end{aligned}$$

Вычислим векторное произведение этих векторов

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=0}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\bigg|_{t=0}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}.$$

Длина этого вектора $\sqrt{2}$. Длина вектора

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=0}\right| = 1.$$

Тогда кривизна в точке $(1, 0, 3)$ равна $k(0) = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$. □

3. **[Г] 6.60 б)** Докажите, что линия $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 2$, $z = t^3$ плоская и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.

Решение. Чтобы убедиться, что линия плоская, нам нужно посчитать ее кручение. Оно должно быть равно нулю во всех точках этой линии. Либо можно сразу увидеть плоскость, в которой лежит эта линия. Если плоскость не увидели, то идем длинным путем. Для кручения нам нужны три производные. Начинаем вычисления с них.

$$\begin{array}{lll} x'(t) = 2t & y'(t) = 2t & z'(t) = 3t^2 \\ x''(t) = 2 & y''(t) = 2 & z''(t) = 6t \\ x'''(t) = 0 & y'''(t) = 0 & z'''(t) = 6 \end{array}$$

Посмотрим на формулу для вычисления кручения: это дробь. Дробь будет нулем тогда и только тогда, когда нулем будет ее числитель. Значит, знаменатель нас не интересует и вычислять векторное произведение не нужно. Вычисляем числитель, то есть смешанное произведение производных

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6(4t - 4t) = 0.$$

Итак, мы убедились, что линия действительно плоская. Напишем уравнение плоскости, в которой лежит эта линия. Вспомним, что все плоские линии лежат в своих соприкасающихся плоскостях. Значит, нам нужно написать уравнение соприкасающейся плоскости. Эта плоскость будет одной и той же для всех точек данной линии. Значит, нам имеет смысл выбрать точку попроще. Самое простое, что приходит в голову, взять точку со значением параметра $t = 0$. Но – посмотрим на первую производную – в этой точке нарушается условие гладкости линии (все три координаты первой производной радиус-вектора в этой точке обращаются в нуль). Поэтому возьмем точку, которой соответствует значение $t = 1$, то есть точку $(0, 3, 1)$. Напишем в ней уравнение соприкасающейся плоскости. Для этого найдем какой-нибудь направляющий вектор бинормали $\vec{p}$. Для этого нужно найти векторное произведение векторов первой и второй производной $\vec{r}(t)$ в этой точке. Имеем

$$x'(1) = 2 \quad y'(1) = 2 \quad z'(1) = 3$$
$$x''(1) = 2 \quad y''(1) = 2 \quad z''(1) = 6$$

Вектор второй производной заменим на коллинеарный ему вектор $(1, 1, 3)$. Тогда

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Опять, упрощая себе жизнь, от найденного вектора переходим к коллинеарному ему вектору $(1, -1, 0)$ (он по-прежнему будет параллелен бинормали, а значит, годится нам). Пишем уравнение плоскости по точке и перпендикулярному вектору.

$$x - (y - 3) = 0.$$

Это уравнение искомой плоскости. В данном случае его легко было подобрать, исходя из параметрических уравнений кривой. $\square$

4. **[Б] №1675** Докажите, что формулы Френе могут быть записаны в виде

$$\tfrac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\tau}]; \quad \tfrac{d\vec{\nu}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\nu}]; \quad \tfrac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\beta}].$$

Вектор $\vec{\omega}$ называется *вектором Дарбу*. Найдите его координаты в подвижном репере $(M, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$.

Решение. Вектор $\vec{\omega}$ при движении вдоль кривой γ меняется, то есть это не совсем вектор (хотя так он называется), а вектор-функция. Значит, мы должны обозначать его $\vec{\omega}(s)$. Разложим в каждой точке кривой γ вектор $\vec{\omega}(s)$ по векторам подвижного репера.

$$\vec{\omega}(s) = a(s)\vec{\tau}(s) + b(s)\vec{\nu}(s) + c(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем коэффициенты разложения, используя формулы Френе.

$$k(s)\vec{\nu}(s) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{\omega}(s), \vec{\tau}(s)] = [a(s)\vec{\tau}(s) + b(s)\vec{\nu}(s) + c(s)\vec{\beta}(s), \vec{\tau}(s)] = b(s)\vec{\beta}(s) + c(s)\vec{\nu}.$$

В силу линейной независимости векторов подвижного репера в каждой точке, получаем, что $b(s) = 0$, $c(s) = k(s)$.

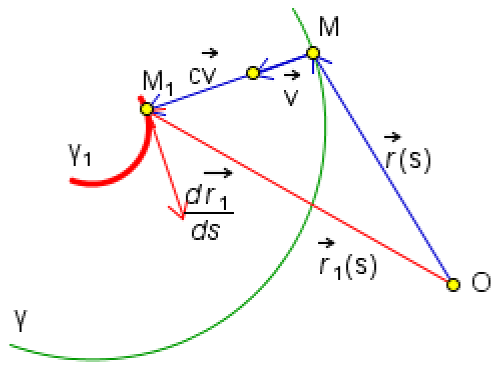
Проведем аналогичное рассуждение со третьей формулой Френе.

$$-\varkappa(s)\vec{\nu}(s) = \frac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{\omega}(s), \vec{\beta}(s)] = [a(s)\vec{\tau}(s) + k(s)\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s)] = -a(s)\vec{\nu}(s).$$

Откуда получаем, что $a(s) = \varkappa(s)$. Итак, вектор Дарбу имеет вид $\vec{\omega}(s) = \varkappa(s)\vec{\tau}(s) + k(s)\vec{\beta}(s)$. Непосредственная проверка показывает, что вектор Дарбу удовлетворяет второй формуле Френе (проведите вычисления самостоятельно). $\square$

5. **[А]№994** Докажите, что кривая, образованная концами отрезков постоянной длины, отложенными на главных нормалях некоторой кривой от каждой ее точки, пересекает эти нормали под прямым углом.

Решение. Пусть дана кривая γ.



Зададим ее векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра. Обозначим длину отрезка, который будем откладывать на главной нормали этой кривой через c, а полученную кривую – через γ_1. Как мы получаем точки кривой γ_1?

Сначала нужно пройти от точки O (начало фиксированной декартовой системы координат) до точки M (пусть ей соответствует значение параметра s), принадлежащей кривой γ, а затем в направлении вектора $\vec{\nu}(s)$ сместиться на отрезок длины c, то есть сместиться на вектор $c\vec{\nu}(s)$. Получим точку M_1 кривой γ. И, перебирая таким образом все точки кривой γ, мы получим все точки кривой γ_1. Другими словами, точки кривой γ_1 будут задаваться радиус-векторами $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$. Это векторное параметрическое уравнение кривой γ_1. Нам нужно показать, что кривая γ_1 пересекает главные нормали под прямым углом, то есть, что угол между направляющим вектором касательной к γ_1 в точке M_1 и вектором $\vec{\nu}(s)$ в соответствующей точке $M \in \gamma$ прямой. Найдем какой-нибудь направляющий вектор касательной к кривой γ в точке M_1. Заметим, что параметр s не будет натуральным параметром в векторном параметрическом уравнении $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + c\vec{\nu}(s)$, задающим кривую γ_1, но этого нам и не нужно. Мы знаем, что первая производная $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ (в точке со значением параметра s) относительно любого параметра будет направляющим вектором касательной в этой точке. Вычисляем ее.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + c\frac{d\vec{\nu}}{ds} =$$

А вот для кривой γ параметр s является натуральным и для нее работают формулы Френе. Тогда, продолжая цепочку равенств, получим

$$= \vec{\tau}(s) + c(-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)).$$

Итак, направляющий вектор касательной к γ_1 в произвольной ее точке со значением параметра s имеет вид

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = (1 - ck(s))\vec{\tau}(s) + c\varkappa(s)\vec{\beta}(s).$$

Найдем скалярное произведение $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ и $\vec{\nu}(s)$.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds}\vec{\nu}(s) = ((1 - ck(s))\vec{\tau}(s) + c\varkappa(s)\vec{\beta}(s))\vec{\nu}(s) = 0.$$

Здесь мы воспользовались попарной ортогональностью векторов подвижного репера. Итак, мы получили, что в каждой точке M_1 кривая γ_1 перпендикулярна главной нормали кривой γ в соответствующей точке M. $\square$

5.3. Домашнее задание.

1. Выясните, будут ли постоянными кривизна и кручение конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t > 0$.
2. **[Г] 6.58 г)** Найдите кривизну и кручение кривой $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ в произвольной ее точке.
3. **[Г] 6.59 б)** Найдите кривизну и кручение линии, заданной уравнениями $y^2 = x$, $x^2 = z$ в произвольной точке.
4. **[Г] 6.60 д)** Докажите, что линия $x = t + \ln t$, $y = t$, $z = \ln t$, $t > 0$ является плоской и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.
5. Докажите, что для любой кривой, заданной векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ относительно натурального параметра, выполняются равенства 1) $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^2 = k^4(s) + k^2(s)\varkappa^2(s) + (k'(s))^2$; 2) $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3\vec{r}}{ds} = -k^2(s)$; 3) $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = k(s)k'(s)$.
   Указания. Используйте формулы Френе.

5.4. Дополнительные задачи.

1. **[А]№1008** Докажите, что если для данной кривой отношение кривизны и кручения есть постоянное число λ, то вектор $\vec{p} = \vec{\tau} + \lambda\vec{\beta}$ не меняется вдоль кривой и угол, образованный касательной к кривой с этим вектором, также остается неизменным.

Решение. Зададим кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в естественной параметризации. По условию $k(s) = \lambda\varkappa(s)$, где λ – число (оно не меняется при изменении s). Подставим это соотношение в первую формулы Френе и сравним с третьей.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lambda\varkappa(s)\vec{\nu}(s);\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Тогда получим $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\lambda\frac{d\vec{\beta}}{ds}$. Переносим в одну сторону и интегрируем.

$$\frac{d}{ds}(\vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s)) \Rightarrow \vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s) = \vec{p}.$$

Вектор $\vec{p}$ – постоянный вектор.

Вычислим угол между этим вектором $\vec{p} = \vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s)$ и направляющим вектором касательной. Это вектор $\vec{\tau}(s)$.

$$\cos\angle(\vec{\tau}(s), \vec{p}) = \frac{\vec{\tau}(s)\vec{p}}{|\vec{\tau}(s)||\vec{p}|} = \frac{\vec{\tau}(s)(\vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s))}{1\cdot\sqrt{(\vec{\tau}(s) + \lambda\vec{\beta}(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{\tau}(s))^2 + 2\lambda\vec{\tau}(s)\vec{\beta}(s) + \lambda^2(\vec{\beta}(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

$\square$

2. Докажите, что (обыкновенная) винтовая линия обладает следующими свойствами: 1) ее касательные образуют постоянный по величине угол с некоторым направлением, 2) ее бинормали образуют постоянный угол с некоторым направлением, 3) ее главные нормали параллельны некоторой плоскости, 4) $k(s) = \lambda\varkappa(s)$, где λ – некоторая константа.

   Указания. Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где $a, b > 0$ – постоянные, $t \in \mathbb{R}$. Дальше считайте по формулам, проверяя свойства.

3. **[Б] №1671** Докажите, что если неплоская линия обладает одним из следующих свойств: 1) ее касательные образуют постоянный по величине угол с некоторым направлением, 2) ее бинормали образуют постоянный угол с некоторым направлением, 3) ее главные нормали параллельны некоторой плоскости, 4) $k(s) = \lambda\varkappa(s)$, где λ – некоторая константа, то она обладает и остальными тремя свойствами. Такая линия называется *обобщенной винтовой линией.* (Г.А. Гайден "Об обобщенной винтовой линии в римановом пространстве"(1930))

   Решение. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть кривая γ задана $\vec{r} = \vec{r}(s)$. По условию вектор $\vec{\tau}(s)$ образует постоянный угол с некоторым направлением, заданным вектором $\vec{p}$. Возьмем $\vec{p}$ по длине равным 1. Так как длина вектора $\vec{\tau}(s)$ тоже 1, получаем, что скалярное произведение $\vec{\tau}(s)\vec{p}$ есть величина постоянная. Обозначим ее c, то есть $\vec{\tau}(s)\vec{p} = c$. Продифференцируем это равенство по s: $\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{p} = 0$. Воспользуемся первой формулой Френе: $(k(s)\vec{\nu}(s))\vec{p} = 0$. Если $k(s) = 0$, то $\vec{\nu}(s) = \vec{0}$ и по определению он перпендикулярен любому вектору, в частности, вектору $\vec{p}$. Если $k(s) \neq 0$, то $\vec{\nu}(s)\vec{p} = 0$, то есть $\vec{\nu}(s)$ перпендикулярен вектору $\vec{p}$. По третьей формуле Френе $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s)$. Умножим скалярно обе части на $\vec{p}$: $\frac{d}{ds}(\vec{\beta}(s)\vec{p}) = 0$ или $\vec{\beta}(s)\vec{p} = \xi = const$. Так как оба вектора единичные, угол будет постоянным. Заметим, что это то же самое направление, что и для вектора $\vec{\tau}(s)$.

   2) $\Rightarrow$ 3). Пусть вектор $\vec{\beta}(s)$ образует постоянный угол с некоторым вектором $\vec{q}$, то есть $\vec{\beta}(s)\vec{q} = c = const$. Продифференцируем это равенство и воспользуемся формулами Френе: $\vec{\nu}(s)$ перпендикулярен $\vec{q}$ для каждого значения s. Возьмем плоскость σ, перпендикулярную вектору $\vec{q}$. Тогда для любого s вектор $\vec{\nu}(s)$ будет параллелен плоскости σ.

   3) $\Rightarrow$ 4). Пусть существует плоскость σ, которой параллельны векторы $\vec{\nu}(s)$ при любом s. Обозначим через $\vec{q}$ вектор, который перпендикулярен σ (его длина равна 1). Рассмотрим скалярное произведение $\vec{\tau}(s)\vec{q}$. Продифференцируем его по s и воспользуемся формулами Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{q} = (k(s)\vec{\nu}(s))\vec{q} = k(s)(\vec{\nu}(s)\vec{q} = 0,$$

   то есть $\vec{\tau}(s)\vec{q} = \xi = cosnt$. Аналогично получаем, что $\vec{\beta}(s)\vec{q} = c = const$. Продифференцируем по s равенство $\vec{\nu}(s)\vec{q}$ и воспользуемся формулами Френе:

$$0 = \frac{d\vec{\nu}}{ds}\vec{q} = (-k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa\vec{\beta}(s))\vec{q} = -k(s)\xi + \varkappa(s)c.$$

Откуда получаем, что $k(s)=\frac{c}{\xi}\varkappa(s)$.

4) $\Rightarrow$ 1). Уже доказывали.

$\square$

4. Докажите, что неплоская линия является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда смешанное произведение $\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right)=0$.

   Указания. Докажите, что для этой линии $k(s)=\lambda\varkappa(s)$.

5. **[Б]№1672** Докажите, что линия $x^2=3y$, $2xy=9z$ является обобщенной винтовой линией (это пересечение параболического цилиндра и гиперболического параболоида).

6. **[Б] №1673** Докажите, что линия $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$, $t>0$ является обобщенной винтовой линией.

§2.6. Плоские кривые.

6.1. Сведения из теории. Линия γ называется *плоской*, если все ее точки лежат в одной плоскости. Выберем прямоугольную декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ так, чтобы линия γ лежала в плоскости Oxy. В этой плоскости есть система координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ – часть пространственной системы координат. Очевидно, что она тоже прямоугольная декартова. В этой системе координат линия γ задается векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, где

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}.$$

Для плоской кривой направляющий вектор касательной вычисляется так же $\frac{d\vec{r}}{dt}$. В случае, если параметр натуральный (обозначается s), то это будет единичный вектор $\vec{\tau}(s)$. Касательная в точке со значение параметра t_0 задается уравнением

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Длина дуги кривой вычисляется также как и в общем случае

$$s=\int_{t_0}^{t_1}|\frac{d\vec{r}}{dt}|dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Кривизна и орт главной нормали определяются также как в общем случае: $\frac{d^2\vec{r}}{ds}=k(s)\vec{\nu}(s)$. Для произвольного параметра t формула вычисления кривизны

$$k(t)=\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

приобретает вид

$$k(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Орт вектора бинормали постоянен и параллелен оси Oz. Поэтому интереса не представляет. В связи с этим для плоских линий главную нормаль называют просто нормалью.

Так как для плоской кривой кручение тождественно равно нулю, формулы Френе принимают вид

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s); \ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s).$$

Из двух натуральных уравнений линии остается одно: $k = k(s)$.

6.2. Задачи.

1. Найдите касательную, нормаль и кривизну эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его произвольной точке.

   Решение. Запишем параметрические уравнения эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда направляющий вектор касательной (в точке со значением параметра t_0) имеет координаты $(-a\sin t_0, b\cos t_0)$. Уравнение касательной в точке со значением параметра t_0 будет иметь вид

   $$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0}$$

   или $b\cos t_0 x + a\sin t_0 y = ab$. Умножим обе части на ab и обозначим $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$. Тогда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ или более привычно

   $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

   Нормаль проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно касательной. Следовательно, ее направляющий вектор – это вектор нормали для касательной, то есть вектор (b^2x_0, a^2y_0). Пишем уравнение нормали $\frac{x-x_0}{b^2x_0} = \frac{y-y_0}{a^2y_0}$ или $a^2y_0x - b^2x_0y = (a^2 - b^2)x_0y_0$.

   В частности, если эллипс является окружностью ($a = b$), то нормаль будет иметь такое красивое уравнение $y_0x - x_0y = 0$.

   Вычислим кривизну по формуле.

   $$k(t) = \frac{|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t|}{(\sqrt{a^2\sin^t + b^2\cos^2 t})^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin^t + b^2\cos^2 t})^3}.$$

   В частности, для окружности ($a = b$) получим $k(t) = \frac{1}{a}$, то есть кривизна окружности в каждой ее точке обратно пропорциональна ее радиусу. □

2. Пусть линия γ задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ относительно произвольного параметра t. Фиксируем значение параметра $t = t_0$. Тогда точка C, определяемая радиус-вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{\nu}(t_0)$ называется *центром кривизны* линии γ в точке со значением параметра t_0. Окружность с центром в точке C и радиусом $\frac{1}{k(t_0)}$ называется соприкасающейся окружностью линии γ в точке со значением параметра t_0.

3. Найдите уравнение соприкасающейся окружности к эллипсу в его произвольной точке (каноническая система координат эллипса).

Решение. Фиксируем на эллипсе произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Ее координаты связаны со значением параметра t_0 в этой точке так: $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$. В этой точке мы уже вычислили в предыдущей задаче кривизну

$$k(t_0) = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin_0^t + b^2\cos^2 t_0})^3} = \frac{a^4b^4}{(\sqrt{a^4y_0^2 + b^4x_0^2})^3}.$$

Радиус R соприкасающейся окружности равен $\frac{1}{k(t_0)}$. Значит,

$$R = \frac{(\sqrt{a^4y_0^2 + b^4x_0^2})^3}{a^4b^4}.$$

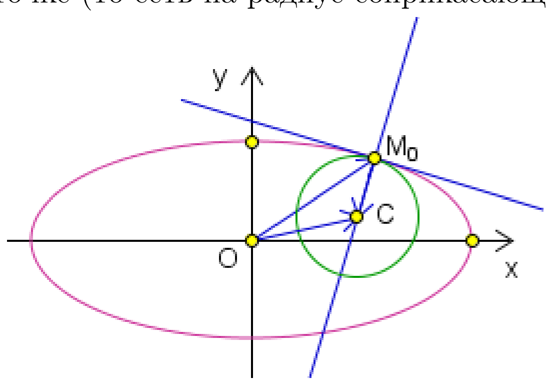
Найдем теперь центр. Для этого нам нужен орт нормали. У нас есть направляющий вектор касательной $\frac{d\vec{r}}{dt}(-a\sin t_0, b\cos t_0)$. Берем к нему перпендикулярный вектор $\vec{p}$ так, чтобы пара $(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p})$ образовывала правый базис. Чтобы взять перпендикулярный вектор, нужно у исходного вектора поменять координаты и перед одной поставить минус. Берем $(b\cos t_0, a\sin t_0)$. Проверяем ориентацию пары. Для этого составляем определитель

$$\begin{vmatrix} -a\sin t_0 & b\cos t_0 \\ b\cos t_0 & a\sin t_0 \end{vmatrix} < 0.$$

Получился левый. Значит, нам нужен вектор $-\vec{p}(-b\cos t_0, -a\sin t_0)$. Осталось взять его орт, то есть разделить на его длину. Мы получаем вектор $\vec{\nu}(t_0)\left(\frac{-b\cos t_0}{\sqrt{b^2\cos^2 t_0 + a^2\sin^2 t_0}}, \frac{-a\sin t_0}{\sqrt{b^2\cos^2 t_0 + a^2\sin^2 t_0}}\right)$. Если подставить значение t_0 из параметрических уравнений эллипса, то получим

$$\vec{\nu}(t_0)\left(\frac{-b^2x_0}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}, \frac{-a^2y_0}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}\right)$$

Нам осталось пройти по этому вектору на расстояние, обратное кривизне эллипса в этой точке (то есть на радиус соприкасающейся окружности) и мы окажемся в ее центре.



Обозначим центр соприкасающейся окружности через C. Найдем радиус-вектор этой точки. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0C} = \overrightarrow{OM_0} + \frac{1}{k(t_0)}\vec{\nu}(t_0).$$

Вычисляем координаты вектора $\overrightarrow{OC}$ (координаты векторов правой части у нас уже найдены) и получаем

$$\overrightarrow{OC}\left(\frac{-x_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^4b^2} + x_0, \frac{-y_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^2b^4} + y_0\right).$$

Осталось вспомнить, что координаты точки – это координаты ее радиус-вектора. Центр есть и радиус есть. Пишем уравнение окружности

$$\left(x + \frac{x_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^4b^2} - x_0\right)^2 + \left(y + \frac{y_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^2b^4} - y_0\right)^2 = \frac{(\sqrt{a^4y_0^2 + b^4x_0^2})^6}{a^8b^8}.$$

□

Множество центров кривизны для всех точек данной линии γ называется ее *эволютой* этой линии. Обозначение γ_e. Сама линия γ называется эвольвентой линии γ_e.

4.

5. **[Г] пример 6.22** Найдите эволюту эллипса.

Доказательство. В предыдущей задаче мы уже получили зависимость координат точки C – центра соприкасающейся окружности – и координат точки $M_0(x_0, y_0)$, бегающей по эллипсу:

$$x = \frac{-x_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^4b^2} + x_0; \quad y = \frac{-y_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}{a^2b^4} + y_0.$$

Вернемся от координат (x_0, y_0) к параметру t_0, используя параметрические уравнения эллипса $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$.

$$x = a\cos t_0 - \frac{a\cos t_0(a^4b^2\sin^2 t_0 + b^4a^2\cos^2 t_0)}{a^4b^2} = a\cos t_0 - a\cos t_0\sin^2 t_0 - \frac{b^2}{a}\cos^3 t_0 =$$
$$= a\cos^3 t_0 - \frac{b^2}{a}\cos^3 t_0 = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t_0.$$

Проводя аналогичные вычисления со второй координатой, получим

$$y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t_0.$$

Теперь отпускаем точку M_0 бегать по эллипсу. Параметр t меняется и получаем параметрические уравнения эволюты эллипса

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t; \; y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Это астроида. Правда, коэффициенты перед косинусом и синусом разные. Поэтому в отличие от рассмотренного нами выше случая астроиды с одинаковыми коэффициентами, эта будет вытянутой вдоль одной из осей. □

6. **[А]№1010** Даны две гладкие кривые γ и γ_1. Докажите, что если между их точками можно установить соответствие так, чтобы в соответствующих точках они имели одну и ту же бинормаль, то эти кривые плоские.

Решение. Зададим кривую γ с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r} = \vec{r}(s)$ с естественным параметром. Тогда кривую γ_1 можно задать так: $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + \alpha(s)\vec{\beta}(s)$ (к точкам кривой γ_1 идем следующим образом: сначала доходим до точки $M \in \gamma$ по вектору $\vec{r}(s)$, а затем по общей бинормали в направлении орта бинормали кривой γ проходим отрезок длины $\alpha(s)$ до точки M_1 кривой γ_1, которая соответствует точке M). Заметим, что для кривой γ_1 параметр s уже не будет натуральным.

Продифференцируем вектор-функцию $\vec{r}_1(s)$ по параметру s и учтем формулы Френе, которые работают с вектор-функциями, определенными для γ.

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + \alpha'(s)\vec{\beta}(s) + \alpha(s)\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau}(s) + \alpha'(s)\vec{\beta}(s) + \alpha(s)(-\varkappa(s)\vec{\nu}(s)).$$

Для каждого значения s вектор $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ есть направляющий вектор касательной, следовательно он перпендикулярен направляющему вектору $\vec{p}(s)$ бинормали кривой γ_1. Этот вектор параллелен орту бинормали $\vec{\beta}(s)$ кривой γ. Тогда вектор $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$ перпендикулярен $\vec{\beta}(s)$ и раскладывается только по векторам $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ подвижного репера. Другими словами, коэффициент при $\vec{\beta}(s)$ в разложении этого вектора равен нулю, то есть $\alpha'(s) = 0$, то есть $\alpha(s) = \alpha$ – константа.

Вычислим вторую производную для вектор-функции $\vec{r}_1(s)$ (опять пользуемся формулами Френе, где это возможно).

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau}(s)-\alpha\varkappa(s)\vec{\nu}(s)) = \frac{d\vec{\tau}}{ds}-\alpha(\varkappa'(s)\vec{\nu}(s)+\varkappa(s)\frac{d\vec{\nu}}{ds}) = k(s)\vec{\nu}(s)-\alpha\varkappa'(s)\vec{\nu}(s)-\alpha\varkappa(s)k(s)\vec{\tau}(s)-\alpha\varkappa^2(s)$$

Таким образом,

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s) - \alpha\varkappa'(s)\vec{\nu}(s) - \alpha k(s)\varkappa(s)\vec{\tau}(s) - \alpha\varkappa^2(s)\vec{\beta}(s). \tag{2.9}$$

Вспомним, что для произвольной параметризации вторая производная вектор-функции, задающей кривую, для каждого значения s дает вектор параллельный соприкасающейся плоскости этой кривой в точке с тем же значением параметра s. Тогда этот вектор будет перпендикулярен вектору бинормали в этой точке. В нашем случае получаем, что для каждого s вектор $\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2}$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{p}(s)$ бинормали кривой γ_1, а он в свою очередь параллелен орту бинормали кривой γ. Следовательно, для каждого s векторы $\frac{d^2\vec{r}_1}{ds^2}$ и $\vec{\beta}(s)$ перпендикулярны. С учетом открывшихся обстоятельств умножим скалярно обе части равенства (2.9) на $\vec{\beta}(s)$.

$$0 = 0 - 0 + 0 - \alpha\varkappa^2(s).$$

Число $\alpha \neq 0$, иначе кривые γ и γ_1 совпадают, следовательно, $\varkappa(s) = 0$ для любого s. Итак, кривая γ имеет нулевое кручение в каждой точке, то есть это плоская линия. Тогда орт ее бинормали есть вектор постоянный, то есть $\vec{\beta}(s) = \vec{\beta}$ для любого s. Тогда из уравнения $\vec{r}_1 = \vec{r}(s) + \alpha\vec{\beta}$ получаем, что все точки кривой γ_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости кривой γ (кстати, находящейся на расстоянии α от плоскости кривой γ). $\square$

6.3. Домашнее задание.

1. Проведите исследование гиперболы по тому же плану, по какому мы на семинаре исследовали эллипс (кривизна, нормаль, соприкасающаяся окружность, эволюта)

P.S. (для интересующихся) Как мы уже знаем, параметрические уравнения астроиды имеют вид $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. Перейдем к общему уравнению астроиды. Для этого выразим квадраты косинуса и синуса, и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Оказывается эволюта гиперболы имеет аналогичное уравнение, только вместо плюса стоит минус. Посмотрите динамический рисунок эволюты гиперболы на http://liaign.ucoz.ru/index/biblioteka 24. Эволюта гиперболы похожа на астроиду, „середина“ которой уходит в бесконечность, а нам видны только ее левый и правый концы.

Что будет в случае параболы?

6.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что главные нормали исходной линии (эвольвенты) являются касательными к ее эволюте. В этом случае говорят, что эвольвента является *ортогональной траекторией* касательных к эволюте.

2. Докажите, что гладкая кривая в пространстве является окружностью или ее частью тогда и только тогда, когда ее главные нормали проходят через одну точку.

   Пусть линия γ задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ относительно произвольного параметра t. Фиксируем значение параметра $t = t_0$. Тогда точка C, определяемая радиус-вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{\nu}(t_0)$ называется *центром кривизны* линии γ в точке со значением параметра t_0. Окружность с центром в точке C и радиусом $\frac{1}{k(t_0)}$ называется соприкасающейся окружностью линии γ в точке со значением параметра t_0.

3. Найдите касательную, нормаль и кривизну гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $y^2 = 2px$ в их произвольной точке.

4. **[Г]6.82б)**Найдите угол под которым пересекаются линии $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$.

5. **[Б]№1676** Докажите, что если все нормальные плоскости линии параллельны одному направлению, то эта линия плоская.

6. Найдите уравнение соприкасающейся окружности к параболе $y = x^2$ в начале координат.

   Решение. Параметрические уравнения параболы $x = t$, $y = t^2$. Началу координат соответствует значение параметра $t = 0$. Вычислим кривизну параболы в начале координат.

   $$k(0) = \frac{2-0}{1} = 2.$$

   Тогда радиус соприкасающейся окружности равен $\frac{1}{2}$.

Вычислим вектор $\vec{\nu}(0)$. Воспользуемся общей формулой для вычисления этого вектора. Для этого нужно сначала найти вектор

$$\vec{\beta}(0) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}\right]\right|} = \frac{2\vec{k}}{2} = \vec{k}.$$

Тогда $\vec{\nu}(0) = [\vec{\beta}(0), \vec{\tau}(0)] = [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$. Таким образом, радиус-вектор центра C соприкасающейся окружности будет таким: $\vec{p} = \vec{r}(0) + \frac{1}{k(0)}\vec{\nu}(0) = 0 + \frac{1}{2}\vec{j}$, то есть $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Наконец, уравнение соприкасающейся окружности $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. □

7. **[Б] №1652** Докажите, что если все соприкасающиеся плоскости имеют общую точку, то кривая плоская.

8. Выведите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$.

9. **[С] стр. 90**Докажите, что тангенс угла μ, образованного касательной к линии $\rho = \rho(\varphi)$ с радиус-вектором проведенном в точку касания, задается формулой $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\varphi}}$. Проверьте, что угол μ у логарифмической спирали $\rho = Ca^{\varphi}$, $a > 0$ постоянный. Докажите, что этим свойством могут обладать только окружности и логарифмические спирали.

§2.7. Примерные варианты контрольной работы.

Задачи 1 – 4 являются обязательными для решения. Задача 5 дополнительная, в скобках указано количество баллов, которые можно получить при ее полном решении.

Расчет количества баллов, которое начисляется за решение каждой из обязательных задач:
5 у.е.: задача решена полностью без недочетов;
4 у.е.: есть не существенные недочеты вычислительного характера, которые не приводят к качественным ошибкам, идея решения полностью верна;
3 у.е.а: есть недочеты вычислительного характера, которые привели к качественной ошибке, идея решения может содержать незначительные недочеты;
2 у.е.: есть разумные намеки на идею решения задачи (не менее 50 процентов), но полностью идея решения задачи отсутствует, проведена часть вычислительной работы;
0 у.е.: менее 50 процентов разумных намеков на идею решения задачи.

Вариант 1.

1. Докажите, что кривая $\gamma : x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$, $-2\pi \le t \le 2\pi$ гладкая и лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 2, а также на цилиндрической поверхности $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

2. Для кривой $\gamma : x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ написать уравнение касательной, параллельной плоскости $x - y - 3 = 0$.

3. Покажите, что все бинормали кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ параллельны плоскости Oxy.

4. Найдите угол под которым пересекаются линии $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$.

5. (+3 балла) Докажите, что гладкая кривая в пространстве является окружностью или ее частью тогда и только тогда, когда ее главные нормали проходят через одну точку.

Вариант 2.

1. Докажите, что кривая $\gamma : x = a\,tgt$, $y = b\cos t$, $z = b\sin t$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ лежит на гиперболическом параболоиде.

2. Существуют ли точки на кривой $\gamma : x = t$, $y = t^3$, $z = t^2 + 4$, перпендикулярные плоскости $4x + 4y + 12z + 1 = 0$?

3. Докажите, что линия $x = t + \ln t$, $y = t$, $z = \ln t$, $t > 0$ является плоской и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.

4. Найдите касательную, нормаль и кривизну гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в произвольной точке.

5. (+3 балла) Докажите, что неплоская линия является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда смешанное произведение $\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right) = 0$.

§2.8. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкая поверхность.

8.1. Задачи.

1. **[Г]7.3б)** Найдите частные производные вектор-функции: $\vec{r}(u, v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$, где a – некоторое фиксированное вещественное число.

   Решение. Координатами данной вектор-функции двух скалярных аргументов являются скалярные функции двух скалярных аргументов:

   $$x(u, v) = u\cos v;\ y(u, v) = u\sin v;\ z(u, v) = av.$$

   Находим их частные производные как в математическом анализе: чтобы найти частную производную функции по u, нужно посмотреть на v как на константу и продифференцировать по u. Аналогично для v. Вычисляем

   $$\begin{array}{lll} x_u = \cos v; & y_u = \sin v; & z_u = 0 \\ x_v = -u\sin v; & y_v = u\cos v; & z_v = a. \end{array}$$

   Тогда $\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0)$ и $\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a)$. Этот же результат можно записать в другом виде:

   $$\vec{r}_u = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j};\quad \vec{r}_v = -u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + a\vec{k}.$$

   □

2. **[Г]7.7г),е)** Для вектор-функции $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$ проверьте справедливость равенств $\vec{r}_v^2 - \vec{r}_u^2 = \vec{r}_{vv}^2$, $(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv}) = 0$.

Решение. Для проверки этих равенств нужно вычислить частные производные первого и второго порядков. В предыдущей задаче мы уже вычислили

$$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a).$$

Дифференцируем по u и по v еще раз.

$$\vec{r}_{uv} = (\vec{r}_u)_v(-\sin v, \cos v, 0);\ \vec{r}_{vv} = (\vec{r}_v)_v(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Проверим первое равенство. В его левой части стоит разность скалярных квадратов вектор-функций $\vec{r}_v$ и $\vec{r}_u$. Мы знаем их координаты относительно ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Применяем формулу для вычисления скалярного произведения векторов через их координаты, заданные относительно ортонормированного базиса.

$$\vec{r}_v^2 - \vec{r}_u^2 = (u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2) - (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 + a^2 - 1.$$

В правой части проверяемого равенства тоже стоит скалярный квадрат, но уже вектор-функции $\vec{r}_{vv}$. Вычисляем

$$\vec{r}_{vv} = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2.$$

Мы видим, что первое равенство, вообще говоря, не верно. Но если константа $a = 1$, то равенство становится верным.

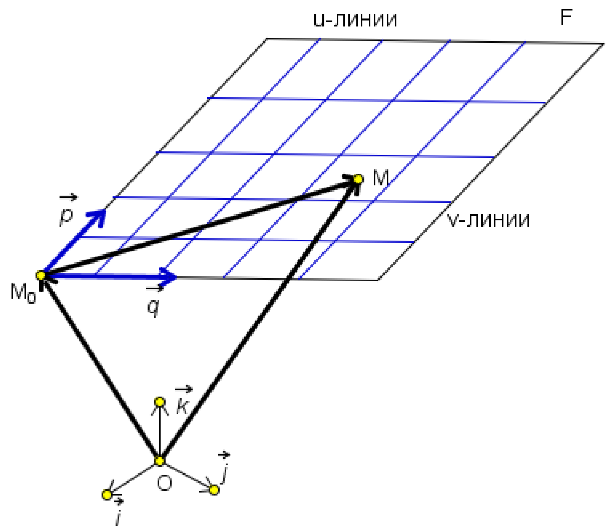
Проверим второе равенство. В его левой части стоит смешанное произведение вектор-функций. Вычисляем его.

$$(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю из-за третьего столбца. Следовательно, равенство для заданной линии верно. □

3. Задайте плоскость F, определенную точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и парой не коллинеарных векторов $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, с помощью параметрических уравнений и изобразите координатную сеть 1) если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны, 2) если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ произвольны.

Решение. Напомним, что в евклидовом пространстве E^3 мы фиксировали прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Относительно нее и заданы координаты точки и векторов в задаче.



Вспоминаем курс аналитической геометрии: точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости F тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ компланарны. Тогда существуют числа u и v, такие что

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{p} + v\vec{q}.$$

По правилу треугольника получим $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$. Обозначим вектор $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$. Его координаты (x_0, y_0, z_0).

Заметим, что вектор $\overrightarrow{OM}$ – это радиус-вектор, который рисует поверхность. Его мы обычно обозначаем $\vec{r}$. Итак, для плоскости получаем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{p} + v\vec{q}.$$

Это векторное параметрическое уравнение плоскости. Расписывая его в координатах (векторы равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов), мы получим параметрические уравнения плоскости (они нам знакомы из курса Аналитическая геометрия).

$$x = x_0 + p_1u + q_1v;\ y = y_0 + p_2u + q_2v;\ z = z_0 + p_3u + q_3v;\ u, v \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Найдем линии u и линии v. Рассмотрим линию u (вспоминаем, что на ней $v = v_0 = const$). Подставляем это значение в параметрические уравнения плоскости.

$$x = x_0 + p_1u + q_1v_0;\ y = y_0 + p_2u + q_2v_0;\ z = z_0 + p_3u + q_3v_0$$

или в другом виде

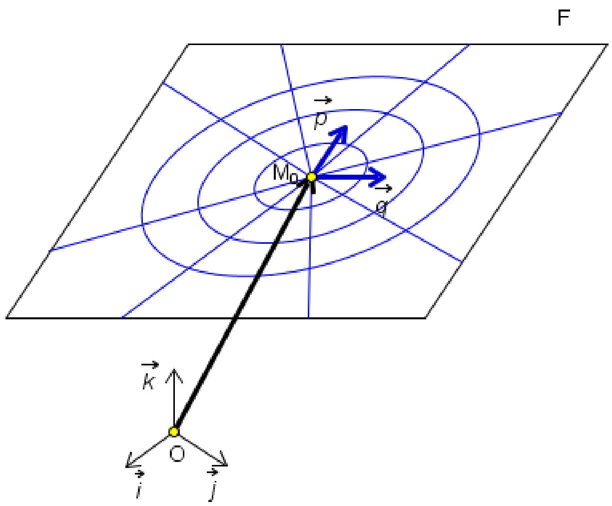
$$x = (x_0 + q_1v_0) + p_1u;\ y = (y_0 + q_2v_0) + p_2u;\ z = (z_0 + q_3v_0) + p_3u.$$

Параметр в этих уравнениях уже один – это u. В скобках стоят постоянные числа. Опять вспоминаем курс Аналитической геометрии и видим, что это параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0 + q_1v_0, y_0 + q_2v_0, z_0 + q_3v_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Меняя числа v_0 мы получим систему линий u. Это будут все прямые плоскости F, параллельные вектору $\vec{p}$. Аналогично убеждаемся, что линии v – это все прямые, параллельные вектору $\vec{q}$. Итак, координатная сеть в этом случае представляет из себя два семейства параллельных прямых. Чтобы однозначно задать точку плоскости F нужно сказать на какой линии u и на какой линии v лежит эта точка.

P.S. (для интересующихся) Пусть векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны и имеют единичные длины. Тогда на плоскости F возникает прямоугольная декартова система координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$.

Для любой точки M плоскости имеем

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}_0 + u\vec{p} + v\vec{q} - \vec{r}_0 = u\vec{p} + v\vec{q}.$$



Мы видим, что криволинейные координаты u и v точки M на плоскости F оказались координатами точки M относительно прямоугольной декартовой системы координат $(M_0, \vec{p}, \vec{q})$. Рассмотрим на плоскости F полярную систему координат с началом в точке M_0 и единичным вектором $\vec{p}$. Обозначим координаты относительно полярной системы координат (ρ, φ) (ρ – длина радиус-вектора точки, φ – ориентированный угол между вектором $\vec{p}$ и радиус-вектором точки). Тогда $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$. Подставим эти равенства в параметрические уравнения плоскости (2.10)

$$x = x_0 + p_1\rho\cos\varphi + q_1\rho\sin\varphi;\ y = y_0 + p_2\rho\cos\varphi + q_2\rho\sin\varphi;\ z = z_0 + p_3\rho\cos\varphi + q_3\rho\sin\varphi;\ \rho \geq 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Это тоже параметрические уравнения плоскости. Правда, точка M_0 станет проблемной (почему?) и ее придется выбросить из рассмотрения. В остальных точках уравнения работают хорошо. Это другая параметризация плоскости. Найдем вид координатных линий для этой параметризации. Фиксируем сначала параметр $\varphi = \varphi_0 = const$. Тогда получаем параметрические уравнения с одним параметром ρ

$$x = x_0 + p_1\rho\cos\varphi_0 + q_1\rho\sin\varphi_0;\ y = y_0 + p_2\rho\cos\varphi_0 + q_2\rho\sin\varphi_0;\ z = z_0 + p_3\rho\cos\varphi_0 + q_3\rho\sin\varphi_0;\ \rho \geq 0.$$

Если мысленно поменять параметр ρ на t, то мы отчетливо увидим параметрические уравнения прямой. Но область изменения параметра ограничена только неотрицательными числами. Значит, это не вся прямая, а луч. Его начало ($\rho = 0$) совпадает с точкой M_0. Итак, первое семейство координатных линий – лучи, выходящие из точки M_0. Теперь фиксируем первый параметр $\rho = \rho_0 = const$. Тогда получим параметрические уравнения

$$x = x_0 + p_1\rho_0\cos\varphi + q_1\rho_0\sin\varphi;\ y = y_0 + p_2\rho_0\cos\varphi + q_2\rho_0\sin\varphi;\ z = z_0 + p_3\rho_0\cos\varphi + q_3\rho_0\sin\varphi;\ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Что это за линии? Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} x - x_0 &= p_1\rho_0\cos\varphi + q_1\rho_0\sin\varphi \\ y - y_0 &= p_2\rho_0\cos\varphi + q_2\rho_0\sin\varphi \\ z - z_0 &= p_3\rho_0\cos\varphi + q_3\rho_0\sin\varphi. \end{aligned}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат, сложим и учтем, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны. Получим

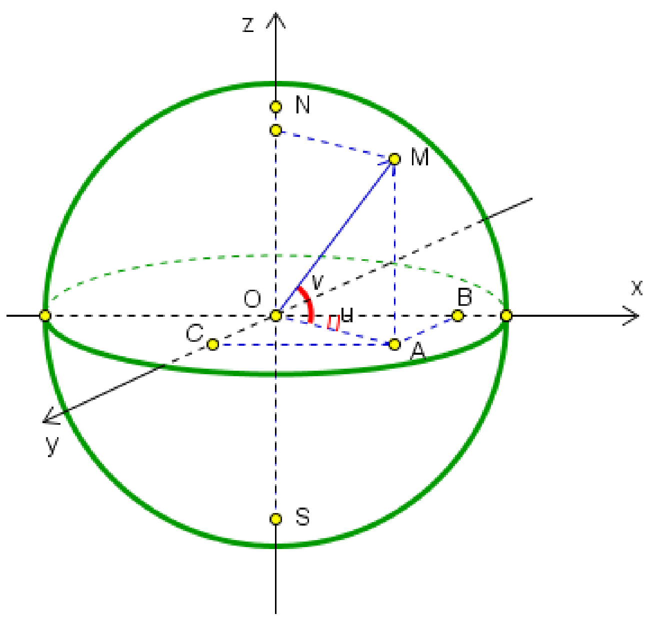
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho_0^2.$$

Это сфера, то есть искомая линия лежит на сфере с центром в точке M_0. А также эта линия лежит на плоскости, проходящей через точку M_0. Пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, это окружность с радиусом, равным радиусу сферы. Следовательно, искомая линия – это окружность с центром в точке M_0 и радиусом ρ_0. Итак, второе семейство координатных линий – это концентрические окружности с центром в точке M_0.

Попробуйте написать параметрические уравнения плоскости так, чтобы координатными линиями были эллипсы и гиперболы. $\square$

4. **[Г] 7.13а)** Напишите параметрические уравнения сферы с центром в точке (a, b, c) и радиусом R. Определите вид координатных линий.

Решение. Сначала расположим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, чтобы точка O была центром сферы. Обозначим через N и S точки пересечения оси Oz со сферой (северный и южный полюса).



Тогда плоскость Oxy будет экваториальной, а окружность пересечения сферы и экваториальной плоскости будет экватором. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка сферы. Опустим перпендикуляр на экваториальную плоскость и обозначим его основание A. Угол между экваториальной плоскостью и вектором $\overrightarrow{OM}$ (это угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$) обозначим v. Этот угол будет меняться от нуля до $\frac{\pi}{2}$, если мы находимся в северном полушарии и от $-\frac{\pi}{2}$ до нуля, если – в южном.

Итого, параметр v будет меняться от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Через u обозначим угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$. Он будет меняться от $-\pi$ до π. Тогда из треугольника OMA координата z точки M будет равна $R \sin v$. Координаты x и y у точки M такие же как и координаты точки A, лежащей в экваториальной плоскости Oxy. Для точки K находим $x = OA \cos u$, $y = OA \sin u$. Наконец, из треугольника OMA получим $OA = R \cos v$. Собирая все результаты, получим, что координаты точки M вычисляются по формулам

$$x = R \cos v \cos u;\ y = R \cos v \sin u;\ z = R \sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Это параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в точке $O(0, 0, 0)$. Перейдем к системе координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (то есть поменяем начало системы координат) такой, что $O(a, b, c)$ в ней. Нам надо сейчас написать формулы перехода от одной системы координат к другой. Так как даны координаты точки O, старой системой координат будет система координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, а новой – $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Обозначим координаты в старой системе x', y', z', в новой – x, y, z (не совсем привычно, зато не нужно будет вводить переобозначения в полученных выше формулах). Тогда формулы перехода от старой системы координат к новой будут иметь вид (слева – старые координаты, справа – новые)

$$x' = x + a;\ y' = y + b;\ z' = z + c.$$

Переходим в параметрических уравнениях сферы к системе координат $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$x' - a = R\cos v\cos u;\ y' - b = R\cos v\sin u;\ z' - c = R\sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Про первую систему координат можно забыть (она была вспомогательной). Теперь вторую систему координат называем $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и координаты в ней обозначаем x, y, z (вместо x', y', z' пишем x, y, z). В этих обозначениях сфера радиуса R с центром в точке (a, b, c) будет иметь параметрические уравнения

$$x = a + R\cos v\cos u;\ y = b + R\cos v\sin u;\ z = c + R\sin v;\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Проверим полученный ответ. Перейдем от параметрических уравнений сферы к общему. Для этого нам нужно из трех параметрических уравнений сделать одно и при этом должны исчезнуть переменные u и v (остаться должны только x, y, z). Для этого запишем параметрические уравнения в виде

$$\frac{x-a}{R} = \cos v\cos u;\ \frac{y-b}{R} = \cos v\sin u;\ \frac{z-c}{R} = \sin v.$$

Возведем все три равенства в квадрат и сложим:

$$\left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{R}\right) = \cos^2 v\cos^2 u + \cos^2 v\sin^2 u + \sin^2 v = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Тогда получим

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Это знакомое нам уравнение сферы в прямоугольной декартовой системе координат, центр ее находится в точке с координатами (a, b, c), а радиус равен R.

P.S. (для интересующихся) Вернемся к параметрическим уравнениям сферы с центром в начале координат. Пусть она будет единичного радиуса. Тогда

$$x = \cos v\cos u;\quad y = \cos v\sin u;\quad z = \sin v.$$

Проверим условия из определения гладкой поверхности. Во-первый, Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют частные производные любого порядка. Во-вторых, проверим выполнение второго условия. Находим частные производные первого порядка

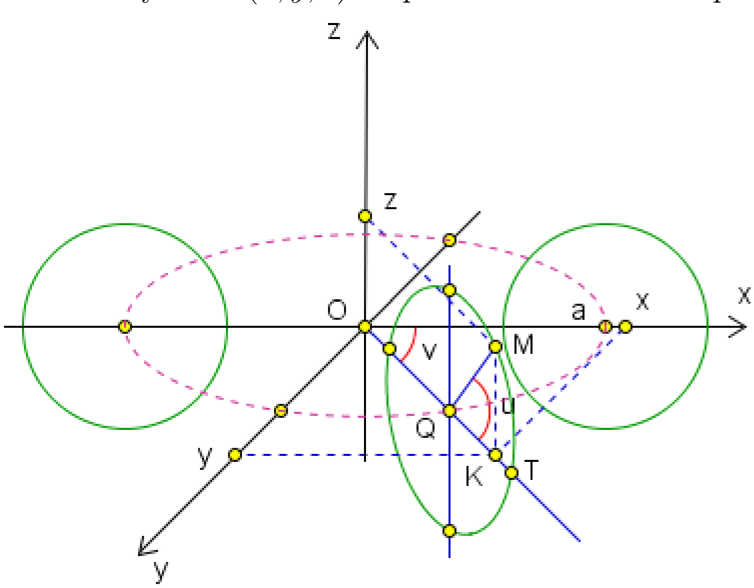
$$\vec{r}_u(-\cos v\sin u, \cos v\cos u, 0);\quad \vec{r}_v(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v).$$

Если $v = \pm\frac{\pi}{2}$, то $\vec{r}_u = \vec{0}$, следовательно, условие линейной независимости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в таких точках нарушается. Это точки N и S. Из-за этого факта сфера не перестает быть гладкой поверхностью – все ее точки одинаковые. Особенность в точках N и S появилась из-за выбранной нами параметризации.

Пример сферы показывает недостаток координатного метода (то есть введения координат на какой-либо поверхности для ее изучения). Исследуя поверхность координатным методом всегда нужно помнить, что полученный при исследовании факт может относиться не только к свойствам самой поверхности, но также и к свойствам введенной на ней криволинейной системе координат. □

5. Пусть в плоскости Oxy прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дана окружность радиуса a с центром в точке O (назовем ее большой). Кроме того, в плоскости Oxz дана окружность радиуса b ($b < a$) с центром на большой окружности (назовем ее маленькой окружностью). Маленькая окружность вращается вокруг оси Oz (ее центр едет по большой окружности), оставаясь перпендикулярной плоскости Oxy, и рисует в пространстве поверхность. Эта поверхность называется *тор*. Напишите параметрические уравнения тора. Определите вид координатных линий на нем.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка тора.



Обозначим центр маленькой окружности, на которой лежит точка M, через Q и опустим перпендикуляр из точки M на плоскость Oxy. Обозначим его основание K. Точки O, Q, K лежат на одном луче, выходящем из точки O. Пусть v – угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OQ}$. Он будет меняться от $-\pi$ до π (этот угол показывает насколько повернулась маленькая окружность от первоначального положения). В самой маленькой окружности обозначим через T точку пересечения луча OQ с этой окружностью, причем точки лежат так $O{-}Q{-}T$. Тогда через u обозначим ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{QT}$ и $\overrightarrow{QM}$ (этот угол показывает насколько повернулась точка M на маленькой окружности). Он будет меняться от $-\pi$ до π. Тогда из треугольника QMK получим, что $z = QM \sin u = b \sin u$. Координаты x и y точки M такие же как и у точки K. Ее координаты

$$x = OK \cos v = (a \pm QK) \cos v = (a + b \cos u) \cos v$$
$$y = OK \sin v = (a \pm QK) \sin v = (a + b \cos u) \sin v.$$

Собираем все вместе и получаем параметрические уравнения тора

$$x = (a + b \cos u) \cos v;\ y = (a + b \cos u) \sin v;\ z = b \sin u;\ u, v \in [-\pi, \pi].$$

Выясним, что из себя представляют координатные линии. Пусть $u = u_0 = const$. Тогда параметрические уравнения линии v имеют вид

$$x = (a + b \cos u_0) \cos v;\ y = (a + b \cos u_0) \sin v;\ z = b \sin u_0.$$

Так как для точек этой линии третья координата z всегда равна одной и той же константе $b \sin u_0$, эта линия является плоской и лежит в плоскости, задаваемой уравнением $z = b \sin u_0$ (она параллельна плоскости Oxy). С другой стороны, возводя в квадрат первые два параметрических уравнения, получаем, что $x^2 + y^2 = (a + b \cos u_0)^2$. Это прямой круговой цилиндр с образующими параллельными оси Oz и радиусом $a + b \cos u_0$. Тогда искомая линия есть пересечение цилиндра и плоскости, то есть это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости Oxy (мысленно режем тор, а проще бублик, плоскостями, параллельными плоскости Oxy). Это одно семейство координатных линий на торе. Найдем другое семейство координатных линий. Теперь $v = v_0 = const$. Это множество точек тора, которые повернуты относительно оси Ox на угол v_0. Это будет маленькая окружность. Итак, второе семейство координатных линий – это все копии маленькой окружности в процессе ее движения вокруг оси Oz. □

6. Пусть в плоскости Oxz дана линия γ: $x = x(u)$, $y = 0$, $z = z(u)$, $u \in U$. Напишите параметрические уравнения поверхности вращения данной линии вокруг оси Oz.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности вращения. Она лежит на некоторой окружности, перпендикулярной оси Oz. Обозначим центр этой окружности Q. Эта окружность пересекает линию γ в точке K. Точка K имеет координаты $(x(u), 0, z(u))$. Третья координата у точки M такая же как и у K (обе точки лежат в плоскости, перпендикулярной оси Oz). Тогда получим $z = z(u)$. Разберемся с первыми двумя координатами точки M. Обозначим через v угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{QM}$ (угол, на который повернулась точка K). Тогда $x = QM \cos v = QK \cos v = |x(u)| \cos v$. Аналогично $y = QM \sin v = QK \sin v = |x(u)| \sin v$. Угол v меняется от $-\pi$ до π. Тогда раскрывая модуль, получим (знак плюс минус можно не писать, так как его учтет знак синуса и косинуса)

$$x = x(u) \cos v;\ y = x(u) \sin v;\ z = z(u), u \in U,\ v \in [-\pi, \pi].$$

□

7. **[Г] пример 7.5** Покажите, что вектор-функция
$$\vec{r}(u,v) = a\frac{1+uv}{u+v}\vec{i} + b\frac{v-u}{u+v}\vec{j} + c\frac{uv-1}{u+v},\ (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u\neq v$$
определяет однополостный гиперболоид. Как выглядят координатные линии поверхности при данной параметризации?

Решение. Запишем параметрические уравнения данной поверхности
$$x = a\frac{1+uv}{u+v};\ y = b\frac{v-u}{u+v};\ z = c\frac{uv-1}{u+v}.$$
Вычислим
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = \frac{(1+uv)^2}{(u+v)^2}+\frac{(v-u)^2}{(u+v)^2}-\frac{(uv-1)^2}{(u+v)^2} = 1.$$
Рассмотрим семейство линий u: $v = v_0 = const$. Параметрические уравнения этих линий имеют вид
$$x = a\frac{1+uv_0}{u+v_0};\ y = b\frac{v_0-u}{u+v_0};\ z = c\frac{uv_0-1}{u+v_0}.$$
В задачнике, из которого взят этот пример, написано, как преобразовать эти уравнения, чтобы увидеть, что они задают прямую. Но как до этого додуматься?! Давайте представим, что у нас нет никаких идей относительно того, что это за линии. Первая идея, посчитать кривизну и кручение, чтобы хоть как то прикинуть, что это может быть (если очень повезет и кривизна будет нулевая во всех точках, то получим прямую, если кручение будет нулевым, то линия плоская и можно найти плоскость в которой она лежит, а затем пересечь с гиперболоидом). Параметр u вряд ли натуральный, следовательно, пользуемся общими формулами: $k(u) = \frac{|[\frac{d\vec{r}}{du},\frac{d^2\vec{r}}{du}]|}{|\frac{d\vec{r}}{du}|^3}$. Вычисляем
$$\begin{aligned} &x' = a\tfrac{v_0^2-1}{(u+v_0)^2}; && y' = b\tfrac{-2v_0}{(u+v_0)^2}; && z' = c\tfrac{v_0^2+1}{(u+v_0)^2};\\ &x'' = -2a(v_0^2-1)\tfrac{1}{(u+v_0)^3}; && y'' = 4bv_0\tfrac{1}{(u+v_0)^3}; && z'' = -2c(v_0^2+1)\tfrac{1}{(u+v_0)^3}. \end{aligned}$$
Заметим, что первая и вторая производные пропорциональны – коэффициент пропорциональности $\frac{-2}{u+v_0}$. Следовательно, векторное произведение таких векторов в каждой точке кривой будет равно нулю, то есть у рассматриваемой линии кривизна нулевая в каждой точке. Таким образом, мы получили, что первое семейство координатных линий – это прямые (первое семейство прямолинейных образующих). Аналогично получается, что и второе семейство линий – это прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. □

8. **[Г] 7.11а)** Определите, какой поверхностью второго порядка является поверхность, заданная параметрическими уравнениями $x = u+\sin v$, $y = u+\cos v$, $z = u+a$. Определите вид координатных линий при данной параметризации.

Доказательство. Чтобы определить вид поверхности, найдем неявное уравнение, задающее поверхность. Выразим из третьего уравнения u, подставим в два первых первых и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:
$$(x-z+a)^2+(y-z+a)^2 = 1.$$

Это эллиптический цилиндр. Чтобы убедиться в этом нам нужно перейти к другой (аффинной) системе координат. Делают это так: скобки обозначают новыми переменными: $x' = x - z + a$, $y' = y - z + a$, а z оставляют прежним $z' = z$. Тогда формулы перехода к новой системе координат (старые координаты выражаем через новые) выглядят так:

$$
\begin{aligned}
x &= x' + z' - a \\
y &= y' + z' - a \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

Определитель матрицы перехода

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.
$$

Следовательно, это действительно формулы перехода. В новой системе координат поверхность имеет уравнение $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Это уравнение эллиптического цилиндра.

Теперь находим координатные линии. Первое семейство:

$$x = u + \cos v_0;\ y = u + \sin v_0;\ z = u + a.$$

Это прямые, проходящие через точку $(\cos v_0, \sin v_0, a)$ параллельно вектору $(1, 1, 1)$.

Второе семейство координатных линий:

$$x = u_0 + \cos v;\ y = u_0 + \sin v;\ z = u_0 + a.$$

Это линия лежащая в плоскости $z = u_0 + a$. Кроме того, она лежит на поверхности $(x - u_0)^2 + (y - u_0)^2 = 1$. Это прямой круговой цилиндр с образующими параллельными оси Oz. Его разрезает плоскость $z = u_0 + a$ перпендикулярная оси Oz. В результате получаем окружность.

Итак, одно семейство координатных линий – это прямолинейные образующие, а второе семейство – это окружности, перпендикулярные прямолинейным образующим. $\square$

9. **[Г] 7.20** Напишите параметрические уравнения кругового цилиндра, координатными линиями которого являются: а) винтовые линии и прямолинейные образующие, б) два семейства винтовых линий.

Решение. Возьмем прямой круговой цилиндр, который в ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задан уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

а) если фиксировать параметр v, то должна получиться прямая, параллельная оси Oz, то есть вектору $(0, 0, 1)$. Начинаем писать параметрические уравнения поверхности.

$$x = const;\ y = const;\ z = u + const.$$

Теперь при фиксировании u должна получиться винтовая линия. Исходя из этого подбираем выражения, которые обозначены *const*.

$$x = \cos v;\ y = \sin v;\ z = u + v,\ v \in [0, 2\pi], u \in \mathbb{R}.$$

Проверяем, что действительно получили цилиндр с нужной координатной сетью.

б) Рассуждаем аналогично. Теперь и при фиксации u и при фиксации v должны получиться винтовые линии, то есть для x должен быть косинус, для y – синус, для z – сами u и v. Исходя из этого подбираем параметрические уравнения

$$x = \cos(u + v);\ y = \sin(u + v);\ z = u + v,\ u, v \in \mathbb{R}$$

□

8.2. Домашнее задание.

1. **[Г]7.3а)** Найдите частные производные вектор-функции: $\vec{r}(u, v) = (2u - v)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + (u^3 - v^3)\vec{k}$. Будут ли существовать точки (u, v) в которых векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны?

2. **[Г]7.7а),б),ж)** Для вектор-функции $\vec{r}(u, v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k}$ проверьте справедливость равенств $\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$, $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = |\vec{r}_v|$, $(\vec{r}_u\vec{r}_{uv}\vec{r}_{vv})(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}) = \vec{r}_v^2$.

3. **[Г] 7.13б), в), е)** Напишите параметрические уравнения эллипсоида, двуполостного гиперболоида, эллиптического цилиндра.

   Указания. эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$; эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. **[Г] 7.14** Составьте параметрические уравнения поверхностей вращения:
   а) катеноида, полученного вращением цепной линии $x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}$, $y = 0$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$ вокруг оси Oz.
   б) псевдосферы, полученной вращением трактрисы $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + \cos u)$, $u = [0, \pi)$ вокруг оси Oz.

5. **[Г] 7.11б),в)** Определите, какой поверхностью второго порядка является поверхность, заданная параметрическими уравнениями 1) $x = a(u+v)$, $y = b(v-u)$, $z = 2uv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$; 2) $x = r\cos u\sin v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Каковы координатные линии поверхности при данной параметризации?

6. **[Г] пример 7.6** Напишите параметрические уравнения гиперболического параболоида, если $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, приняв за координатные линии его прямолинейные образующие.

7. **[Г] 7.20** Напишите параметрические уравнения кругового цилиндра, координатными линиями которого являются: а) окружности и прямолинейные образующие, б) винтовые линий и окружности.

8.3. Дополнительные задачи.

1. Пусть поверхность образована вращением гладкой линии γ: $x = f(z)$, $y = 0$ вокруг оси Oz (поверхность вращения). Задайте ее в неявном виде. Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. Напишите параметрические уравнения поверхности вращения.

2. *Винтовой поверхностью* называется поверхность, полученная вращением плоской кривой γ вокруг оси, расположенной в ее плоскости, и одновременным переносом этой кривой вдоль той же оси со скоростью, пропорциональной углу поворота. Пусть кривая γ задана векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. Напишите параметрические уравнения винтовой поверхности, если осью является ось Oz.

3. Пусть прямая γ, лежащая в плоскости Oxy и проходящая через точку O, вращается вокруг точки O и одновременно равномерно перемещается вдоль оси Oz. Получающаяся винтовая поверхность называется *прямым геликоидом*. Получите параметрические уравнения прямого геликоида. Определите вид координатных линий на нем.

4. **[Г] пример 7.1** Дана вектор-функция $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Докажите, что функция $|\vec{r}(u,v)|$ постоянна тогда и только тогда, когда вектор $\vec{r}(u,v)$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ во всех точках $(u,v) \in G$.

5. **[Г]7.15** Даны две линии $\vec{r} = \vec{r}(u)$ и $\vec{p} = \vec{p}(v)$. Составьте векторное параметрическое уравнение поверхности, образованной серединами отрезков, концы которых лежат на данных линиях (*поверхность переноса*).

6. **[Г] 7.21** Для винтовой линии $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $z = bv$, $v \in \mathbb{R}$ составить уравнение поверхности, образованной а) ее касательными, б) ее бинормалями, в) ее главными нормалями.

§2.9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

9.1. Сведения из теории. Поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Если линия γ лежит на поверхности F, то ее можно задать параметрическими уравнениями в криволинейных координатах этой поверхности

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in U.$$

Это параметрические уравнения линии, лежащей на поверхности F, в криволинейных координатах этой поверхности. Возьмем одно параметрическое уравнение линии, выразим из него t и подставим во второе. Получим уравнение с переменными u и v.

$$h(u,v) = 0.$$

Это общее уравнение линии, лежащей на поверхности F, в криволинейных координатах. Если параметрические уравнения линии подставить в векторное параметрическое уравнение поверхности, то получим векторное параметрическое уравнение линии γ

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)).$$

Плоскость $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ называется *касательной плоскостью* поверхности F в точке M.

Вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ называется *вектором нормали.* Прямая $(M, \vec{N})$ называется *нормалью* поверхности F в точке M.

Уравнения касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

где значения производных вычисляются при значении параметром $u = u_0$, $v = v_0$, соответствующих точке $M(x_0, y_0, z_0)$ или

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0.$$

Уравнения нормали

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}.$$

Если поверхность F задана неявно с помощью уравнения $\Phi(x, y, z) = 0$, то касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ задается

$$\Phi_x(x - x_0) + \Phi_y(y - y_0) + \Phi_z(z - z_0) = 0,$$

где частные производные вычислены в точке (x_0, y_0, z_0). Нормаль задается так

$$\frac{x - x_0}{\Phi_x} = \frac{y - y_0}{\Phi_y} = \frac{z - z_0}{\Phi_z}.$$

9.2. Задачи.

1. **[Г] 7.22б)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнениями $x = u + v$, $y = u^2 - 2v$, $z = u^3 - uv$ в точке $M_0(2, -1, 0)$.

   Решение. Поверхность задана параметрическими уравнениями. Значит пишем уравнение касательной плоскости по точке и векторам $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ в этой точке. Сначала проверим, принадлежит ли точка поверхности:

   $$2 = u + v;\ -1 = u^2 - 2v;\ 0 = u^3 - uv.$$

   Чтобы точка принадлежала поверхности эти три равенства должны выполняться одновременно для некоторой пары (u, v). Попробуем ее найти. Выразим из первого уравнения $v = 2 - u$ и подставим в два остальных: $u^2 + 2u - 3 = 0$ и $u(u^2 + u - 2) = 0$. Значение u должно быть корнем как первого так и второго уравнения. Подходит только $u = 1$. Тогда $v = 1$. Итак, точка M_0 лежит на поверхности, а за одно мы нашли криволинейные координаты точки $M_0(1, 1)$.

Находим частные производные

$$x_u = 1; \quad y_u = 2u; \quad z_u = 3u^2 - v;$$
$$x_v = 1; \quad y_v = -2; \quad z_v = -u.$$

Находим их значения в точке M_0. Для этого нам потребуются ее криволинейные координаты.

$$x_u = 1; \quad y_u = 2; \quad z_u = 2;$$
$$x_v = 1; \quad y_v = -2; \quad z_v = -1.$$

Наконец, пишем уравнение касательной плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид $2x + 3y - 4z - 1 = 0$.

Напишем уравнение нормали. Для этого нам потребуется вектор перпендикулярный касательной плоскости (он будет параллелен нормали). Считываем его координаты из уравнения касательной плоскости $(2, 3, -4)$. Тогда канонические уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}.$$

□

2. **[A]№1059** Дана поверхность $xyz = 1$. Напишите уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

Решение. Поверхность F в этой задаче задана неявно с помощью уравнения

$$xyz - 1 = 0.$$

Вспомним, что уравнение касательной плоскости в этом случае мы умеем писать по точке и перпендикулярному вектору (вектору нормали к поверхности в этой точке). Точку мы не знаем, поэтому обозначим ее $M(x_0, y_0, z_0)$. Вычисляем частные производные левой части уравнения поверхности

$$\Phi_x = yz; \; \Phi_y = xz; \; \Phi_z = xy.$$

Теперь вычисляем их значения в точке M

$$\Phi_x = y_0z_0; \; \Phi_y = x_0z_0; \; \Phi_z = x_0y_0.$$

Все готово, чтобы написать уравнение касательной плоскости

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z - 3x_0y_0z_0 = 0.$$

Так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности F (то есть $x_0y_0z_0 = 1$), свободный член в уравнении касательной плоскости будет равен -3.

Чтобы ответить на вопрос задачи, нам нужно найти значения букв x_0, y_0, z_0. В условии говорилось, что искомая касательная плоскость должна быть параллельна плоскости $x + y + z - 1 = 0$. Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны.

$$\frac{y_0z_0}{1} = \frac{x_0z_0}{1} = \frac{x_0y_0}{1}.$$

Из этих равенств, учитывая, что $x_0y_0z_0 = 1$ (точка M принадлежит поверхности F) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (y_0 - x_0)z_0 = 0 \\ (y_0 - z_0)x_0 = 0 \\ x_0y_0z_0 = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем, что $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Итак, уравнение искомой касательной плоскости $x + y + z - 3 = 0$. □

3. Докажите, что линия γ: $u + v = 1$, лежащая на поверхности F: $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, является прямой.

Решение. Выведем неявные уравнения линии. Их должно быть два и переменными там должны быть буквы x, y, z. Другими словами, нам нужно исключить параметры u и v, используя уравнение γ в криволинейных координатах и параметрические уравнения поверхности.

Сразу можем написать, что $x = 1$. Преобразуем y:

$$y = u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = 1 - 2uv.$$

Аналогичным образом поступим с z.

$$z = u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u + v)^2 - 3uv(u + v) = 1 - 3uv$$

Тогда из последних двух равенств получим $\frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$. Итак, неявные уравнения кривой γ имеют вид

$$x = 1;\ \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Это два линейных уравнения. Каждое из них задает плоскость, следовательно, вместе они задают прямую. □

4. **[Г]7.28а)** Докажите, что у поверхности $x = ve^u$, $y = ve^{-u}$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

Решение. Найдем направляющий вектор нормали в произвольной точке $M(u, v)$.

Вычисляем частные производные

$$x_u = ve^u; \quad y_u = -ve^{-u}; \quad z_u = 0$$
$$x_v = e^u; \qquad y_v = e^{-u}; \qquad z_v = 1$$

Вычисляем векторное произведение

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ve^u & -ve^{-u} & 0 \\ e^u & e^{-u} & 1 \end{vmatrix} = -ve^{-u}\vec{i} - ve^u\vec{j} + 2v\vec{k}.$$

Заметим, что во всех точках линии v значение u постоянно. Обозначим это значение u_0 (оно не меняется вдоль одной линии v). Тогда векторы нормали вдоль линии v имеют координаты $\vec{N} = -ve^{-u_0}\vec{i} - ve^{u_0}\vec{j} + 2v\vec{k}$. Мы видим, что все такие векторы параллельны постоянному вектору $\vec{p} = -e^{-u_0}\vec{i} - e^{u_0}\vec{j} + 2\vec{k}$.

□

5. **[А]№1060** Докажите, что все плоскости, касательные к поверхности F: $z = x\sin^2\frac{y}{x}$, $x \neq 0$ проходят через одну точку.

Решение. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка поверхности F. Вычисляем частные производные для функции $\Phi(x, y, z) = z - x\sin^2\frac{y}{x}$.

$$\Phi_x = -\sin^2\frac{y}{x} + 2\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}; \; \Phi_y = -2\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}; \; \Phi_z = 1.$$

Пишем уравнение касательной плоскости.

$$(x - x_0)(-\sin^2\frac{y_0}{x_0} + 2\frac{y_0}{x_0}\sin\frac{y_0}{x_0}\cos\frac{y_0}{x_0}) + (y - y_0)(-2\sin\frac{y_0}{x_0}\cos\frac{y_0}{x_0}) + (z - z_0) = 0.$$

Так как точки (x_0, y_0, z_0) принадлежит поверхности, $z_0 - x_0\sin^2\frac{y_0}{x_0} = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости принимает вид

$$x(-\sin^2\frac{y_0}{x_0} + 2\frac{y_0}{x_0}\sin\frac{y_0}{x_0}\cos\frac{y_0}{x_0}) + y(-2\sin\frac{y_0}{x_0}\cos\frac{y_0}{x_0}) + z = 0.$$

Какую бы точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности мы не взяли, этому уравнению всегда будет удовлетворять координаты точки $O(0, 0, 0)$. Следовательно, касательная плоскость для любой точки поверхности F проходит через точку $(0, 0, 0)$. □

9.3. Домашнее задание.

1. **[Г] 7.22а),г)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически: 1) $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $(-1, 1, -1)$; 2) $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$ $(a, b \neq 0)$ в точке $u = 0$, $v = \frac{\pi}{3}$.

2. **[Г] 7.23б)** Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 = z$ в точке $(1, 1, 2)$.

3. Найдите все нормали поверхности $xyz = 1$, проходящие через начало координат.

4. **[Г]7.28б)** Докажите, что у поверхности $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v$ $(v \neq 0)$ нормали во всех точках линии v параллельны.

   P.S. (для интересующихся) Что это за поверхность? Как выглядят линии v? Как выглядят нормали к поверхности (нарисуйте) и убедитесь, что они действительно параллельны вдоль линии v. А что будет с нормалями, если их взять в произвольных точках поверхности?

5. **[Г] 7.32б)** Для поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv + 3$ найдите нормаль, проходящую через начало координат (обратите внимание, что начало координат не принадлежит поверхности).

9.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что все касательные плоскости поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, где f – гладкая функция, проходят через начало координат.

2. **[Б]№1692** Докажите, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскостью поверхности $xyz = 1$ не зависит от выбора точки касания на поверхности.

3. Напишите уравнение касательной плоскости в произвольной точке к сфере единичного радиуса с центром в начале координат и найдите на этой сфере множество точек, в которых касательные плоскости параллельны вектору $\vec{p}(1, 2, 3)$.

4. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = a$, где $a > 0$, отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

5. Дана поверхность $x = au$, $y = \sin u$, $z = bv$. Докажите, что главная нормаль координатной линии u в каждой точке является нормалью к поверхности.

   Решение. Начнем с линии u. Напишем ее параметрические уравнения в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. На линии u постоянной является криволинейная координата v, то есть $v = v_0$ – это уравнение линии u в криволинейных координатах. Чтобы перейти к параметрическим уравнениям этой линии, нужно подставить $v = v_0$ в параметрические уравнения поверхности (линия u лежит на поверхности, следовательно, криволинейные координаты ее точке удовлетворяют уравнениям поверхности. А эти уравнения выдают координаты точек линии относительно уже пространственной ПДСК). Итак, линия u задается так:

$$x = au,\ y = \sin u,\ z = bv_0.$$

Параметром здесь является буква u (можно поменять на t, чтобы было как обычно). Вспоминаем, как по параметрическим уравнениям кривой найти направляющий вектор главной нормали (заметим, что параметризация не является естественной): вычисляем касательный вектор $\frac{d\vec{r}}{du}$, вычисляем $\frac{d^2\vec{r}}{du^2}$, вычисляем их векторное произведение – это будет вектор $\vec{p}$, параллельный бинормали и, наконец, векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{du}, \vec{p}]$ дает вектор, параллельный главной нормали.

Вычисляем

$$\frac{d\vec{r}}{du}(a, \cos u, 0);\ \frac{d^2\vec{r}}{du^2}(0, -\sin u, 0).$$

Перед тем, как считать векторное произведение, мы можем заменить вектор $\frac{d^2\vec{r}}{du^2}$ на коллинеарный $(0, 1, 0)$. При этом мы все-равно попадем на направляющий вектор бинормали. Считаем по знакомой формуле. Получим $\vec{p} = -a\vec{k}$. Опять переходим к коллинеарному $(0, 0, 1)$ и считаем векторное произведение $[\frac{d\vec{r}}{du}, \vec{p}] = \cos u\vec{i} - a\vec{j}$. Итак, вектор $\vec{q}$, параллельный главной нормали, имеет координаты $(\cos u, -a, 0)$.

Нам нужно доказать, что он параллелен вектору нормали поверхности. Поверхность задана параметрическими уравнениями. Значит, для нее быстрее вычислить вектора, параллельные касательной плоскости, то есть вектора $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда нужно проверить, что вектор $\vec{q}$ перпендикулярен этим векторам. Вычисляем

$$\vec{r}_u(a, \cos u, 0);\ \vec{r}_v(0, 0, b).$$

Вычисляя скалярные произведения вектора $\vec{q}(\cos u, -a, 0)$ с данными векторами, мы убеждаемся, что $\vec{q}$ перпендикулярен как вектору $\vec{r}_u$, так и вектору $\vec{r}_v$, то есть параллелен вектору нормали к поверхности. □

6. Докажите, что касательная плоскость к гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ в точке $(a, b, 0)$ пересекает его по двум прямолинейным образующим.

Решение. Поверхность задана неявно, поэтому касательную плоскость пишем через точку и перпендикулярный вектор. Сначала считаем частные производные и берем их значения в точке $(a, b, 0)$

$$\Phi_x = \frac{2}{a};\ \Phi_y = -\frac{2}{b};\ \Phi_z = -2.$$

Это вектор нормали к касательной плоскости. Пишем уравнение плоскости.

$$\frac{2}{a}(x - a) - \frac{2}{b}(y - b) - 2z = 0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - z = 0.$$

Осталось пересечь эту плоскость с гиперболическим параболоидом и убедиться, что получится прямая. Пересечение – это система уравнений.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - z = 0. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения z и подставляем в первое. Выделяя в полученном равенстве полные квадраты, получим, что множество точек пересечения задается системой уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}-1\right)^2-\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=0 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-z=0. \end{cases}$$

Первое уравнение распадается на два: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2=0$. Каждое из уравнений задает плоскость. Тогда последняя система равносильна совокупности двух систем. В каждой из них пересекаются две плоскости, то есть каждая система задает прямую.

P.S. (для интересующихся) Найдите все точки гиперболического параболоида, такие что касательные плоскости, определенные в них, пересекают гиперболический параболоид по прямолинейным образующим. Всегда будут получаться две прямолинейные образующие? □

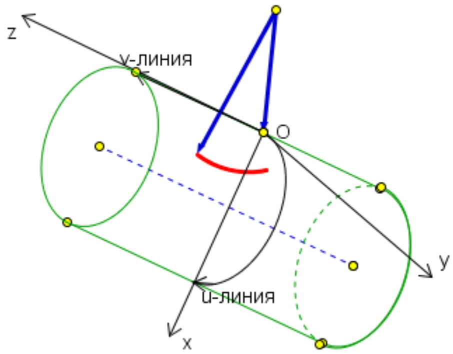
7. Линия γ задана в неявном виде уравнениями $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $(x-a)^2+y^2=a^2$. Это кривая Вивиани. Напишите уравнение касательной в ее произвольной точке.

Решение. Один способ решения подобных задач мы уже рассматривали в выше: нужно перейти к параметрическим уравнениям линии и написать уравнение касательной стандартным способом.

Посмотрим еще один способ нахождения уравнения касательной, без перехода к параметрическим уравнениям. Линия γ является пересечением двух поверхностей: сферы и цилиндра. Так как γ лежит на сфере, направляющий вектор ее касательной параллелен касательной плоскости сферы (взятой в той же точке, что и касательная). Аналогичная ситуация с цилиндром. Так как обе касательные плоскости и касательная проходят через одну точку, касательная является пересечением этих касательных поверхностей. Итак, нам нужно фиксировать произвольную точку на кривой Вивиани, написать уравнение касательной плоскости к сфере в этой точке (мы умеем писать уравнения касательной плоскости, если поверхность задана в неявном виде) и уравнение касательной плоскости к цилиндру. Система этих уравнений задаст касательную к линии γ. Проведите подробные вычисления самостоятельно. □

8. Прямой круговой цилиндр достаточно большого радиуса a обернули бумагой. На бумагу поставили иголку циркуля с раствором b и грифелем циркуля (не изменяя его раствора и не отрывая грифель от бумаги) провели на бумаге линию. Бумагу распрямили. Какая получилась линия?

Решение. Сначала найдем параметрические уравнения получающейся кривой γ в криволинейных координатах.



Параметрические уравнения цилиндра имеют вид

$$x = a\cos u + a;\ y = a\sin u;\ z = v;\ u = [-\pi, \pi],\ v \in \mathbb{R}.$$

В такой параметризации u-линии будут окружностями (параметр u – угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox), а v-линиями будут прямолинейные образующие.

Параметрические уравнения сферы имеют вид

$$x = b\cos\varphi\cos\psi;\ y = b\cos\varphi\sin\psi;\ z = b\sin\varphi.$$

Параметры для сферы никак не связаны с параметрами для цилиндра, поэтому мы обозначили их разными буквами. Так как линия γ является пересечением сферы и цилиндра, то координаты (x, y, z) ее точек удовлетворяют и параметрическим уравнениям сферы и параметрическим уравнениям цилиндра. Можем приравнять.

$$a\cos u + a = b\cos\varphi\cos\psi;\ a\sin u = b\cos\varphi\sin\psi;\ v = b\sin\varphi.$$

Нам нужно получить уравнение линии γ в криволинейных координатах цилиндра (так как потом нам нужно будет разворачивать именно цилиндр, сфера у нас объект вспомогательный). Значит, нам нужно избавиться в полученных равенствах от букв φ, ψ. Уравнений три, а букв – две. Значит, мы получим одно уравнение на u и v, то есть общее уравнение γ в криволинейных координатах цилиндра. Возведем каждое равенство в квадрат и сложим

$$a^2(\cos u + 1)^2 + a^2\sin^2 u + v^2 = b^2,$$

или, раскрывая скобки

$$2a^2(1 + \cos u) + v^2 = b^2 \ \Leftrightarrow\ 4a^2\cos^2\frac{u}{2} + v^2 = b^2.$$

Теперь разворачиваем бумагу. При этом окружность (u-линия цилиндра) превращается в ось Ox, а прямолинейная образующая превращается в ось Oy новой системы координат на бумаге (при цилиндр и изначальную прямоугольную декартову систему координат забываем). Криволинейная координата v становится координатой y. Координата u была углом, а новая координата x – это длина дуги окружности. Чтобы из угла получить длину дуги, нужно угол умножить на радиус, то есть $x = au$. Выражаем из этого равенства u и подставляем в полученное уравнение γ.

$$4a^2\cos^2\frac{x}{2a} + y^2 = b^2.$$

Получилась вот такая симметричная относительно точки O кривая. □

§2.10. Первая квадратичная форма. Длина дуги кривой на поверхности. Угол между кривыми.Площадь поверхности.

10.1. Сведения из теории. Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$.

Первая квадратичная форма

$$d\vec{r}^2=\gamma_{11}(du)^2+2\gamma_{12}dudv+\gamma_{22}(dv)^2,$$

где

$$\gamma_{11}=\vec{r}_u^2;\ \gamma_{12}=\vec{r}_u\vec{r}_v;\ \gamma_{22}=\vec{r}_v^2.$$

Длина дуги кривой γ, заданной параметрическими уравнениями в криволинейных координатах $u=u(t)$, $v=v(t)$

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы нужно вычислить в точках кривой γ. Для этого вместо u нужно подставить $u(t)$, а вместо v подставить $v(t)$.

Угол между кривыми γ_1: $u=u_1(t)$, $v=v_1(t)$ и γ_2: $u=u_2(\tau)$, $v=v_2(\tau)$ в точке их пересечения $(t=t_0,\ \tau=\tau_0)$

$$\cos\angle(\gamma_1,\gamma_2)=$$

$$\left|\frac{\gamma_{11}\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}+\gamma_{12}\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}+\gamma_{12}\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}+\gamma_{22}\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}}{\sqrt{\gamma_{11}\left(\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0}\right)^2+2\gamma_{12}\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}+\gamma_{22}\left(\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=t_0}\right)^2}\sqrt{\gamma_{11}\left(\left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)^2+2\gamma_{12}\left.\frac{du_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}+\gamma_{22}\left(\left.\frac{dv_2}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right)^2}}\right|$$

Коэффициенты первой квадратичной формы нужно посчитать в точке пересечения кривых.

Площадь поверхности F_0 (или части поверхности), для которой параметры (u,v) меняются в области G

$$S(F_0)=\iint_G\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}dudv.$$

10.2. Задачи.

1. **[Г]7.42а),б)** Вычислите первую квадратичную форму поверхностей: 1) эллипсоида $x=a\cos u\cos v$, $y=b\sin u\cos v$, $z=c\sin v$ $u\in[0,2\pi)$, $v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; 2) однополостного гиперболоида $x=\frac{a}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\cos u$, $y=\frac{b}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\sin u$, $z=\frac{c}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)$, $u\in[0,2\pi)$, $v\neq 0$.

   Решение. 1) Найдем первую квадратичную форму для эллипсоида. Для этого нужны частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$:

   $$\vec{r}_u(-a\sin u\cos v,b\cos u\cos v,0);\quad \vec{r}_v(-a\cos u\sin v,-b\sin u\sin v,c\cos v).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы.

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \vec{r}_u^{\,2} = a^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\cos^2 v;\\
\gamma_{12} &= \vec{r}_u\vec{r}_v = (a^2-b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v;\\
\gamma_{22} &= \vec{r}_v^{\,2} = a^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 v.
\end{aligned}$$

Тогда первая квадратичная форма эллипсоида будет иметь вид

$$ds^2 = (a^2\sin^2 u\cos^2 v+b^2\cos^2 u\cos^2 v)du^2+2((a^2-b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v)dudv+(a^2\cos^2 u\sin^2 v+b^2\sin^2 u\sin$$

В частности, для сферы $(a=b=c=r)$ имеем

$$ds^2 = r^2\cos^2 v du^2 + r^2 dv^2.$$

А еще лучше первая квадратичная форма будет выглядеть для сферы единичного радиуса: $ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2$.

2) Вычислим первую квадратичную форму однополостного гиперболоида. Опять вычисляем частные производные:

$$\vec{r}_u\left(-\tfrac{a}{2}(v+\tfrac{1}{v})\sin u, \tfrac{b}{2}(v+\tfrac{1}{v})\cos u, 0\right);\quad \vec{r}_v\left(\tfrac{a}{2}\cos u(1-\tfrac{1}{v^2}), \tfrac{b}{2}\sin u(1-\tfrac{1}{v^2}), \tfrac{c}{2}(1+\tfrac{1}{v^2})\right).$$

Находим коэффициенты первой квадратичной формы.

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \tfrac{a^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})^2\sin^2 u + \tfrac{b^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})^2\cos^2 u;\\
\gamma_{12} &= \tfrac{b^2-a^2}{4}(v+\tfrac{1}{v})(1-\tfrac{1}{v^2})\cos u\sin u;\\
\gamma_{22} &= \tfrac{a^2}{4}\cos^2 u(1-\tfrac{1}{v^2})^2 + \tfrac{b^2}{4}\sin^2 u(1-\tfrac{1}{v^2})^2 + \tfrac{c^2}{4}(1+\tfrac{1}{v^2})^2.
\end{aligned}$$

Опять получаем достаточно громоздкую формулу для первой квадратичной формы однополостного гиперболоида. Сфера – частный случай эллипсоида – имела гораздо более простую первую квадратичную форму, чем общий случай эллипсоида. Посмотрим и в случае однополостного гиперболоида частный случай, который бы существенно упростил бы вид первой квадратичной формы. Аналогом сферы здесь будет однополостный гиперболоид вида $x^2+y^2-z^2=1$ $(a=b=c=1)$. Для него первая квадратичная форма будет иметь вид: $ds^2 = (v+\frac{1}{v})^2du^2 + 2(1+\frac{1}{v^4})dv^2$. Действительно, получилось гораздо проще.

P.S. (для интересующихся) Наверняка первая квадратичная форма зависит от параметризации поверхности. Давайте посмотрим другую параметризацию однополостного гиперболоида:

$$x = a\cos u\operatorname{ch} v;\ y = b\sin u\operatorname{ch} v;\ z = c\operatorname{sh} v.$$

Какой будет первая квадратичная форма здесь?

$$\vec{r}_u(-a\sin u\operatorname{ch} v, b\cos u\operatorname{ch} v, 0);\quad \vec{r}_v(a\cos u\operatorname{sh} v, b\sin u\operatorname{sh} v, c\operatorname{ch} v).$$

Тогда

$$ds^2 = (a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u)\operatorname{ch}^2 v du^2+2(b^2-a^2)\sin u\cos u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v dudv+((a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u)\operatorname{sh}^2 v+c^2\operatorname{ch}^2 v)d$$

В частном случае однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ имеем $ds^2 = \operatorname{ch}^2 v du^2 + \operatorname{ch} 2v dv^2$. □

2. **[Г]7.46а)** Найдите длину дуги линии $v = au$, лежащей на поверхности $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ (это, кстати, конус) между точками пересечения с координатными линиями $u = 1$ и $u = 2$.

Решение. Смотрим на формулу для вычисления длины дуги. Там кривая задана параметрическими уравнениями в криволинейных координатах, а в задаче кривая задана неявным уравнением в криволинейных координатах. Переходим к параметрическим уравнениям: одну криволинейную координату обозначаем через t, а вторую выражаем через нее. Получаем γ: $u = t$, $v = at$. Теперь нужно найти от какого значения параметра t до какого мы будем вычислять длину дуги. В задаче сказано, что линию γ нужно пересечь с координатной линией $u = 1$. Решаем простую систему $v = au$, $u = 1$ и находим точку пересечения $u = 1, v = a$. Так как параметр $t = u$, первое значение параметра $t_0 = 1$. Аналогично находим $t_1 = 2$. Дальше смотрим на формулу для вычисления длины дуги. Там есть еще коэффициенты первой квадратичной формы и производные функций $u(t)$ и $v(t)$, задающих кривую γ, по t. Вычисляем

$$\vec{r}_u(2u, 2u, v); \quad \vec{r}_v(2v, -2v, u).$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2; \quad \gamma_{12} = uv; \quad \gamma_{22} = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2.$$

Вычисляем значения этих коэффициентов в точках кривой γ $(u = t,\ v = at)$

$$\gamma_{11} = 8t^2 + a^2t^2; \quad \gamma_{12} = at^2; \quad \gamma_{22} = 8a^2t^2 + t^2.$$

Производные по t

$$\frac{du}{dt} = 1; \ \frac{dv}{dt} = a.$$

Все подставляем в формулу для вычисления длины дуги

$$s = \int_1^2 \sqrt{(8 + a^2)t^2 + 2a^2t^2 + (8a^2 + 1)t^2}dt = \int_1^2 \sqrt{9 + 11a^2}tdt = \sqrt{9 + 11a^2}\ \frac{t^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{3\sqrt{9 + 11a^2}}{2}.$$

Заметим, что из-под корня t выходит с модулем. Но так как t меняется от 1 до 2 (принимает только положительные значения) модуль раскрывается со знаком плюс. □

3. Найдите угол между линиями $\gamma_1 : u = t, v = t + 1$ и $\gamma_2 : u = t, v = 3 - t$, лежащими на эллиптическом параболоиде: $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

Решение. Находим координаты общей точки линий: $t_1 = t_2 = 1$, $u = 1, v = 2$.

Находим $\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 2u)$, $\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 0)$. Тогда $\gamma_{11} = 1 + 4u^2$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2$. В точке с криволинейными координатами $(1, 2)$ получим $\gamma_{11} = 5$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = 1$.

Теперь находим $\frac{du_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{dv_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{du_2}{dt}(t_2) = 1$, $\frac{dv_2}{dt}(t_2) = -1$. Подставляем все в формулу и находим $\cos\angle(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \frac{2}{3}$. □

4. **[Г]7.49а)** Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$ $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Решение. К решению этой задачи можно подойти с двух сторон: если мы помним формулу для вычисления угла между координатными линиями $\cos\varphi = \frac{|\gamma_{12}|}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}$, то вычисляем по ней. Если эта формула не вспоминается, то задаем две координатные линии уравнениями $u = u_0$, $v = v_0$, их точка пересечения (u_0, v_0) и дальше вычисляем по общей формуле для угла между кривыми.

   Выберем первый способ. Для его реализации нам потребуются коэффициенты первой квадратичной формы (а значит, и частные производные вектор-функции, задающей поверхность). Так как всегда есть надежда, что угол будет прямым, а значит косинус будет нулем, то есть нулем будет γ_{12}, начинаем вычисления с нее. Если это так, то два других коэффициента первой квадратичной формы не нужно будет вычислять.

   Частные производные.

$$\vec{r}_u(-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0);\ \vec{r}_v(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v).$$

   Тогда $\gamma_{12} = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0$. Следовательно, угол между координатными линиями прямой.

   P.S. (для интересующихся) Что это за поверхность? Как выглядят координатные линии?

   □

5. Поверхность F имеет первую квадратичную форму $ds^2 = \operatorname{ch}^2 v du^2 - 2dudv + dv^2$, $v \neq 0$. На ней дан криволинейный треугольник T, ограниченный линиями OC: $u = 0$, OB: $u = v$ и CB: $v = 1$. Найдите площадь этого треугольника.

   Решение. Первая квадратичная форма уже дана. Поэтому подставляем ее коэффициенты в формулу для вычисления площади

$$S(T) = \iint_T \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - 1}\,dudv = \iint_T \operatorname{sh} v\,dudv = \int_0^1 du \int_u^1 \operatorname{sh} v\,dv = \int_0^1 (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} u)du = (u \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1u)|_0^1 =$$

   □

10.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.42в),г)** Вычислите первую квадратичную форму поверхностей: 1) однополостного гиперболоида $x = a\frac{1+uv}{u+v}$, $y = b\frac{v-u}{u+v}$, $z = c\frac{uv-1}{u+v}$, $u + v \neq 0$; 2) двуполостный гиперболоида $x = \frac{a}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\cos u$, $y = \frac{b}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\sin u$, $z = \frac{c}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \neq 0$.

2. **[Г]7.46б)** Найдите длину дуги линии $u - v = 1$ на поверхности $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ между точками пересечения с координатными линиями $u = 0$ и $u = \sqrt{2}a$.

3. **[Г]7.49б)** Найдите угол между координатными линиями на поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

4. **[Г]7.63а)** Найти площадь треугольника ABC, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $I = (1+e^{2u})du^2 - 2e^{u+v}dudv + e^{2v}dv^2$, если AB: $v = 0$, BC: $u = 1$, AC: $u = v$.

10.4. Дополнительные задания. В дальнейшем нам часто придется вычислять первую квадратичную форму поверхности вращения, полученной вращением линии $x = x(u)$, $z = z(u)$, находящейся в плоскости Oxz, вокруг оси Oz. Получите эту формулу.

Ответ: $ds^2 = (x'(u)^2 + z'(u)^2)du^2 + x(u)^2dv^2$.

Пусть дана гладкая поверхность F уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ и однопараметрическое семейство линий Λ: $f(u,v) = c = const$ на поверхности F. Линия, пересекающая все кривые семейства Λ под прямым углом, называют *ортогональной траекторией* семейства Λ. Получим уравнение ортогональной траектории. Пусть γ_2: $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$ – искомая ортогональная траектория, γ_1: $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ – кривая из семейства Λ. Тогда $f(u_1(t), v_1(t)) = c$ – тождество. Продифференцируем его по t, используя правило дифференцирования сложной функции

$$f_u\frac{du_1}{dt} + f_v\frac{dv_1}{dt} = 0$$

Это тождество мы можем записать в виде пропорции

$$\frac{\frac{du_1}{dt}}{f_v} = -\frac{\frac{dv_1}{dt}}{f_u} = \lambda.$$

Последнее равенство – это обозначение. Или по-другому

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda f_v;\ \frac{dv_1}{dt} = -\lambda f_u. \tag{2.11}$$

Так как угол между кривыми γ_1 и γ_2 прямой, косинус угла равен нулю, по формуле для вычисления угла между кривыми получаем

$$0 = \gamma_{11}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + \gamma_{12}\left(\frac{du_1}{dt}\frac{dv_2}{dt} + \frac{du_2}{dt}\frac{dv_1}{dt}\right) + \gamma_{22}\frac{dv_1}{dt}\frac{dv_2}{dt}$$

или, подставляя (2.11) и сокращая на λ, получим

$$\gamma_{11}f_v\frac{du_2}{dt} + \gamma_{12}\left(f_v\frac{dv_2}{dt} - \frac{du_2}{dt}f_u\right) - \gamma_{22}f_u\frac{dv_2}{dt}.$$

Это дифференциальное уравнение, проинтегрировав которое, мы получим параметрические уравнения для ортогональной траектории γ_2.

Эти рассуждения легко модифицировать для нахождения кривой, которая пересекает данное семейство кривых $f(u,v) = c$ поверхности F под постоянным углом α. Такая кривая называется *изогональной траекторией*.

1. Проверим полученное уравнение ортогональной траектории в простейшем случае. Пусть поверхность F – плоскость, семейство Λ – семейство параллельных прямых. Ожидаемая ортогональная траектория – это прямая, перпендикулярная прямым семейства Λ. Похоже,

что ортогональная траектория – это не одна прямая, а много (на роль ортогональной траектории годятся все прямые, перпендикулярные прямым семейства Λ). Убедитесь в этом, проведя подробные вычисления. Если здесь взять вместо прямого угла какой-то угол α, то понятно, что тоже получатся прямые (они будут локсодромами). Получите это с помощью уравнения.

А что будет, если в качестве семейства Λ взять все прямые плоскости, проходящие через одну точку? Его можно задать как $f(u,v) = const$? Если да, то что будет ортогональной траекторией? А что будет, если поменять угол с прямого на какой-нибудь другой, например, 45^0 или вообще α?

Задачу можно усложнять, беря, например окружности $x^2 + y^2 = const$ или гиперболы $x^2 - y^2 = const$ и вычислять их ортогональные траектории.

2. **[Г]7.52в)** Найдите ортогональную траекторию линии $u - v = const$ на поверхности с первой квадратичной формой $I = e^u du^2 - 2e^u du dv + (e^u + 1) dv^2$.

3. На поверхности $x = u$, $y = v$, $z = uv$ найдите все линии, пересекающие координатные линии v под прямым углом.

4. **[Г] пример 7.11** Даны параметрические уравнения сферы: $x = r\cos v \cos u$, $y = r \sin v \cos u$, $z = r \sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Напишите уравнение в криволинейных координатах линии, пересекающие меридианы $v = const$ под постоянным углом α. Эти кривые называются *локсодромами*. По ним раньше плавали корабли.

5. На поверхности $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$ найдите кривые, пересекающие все координатныме линии v под углом 30^0.

§2.11. Программа коллоквиума.

1. Параметризованная кривая (кривая). Гладкая кривая и ее параметрические уравнения. Замена параметра. Натуральный параметр.

2. Касательная к гладкой кривой. Теорема о касательной.

3. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой.

4. Соприкасающаяся плоскость. Вывод ее уравнения. Репер Френе.

5. Формулы Френе.

6. Кручение кривой. Формула для вычисления кручения в естественной параметризации.

7. Кручение кривой. Теорема о геометрическом смысле кручения. Плоские кривые.

8. Вычисление кривизны, кручения и векторов репера Френе в произвольной параметризации.

9. Гладкая поверхность в параметрическом представлении (гладкая поверхность) и ее параметрические уравнения. Криволинейные координаты. Замена параметризации.

10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения (поверхность задана параметрическими уравнениями).

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения (поверхность задана неявно).

12. Первая квадратичная форма. Вычисление длины дуги кривой на поверхности.

13. Первая квадратичная форма. Вычисление угла между кривыми на поверхности.

14. Первая квадратичная форма. Вычисление площади области на поверхности.

§2.12. Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна линии на поверхности. Индикатриса Дюпена.

12.1. Сведения из теории. Вторая квадратичная форма поверхности F, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$II = b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2,$$

где

$$b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}; \quad b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}; \quad b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}$$

или альтернативные формулы

$$\begin{array}{lll} b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u; & b_{12} = -\vec{n}_u\vec{r}_v = -\vec{n}_v\vec{r}_u; & b_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \\ b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu}; & b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv}; & b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} \end{array}$$

Нормальная кривизна k_n кривой $\gamma \subset F$, заданной параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ в криволинейных координатах, в точке M вычисляется по формуле (все вычисляется в точке M)

$$k_n = \frac{b_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2b_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + b_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Уравнение индикатрисы Дюпена: $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1$ в системе координат $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Обратите внимание, что система координат, вообще говоря, не является прямоугольной декартовой, а значит вид уравнения линии второго порядка в ней не канонический.

Точка поверхности называется *эллиптической*, если ее индикатриса Дюпена эллипс (в частности, если эллипс является окружностью, точка называется омбилической).

Точка поверхности называется *гиперболической*, если ее индикатриса Дюпена есть пара сопряженных гипербол.

Точка поверхности называется *параболической*, если ее индикатриса Дюпена есть пара параллельных прямых.

12.2. Задачи.

1. **[Г]7.64а)б)** Вычислите вторую квадратичную форму поверхности: а) прямого геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$, $a \neq 0$; б) винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

Решение. Проводим вычисления по формулам. Нам нужны коэффициенты второй квадратичной формы. Вычислим их через $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$ и $\vec{n}$. Вычисляем все эти вектор-функции:

$$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a).$$

$$\vec{r}_{uu}(0,0,0);\quad \vec{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0);\quad \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Вычисляем $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$.

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{i}a\sin v - \vec{j}a\cos v + \vec{k}u}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы

$$\begin{aligned} &b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0 \\ &b_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \tfrac{-a\sin^2 v - a\cos^2 v}{\sqrt{a^2+u^4}} = \tfrac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ &b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv} = -au\sin v\cos v + au\sin v\cos v = 0. \end{aligned}$$

Итак, вторая квадратичная форма для прямого геликоида имеет вид $II = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}dudv$.

Аналогичным образом считаем вторую квадратичную форму для винтовой поверхности. Первые частные производные

$$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 1);\ \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 1).$$

Вторые частные производные

$$\vec{r}_{uu}(0,0,0);\quad \vec{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0);\quad \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Вектор нормали

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{i}(\sin v - u\cos v) - \vec{j}(\cos v + u\sin v) + \vec{k}u}{\sqrt{1+2u^2}}.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы

$$\begin{aligned} &b_{11} = 0; \\ &b_{12} = \tfrac{-\sin v(\sin v - u\cos v) + \cos v(-\cos v - u\sin v)}{\sqrt{1+2u^2}} = \tfrac{-1}{\sqrt{1+2u^2}}; \\ &b_{22} = \tfrac{-u\cos v(\sin v - u\cos v) - u\sin v(-\cos v - u\sin v)}{\sqrt{1+2u^2}} = \tfrac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}. \end{aligned}$$

Итак, вторая квадратичная форма для винтовой поверхности $II = \frac{-dudv + u^2dv^2}{\sqrt{1+2u^2}}$. □

2. **[Г] 7.67** Выведите формулу для вычисления второй квадратичной формы поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

Доказательство. Поверхность задана неявным образом, а мы умеем вычислять вторую квадратичную форму, если она задана параметрически. Значит, нужно перейти от неявного вида к параметрическим уравнениям. Обозначим x и y через u и v соответственно. Тогда поверхность будет задана так:

$$x = u;\ y = v;\ z = f(u, v).$$

Теперь проводим вычисления как в предыдущей задаче.

$$\vec{r}_u(1, 0, f_u);\ \vec{r}_v(0, 1, f_v);$$

$$\vec{r}_{uu}(0, 0, f_{uu});\ \vec{r}_{uv}(0, 0, f_{uv});\ \vec{r}_{vv}(0, 0, f_{vv}).$$

$$\vec{n} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{-f_u\vec{i} - f_v\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Теперь считаем коэффициенты второй квадратичной формы.

$$b_{11} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}};\ b_{12} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}};\ b_{22} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Итак, для поверхности, заданной неявно уравнением $z = f(x, y)$, вторая квадратичная форма имеет вид

$$II = \frac{f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

$\square$

3. **[Г] 7.68 a)** Найдите вторую квадратичную форму поверхности $z = ax^2 + by^2$.

Решение. Пользуемся формулой, выведенной в предыдущей задаче

$$II = \frac{2adx^2 + 2bdy^2}{\sqrt{4a^2x^2 + 4b^2y^2 + 1}}.$$

$\square$

4. **[А] №1129.** Дана поверхность $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$ (эллиптический параболоид). Найдите нормальную кривизну линии γ: $u - \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}$ в точке A с криволинейными координатами $u = 1$, $v = 1$. Определите вид нормального сечения в точке A, соответствующего данной кривой. Найдите индикатрису Дюпена.

Решение. Смотрим на формулу для вычисления нормальной кривизны: нам нужно вычислить значения коэффициентов первой и второй квадратичных форм в точке A и значения производных функций, которые задают γ тоже в точке A. Начинаем с коэффициентов квадратичных форм:

$$\vec{r}_u(1,0,2u);\ \vec{r}_v(0,1,2v);\ \vec{r}_{uu}(0,0,2);\ \vec{r}_{uv}(0,0,0);\ \vec{r}_{vv}(0,0,2).$$

Так как при вычислении коэффициентов первой и второй квадратичных форм нет операции дифференцирования (где нам необходимо знать о значении вектор-функции не только в точке A, но и в соседних точках) мы можем вычислить значения вектор-функций $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в точке A, а потом применять формулы для вычисления коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Вычисляем значения $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в точке A (при $u=1$, $v=1$)

$$\vec{r}_u(1,0,2);\ \vec{r}_v(0,1,2).$$

Вычисляем коэффициенты γ_{ij}

$$\gamma_{11}=\vec{r}_u\vec{r}_u=5;\ \gamma_{12}=\vec{r}_u\vec{r}_v=4;\ \gamma_{22}=\vec{r}_v\vec{r}_v=5;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}=3.$$

Теперь коэффициенты второй квадратичной формы.

$$b_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&2&2\end{vmatrix}}{3}=\frac{2}{3}.$$

Аналогично получим $b_{12}=0$, $b_{22}=\frac{2}{3}$.

Переходим к работе с кривой γ. Она задана общим уравнением в криволинейных координатах. Нам нужно перейти к параметрическим уравнениям: одну из переменных (удобную) обозначаем как параметр t, а другую выражаем:

$$u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2;\ v=t. \tag{2.12}$$

Вычисляем производные при произвольном значении параметра t:

$$\frac{du}{dt}=t;\ \frac{dv}{dt}=1.$$

Нам нужны производные в точке A. Для этого нужно определить, какое значение t соответствует точке A. Подставляем в параметрические уравнения (2.12) кривой γ значения u и v, которые соответствуют точке A, то есть $u=1$, $v=1$ и находим значение t. Получаем $t=1$. Теперь вычисляем производные в точке A:

$$\frac{du}{dt}=1;\ \frac{dv}{dt}=1.$$

Все готово для подстановки в формулу вычисления нормальной кривизны:

$$k_n=\frac{\frac{2}{3}+0+\frac{2}{3}}{5+2\cdot4+5}=\frac{2}{27}.$$

Определим вид нормального сечения. Для этого нужно провести через точку A плоскость, параллельную касательному вектору кривой γ и вектору нормали к поверхности F в этой точке. Вектор нормали к поверхности F будет иметь координаты

$$\vec{N}(A) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

(значения всех вектор-функций берем в точке A). Теперь нам нужен какой-нибудь вектор, параллельный касательной к γ в точке A. Выше мы уже нашли касательный вектор $\vec{p}$ к кривой γ в точке A (именно его координаты мы вычислили, посчитав $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$). Его координаты в базисе $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ равны $(1, 1)$. Но сейчас нам нужны его координаты в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Вспоминаем формулу

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(= \vec{p}) = \frac{du}{dt}\vec{r}_u + \frac{dv}{dt}\vec{r}_v =$$

Подставляем значения всех величин, входящих в эту формулу (они уже у нас посчитаны)

$$= 1\vec{r}_u + \vec{r}_v = \vec{i} + 2\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Осталось найти координаты точки A в ПДСК $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Мы знаем ее криволинейные координаты $(1, 1)$. Подставляя их в параметрические уравнения поверхности, находим $x = 1, y = 1, z = 2$, то есть $A(1, 1, 2)$. Теперь пишем уравнение плоскости по точке и паре параллельных ей векторов:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Итак, нормальное сечение – это пересечение эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$ (это наша поверхность F заданная в неявном виде) и плоскости $x - y = 0$. Мы видим, что это парабола, заданная уравнениями $x - y = 0$, $z = 2x^2$.

Найдем индикатрису Дюпена в точке A. Подставляем найденные коэффициенты второй квадратичной формы в общее уравнение индикатрисы Дюпена: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = \pm 1$. Минус единицу сразу убираем (она дает пустое множество). Осталось уравнение $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = \pm 1$. Напомним, что это уравнение было записано относительно системы координат $(A, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Заметим, что это не прямоугольная декартова система координат (длины векторов не 1 и они не перпендикулярны – взгляните на их координаты в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$!) Значит, полученное уравнение совсем необязательно уравнение окружности. Это линия второго порядка эллиптического типа, причем центр ее ей не принадлежит, вещественные точки на ней есть, например, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$. Значит, это эллипс. Убедимся, что это не окружность. Пусть $B(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$. Это точка принадлежит эллипсу. Вычислим длину отрезка AB. В базисе

$(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ имеем $\overrightarrow{AB}((\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\vec{r}_u = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\vec{i} + 2\vec{k}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \sqrt{6}\vec{k}.$$

Вычисляем длину вектора, если его координаты заданы относительно ПДСК:

$$AB = \sqrt{\frac{3}{2} + 6} = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

С другой стороны, мы нашли нормальную кривизну $k_n = \frac{2}{27}$. Для нее на индикатрисе Дюпена существует точка C, такая что $AC = \frac{1}{|\sqrt{k_n}|} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ и это расстояние не равно AB. Значит, индикатриса Дюпена есть эллипс, отличный от окружности. □

5. **[Г] 7.71а),б)** Найдите нормальную кривизну координатных линий на а) геликоиде $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$, $a \neq 0$; б) на сфере $x = r\cos v\cos u$, $y = r\sin v\cos u$, $z = r\sin u$, $v \in [0, 2\pi)$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Доказательство. а) Рассмотрим геликоид и линию u на нем. Ее уравнение имеет вид $u = t$, $v = v_0$. Тогда направление касательной к этой линии в криволинейных координатах будет задаваться так: $(1, 0)$. Подставляем в формулу для нахождения нормальной кривизны:

$$k_n = \frac{b_{11}}{\gamma_{11}}.$$

Аналогично получаем для линии v.

$$k_n = \frac{b_{22}}{\gamma_{22}}.$$

Значит, нам нужно вычислить коэффициенты b_{11}, b_{22}, γ_{11}, γ_{22}. Находим

$$\begin{array}{ll} \vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0); & \vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, a); \\ \vec{r}_{uu}(0, 0, 0); & \vec{r}_{vv}(-u\cos v, -u\sin v, 0). \end{array}$$

Вычисляем коэффициенты $\gamma_{11} = 1$; $\gamma_{22} = u^2 + a^2$.

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = 0;\ b_{22} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{-u\cos v\sin v + u\cos v\sin v}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = 0.$$

Итак, нормальная кривизна координатных линий равна нулю.

б) Проводим аналогичные вычисления для сферы. Имеем

$$\vec{r}_u(-r\cos v\sin u, -r\sin v\cos u, r\cos u);\ \vec{r}_v(-r\sin v\cos u, r\cos v\cos u, 0);\ \gamma_{11} = r^2;\ \gamma_{22} = r^2\cos^2 u;\ \gamma_{12} = 0;$$

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = r^2|\cos u|.$$

$$\vec{r}_{uu}(-r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, -r\sin u);\ \vec{r}_{vv}(-r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, 0).$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} -r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u & r\cos u \\ -r\sin v\cos u & r\cos v\cos u & 0 \\ -r\cos v\cos u & -r\sin v\cos u & -r\sin u \end{vmatrix} = r^3\cos u.$$

$$b_{11} = \frac{(\vec r_u \vec r_v \vec r_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{r^3 \cos u}{r^2 |\cos u|} = \frac{r^3\cos u}{r^2 \cos u} = r;\ k_n = \frac{1}{r}.$$

Итак, мы нашли нормальную кривизну для линий u.

Для линий v вычисления аналогичны.

$$(\vec r_u \vec r_v \vec r_{vv}) = \begin{vmatrix} -r\cos v \sin u & -r\sin v\cos u & r\cos u \\ -r\sin v\cos u & r\cos v\cos u & 0 \\ -r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, 0 & & \end{vmatrix} = r^3\cos^3 u.$$

Тогда $b_{22} = r\cos u$ и $k_n = \frac{r\cos u}{r^2\cos u} = \frac{1}{r}$.

P.S. (для интересующихся) Получите значения нормальной кривизны, не проводя такие громоздкие расчеты (используйте информацию о кривизне окружности и теорему Менье).

□

6. **[Г]7.76б)** Найдите координаты омбилических точек эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Зададим эллипсоид вращения параметрическими уравнениями (уравнения такие же как у сферы, только вместо радиуса r стоят коэффициенты из знаменателей при x, y, z

$$x = a\cos v\cos u,\ y = a\sin v\cos u,\ z = c\sin u.$$

Находим вторую квадратичную форму эллипсоида вращения. Вычисляем

$$\vec r_u(-a\cos v\sin u, -a\sin v\sin u, c\cos u);\ \vec r_v(-a\sin v\cos u, a\cos v\cos u, 0).$$

$\vec r_{uu}(-a\cos v\cos u, -a\sin v\cos u, -c\sin u)$; $\vec r_{uv}(a\sin v\sin u, -a\cos v\sin u, 0)$; $\vec r_{vv}(-a\cos v\cos u, -a\sin v\cos u$

$\gamma_{11} = a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u$; $\gamma_{12} = 0$; $\gamma_{22} = a^2\cos^2 u$; $\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = a\cos u\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}$.

$$(\vec r_u \vec r_v \vec r_{uu}) = a^2 c\cos u;\ b_{11} = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}.$$

$$(\vec r_u \vec r_v \vec r_{uv}) = 0;\ b_{12} = 0.$$

$$(\vec r_u \vec r_v \vec r_{vv}) = a^2 c\cos^3 u;\ b_{22} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}.$$

В омбилических точках нормальные кривизны по всем направлениям одинаковые. Значит отношение второй и первой квадратичных форм не зависит от выбранного направления. Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны, то есть

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}(a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}a^2\cos^2 u}$$

Откуда получаем, что $c^2\cos^2 u = a^2\cos^2 u$. Так как $a \neq c$, то есть эллипсоид вращения не является сферой, это равенство верно тогда и только тогда, когда $\cos u = 0$. Так как u меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, получаем, что равенство верно для $u = -\frac{\pi}{2}$ и $u = \frac{\pi}{2}$ – это точки пересечения эллипсоида с осью вращения. □

12.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.64а)б)** Вычислите вторую квадратичную форму поверхности: 1) тора $x = (a+b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0, 2\pi)$, $a > b > 0$; 2) псевдосферы $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$, $u \in [0, \pi)$, $v \in [0, 2\pi)$.

2. **[Г] 7.68 б)** Найдите вторую квадратичную форму поверхности $z = \frac{1}{xy}$.

3. **[Г] 7.71в** Найдите нормальную кривизну координатных линий на катеноиде $x = \sqrt{a^2 + u^2}\cos v$, $y = \sqrt{a^2 + u^2}\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{a^2 + u^2})$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

4. **[Г] 7.72 а)в)** Найдите нормальную кривизну указанной линии на поверхности в заданной точке и напишите уравнения нормального сечения: а) $x = u, y = v, z = 2uv$, линия $u - 2v = 0$ в точке $(2, 1, 4)$; в) $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, линия $u = v^2$ в точке $u = 1$, $v = 1$. Определите вид индикатрисы Дюпена и нормального сечения в этой точке.

5. **[Г]7.76в),г)** (для интересующихся) Найдите координаты омбилических точек в) параболоида вращения $x^2 + y^2 = 2a^2z$; б) эллиптического параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

12.4. Дополнительные задачи.

1. Выведите уравнения для вычисления второй квадратичной формы для поверхности вращения, образованной вращением плоской линии $x = x(u)$, $z = z(u)$, $u \in U$ плоскости Oxz, вокруг оси Oz. Эта формула очень упростит жизнь в вычислениях домашнего задания.

2. **[А]№1125** Покажите, что в фиксированной точке поверхности сумма нормальных кривизн кривых, имеющих ортогональные направления, постоянна.

   Решение. Используем формулу Эйлера

   $$(k_n)_{\gamma_1} + (k_n)_{\gamma_2} = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha + k_1\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) + k_2\sin^2(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = k_1 + k_2.$$

   □

3. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии γ, то каждая точка этой линии является параболической.

   Решение. Заметим, что линия γ – плоская. Она лежит в касательной плоскости к поверхности. Тогда орт нормали к поверхности в каждой точке линии γ один и тот же. Тогда вдоль этой линии частные производные вектора нормали $\vec{n}$ будут равны нулю, то есть $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$ во всех точках линии γ нулевые. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы $b_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u$ и т.д. будут нулями во всех точках этой линии. Тогда $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$, то есть все точки линии γ параболические. □

§2.13. Асимптотические линии на поверхности.

13.1. Сведения из теории *Асимптотическим направлением* в данной точке поверхности F называется направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль. Другими словами, направление является асимптотическим, если для него нормальная кривизна нуль.

Кривая на поверхности, касательная к которой в каждой точке имеет асимптотическое направление, называется *асимптотической линией.*

Гладкая линия, заданная в криволинейных координатах параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, будет асимптотической линией тогда и только тогда, когда

$$b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2 = 0.$$

13.2. Задачи.

1. **[Г]7.78** Найдите условие, при котором координатные линии произвольной поверхности являются асимптотическими линиями.

   Решение. Рассмотрим линию u. Напомним, что в криволинейных координатах она задается уравнением $v = v_0$, где v_0 – константа. По-другому это уравнение можно записать так: $u = t$, $v = v_0$. Она будет асимптотической тогда и только тогда, когда $b_{11}du^2+2b_{12}dudv+b_{22}dv^2 = 0$, где du и dv нужно найти для линии u. Находим из ее параметрических уравнений: $du = dt$, $dv = 0$. Тогда получим $b_{11}dt^2 = 0$. Так как dt не нуль, нулем будет b_{11} во всех точках линии u.

   Итак, линия u будет асимптотической на поверхности F тогда и только тогда, когда во всех ее точках $b_{11} = 0$.

   Аналогично рассуждая, получаем, что линия v будет асимптотической тогда и только тогда, когда во всех ее точках $b_{22} = 0$. □

2. **[А]№1153** Найдите асимптотические линии на поверхности $z = xy^2$ и покажите, что одно семейство таких линий – прямолинейные образующие этой поверхности.

   Решение. Чтобы найти уравнения асимптотической линии, нужно записать дифференциальное уравнение асимптотической линии. Для этого сначала нужно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы поверхности. Если помните формулы, выведенные на одном из прошлых семинаров, для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы поверхности, заданной неявным уравнением $z = f(x, y)$, то считайте по ним. Если нет, то лучше воспользоваться стандартными формулами. Для этого нужно задать поверхность параметрическими уравнениями. В этой задаче это делается очень просто: обозначаем $x = u$, $y = v$. Тогда $z = uv^2$. Итак, параметрические уравнения поверхности:

   $$x = u,\ y = v,\ z = uv^2.$$

Вычисляем частные производные.

$$\vec{r}_u(1,0,v^2);\ \vec{r}_v(0,1,2uv);\ \vec{r}_{uu}(0,0,0);\ \vec{r}_{uv}(0,0,2v);\ \vec{r}_{vv}(0,0,2u).$$

Теперь вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы.

$$\gamma_{11} = 1+v^4;\ \gamma_{12} = 2uv^3;\ \gamma_{22} = 1+4u^2v^2.$$

Теперь вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы.

$$b_{11} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}} = 0;\ b_{12} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}} = \frac{2v}{\sqrt{1+v^4+4u^2v^2}};\ b_{22} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}} = \frac{2u}{\sqrt{1+v^4+4u^2v}$$

Составляем дифференциальное уравнение асимптотической линии.

$$2\frac{2v}{\sqrt{1+v^4+4u^2v^2}}dudv + \frac{2u}{\sqrt{1+v^4+4u^2v^2}}dv^2 = 0.$$

Знаменатель в нуль не обращается, на него умножаем обе части. Получаем совокупность дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} dv = 0 \\ 2vdu + udv = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение дает решение $v = const$. Это линии u.

Второе уравнение запишем в виде

$$-2\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}.$$

Интегрируем $-2\ln u = \ln v + C$, то есть $u^{-2} = Cv$, где C – произвольная ненулевая константа. Еще это уравнение можно записать так: $u^2v = const$. Это второе семейство асимптотических линий.

Выясним, что из себя представляют первое семейство асимптотических линий. Первое семейство $v = v_0$, где v_0 – константа. Подставляем в параметрические уравнения поверхности, получим параметрические уравнения линии в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$x = u;\ y = v_0;\ z = v_0^2 u.$$

Это прямые, проходящие через точку $(0, v_0, 0)$ параллельно вектору $(1, 0, v_0^2)$. □

3. **[Г] 7.81** Покажите, что если прямая лежит на поверхности, то она является асимптотической линией.

Решение. Фиксируем произвольную точку прямой. Нормальным сечением в этой точке с тем же направлением, что и прямая, будет она сама. Кривизна прямой равна нулю. Следовательно, нормальная кривизна, соответствующая направлению прямой в данной точке равна нулю, то есть направление прямой будет асимптотическим. Так как это верно для каждой точки прямой, она является асимптотической линией на поверхности. □

4. **[Г]7.80 в),г)** Найти уравнения асимптотических линий поверхности: в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. в) Воспользуемся уравнением асимптотической линии. В левой части этого уравнения стоит вторая квадратичная форма. Значит, ее нам и нужно вычислять. Поверхность задана в виде $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$. Для нее мы выводили формулу для вычисления второй квадратичной формы

$$II = \frac{f_{xx}du^2 + 2f_{xy}dudv + f_{yy}dv^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Применяем ее. Заметим, что для получения дифференциального уравнения асимптотической линии, нам потребуется приравнять II к нулю. Следовательно, знаменатель (всегда ненулевой) нас не интересует. Вычисляем

$$f_x = \frac{x}{a^2};\ f_y = -\frac{y}{b^2}.$$

$$f_{xx} = \frac{1}{a^2};\ f_{xy} = 0;\ f_{yy} = -\frac{1}{b^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид

$$\frac{1}{a^2}du^2 - \frac{1}{b^2}dv^2 = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}du - \frac{1}{b}dv = 0; \\ \frac{1}{a}du + \frac{1}{b}dv = 0 \end{array}\right.$$

Интегрируя каждое из них, получаем

$$bu - av = c_1 \equiv const;\ bu + av = c_2 \equiv const,$$

где c_1 и c_2 – произвольные константы.

P.S. (для интересующихся) Выясним как выглядят эти асимптотические линии. Рассмотрим, например, линию $bu - av = 0$ (мы взяли значение константы $c_1 = 0$). Заметим, что данная поверхность – это гиперболический параболоид. Вспоминаем, как перейти к параметрическим уравнениям кривой, заданной на поверхности в криволинейных координатах уравнением $u = u(v)$. Нужно одну букву (из u, v) обозначить через t, а затем подставляем их в параметрические уравнения поверхности. Имеем $u = at$, $v = bt$ и $x = at$, $y = bt$, $z = \frac{1}{2}(\frac{a^2t^2}{a^2} - \frac{b^2t^2}{b^2}) = 0$. Итак, мы получаем, что линия $bu - av = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат задается параметрическими уравнениями $x = at$, $y = bt$, $z = 0$. Это параметрические уравнения прямой. Итак, мы получаем, что рассматриваемая асимптотическая линия – прямая. Остальные случаи исследуются аналогично.

P.S. (для еще больше интересующихся) Докажите, что полученные семейства асимптотических линий – это два семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида, не производя ни одного вычисления.

г) Рассмотрим вторую поверхность. Это однополостный гиперболоид. Если при решении предыдущего пункта этой задачи вы еще не догадались, как решить ее, не производя почти никаких вычислений, то читайте приведенное ниже „лобовое“ решение.

Запишем параметрические уравнения однополостного гиперболоида

$$x = a\cos u \operatorname{ch} v;\ y = b\sin u \operatorname{ch} v;\ z = c \operatorname{sh} v$$

Как и предыдущем пункте, для дифференциального уравнения асимптотической линии от коэффициентов второй квадратичной формы нас будут интересовать только числители (на знаменатель мы умножим и забудем про него). Значит, нам нужно считать смешанные произведения $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и частных производных второго порядка. Вычисляем.

$$\vec{r}_u(-a\sin u \operatorname{ch} v, b\cos u \operatorname{ch} v, 0);\ \vec{r}_v(a\cos u \operatorname{sh} v, b\sin u \operatorname{sh} v, c \operatorname{ch} v).$$

$$\vec{r}_{uu}(-a\cos u \operatorname{ch} v, -b\sin u \operatorname{ch} v, 0);\ \vec{r}_{uv}(-a\sin u \operatorname{sh} v, b\cos u \operatorname{sh} v, 0);\ \vec{r}_{vv}(a\cos u \operatorname{ch} v, b\sin u \operatorname{ch} v, c \operatorname{sh} v).$$

$$(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}) = -abc \operatorname{ch}^3 v;\ (\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}) = 0;\ (\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}) = abc \operatorname{ch} v.$$

Составляем дифференциальное уравнение асимптотической линии

$$-abc \operatorname{ch}^3 v du^2 + abc \operatorname{ch} v dv^2 = 0.$$

На abc и $\operatorname{ch} v$ делим, так как они положительны и получаем совокупность из двух дифференциальных уравнений $dv = \operatorname{ch} v du$, $dv = -\operatorname{ch} v du$. Это уравнения с разделяющимися переменными. Решим первое, а второе решается аналогично. Запишем дифференциальное уравнение в виде $\frac{dv}{\operatorname{ch} v} = du$ и проинтегрируем обе части. Правая часть интегрируется просто – это будет $u + const$. Рассмотрим левую часть.

$$\int \frac{dv}{\operatorname{ch} v} = \int \frac{\operatorname{ch} v dv}{\operatorname{ch}^2 v} = \int \frac{\operatorname{ch} v dv}{1 + \operatorname{sh}^2 v} =$$

Воспользуемся подстановкой $\operatorname{sh} v = t$. Тогда $\operatorname{ch} v dv = dt$. Подставляем в интеграл

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

Этот интеграл можно посмотреть в таблице интегралов

$$= \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} \operatorname{sh} v.$$

Итак, в криволинейных координатах мы получили уравнение асимптотической линии $\operatorname{arctg} \operatorname{sh} v = u + const$. Формально задача решена. Но остается все-таки вопрос, что это за линии? Например, посмотрим линию $\operatorname{arctg} \operatorname{sh} v = u$. Перейдем к общим уравнениям этой линии в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Для этого заметим, что $\operatorname{sh} v = \operatorname{tg} u$. Тогда $\operatorname{sh}^2 v = \operatorname{tg}^2 u$, $1 + \operatorname{sh}^2 v = 1 + \operatorname{tg}^2 u$, $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\operatorname{ch} v = \frac{1}{\cos u}$. Подставляем эти соотношения в параметрические уравнения поверхности

$$x = a\cos u \frac{a}{\cos u};\ y = b\sin u \frac{1}{\cos u};\ z = c \operatorname{tg} u$$

или

$$x = a;\ y = b\operatorname{tg} u;\ z = c\operatorname{tg} u$$

или, исключая параметр u, получим систему уравнений $x = a$, $bz - cy = 0$. Это уравнения плоскостей, а значит, их система задает прямую. Итак, асимптотическая линия $\operatorname{arctg}\operatorname{sh} v = u$ на однополостном гиперболоиде – прямая. □

13.3. Домашнее задание.

1. **[Г]7.79а),в)** Найдите уравнения асимптотических линий следующих поверхностей: а)винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$, $u > 0$; в) сферы $x = r\cos v\cos u$, $y = r\cos v\sin u$, $z = r\sin u$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. **[Г]7.80а),б)** Найдите уравнения асимптотических линий поверхностей: а) $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; б) $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

13.4. Дополнительные задачи.

1. Докажите, что линия на поверхности является асимптотической тогда и только тогда, когда она прямая или имеет в каждой точке касательную плоскость к поверхности своей соприкасающейся плоскостью.

Решение. Для любой кривой γ на поверхности F имеем

$$k_n = k\cos\theta.$$

Кривая будет асимптотической тогда и только тогда, когда $k_n = 0$, то есть $k\cos\theta = 0$. □

§2.14. Главные направления и главные кривизны. Линии кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности.

14.1. Сведения из теорииГлавное направление в точке M поверхности F – это главное направление относительно индикатрисы Дюпена.

Кривая, касательная в каждой точке которой имеет главное направление, называется линией кривизны на поверхности.

Направление $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ (другими словами, (du, dv)) является главным тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv & \gamma_{12}du + \gamma_{22}dv \\ b_{11}du + b_{12}dv & b_{12}du + b_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением линии кривизны, то есть решая это дифференциальное уравнение, мы получаем уравнение линии кривизны в криволинейных координатах.

Главные кривизны – это нормальные кривизны по главным направлениям.

Уравнение для нахождения главных кривизн:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{12} - k\gamma_{12} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Эта система уравнений позволяет вычислить по главным кривизнам главные направления и наоборот, а также проверить, какой главной кривизне какое направление соответствует.

$$\begin{cases} b_{11}du + b_{12}dv = k(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv) \\ b_{12}du + b_{22}dv = k(\gamma_{12}du + \gamma_{22}dv) \end{cases}$$

Полная кривизна поверхности в точке

$$K = k_1 k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Средняя кривизна поверхности в точке

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}^2}.$$

14.2. Задачи.

1. **[A]№1129** Дана поверхность $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$. Найдите главные направления и главные кривизны в точке A с криволинейными координатами $u = 1$, $v = 1$. Найдите линии кривизны.

   Решение. Для того чтобы найти главные направления и главные кривизны в точке A (см. формулы для них выше), нам потребуются коэффициенты первой и второй квадратичных форм в этой точке. Вычисляем.

$$\vec{r}_u(1, 0, 2u);\ \vec{r}_v(0, 1, 2v)$$

   В точке $A(1, 1)$ получим $\vec{r}_u(1, 0, 2)$, $\vec{r}_v(0, 1, 2)$. В той же точке коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = 5;\ \gamma_{12} = 4;\ \gamma_{22} = 5;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 3.$$

   Вычисляем частные производные второго порядка

$$\vec{r}_{uu}(0, 0, 2);\ \vec{r}_{uv}(0, 0, 0);\ \vec{r}_{vv}(0, 0, 2).$$

   Все то же самое будет в точке A. Тогда

$$b_{11} = \frac{2}{3};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = \frac{2}{3}.$$

   Подставляем найденные величины в уравнение для главных направлений

$$\begin{vmatrix} 5du + 4dv & 4du + 5dv \\ \frac{2}{3}du & \frac{2}{3}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем модуль $du^2 - dv^2 = 0$. Тогда мы получаем два направления $du = dv$ и $du = -dv$. В качестве векторов, задающих эти направления можно взять векторы $(d\vec{r})_1(1,1)$ и $(d\vec{r})_2(1,-1)$.

Нормальные кривизны по этим направлениям мы можем вычислить двумя способами: либо решить уравнение для нахождения главных кривизн, которое приведено выше, либо вычислить нормальную кривизну в найденных направлениях (как отношение второй и первой квадратичных форм). Выберем первый способ. Уравнение для нахождения главных кривизн будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - 5k & -4k \\ -4k & \frac{2}{3} - 5k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель и пользуемся формулой для разности квадратов:

$$(\frac{2}{3} - 9k)(\frac{2}{3} - k) = 0.$$

Откуда получаем две главные кривизны в точке A: $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = \frac{2}{27}$.

Выясним, какому направлению какая главная кривизна соответствует. Применяем систему уравнений, в которой есть и главные кривизны, и главные направления (нам достаточно взять только первое уравнение). Возьмем направление $(1,1)$.

$$\frac{2}{3} = k(5+4) \Rightarrow k = \frac{2}{27}.$$

Итак, направлению $(1,1)$ соответствует главная кривизна $k = \frac{2}{27}$. (Кстати, мы могли бы и из этих уравнений вычислить главные кривизны.) Тогда второму главному направлению $(1,-1)$ будет соответствовать главная кривизна $k = \frac{2}{3}$.

P.S. (для интересующихся) Изобразим на рисунке главные направления. Для этого найдем координаты векторов, задающих главные направления в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Имеем

$$(d\vec{r})_1 = \vec{r}_u + \vec{r}_v = (\vec{i} + 2\vec{k}) + (\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Аналогично для второго направления получим $(d\vec{r})_2 = \vec{i} - \vec{j}$. Теперь мы можем изобразить эллиптический параболоид, точку A на нем и нарисовать в точке A представители данных векторов.

Наконец, найдем линии кривизны эллиптического параболоида. Берем уравнение, с помощью которого мы находили главные направления и подставляем в него коэффициенты первой и второй квадратичных форм, вычисленные в произвольной точке (u, v) (а не только в точке A). Получим

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}du & (1+4u^2)du + 4uvdv \\ \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}dv & 4uvdu + (1+4v^2)dv \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его (он не нулевой), получим квадратное уравнение

$$uvdu^2 + (v^2 - u^2)dudv - uvdv^2 = 0.$$

Нам нужно найти соотношение du и dv из этого уравнения. Получаем

$$\frac{du}{dv} = \frac{u^2 - v^2 \pm \sqrt{(v^2 - u^2)^2 + 4u^2v^2}}{2uv} = \frac{u^2 - v^2 \pm (u^2 + v^2)}{2uv}.$$

Получаем совокупность из двух дифференциальных уравнений:

1) $\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$ или $\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$. Интегрируя его, получим $\ln u = \ln v + C$, где C – константа. Так как эта линия кривизны должна проходить через точку $A(1, 1)$, получаем $\ln 1 = \ln 1 + C$. Откуда $C = 0$. Итак, первая линия кривизны, проходящая через точку A, будет в криволинейных координатах задаваться уравнением $u = v$. Выясним, что это за линия. Подставим это равенство в параметрические уравнения параболоида: $x = u, y = u, z = 2u^2$. Сразу видно, что это не прямая. Но для этой линии $x = y$, то есть она лежит в плоскости $x - y = 0$. Кроме того, она лежит на параболоиде. Плоскость $x - y = 0$ проходит через ось Oz и разрезает параболоид по параболе. Следовательно, первая линия кривизны – это парабола.

2) $\frac{du}{dv} = \frac{-v}{u}$ или $udu = -vdu$. Интегрируем это уравнение и получаем $u^2 = -v^2 + C$, где C опять находим из условия, что точка A лежит на искомой линии: $1 = -1 + C$, то есть $C = 2$. Итак, уравнение второй линии кривизны имеет вид $u^2 = -v^2 + 2$. Выясним, что это за линия. Мы видим, что для этой линии $u^2 + v^2 = 2$. Тогда из параметрических уравнений параболоида получаем, что $z = 2$. Другими словами вторая линия кривизны получается, если чашу параболоида разрезать плоскостью $z = 2$. В результате мы получим окружность. $\square$

2. **[Г]7.90а)** Найдите главные направления конуса $x = av\cos u$, $y = av\sin u$, $z = cv$, $v > 0$, $u \in [0, 2\pi)$, $a, c = const$ в произвольной точке.

Решение. Конус является поверхностью вращения прямой $x(v) = av$, $z(v) = cv$ вокруг оси Oz. Поэтому мы можем воспользоваться общими формулами для коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности вращения:

$$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = a^2 + c^2; & \gamma_{12} = 0; & \gamma_{22} = a^2; \\ b_{11} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}; & b_{12} = 0; & b_{22} = 0. \end{array}$$

Записываем уравнение для нахождения главных направлений

$$\begin{vmatrix} (a^2 + c^2)du & a^2dv \\ \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}du & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $dudv = 0$, то есть главные направления в любой точке (в криволинейных координатах) имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Это касательные векторы к линиям u и v соответственно.

P.S. (для интересующихся) Выясним, что из себя представляют линии u и линии v для такой параметризации конуса. Напомним, что линии u определяются условием $v = v_0 = const$. Тогда параметрические уравнения линии u в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ будут иметь вид: $x = (av_0)\cos u$, $y = (av_0)\sin u$, $z = cv_0$. Это окружность с центром в нуле радиуса av_0, лежащая в плоскости $z = cv_0$. Другими словами, линии u – это окружности, получающиеся при пересечении конуса и плоскости, перпендикулярной его оси. Линии v имеют уравнения $x = av\cos u_0$, $y = av\sin u_0$, $z = cv$. Это прямые, проходящие через начало координат параллельно векторам $(a\cos u_0, a\sin u_0, c)$. Это прямолинейные образующие конуса. Таким образом, мы еще обнаружили и линии кривизны конуса – это окружности и прямолинейные образующие. □

3. **[Г] 7.98а)** Найдите главные кривизны геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $\neq 0$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$ в произвольной точке.

Решение. Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм

$$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = 1; & \gamma_{12} = 0; & \gamma_{22} = u^2 + c^2 \\ b_{11} = 0; & b_{12} = \frac{-c}{\sqrt{c^2+u^2}}; & b_{22} = 0. \end{array}$$

Пишем уравнение для нахождения главных кривизн

$$\begin{vmatrix} -k & -\frac{c}{\sqrt{u^2+c^2}} \\ -\frac{c}{\sqrt{u^2+c^2}} & -k(u^2+c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $k_{1,2} = \pm\frac{c}{u^2+c^2}$. □

4. **[Г] 7.100а)** Найдите полную и среднюю кривизну геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$, $c \neq 0$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$ в произвольной точке.

Решение. Используя результат предыдущей задачи, находим

$$K = k_1 k_2 = \frac{c^2}{(u^2+c^2)^2};\ H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0.$$

Мы видим, что геликоид – это минимальная поверхность. □

5. **[Г]7.103, 104 а)** Выведите формулу для вычисления полной и средней кривизны поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$. Используя этот результат, найдите полную и среднюю кривизну поверхности $z = ax^2 + by^2$.

Решение. У нас уже найдены формулы для вычисления коэффициентов первой и второй квадратичных форм для поверхности с таким уравнением

$$\gamma_{11} = 1 + f_x^2;\ \gamma_{12} = f_x f_y;\ \gamma_{22} = 1 + f_y^2;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

$$b_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};\ b_{12} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};\ b_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};$$

Подставим эти соотношения в формулы для полной и средней кривизны.

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2};\ H = \frac{f_{xx}(1+f_y^2) + f_{yy}(1+f_x^2) - 2f_{xy}f_xf_y}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Применяем выведенные формулы для вычисления полной K и средней H кривизн для эллиптического (гиперболического) параболоида.

$$f_x = 2ax;\ f_y = 2by;\ f_{xx} = 2a;\ f_{xy} = 0;\ f_{yy} = 2b.$$

$$K = \frac{4ab}{(1+4a^2x^2+4b^2y^2)^2};\ H = \frac{2b(1+4a^2x^2)+2a(1+4b^2y^2)}{2(1+4a^2x^2+4b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

P.S. (для интересующихся) в уравнении $z = ax^2+by^2$ мы получаем эллиптический параболоид, когда $a, b > 0$ и гиперболический параболоид, если $a > 0, b < 0$ (сразу вопрос, а что будет, если $a, b < 0$ или $a < 0, b > 0$?). В случае эллиптического параболоида мы видим, что полная кривизна принимает наибольшее значение в его вершине – точке $(0,0,0)$. Полная кривизна в этой точке равна $K = 4ab > 0$. По мере удаления от вершины кривизна уменьшается, оставаясь все время положительной. Аналогичным образом можно проанализировать поведение полной кривизны и для гиперболического параболоида. Проведите рассуждения самостоятельно. □

6. **[Г] 7.92 б)**Найдите линии кривизны гиперболического параболоида $x = u+v$, $y = u-v$, $z = uv$.

Решение. Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм для гиперболического параболоида

$$\begin{array}{ll} \gamma_{11} = 2+v^2; & \gamma_{12} = uv;\quad \gamma_{22} = 2+u^2; \\ b_{11} = 0; \&b_{12} = -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}};\quad b_{22} = 0. & \end{array}$$

Составляем уравнение для нахождения линий кривизны

$$\begin{vmatrix} (2+v^2)du + uvdv & uvdu + (2+u^2)dv \\ -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}}dv & -\frac{2}{\sqrt{4+u^2+v^2}}du \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение

$$(2+v^2)du^2 = (2+u^2)dv^2.$$

Получаем совокупность двух уравнений: 1) $\frac{du}{\sqrt{2+u^2}} = \frac{dv}{\sqrt{2+v^2}}$ и 2) $\frac{du}{\sqrt{2+u^2}} = -\frac{dv}{\sqrt{2+v^2}}$.

1) Интегрируем первое уравнение $\ln|u+\sqrt{u^2+2}| = \ln|v+\sqrt{v^2+2}| + \ln C$ или $u+\sqrt{u^2+2} = C(v+\sqrt{v^2+2})$.

2) Интегрируем второе уравнение $\ln|u+\sqrt{u^2+2}| = -\ln|v+\sqrt{v^2+2}| + \ln C$ или $(u+\sqrt{u^2+2})(v+\sqrt{v^2+2}) = C$.

P.S. (для интересующихся) Выясним, что это за линии на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим первую линию и возьмем $C = 1$. Тогда мы получаем $u+\sqrt{u^2+2} = v+\sqrt{v^2+2}$. Оставляя слева один корень, переносим u направо и возводим в квадрат, приводим подобные: $(v-u)\sqrt{2+v^2} = uv - v^2$. Еще раз возводим в квадрат: $(u-v)^2 = 0$. Подставляя в параметрические уравнения параболоида, получим, что линия кривизны лежит в плоскости $y = 0$. Кроме того, она лежит на самом гиперболоиде $x^2 - y^2 = 4z$. Пересекаем: $y = 0$, $x^2 = 4z$. Второе уравнение задает параболический цилиндр, который протянулся вдоль оси Oy, параболы вверх по Oz. Первое уравнение – это плоскость Oxz. В пересечении получаем параболу. Итак, первая линия кривизны (мы посмотрели линию, проходящую через точку $(0, 0)$ в криволинейных координатах, то есть через $(0, 0, 0)$ в пространственной системе координат) является параболой.

Рассмотрим аналогично вторую линию кривизны, которая проходит через точку $(0, 0)$ в криволинейных координатах ($C = 2$). Рассуждая аналогично, получим уравнение $(u + v)(u + \sqrt{2 + u^2}) = 0$. Вторая скобка всегда больше нуля. Тогда $u + v = 0$. Следовательно, $x = 0$. Это плоскость Oyz. Пересекаем ею гиперболический параболоид и получаем еще одну параболу. $\square$

14.3. Домашнее задание.

1. **[Г] 7.90б)** Найдите главные направления винтовой поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$ в произвольной точке.
2. **[Г] 7.99** Найдите главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.
3. **[Г] 7.100 в)** Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $z = xy$ в произвольной точке.
4. **[Г] 7.104** Найдите полную и среднюю кривизну поверхности $xyz = 1$.
5. **[Г] 7.92 в)**Найдите линии кривизны поверхности $z = xy$.

14.4. Дополнительные задачи.

1. **[Г] 7.96** Найдите необходимые и достаточные условия того, что координатные линии поверхности являются линиями кривизны.
2. Докажите, что главные направления на прямом геликоиде делят пополам угол между прямолинейными образующими и винтовыми линиями.
3. **[Б]№1737** Докажите, что на плоскости и сфере любая линия является линией кривизны.

§2.15. Поверхности постоянной кривизны.

15.1. Сведения из теорииПоверхность F называется поверхностью постоянной полной (соответственно, средней) кривизны, если во всех точках этой поверхности $K = const$ ($H = const$).

15.2. Задачи.

1. Докажите, что для плоскости (или ее части) $K = H = 0$.

   Решение. Зададим плоскость (или ее часть) с помощью параметрических уравнений

   $$x = x_0 + p_1 u + q_1 v;\ y = y_0 + p_2 u + q_2 v;\ z = z_0 + p_3 u + q_3 v;\ u, v \in G,$$

   где $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ – не коллинеарные векторы параллельные плоскости, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка этой плоскости. Если двумерный промежуток G совпадает с $\mathbb{R}^2$ (то есть параметры u и v принимают всевозможные значения), то мы получим плоскость. В противном случае мы получаем какую-то часть плоскости.

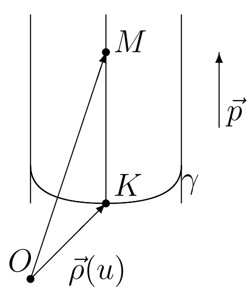
   Вычисляем коэффициенты первой и второй квадратичных форм

   $$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2; & \gamma_{12} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3; & \gamma_{22} = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2; \\ b_{11} = 0, & b_{12} = 0, & b_{22} = 0. \end{array}$$

   Подставляя эти значения в формулы для полной и средней кривизн, получаем нули. □

2. Докажите, что векторное уравнение цилиндрической поверхности имеет вид $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{p}$, где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – уравнение направляющей γ, $\vec{p}$ – постоянный вектор, которому параллельны образующие. Найдите координатные линии цилиндрической поверхности.

   Решение. Напомним, что цилиндрическая поверхность получается так: через каждую точку направляющей γ проводится прямая, параллельная вектору $\vec{p}$. Множество точек всех таких прямых является цилиндрической поверхностью.

   Пусть M – произвольная точка цилиндрической поверхности. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u, v)$ можно представить в виде

   $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \vec{\rho}(u) + v\vec{p},$$

   где v – некоторое вещественное число. Тогда векторное параметрическое уравнение цилиндрической поверхности будет иметь вид

   $$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{p}.$$

   Рассмотрим линии u. Для этого в векторном параметрическом уравнении цилиндрической поверхности фиксируем значение $v = v_0$. Тогда векторное параметрическое уравнение линии будет иметь вид $\vec{r}(u, v_0) = \vec{\rho}(u) + v_0\vec{p}$. Это линия γ, „сдвинутая“ на вектор $v_0\vec{p}$.

   Векторное параметрическое уравнение линии v имеет вид $\vec{r}(u_0, v) = \vec{\rho}(u_0) + v\vec{p}$. Для каждого u_0 это уравнение задает прямую, проходящую через точку с радиус-вектором $\vec{\rho}(u_0)$ параллельно вектору $\vec{p}$. Таким образом, линии v – это прямолинейные образующие цилиндрической поверхности.

P.S. (для интересующихся) Вычислим полную и среднюю кривизну цилиндрической поверхности. Для этого нам нужны коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Вычисляем частные производные вектор-функции, задающей цилиндрическую поверхность.

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_v = \vec{p}.$$

Тогда коэффициенты первой квадратичной формы будут иметь вид

$$\gamma_{11} = (\vec{\rho}'(u))^2;\ \gamma_{12} = \vec{\rho}'(u)\vec{p};\ \gamma_{22} = \vec{p}^2.$$

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{(\vec{\rho}'(u))^2\vec{p}^2 - (\vec{\rho}'(u)\vec{p})^2} = |[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|.$$

Здесь мы воспользовались следующей формулой из аналитической геометрии

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Вычисляем частные производные второго порядка

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\rho}''(u);\ \vec{r}_{uv} = \vec{0};\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Находим коэффициенты второй квадратичной формы

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(\vec{\rho}'(u)\vec{p}\vec{\rho}''(u))}{|[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = 0.$$

Тогда полная кривизна

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = 0.$$

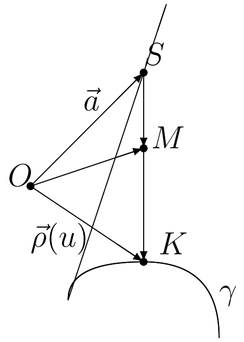
Находим среднюю кривизну

$$H = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}^2} = \frac{(\vec{\rho}'(u)\vec{p}\vec{\rho}''(u))\vec{p}^2}{2|[\vec{\rho}'(u), \vec{p}]|^3}.$$

□

3. Докажите, что векторное уравнение конической поверхности имеет вид $\vec{r}(u, v) = (1 - v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u)$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, задающий вершину конуса, $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – уравнение направляющей γ. Найдите координатные линии конуса.

Решение. Обозначим вершину конуса через S. Напомним, как получается коническая поверхность: точку S соединяем со всеми точками кривой γ прямыми. Полученное множество точек является конической поверхностью.



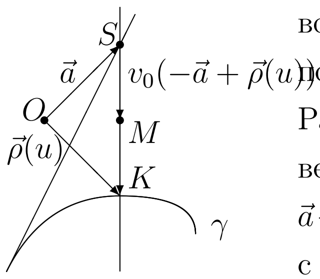
Пусть M – произвольная точка конуса. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u,v)$ можно выразить так:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM} = \vec{a} + v\overrightarrow{SK} = \vec{a} + v(-\vec{a} + \vec{\rho}(u)) = (1-v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u).$$

Итак, векторное параметрическое уравнение конуса будет иметь вид

$$\vec{r}(u,v) = (1-v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u).$$

Найдем координатные линии. Фиксируя $v = v_0$, получаем линии u: $\vec{r}(u,v_0) = (1-v_0)\vec{a} + v_0\vec{\rho}(u)$. Чтобы представить себе, что это такое, запишем это уравнение в виде $\vec{r}(u,v_0) = \vec{a} + v_0(-\vec{a} + \vec{\rho}(u))$.



Тогда из рисунка видно, что произвольная точка M этой кривой будет получаться из соответствующей точки K кривой γ с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом v_0.

Рассмотрим линии v. Подставляем в уравнение конической поверхности $u = u_0$: $\vec{r}(u_0,v) = (1-v)\vec{a} + v\vec{\rho}(u_0)$ или $\vec{r}(u_0,v) = \vec{a} + v(\vec{\rho}(u_0) - \vec{a})$. Это уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\vec{a}$ (это точка S) и направляющим вектором $\vec{\rho}(u_0) - \vec{a}$. Эти прямые – прямолинейные образующие конуса.

P.S. (для интересующихся) Интересно, чему равна полная и средняя кривизна конуса? Чтобы вычислить полную и среднюю кривизну, нужно найти коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Для этого вычисляем частные производные первого и второго порядка для вектор-функции, задающей конус.

$$\vec{r}_u = v\vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_v = -\vec{a} + \vec{\rho}(u).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = v^2(\vec{\rho}'(u))^2;\ \gamma_{12} = v\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a});\ \gamma_{22} = (\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2.$$

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \sqrt{v^2(\vec{\rho}'(u))^2(\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2 - v^2(\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a}))^2} = |v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|.$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы нам потребуются частные производные второго порядка

$$\vec{r}_{uu} = v\vec{\rho}''(u);\ \vec{r}_{uv} = \vec{\rho}'(u);\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Тогда

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(v\vec{\rho}'(u))(\vec{\rho}(u) - \vec{a})(v\vec{\rho}''(u))}{|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|} = \frac{v^2\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u)}{|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|} = \frac{|v|\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u)}{|[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|}.$$

$$b_{22} = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv})}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{(v\vec{\rho}'(u))(\vec{\rho}(u) - \vec{a})(\vec{\rho}'(u))}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что смешанное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

$$b_{22} = 0$$

из-за того, что $\vec{r}_{vv} = \vec{0}$. Тогда сразу видим, что полная кривизна конической поверхности $K = 0$. Вычислим среднюю кривизну

$$H = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{12} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)} = \frac{b_{11}\gamma_{22}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}.$$

$$H = \frac{(\vec{\rho}'(u)(\vec{\rho}(u) - \vec{a})\vec{\rho}''(u))}{2|v||[\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}(u) - \vec{a}]|^3}(\vec{\rho}(u) - \vec{a})^2.$$

Формула получилась громоздкая. Она немного упростится, если начало системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ выбрать в вершине конуса. Тогда $\vec{a} = \vec{0}$ и средняя кривизна будет вычисляться по формуле (аргумент u для краткости записи опустим, но он по-прежнему подразумевается)

$$H = \frac{|v|(\vec{\rho}'\vec{\rho}\vec{\rho}'')}{2|v||[\vec{\rho}', \vec{\rho}]|^3}\vec{\rho}^2.$$

Еще один интересный момент: имея полученную информацию, можно назвать асимптотические линии конической поверхности, не производя никаких вычислений. Как? Что это за линии? □

4. Докажите, что коническая и цилиндрические поверхности имеют нулевую полную кривизну.

Решение. В двух предыдущих задачах (в качестве дополнительных исследований) мы вычислили и полную и среднюю кривизны. Результаты и вычисления получились довольно громоздкие. Посмотрим, как упростятся вычисления, если найти нужно только полную кривизну. Вспомним, что полная кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Так как нам нужно доказать, что кривизна равна нулю, нам нужны только коэффициенты b_{ij}. Причем от них нужны только смешанные произведения $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$. Их мы и вычисляем, используя выведенные в предыдущих задачах векторные параметрические уравнения конической и цилиндрической поверхностей. С большой долей вероятности нулем будет b_{12}. С него и следует начать вычисления. Далее, один из коэффициентов b_{11} и b_{22} будет нулем. Вычисляем. Проведите подробные вычисления самостоятельно или посмотрите их в предыдущих задачах. Итак, для конической и цилиндрической поверхностей получим, что их полная кривизна в любой точке нулевая. □

5. Выведите формулы для вычисления полной и средней кривизны поверхности вращения и вычислите полную и среднюю кривизну сферы и псевдосферы.

Доказательство. Напомним, что мы уже вычисляли коэффициенты первой и второй квадратичных форм для поверхности вращения:

$$\gamma_{11} = x'(u)^2 + z'(u)^2;\ \gamma_{12} = 0;\ \gamma_{22} = x(u)^2;\ \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = x(u)\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}.$$

$$b_{11} = \frac{(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}};\ b_{12} = 0;\ b_{22} = \frac{x(u)z'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

Мы задавали линию в плоскости Oxz с помощью параметрических уравнений $x = x(u)$, $z = z(u)$ и она вращалась вокруг оси Oz. Подставляя эти значения в формулы для полной и средней кривизны, находим

$$K = \frac{z'(u)(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{((x'(u))^2 + (z'(u))^2)^2 x(u)};\ H = \frac{z'(u)((x'(u))^2 + (z'(u))^2) + x(u)(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u))}{2x(u)(x'(u))^2 + (z'(u))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Зададим сферу. Возьмем в плоскости Oxz половину окружности (находящуюся в первом и четвертом квадрантах) радиуса r с центром в начале системы координат . Ее параметрические уравнения будут иметь вид $x = r\cos u$, $z = r\sin u$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда имеем

$$x' = -r\sin u;\ z' = r\cos u;\ x'' = -r\cos u;\ z'' = -r\sin u.$$

Подставляем в полученные формулы для полной и средней кривизны

$$K = \frac{1}{r^2};\ H = \frac{1}{r}.$$

Итак, сфера является поверхностью постоянной полной и средней кривизны.

Псевдосфера получается вращение трактрисы $x = a\sin u$, $z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$ вокруг оси Oz. Находим

$$x'(u) = a\cos u;\ z'(u) = a(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\frac{1}{2} - \sin u) = a(\frac{1}{\sin u} - \sin u);$$

$$x''(u) = -a\sin u;\ z'' = a(-\sin^{-2} u\cos u - \cos u) = a\cos u(-\frac{1}{\sin^2 u} - 1);$$

Подставляем в формулу для полной и средней кривизны

$$K = -\frac{1}{a^2};\ H = \frac{1}{a\operatorname{tg} 2u}.$$

Итак, псевдосфера является поверхностью постоянной отрицательной полной кривизны. Ее средняя кривизна не является постоянной. □

6. **[Г] 7.105а)** Докажите, что катеноид $x = \operatorname{ch} u\cos v$, $y = \operatorname{ch} u\sin v$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$ является минимальной поверхностью.

Решение. По параметрическим уравнениям мы видим, что это поверхность вращения (цепная линия вращается вокруг оси Oz). Параметрические уравнения цепной линии $x = \operatorname{ch} u$, $z = u$.

Мы уже вывели формулу для вычисления средней кривизны поверхности вращения. Так как нам нужно показать, что средняя кривизна равна нулю, достаточно вычислить числитель в этой формуле. Вычисляем

$$x'(u) = \operatorname{sh} u;\ z'(u) = 1;\ x''(u) = \operatorname{ch} u;\ z''(u) = 0.$$

Тогда

$$z'(u)((x'(u))^2+(z'(u))^2)+x(u)(x'(u)z''(u)-x''(u)z'(u)) = 1(\operatorname{sh}^2 u+1)+\operatorname{ch} u(\operatorname{sh} u\cdot 0-\operatorname{ch} u\cdot 1) = 0.$$

Итак, катеноид является примером минимальной поверхности. □

15.3. Домашнее задание.

1. Выясните, будет ли винтовая поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ минимальной.
2. **[Г] 7.105 г)** Докажите, что поверхность Эннепера $x = 3u + 3uv^2 - u^3$, $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ является минимальной.
3. **[А]№1145** На поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ найти линии, вдоль которых полная кривизна постоянна.

15.4. Дополнительные задачи.

1. Доказать, что если средняя кривизна поверхности во всех точках равна нулю, то асимптотическая сеть этой поверхности ортогональна.
2. Докажите, что если через некоторую точку поверхности проходит прямолинейная образующая, то полная кривизна в этой точке не положительна.
3. Поверхность образована нормалями некоторой поверхности вдоль ее линии кривизны. Докажите, что полная кривизна этой поверхности равна нулю.

§2.16. Линейчатые поверхности.

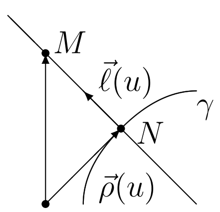
16.1. Сведения из теории. Поверхность, являющаяся множеством точек прямых линий, называется *линейчатой поверхностью.* Если через каждую точку линейчатой поверхности проходит k прямых, целиком лежащих на этой поверхности, то она называется k-линейчатой.

Мы уже знакомы с примерами линейчатых поверхностей: цилиндрические и конические поверхности (1-линейчатые поверхности), однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид (2-линейчатые поверхности).

Мы будем строить линейчатые поверхности следующим образом. Пусть γ – гладкая кривая (она называется направляющей линейчатой поверхности) и она задается векторным параметрическим уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. В каждой точке этой кривой зададим единичный вектор $\vec{\ell} = \vec{\ell}(u)$ так, чтобы вектор-функция $\vec{\ell}(u)$ была бы гладкой. Через каждую точку $N \in \gamma$ (пусть ей соответствует значение параметра u) проведем прямую, параллельную вектору $\vec{\ell}(u)$ в этой точке.

Получим семейство прямых, которые называются образующими линейчатой поверхности. Множество точек всех таких прямых является линейчатой поверхностью.

Выведем параметрическое уравнение линейчатой поверхности F.



Пусть M – произвольная точка линейчатой поверхности F. Тогда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r}(u,v)$ будет получаться так:

$$\vec{r}(u,v) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u).$$

От точки O доходим до соответствующей точки кривой γ и затем идем по прямой, которая задана в этой точке с помощью вектора $\vec{\ell}$. Итак, векторное параметрическое уравнение линейчатой поверхности будет иметь вид

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u).$$

Линиями u будут линии $\vec{r}(u,v_0) = \vec{\rho}(u) + v_0\vec{\ell}(u)$. Это направляющая γ, „параллельно сдвинутая" на вектор $v_0\vec{\ell}(u)$. Линиями v будут линии $\vec{r}(u_0,v) = \vec{\rho}(u_0) + v\vec{\ell}(u_0)$ – это прямолинейные образующие (задаются точкой с радиус-вектором $\vec{\rho}(u_0)$ параллельно вектору $\vec{\ell}(u_0)$.

Исследуем поведение нормали к линейчатой поверхности. Находим

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}\,'(u) + v\vec{\ell}\,'(u);\ \vec{r}_v = \vec{\ell}(u).$$

Тогда направляющий вектор нормали (не обязательно единичный) будет иметь вид

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u)] + v[\vec{\ell}\,'(u), \vec{\ell}(u)].$$

Пусть точка движется по образующей, то есть u фиксировано, а v меняется. При этом векторы $[\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u)]$ и $[\vec{\ell}\,'(u), \vec{\ell}(u)]$ постоянны, так как зависят только от u. Тогда вектор $\vec{N}$ меняется только из-за изменения v. Выделим два случая:

1) (общий случай) $[\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u)] \neq \parallel [\vec{\ell}\,'(u), \vec{\ell}(u)]$ вдоль образующей. У вектора $\vec{N}$ первое слагаемое постоянно, а второе слагаемое меняется с изменением v. Касательная плоскость содержит образующую и поворачивается вокруг нее вместе с вектором $\vec{N}$. В этом случае линейчатая поверхность называется *косой*.

2) (специальный случай) $[\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u)] \parallel [\vec{\ell}\,'(u), \vec{\ell}(u)]$. Так как для вектора $\vec{N}$ первое слагаемое не меняется, а второе будет параллельно первому слагаемому, то для всех точек образующей вектор $\vec{N}$ будет параллелен одной и той же прямой. Тогда касательная плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{N}$ будет неподвижной, то есть касательные плоскости во всех точках одной образующей будут совпадать. Такая линейчатая поверхность называется *развертывающейся*. Такие поверхности можно „развернуть " на плоскость, то есть отобразить на плоскость с сохранением длин кривых этих поверхностей.

Получим критерий развертывающейся поверхности. Обозначим $\vec{p} = [\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u)] \parallel [\vec{\ell}\,'(u), \vec{\ell}(u)]$. Тогда по определению векторного произведения $\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}\,'(u)$ перпендикулярны вектору $\vec{p}$. Это означает, что $\vec{\rho}\,'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}\,'(u)$ компланарны для любого u, то есть их смешанное произведение равно нулю. Итак, линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда

$$(\vec{\rho}'(u), \vec{\ell}(u), \vec{\ell}'(u)) = 0.$$

16.2. Задачи.

1. **[Г]7.37** Поверхность образована касательными к некоторой линии γ. Докажите, что в каждой точке одной и той же касательной к линии γ касательная плоскость к поверхности одна и та же.

   Решение. Пусть линия γ задана векторным параметрическим уравнением $\rho = \rho(u)$, где u – натуральный параметр. Запишем векторное параметрическое уравнение этой линии. От начала системы координат (точки O) идем сначала до точки линии γ по вектору $\vec{\rho}(u)$. Затем идем по касательной (то есть по прямой, параллельной вектору $\vec{\tau}(u)$, на сколько и в какую сторону идем, говорит параметр v). Тогда векторное параметрическое уравнение поверхности будет иметь вид

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\tau}(u).$$

   Из сведений по теории мы видим, что касательная плоскость вдоль прямолинейной образующей будет одной и той же тогда и только тогда, когда поверхность является развертывающейся. Проверяем выполнение критерия развертывающейся поверхности:

$$(\vec{\rho}'(u), \vec{\tau}(u), \vec{\tau}'(u)) =$$

   Так как u – натуральный параметр кривой, мы можем воспользоваться формулами Френе. Тогда

$$= (\vec{\tau}(u), \vec{\tau}(u), \vec{\tau}'(u)) = 0,$$

   так как в смешанном произведении есть два одинаковых вектора. Итак, поверхность, образованная касательными к линии, является развертывающейся и касательные плоскости к ней вдоль одной прямолинейной образующей совпадают. □

2. **[Г]7.38** Поверхность F образована бинормалями к некоторой линии γ. Докажите, что касательная плоскость к поверхности в каждой точке линии γ совпадает со спрямляющей плоскостью линии γ, а нормалью к поверхности является главная нормаль линии γ.

   Решение. Зададим линию γ векторным параметрическим уравнением $\rho = \rho(u)$, где u – натуральный параметр. Тогда уравнение поверхности F будет иметь вид

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\beta}(u).$$

   Найдем векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, которые определяют касательную плоскость к поверхности. Мы можем пользоваться формулами Френе для линии γ, так как параметр u для нее является натуральным.

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\beta}'(u) = \vec{\tau}(u) + v(-\varkappa(u))\vec{\nu}(u); \; \vec{r}_v = \vec{\beta}(u).$$

Во всех точках линии γ имеем $v = 0$. Тогда в этих точках

$$\vec{r}_u = \vec{\tau}(u);\ \vec{r}_v = \vec{\beta}(u).$$

Эти векторы определяют спрямляющую плоскость в точке $\vec{\rho}(u)$ линии γ.

Найдем нормаль поверхности F в этих точках. Это будет вектор

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{\tau}(u), \vec{\beta}(u)] = -\vec{\nu}(u),$$

то есть нормаль к поверхности F параллельна вектору главной нормали линии γ, а значит совпадает с главной нормалью. □

3. **[Г]7.69** Гладкая линия γ задана уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$, где u – натуральный параметр линии γ. Поверхность F образована а) касательными к γ, б) главными нормалями к γ, в) бинормалями к γ. Вычислите первую и вторую квадратичные формы поверхности F в каждом из случаев.

Решение. 1. Как мы видели выше векторное параметрическое уравнение такой поверхности имеет вид

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\tau}(u).$$

Тогда, используя формулы Френе, получаем

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}\,'(u) + v\vec{\tau}\,'(u) = \vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u);\ \vec{r}_v = \vec{\tau}(u).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u\vec{r}_u = (\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u))(\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u)) = 1 + v^2k(u)^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что векторы $\vec{\tau}(u)$ и $\vec{\nu}(u)$ единичные и взаимно перпендикулярные.

$$\gamma_{12} = (\vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u))\vec{\tau}(u) = 1;\ \gamma_{22} = \vec{\tau}(u)\vec{\tau}(u) = 1.$$

Итак, первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = (1 + v^2k(u)^2)du^2 + 2dudv + dv^2.$$

Вычислим вторую квадратичную форму поверхности. Для этого нам потребуются вторые частные производные

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\tau}\,'(u) + v(k'(u)\vec{\nu}(u) + k(u)\vec{\nu}\,'(u)) = k(u)\vec{\nu}(u) + v(k'(u)\vec{\nu}(u) + k(u)(-k(u)\vec{\tau}(u) + \varkappa(u)\vec{\beta}(u))) =$$
$$= -vk(u)^2\vec{\tau}(u) + (k(u) + vk'(u))\vec{\nu}(u) + vk(u)\varkappa(u)\vec{\beta}(u).$$

$$\vec{r}_{uv} = k(u)\vec{\nu}(u);\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Воспользуемся тем, что репер Френе является правой прямоугольной декартовой системой координат, а значит мы можем применить формулу для вычисления смешанного произведения векторов через их координаты в репере Френе.

$$(\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} 1 & vk(u) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -vk(u)^2 & k(u)+vk'(u) & vk(u)\varkappa(u) \end{vmatrix} = v^2 k(u)^2 \varkappa(u).$$

Тогда

$$b_{11} = \frac{v^2 k(u)^2 \varkappa(u)}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}} = \frac{v^2 k(u)^2 \varkappa(u)}{|v| k(u)} = |v| k(u) \varkappa(u).$$

Вычисления для b_{12} и b_{22} еще проще. Там в определителях получаются нули. Следовательно, $b_{12} = 0$ и $b_{22} = 0$. Итак, вторая квадратичная форма поверхности F имеет вид

$$II = |v| k(u) \varkappa(u) du^2.$$

P.S. (для интересующихся) Теперь мы можем найти асимптотические линии, линии кривизны, определить полную и среднюю кривизны поверхности. Проведите вычисления самостоятельно.

2. Проведем аналогичные вычисления для поверхности, образованной главными нормалями. Записываем векторное параметрическое уравнение такой поверхности:

$$\vec{r}(u,v) = \rho(u) + v\vec{\nu}(u).$$

Вычисляем, используя формулы Френе,

$$\vec{r}_u = \vec{\tau}(u) + v(-k(u)\vec{\tau}(u) + \varkappa(u)\vec{\beta}(u)) = (1 - vk(u))\vec{\tau}(u) + v\varkappa(u)\vec{\beta}(u).$$

$$\vec{r}_v = \vec{\nu}(u).$$

Тогда

$$ds^2 = ((1 - v^2 k(u)^2) + v^2 \varkappa(u)^2) du^2 + dv^2.$$

Вторая квадратичная форма будет иметь вид

$$II = \frac{v\varkappa'(u) + v^2(k'(u)\varkappa(u) - k(u)\varkappa'(u))}{\sqrt{(1 - vk(u))^2 + v^2\varkappa(u)^2}} du^2 + 2\frac{\varkappa(u)}{\sqrt{(1 - vk(u))^2 + v^2\varkappa(u)^2}} dudv.$$

3. Вычислим первую и вторую квадратичные формы для поверхности бинормалей. Уравнение поверхности

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\beta}.$$

Первая квадратичная форма

$$ds^2 = (1 + v^2\varkappa^2(u)) du^2 + dv^2.$$

Вторая квадратичная форма

$$II = \frac{k(u) - v\varkappa'(u) + v^2\varkappa(u)^2 k(u)}{\sqrt{1 + v^2\varkappa(u)^2}} + 2\frac{-\varkappa(u)}{\sqrt{1 + v^2\varkappa(u)^2}}.$$

□

4. Докажите, что полная кривизна линейчатой поверхности равна нулю тогда и только тогда, когда она развертывающаяся.

Доказательство. Зададим линейчатую поверхность с помощью векторного параметрического уравнения $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\ell}(u)$, где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – векторное параметрическое уравнение направляющей в натуральной параметризации.

Вспомним, что полная кривизна поверхности вычисляется по формуле $K = \frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}$. Так как нам нужно работать с полной кривизной, которая равна нулю, знаменатель в этой дроби нам не потребуется. Кроме того, знаменатели при вычислении b_{ij} нам также не будут нужны. Поэтому важны для нас будут вторые частные производные $\vec{r}(u,v)$. Вычисляем

$$\begin{aligned} &\vec{r}_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{\ell}'(u); && \vec{r}_v = \vec{\ell}(u); \\ &\vec{r}_{uu} = \vec{\rho}''(u) + v\vec{\ell}''(u); \quad \vec{r}_{uv} = \vec{\ell}'(u); && \vec{r}_{vv} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Мы видим, что b_{22} нуль. Тогда b_{11} не нужно вычислять. Таким образом, полная кривизна линейчатой поверхности будет нулевой тогда и только тогда, когда $b_{12} = 0$, то есть $(\vec{\rho}'(u) + v\vec{\ell}'(u))\vec{\ell}(u)\vec{\ell}'(u) = 0$, то есть $(\vec{\rho}'(u)\vec{\ell}(u)\vec{\ell}'(u)) = 0$. Это означает, что линейчатая поверхность будет развертывающейся. □

§2.17. Программа экзамена.

17.1. Вопросы к экзамену.

1. Вектор- функция одного скалярного аргумента и техника дифференцирования.

2. Гладкие кривые. Длина дуги. Натуральный параметр. Замена параметризации. Неявное задание кривой.

3. Касательная к гладкой кривой. Теорема о существовании и единственности касательной. Уравнения касательной. Нормальная плоскость.

4. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой. Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Репер Френе.

5. Формулы Френе.

6. Кручение линии, формула вычисления. Теорема о геометрическом смысле кручения.

7. Формулы для вычисления кривизны и кручения линии, заданной в произвольной параметризации.

8. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты.

9. Замена параметризации в уравнениях поверхности. Неявные уравнения поверхности.

10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Различные способы задания и виды уравнений.
11. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины дуги.
12. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
13. Вычисление площади на поверхности.
14. Вторая квадратичная форма. Различные формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.
15. Нормальная кривизна линии на поверхности. Формула для ее вычисления.
16. Кривизна нормального сечения поверхности, свойства. Теорема Менье.
17. Индикатриса Дюпена.
18. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности. Критерий асимптотической линии. Теорема о количестве асимптотических направлений.
19. Главные направления поверхности. Теорема Родрига.
20. Главные кривизны поверхности. Теорема Эйлера.
21. Полная кривизна поверхности.
22. Средняя кривизна поверхности.
23. Поверхности постоянной полной кривизны.

17.2. Дополнительные вопросы к экзамену.

1. Зависит ли подвижной репер от выбора параметризации кривой?
2. Существуют ли кривые, все главные нормали которых проходят через одну точку? параллельны между собой?
3. На листе бумаги нарисованы восьмерка и четверка. Будут ли эти линии гладкими?
4. На бумаге нарисована плоская кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Изобразите векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.
5. Используя знания о циклоиде, объясните, почему грязь с дороги неизбежно попадает на спину велосипедисту, даже если заднее колесо прикрыто щитком.
6. Могут ли все коэффициенты первой квадратичной формы поверхности быть тождественно равны нулю? А какие-нибудь из трех?
7. Почему на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны?
8. Может ли поверхность, состоящая из касательных к данной пространственной кривой иметь эллиптические точки?

9. Может ли винтовая линия быть нормальным сечением некоторой поверхности?

10. Существуют ли асимптотические линии на поверхности положительной полной кривизны?

11. Каким может быть тип точки а) для 1-линейчатых поверхностей, б) 2-линейчатых поверхностей?

12. Существуют ли омбилические точки на параболоиде вращения, эллипсоиде вращения, однополостном гиперболоиде вращения?

13. На поверхности F в криволинейных координатах уравнение кривой задано линейным уравнением $Au + Bv + C = 0$. Верно ли, что это всегда уравнение прямой? Может ли прямая в криволинейных координатах иметь не линейное уравнение?

14. Почему индикатриса Дюпена не может быть параболой, парой совпавших прямых, парой пересекающихся прямых?

15. На рисунке изображена индикатриса Дюпена и указано несколько направлений. Определите, в каком направлении нормальная кривизна больше, а в каком меньше.

16. Запишите первую квадратичную форму плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, в аффинной системе координат, в полярной системе координат. Изобразите координатные линии в каждом случае.

17. На верхней окружности тора укажите главные направления и главные кривизны (не проводя вычислений).

18. Зависит ли нормальная кривизна линии от поверхности, на которой находится?

19. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии, то все точки линии параболического типа. (Можно ли параболоид вращения „положить“ на стол?)

20. Используя теорему Менье, выясните, можно ли на прямом круговом цилиндре нарисовать окружность (множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки), имеющую прямолинейную образующую цилиндра своей касательной? (Можно ли в круговом цилиндре вырезать круглую дырку?)

21. Изобразите индикатрису Дюпена для произвольной точки кругового цилиндра (конуса), укажите главные и асимптотические направления.

22. Как по картинке отличить эллиптическую точку от гиперболической?

23. Может ли асимптотическая линия быть линией кривизны?

24. Как известно, главные кривизны – это максимальное и минимальное значения нормальных кривизн в данной точке. Проиллюстрируйте это утверждение для а) эллиптической точки; б) для параболической точки; в) для гиперболической точки.