Дополнительные главы геометрии Лобачевского.

4 февраля 2021 г.

Содержание

Литература.

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, Том 2, Москва, Просвещение, 1988.

2. Гусева Н.И. и др. Геометрия Том 2, Москва, Академия, 2013.

3. Я.П. Понарин Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. Москва, 2004.

4. Я.П. Понарин Элементарная геометрия Том 1 Москва, 2004.

5. А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко Курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, 2000.

6. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов Геометрия, часть 2, Санкт-Петербург, 1997.

7. Л.С.Атанасян Геометрия Лобачевского, Москва, Просвещение, 2001.

8. А.И. Обухова История элементарной геометрии.

1. Необходимые сведения из евклидовой геометрии

1.1. Занятие 1. Комплексные числа и евклидова плоскость

1. Комплексные числа и операции с ними

Напомним, что комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел, которые удобно записать так: $a = a_1 + ia_2$, где $i^2 = -1$. Правила сложения и умножения комплексных чисел выглядят так:

$$a + b = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2);\ z_1 z_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

где $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел коммутативно. *Сопряженным* комплексному числу z называется комплексное число

$$\bar{z} = a_1 - ia_2.$$

Модулем комплексного числа $a = a_1 + a_2 i$ называется вещественное число

$$|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Тогда легко видеть, что

$$|a|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 = (a_1 + a_2 i)(a_1 - a_2 i) = a\bar{a}.$$

Вещественные числа рассматриваются как частный случай комплексных чисел: $a = a_1 + i0$.

Комплексные числа вида $a = 0 + ib_2$ называются *чисто мнимыми.* Мы будем обозначать множество чисто мнимых чисел через $i\mathbb{R}$.

С помощью операции комплексного сопряжения получается удобный критерий вещественных и чисто мнимых чисел:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z. \tag{1.1}$$

Хорошо известны свойства операции комплексного сопряжения:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \tag{1.2}$$

2. Комплексная координата точки и вектора на евклидовой плоскости

Рассмотрим евклидову плоскость и фиксируем на ней прямоугольную декартову систему координат. Тогда каждая точка M плоскости получает пару координат (x, y) (вспоминайте курс аналитической геометрии). Из этих чисел составим комплексное число $z = x + iy$. Это число будем называть *комплексной координатой точки* M в данной системе координат.

Аналогичным образом поступаем с координатами вектора. Берем вектор $\vec{p}$. В базисе данной системы координат у него есть пара вещественных координат: (p_1, p_2). Составляем из них комплексное число $p = p_1 + ip_2$. Это число будем называть *комплексной координатой вектора.*

Легко видеть, что в комплексной координате сохраняется теорема о нахождении координаты вектора по координатам конца и начала любого его представителя:

$$A(a), B(b) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b - a). \tag{1.3}$$

Как мы знаем из курса аналитической геометрии два вектора (две точки) равны (совпадают) тогда и только тогда, когда их вещественные координаты равны. Если собрать пару комплексных координат в одну комплексную координату, то мы получим, что два вектора (две точки) равны (совпадают) тогда и только тогда, когда их комплексные координаты совпадают.

3. Скалярное произведение в комплексных координатах

Получим формулы для вычисления скалярного произведения векторов и длины вектора через их комплексные координаты.

Пусть даны векторы $\vec{p}(p)$ и $\vec{q}(q)$. Тогда $p = p_1 + ip_2$, $q = q_1 + iq_2$, где (p_1, p_2) и (q_1, q_2) — это вещественные координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Как мы знаем из курса аналитической геометрии

$$\vec{p}\vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2.$$

С другой стороны, заметим, что по определению умножения комплексных чисел

$$pq = (p_1q_1 - p_2q_2) + i(p_1q_2 + p_2q_1).$$

Первая скобка — это почти то, что нужно, на знак не тот. Чтобы поменять знак, перейдем в одном из чисел к комплексному сопряжению:

$$p\bar{q} = (p_1q_1 + p_2q_2) + i(p_2q_1 - p_1q_2). \tag{1.4}$$

Первая скобка годится, но есть еще вторая. Чтобы от нее избавиться, комплексно сопряжем это число и сложим:

$$p\bar{q} + \bar{p}q = 2(p_1q_1 + p_2q_2).$$

Итак, формула для скалярного произведения в комплексной координате:

$$\vec{p}\vec{q} = \frac{1}{2}(p\bar{q} + \bar{p}q).$$

Из нее легко получается формула для нахождения длины вектора:

$$|\vec{p}|^2 = \vec{p}\vec{p} = p\bar{p} \equiv |p|^2.$$

Итак, формула для длины вектора $\vec{p}$:

$$|\vec{p}| = \sqrt{p\bar{p}} \equiv |p|.$$

Длина вектора равна модулю его комплексной координаты.

Из этого сразу получаем формулу для нахождения угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p\bar{q} + \bar{p}q}{2\sqrt{p\bar{p}}\sqrt{q\bar{q}}}.$$

P.S. (для интересующихся) Вернемся к формуле (1.4), в которой мы вычисляли $p\bar{q}$. Дальше мы комплексно сопрягали и складывали. А что будет, если комплексно сопрячь и вычесть из второго первое? Попробуем.

$$\bar{p}q - p\bar{q} = 2i\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

Этот определитель уже знаком нам: это числитель из формулы синуса ориентированного угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Тогда получаем

$$\sin\widehat{(\vec{p},\vec{q})} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{\bar{p}q - p\bar{q}}{\sqrt{p\bar{p}}\sqrt{q\bar{q}}}.$$

4. Задачи

1. Изобразите точку с данной комплексной координатой: а) 3; б) $-4i$; в) $1-2i$.

2. Изобразите представитель вектора $\vec{p}(-2+i)$, отложенный от точки $A(1+2i)$.

3. Докажите теорему о комплексной координате вектора (1.3).

4. Получите формулу для нахождения расстояния между точками $A(a)$ и $B(b)$.

5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют условию $a+c=b+d$.

   Указания к решению. Пусть параллелограмм. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Тогда $b-a = c-d$.

   Обратно, пусть $a+c=b+d$. Тогда будет векторное равенство и параллелограмм по признаку. □

6. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB. Докажите, что расстояние CD выражается формулой
$$CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2.$$

Указания к решению. Начало системы координат помещаем в центр окружности. Тогда для любой точки окружности имеем $z\bar{z} = R^2$. Обозначаем координаты точек $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Следовательно, $a\bar{a} = R^2$ и т.д. Четырехугольник $AOBD$ является ромбом. Тогда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Тогда $d = a + b$. Вычисляем левую и правую часть доказываемого равенства с помощью формулы для вычисления расстояния. Убеждаемся, что равно. □

7. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Указания к решению. Вершины обозначаем a, b, c, d. Вычисляем середины (сообразите по какой формуле). Вычисляем левую и правую части. □

5. Домашнее задание

1. Докажите критерии вещественного и чисто мнимого числа (1.1).

2. Докажите свойства операции комплексного сопряжения (1.2).

3. На бумаге в клеточку нарисуйте прямоугольную систему координат, поставьте несколько конкретных точек, найдите для каждой комплексную координату.

4. На в клеточку нарисуйте прямоугольную систему координат, нарисуйте представитель какого-нибудь вектора, отложенного от конкретной точки (отличной от начала системы координат). Найдите координаты этого вектора.

5. Получите формулу для вычисления комплексной координаты середины отрезка, если известны комплексные координаты концов этого отрезка.

6. Точка M — середина дуги AB окружности. Докажите, что для произвольной точки N этой окружности имеет место равенство

$$|AM^2 - MN^2| = AN \cdot BN.$$

Указания. Поместите начало системы координат в центр окружности и выберете единичных отрезок, равный радиусу окружности. Тогда радиус окружности будет 1. Введите координаты точек и вычисляйте.

1.2. Занятие 2. Коллинеарность и перпендикулярность. Простое отношение трех точек прямой

1. Коллинеарность и перпендикулярность векторов. Принадлежность трех точек одной прямой

Из курса аналитической геометрии мы помним, что два вектора $\vec{p}$, $\vec{q} \neq \vec{0}$ коллинеарны тогда и тогда, когда существует вещественное число λ, такое, что $\vec{p} = \lambda\vec{q}$,

$\lambda \in \mathbb{R}$. Если записать это равенство в комплексных координатах векторов, то получим $p = \lambda q$ или $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$.

Итак, два вектора (один из которых не нулевой) коллинеарны тогда и только тогда отношение их комплексных координат является вещественным числом:

$$\vec{p} \| \vec{q} \Leftrightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{R}.$$

Пусть даны четыре точки A, B, C, D. По доказанному векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда отношение их комплексных координат вещественно, то есть

$$\frac{b-a}{c-d} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{d}}.$$

Тогда получим, что три точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этих векторов предыдущая пропорция примет вид ($D = A$):

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0.$$

Это же равенство удобно записать в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это критерий принадлежности трех точек одной прямой.

Получим критерий перпендикулярности двух векторов. Как мы помним из курса аналитической геометрии два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Мы уже получили формулу для вычисления скалярного произведения в комплексных координатах. Тогда получаем, что два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\bar{p}q + p\bar{q} = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде $\frac{p}{q} = \overline{-\frac{p}{q}}$. Это означает, что комплексное число $\frac{p}{q}$ является чисто мнимым.

Итак, мы получили, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\frac{p}{q}$ является чисто мнимым:

$$\vec{p} \perp \vec{q} \Leftrightarrow \frac{p}{q} \in i\mathbb{R}.$$

Пусть даны четыре точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Тогда условие перпендикулярности отрезков AB и CD будет выглядеть так (почему?):

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0.$$

Если эти точки лежат на окружности с центром в начале системы координат и радиуса 1, то $a\bar{a} = b\bar{b} = \ldots = 1$. В этом случае критерий перпендикулярности отрезков AB и CD принимает более простой вид (подставьте $\bar{a} = \frac{1}{a}$ и т.д.):

$$ab + cd = 0.$$

2. Простое отношение трех точек.

Напомним, что простым отношением трех точек прямой A, B, C называется число $\lambda = (A, B, C)$, такое, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Если обозначить комплексные координаты точек стандартным образом, то получим равенство $c - a = \lambda(b - c)$. Откуда можем выразить координату c через остальное:

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

В частности, получаем формулу для вычисления комплексной координаты середины отрезка (мы ее уже получали):

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

3. Задачи

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки, делящие отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в одном и том же отношении, служат вершинами параллелограмма.

   Указания к решению. Применить формулу для комплексной координаты точки, делящей в данном отношении. Дальше применить критерий параллелограмма из прошлого семинара. $\square$

2. Средняя линия четырехугольника делит его на два четырехугольника. Докажите, что середины диагоналей этих двух четырехугольников являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

   Указания к решению. Введем комплексные координаты вершин четырехугольника стандартным образом. Тогда точка E — середина BC и точка F — середина AD будут иметь координаты, которые вычисляются по формуле для середины отрезков. Также поступаем с серединами диагоналей. По координатам убеждаемся, что векторы равны. Это параллелограмм либо точки на одной прямой. $\square$

3. Докажите, что если диагонали вписанного в окружность четырехугольника перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до любой стороны четырехугольника равно половине длины соответствующей противоположной стороны.

   Указания к решению. Выбираем систему координат с началом в центре окружности (единичный отрезок — радиус окружности). Ось Ox вдоль OK, где K основание перпендикуляра, опущенного на сторону CD. Тогда $k = \frac{c+d}{2}$. Так как CD параллельно оси Oy, получаем, что число $c - d$ чисто мнимое и $\bar{c} - \bar{d} = d - c$. Так как точки C и D лежат на окружности, $\bar{c}c = 1$, $\bar{d}d = 1$.

Откуда $cd = 1$. Условие перпендикулярности $ac+bd = 0$. Подставляем $c = 1/d$ и вычисляем квадрат длины AB

$$AB^2 = (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) = -\frac{(b-a)^2}{ab} = -\frac{(b+bd^2)^2}{(-bd^2)} = \frac{(1+d^2)^2}{d^2}.$$

С другой стороны, расстояние от центра окружности до точки K равно $k = \frac{1/d+d}{2}$. Откуда получаем то, что требовалось. □

4. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведена медиана к катету, а к ней — перпендикуляр из вершины прямого угла. Найдите отношение, в котором этот перпендикуляр делит гипотенузу. А медиану?

   Указания к решению. Выбираем систему координат с началом в вершине прямого угла. Тогда $A(i)$, $B(1)$, $M(1/2)$. Основание высоты $H(h)$. Находим h из условий перпенидкулярности и лежать на одной прямой. Определение простого отношения в векторах дает соотношение в комплексных координатах. Откуда находим это простое отношение.

   Для медианы получилось 4. Для гипотенузы получилось □

4. Домашнее задание

1. Противоположные стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ разделены точками M и N в отношении λ, считая от точек A и D. Докажите, что отрезок MN делит среднюю линию четырехугольника (отрезок, соединяющий середины противоположных сторон BC и AD четырехугольника) в том же отношении λ, и сам делится средней линией пополам. **Указания.** Ввести комплексные координаты вершин четырехугольника. Вычислить середины T и S сторон и точки M и N. Посчитать середину K отрезка MN. По критерию параллельности убедиться, что отрезки TK и TS параллельны. Вместо этого еще можно воспользоваться критерием принадлежности трех точек одной прямой.

2. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

   Указания. Введите координаты вершин треугольника. Вычислите координаты оснований медиан и посчитайте квадраты длин.

3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.

4. Докажите, что если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны. И наоборот. **Указания.** Напишите критерий перпендикулярности, который нужно проверить. Напишите условие равенства средних линий. Убедитесь, что одно приводится к другому.

1.3. Занятие 3. Геометрический смысл умножения комплексных чисел. Поворот

1. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Напомним, что комплексное число $z = a + ib$ можно записать в виде

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

В силу основного тригонометрического тождества существует ориентированный угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда комплексное число z представляется в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Если изображать точку на плоскости с комплексной координатой z, то φ — это угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором этой точки.

В тригонометрической форме удобно умножать комплексные числа:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Правило возведения в степень (формула Муавра):

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}.$$

2. Поворот

Из курса аналитической геометрии мы знаем, что поворот вокруг точки $S(x_0, y_0)$ на ориентированный угол φ задается формулами

$$\begin{aligned} x' &= (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi + x_0, \\ y' &= (x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi + y_0. \end{aligned}$$

Умножим второе равенство на i и сложим:

$$z' = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(z - z_0) + z_0,\ z_0 = x_0 + iy_0.$$

P.S. (для интересующихся) Мы получили, что поворот вокруг точки задается формулой вида $z' = \sigma \cdot (z - z_0) + z_0$, где $|\sigma| = 1$ (то есть сигма — это комплексное число с модулем, равным 1). Какое преобразование плоскости будет задавать та же формула без дополнительных ограничений на σ?

3. Задачи

1. Изобразите точки с комплексными координатами z, для которых а) $|z| = 2$, $\varphi = 60^0$, б) $|z| = 2$, $\varphi = -60^0$, в) $|z| = 2$, $\varphi = 120^0$, д) $|z| = 2$, $\varphi = -120^0$.

2. Дан положительно ориентированный квадрат $ABCD$ и комплексные координаты вершин $A(a)$, $B(b)$. Найдите комплексные координаты вершин C и D (при произвольном выборе прямоугольной декартовой системы координат).

   Указания к решению. Получаем поворотом вокруг одной из точек на $\pm 90^0$ другой точки: $D(a(1-i)+b)$, $C(b(1+i)-ia)$. Проверить: если вокруг D покрутить A, то получится C? $\square$

3. Сторона AC треугольника ABC была повернута вокруг точки A на угол $+90^0$ и заняла положение AC_1. Сторона BC была повернута вокруг точки B на угол -90^0 и заняла положение BC_2. Докажите, что положение середины C_1C_2 не зависит от положения вершины C.

   Указания к решению. Применить формулу для поворота и посчитать координату середины. $\square$

4. На прямой даны точки $A - B - C$ в указанном порядке. На отрезках AB и BC по одну сторону от прямой AB построены правильные треугольники ABE и BCF. Докажите, что треугольник BMN, где M — середина EC, N — середина AF, правильные. Найдите длину его стороны, если $AB = 4$, $BC = 8$.

   Указания к решению. Вводим удобную систему координат с началом в B и осью Ox совпадающей с AC. Тогда координата $A(-a)$ и она вещественна и отрицательна. Координат $B(b)$ и вещественна (положительна). Находим координату F, используя геометрический смысл тригонометрической формы комплексного числа (либо повернув на 60^0): $F\left(c(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$. Аналогично $E\left(a(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$. Ищем комплексные координаты середин M, N. Вычисляем длины BN и BM (учитываем вещественность координат) и угол между ними. Убеждаемся, что равны и угол 60. $BM^2 = c^2/4 - ac/4 + a^2/4$. Подставляем данные и находим длину. $\square$

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB. Найдите расстояние от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^0$.

   Указания к решению. Ввести систему координат по сторонам квадрата. Воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных координат. $\square$

4. Домашнее задание

1. Перейдите от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, определите значение φ и изобразите точки: а) $z = \sqrt{3}+i$, б) $z = -\sqrt{3}+i$, в) $z = \sqrt{3} - i$, г) $z = -\sqrt{3} - i$.

2. Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата $A(a)$. Найдите комплексные координаты вершин B и C (при произвольном выборе прямоугольной декартовой системы координат). Найдите комплексную координату вершины B, если начало системы координат находится в точке C. Найдите комплексные координаты вершин B и C, если начало системы координат находится в точке пересечения медиан треугольника.

3. Треугольник A_1B_1C симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы прямого угла C. Докажите, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна A_1B_1.

   Указания. Введите удобную систему координат. Введите координаты точек и проверьте выполнение критерия перпендикулярности (в терминах мнимости отношения).

4. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB. Найдите расстояние от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^0$.

1.4. Занятие 4. Комплексные координаты некоторых точек

1. Уравнение прямой

Пусть даны две различные точки $A(a)$, $B(b)$. Тогда точка $M(z)$ будет принадлежать прямой AB тогда и только тогда, когда три точки M, A, B лежат на одной прямой. Запишем критерий принадлежности этих точек одной прямой (мы его уже вывели):

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель получим

$$(\bar{a} - \bar{b})z + (b - a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0.$$

2. Точки пересечения секущих к единичной окружности

Пусть дана окружность радиуса 1 с центром в точке 0. Тогда ее уравнение будет иметь вид $z\bar{z} = 1$ (почему?)

Возьмем на этой окружности точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Пусть прямые AB и CD пересекаются. Найдем комплексную координату их точки пересечения. Берем уравнение прямой AB и учитываем, что точки A и B на единичной окружности ($\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$):

$$z + \bar{z}ab = a + b.$$

Аналогично для точек C и D: $z+\bar{z}cd = c+d$. Тогда, решая эту систему (например, методом исключения переменных) получим

$$\bar{z} = \frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}.$$

В частности, если AB и CD перпендикулярны, то есть $ab+cd = 0$ (было следствие из критерия перпендикулярности), то (подставляем в числитель и делим либо на ab, либо на равное ему $-cd$)

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Если комплексно сопрячь и воспользоваться $a\bar{a} = 1$ и т.д., то получится (для точки пересечения перпендикулярных хорд единичной окружности с центром в 0)

$$z = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Так как в этом случае $d = -\frac{ab}{c}$, то эту формулу можно переписать еще и так:

$$z = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right).$$

3. Центроид (точка пересечения медиан) и ортоцентр треугольника

Напомним, что центроидом треугольника называется точка пересечения медиан. Пусть дан треугольник ABC. Обозначим координаты его вершин $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Выведем формулу для вычисления комплексной координаты его центроида $G(g)$.

Если O — начало системы координат, то из курса аналитической геометрии известно, что

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Переходя к комплексным координатам получим

$$g = \frac{1}{3}(a+b+c).$$

Пусть дан произвольный треугольник ABC. Выразим комплексную координату его ортоцентра $H(h)$. Пусть ω — окружность, описанная около треугольника ABC. Выберем систему координат с началом в центре этой окружности, а единичный отрезок так, чтобы радиус этой окружности был равен 1. Обозначим точки пересечения прямых, содержащих высоты с этой окружностью через A_1, B_1, C_1. Тогда по критерию перпендикулярности отрезков AA_1 и BC (все точки лежат на окружности единичного радиуса) получим: $aa_1 + bc = 0$. Аналогично для двух остальных высот:

$$a_1 = -\frac{bc}{a},\ b_1 = -\frac{ac}{b},\ c_1 = -\frac{ab}{c}.$$

Тогда по формуле для координаты точки пересечения хорд, подставляя предыдущие равенства и приводя к общему знаменателю, получим

$$\bar{h} = \frac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1 - bb_1} = \frac{ab+ac+bc}{abc}.$$

Деля почленно последнее равенство, комплексно сопрягая и пользуясь тем, что все точки лежат на единичной окружности, получим

$$h = a+b+c.$$

Еще раз подчеркнем, что эта формула верна только для той системы координат, в которой точки A, B, C лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

4. Ортогональная проекция точки на прямую

Пусть дана точка $M(m)$ и прямая задана точками $A(a)$ и $B(b)$. Обозначим основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB через $H(h)$. Нам нужно выразить h через a, b, m.

Запишем в виде равенств два условия: 1) точки A, B, H лежат на одной прямой, 2) MH перпендикулярно AB.

$$\begin{cases} h(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{b}-\bar{h}) + b(\bar{h}-\bar{a}) = 0, \\ (a-b)(\bar{m}-\bar{h}) + (\bar{a}-\bar{b})(m-h) = 0. \end{cases}$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$\begin{cases} h(\bar{a}-\bar{b}) - \bar{h}(a-b) + a\bar{b} - \bar{a}b = 0, \\ z(\bar{a}-\bar{b}) + \bar{h}(a-b) - (a-b)\bar{m} - (\bar{a}-\bar{b})m = 0. \end{cases}$$

Складывая равенства, получаем

$$h = \frac{a(\bar{m}-\bar{b}) - b(\bar{m}-\bar{a})}{2(\bar{a}-\bar{b})} + \frac{m}{2}. \tag{1.5}$$

5. Задачи

1. Докажите, что во всяком треугольнике центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр лежат на одной прямой (прямой Эйлера треугольника), причем $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

   Указания к решению. Берем систему координат с началом в центре описанной окружности, единичный отрезок так, чтобы окружность была единичного радиуса. Комплексные координаты вершин треугольника ABC обозначаем стандартным образом. Тогда

   $$G\left(\frac{1}{3}(a+b+c)\right);\ H(a+b+c).$$

   Так как $O(0)$, вычисляем $\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3}(a+b+c)\right)$, $\overrightarrow{GH}\left(\frac{2}{3}(a+b+c)\right)$. □

2. Докажите, что расстояние между ортогональными проекциями точки окружности на два ее заданных диаметра не зависит от положения точки на окружности.

   Указания к решению. Начало в центр окружности, радиус 1. Обозначаем координаты концов. При таком выборе системы координат концы диаметров будут иметь координаты AB: $A(a)$, $B(-a)$; CD: $C(c)$, $D(-d)$. К тому же все преимущества нахождения точек на окружности $z\bar{z} = 1$. Дальше вычисляем по формулам. В расстоянии не будет буквы m. $\square$

3. Докажите, что прямая, содержащая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанной около него окружности, проведенному в третью вершину.

   Указания к решению. Докажем, что OA перпендикулярно B_1C_1 (обозначения стандартные). По формуле для координаты основания перпендикуляра (если точки лежат на окружности единичного радиуса) получим

$$b_1 = \frac{1}{2}(a + c + b - ac\bar{b});\ c_1 = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\bar{c}).$$

   Находим $b_1 - c_1$. Делим на a и убеждаемся, что это чисто мнимое число. $\square$

4. Докажите, что во всяком вписанном четырехугольнике отрезки, соединяющие каждую вершину четырехугольника с ортоцентром треугольника, образованного двумя другими вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.

   Указания к решению. Стандартная система координат. Уравнения всех четырех прямых и сложить. Получится зависимость $\bar{z} = \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}{a+b+c+d}z$. Подставить в первое. Четыре слагаемые в скобке разбить по два и так умножать. Привести подобные. $z = \frac{a+b+c+d}{2}$. Так как симметрично относительно букв, это будет одна точка. Проверяем, что середина. $\square$

5. Докажите, что в любом треугольнике ABC

$$OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

   где O — центр описанной окружности, R — ее радиус, H — ортоцентр треугольника.

6. Домашнее задание

1. Найдите вид формулы (1.5) а) в случае, когда точки A и B лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале системы координат; б) в случае, когда точки A и B лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале системы координат, а точка M совпадает с началом координат.

2. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и относительно их середин, лежат на описанной около треугольника окружности.

   Указания. Опять выбираем систему координат с началом в центре описанной окружности и единичным отрезком — радиусом этой окружности. Обозначим точку симметричную H относительно стороны BC через A_1. Используя формулу для середины отрезка, убедитесь, что $a_1\bar{a}_1 = 1$.

   Обозначим $A_2(a_2)$ точку симметричную H относительно BC. Тогда она лежит на одной прямой с A и H, следовательно, AA_2 перпендикулярно BC. Второе условие — середина A_2H лежит на BC. Немного посчитав, из этих условий находится a_2. (Может есть способ проще?)

   Но координаты получились красивые: $a_1 = -a$, $a_2 = -\frac{-bc}{a}$.

3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, H — его ортоцентр. Докажите, что
$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MH} = \frac{1}{4}AB^2.$$

4. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника до его вершины вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны.

1.5. Занятие 5. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

1. Общее уравнение прямой в комплексной координате

Напомним, что в курсе аналитической геометрии было доказано, что уравнение вида
$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0,$$
записанное относительно произвольной аффинной системы координат, задает прямую. Ее направляющий вектор $\vec{p}(-B, A)$. Если к тому же система координат прямоугольная декартова, то вектор $\vec{n}(A, B)$ будет ортогонален этой прямой.

Рассмотрим произвольное комплексное число $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$. Если сначала сложить эти два равенства, а затем вычесть, то получим
$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Подставив эти выражения в общее уравнение плоскости, получим

$$(A - Bi)\, z + (A + Bi)\, \bar{z} + 2C = 0.$$

Обозначим $A + Bi = u$, $2C = b$. Тогда общее уравнение прямой в комплексной координате будет иметь вид

$$\bar{u}z + u\bar{z} + b = 0,\ u \neq 0,\ \bar{b} = b.$$

Кроме того, вектор нормали будет иметь комплексную координату u. А направляющий вектор прямой будет $-B + Ai = i(A + Bi) = iu$.

2. Ориентированный угол между прямыми

Рассмотрим две прямые $\bar{u}z + u\bar{z} + b = 0$ и $\bar{v}z + v\bar{z} + c = 0$. Ориентированным углом θ от первой прямой ко второй будем считать ориентированный угол между их направляющими векторами iu и iv. Отложим представители этих векторов от начала системы координат. Тогда по определению аргумента комплексного числа (это угол между положительным направлением оси Ox и самим вектором) получим, что угол между векторами iu и iv будет равен $\varphi_v - \varphi_u$. Вспоминаем формулу возведения в степень комплексных чисел и видим, что

$$\theta = arg\frac{iv}{iu} = arg\frac{v}{u}.$$

Эта формула позволяет вычислять ориентированный угол между прямыми с точностью до π.

3. Критерии параллельности и перпендикулярности прямых

Прямые будут параллельны (или совпадать) тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, то есть $iu = \lambda iv$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то есть $u/v \in \mathbb{R}$, то есть $\overline{u/v} = u/v$.

Прямые будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90^0, то есть $u/v \in i\mathbb{R}$, то есть $\overline{u/v} = -(u/v)$.

4. Формула расстояния от точки до прямой

Напомним (курс аналитической геометрии), что формула (система координат прямоугольная декартова) расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой ℓ, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ имеет вид

$$\rho(M_0, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Перепишем эту формулу для комплексной координаты, используя введенные выше обозначения для уравнения прямой:

$$\rho(M_0, \ell) = \frac{|\bar{u}z_0 + u\bar{z}_0 + b|}{2|u|},\ z_0 = x_0 + iy_0.$$

5. Задачи

1. Напишите уравнение оси Ox в комплексной координате. Выясните, какой вид будет иметь уравнение произвольной прямой, проходящей через начало системы координат.

2. Составьте уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox. В чем отличительная особенность вида этого уравнения?

3. Составьте в комплексных координатах уравнение прямой, которая проходит через начало координат под углом 135^0 к действительной оси.

   Указания к решению. Пишем уравнение искомой прямой в виде $\bar{v}z + v\bar{z} = 0$. Без ограничения общности можно брать $|v| = 1$ (иначе на это число раздели обе части уравнения). Тогда $135^0 = argv$. Откуда $v = \cos 135^0 + i\sin 135^0 = -\sqrt{2}2 + i\sqrt{2}2$, подставляем в уравнение. $\square$

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3-5i)$ параллельно прямой $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 7 = 0$.

   Указания к решению. Из-за направляющих векторов искомая прямая имеет вид $(2-i)z + (2+i)\bar{z} + b = 0$. Подставляем точку и вычисляем b. $\square$

5. Составьте уравнения прямых, содержащих высоты треугольника, если его стороны принадлежат прямым $(1+i)z+(1-i)\bar{z}-12 = 0$, $(3-5i)z+(3+5i)\bar{z}+28 = 0$, $(5-3i)z + (5+3i)\bar{z} - 28 = 0$.

6. Через ортоцентр треугольника проведена прямая. Докажите, что прямые, симметричные этой прямой относительно сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности.

   Указания к решению. Стандартная система координат с единичной окружностью. В домашнем задании занятия 4 мы уже находили координаты точки симметричной ортоцентру относительно стороны треугольника: относительно AB будет $-\frac{ab}{c}$. Возьмем направляющий вектор искомой симметричной прямой единичным: iv. Единичный направляющий вектор прямой ℓ (та которая дана в задаче) пусть будет iu. Направляющий вектор прямой AB будет $i(a-b)$. Чтобы он стал единичным, мы его нормируем $\frac{i(a-b)}{|a-b|}$. Угол между прямой и осью симметрии равен углу между осью симметрии и ее образом.Тогда получим $arg\frac{a-b}{|a-b|u} = arg\frac{v|a-b|}{a-b}$. Так как числа единичные они будут равны и сами (хотя могут быть равны с противоположным знаком, надо посчитать отдельно, думаю, что будет то же). Откуда $v = -\frac{ab}{u}$ (воспользовались тем,что вершины треугольника на единичной окружности). Пишем уравнение симметричной прямой по точке и найденному v.

$$\frac{1}{ab\bar{u}}z + \frac{ab}{u}\bar{z} + \frac{1}{c\bar{u}} + \frac{1}{u\bar{c}} = 0.$$

Аналогично с другой стороной и решаем систему, исключая переменную $\bar{z}$. Получим $z = -\frac{abc\bar{u}}{u}$. Выражение симметрично относительно a, b, c, следовательно, это одна точка. Умножая $z\bar{z}$ убеждаемся, что она на описанной окружности. □

6. Домашнее задание

1. Напишите уравнение оси Oy в комплексной координате.

2. Найдите угол наклона прямой $(1+\sqrt{3}i)z+(1-\sqrt{3}i)\bar{z}-3=0$ к действительной оси.

3. Докажите, что уравнение прямой с направляющим вектором iu и проходящей через точку z_0 имеет вид $\bar{u}(z-z_0)+u(\bar{z}-\bar{z}-0)=0$.

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3+5i)$ параллельно прямой $(1+i)z+(1-i)\bar{z}-2=0$.

5. Составьте уравнение прямой, которая содержит точку $M(4-3i)$ и перпендикулярна прямой $(5+2i)z+(5-2i)\bar{z}+20=0$.

6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5+i)$ и образующую с прямой $(2-i)z+(2+i)\bar{z}-4=0$ угол 45^0.

7. (необязательная) Точка C_1 является образом вершины C треугольника ABC при повороте на угол 90^0 вокруг точки A, а точка C_2 — образом той же вершины C при повороте на угол -90^0 вокруг точки B. Докажите, что прямые AC_2 и BC_1 пересекаются на прямой, которая содержит высоту треугольника, опущенную из вершины C.

1.6. Занятие 6. Уравнение окружности в комплексных координатах (начать инверсию)

1. Общее уравнение окружности

Выведем уравнение окружности с центром в точке $Q(z_0)$ радиуса r. Мы знаем, что в вещественных координатах уравнение такой окружности будет иметь вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\ z_0=x_0+iy_0.$$

Это уравнение мы можем записать в виде

$$|z-z_0|^2=r^2. \tag{1.6}$$

Действительно, $z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$, следовательно,

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Уравнение окружности (1.6) мы можем переписать в виде

$$(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2, \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

Это уравнение окружности будем называть *каноническим.*

Раскроем скобки в каноническом уравнении окружности и перенесем все слагаемые в левую часть.

$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

Обозначим $-z_0 = u$, $z_0\bar{z}_0 - r^2 = b$. Тогда $-\bar{z}_0 = \bar{u}$ и уравнение окружности примет вид

$$z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}, u\bar{u} - b > 0.$$

Это уравнение окружности будем называть *общим.* Можно показать, что любое уравнение такого вида (с указанными дополнительными условиями) задает окружность. Причем, если окружность задана таким уравнением, то легко вычислить ее центр и радиус

$$z_0 = -u,\ r = \sqrt{u\bar{u} - b}.$$

Общие уравнения прямой и окружности можно объединить в одно:

$$\varepsilon z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon = 0$ для прямой и $\varepsilon = 1$ для окружности.

2. Уравнение окружности по трем точкам

Пусть окружность $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0$ проходит через точки A, B, C. Тогда однородная линейная система уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0, \\ 1 \cdot a\bar{a} + \bar{\alpha}a + \alpha\bar{a} + \gamma = 0, \\ 1 \cdot a\bar{a} + \bar{\alpha}a + \alpha\bar{a} + \gamma = 0, \\ 1 \cdot a\bar{a} + \bar{\alpha}a + \alpha\bar{a} + \gamma = 0 \end{cases}$$

относительно $1, \bar{\alpha}, \alpha, \gamma$ имеет ненулевое решение (так как для трех точек, не лежащих на одной прямой окружность всегда существует), поэтому ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ a\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение окружности по трем данным точкам.

3. Ортогональные окружности

Две пересекающиеся окружности называются *ортогональными*, если касательные к ним в их общей точке перпендикулярны. Тогда, очевидно, что касательная к одной из ортогональных окружностей в их общей точке содержит центр другой окружности. И наоборот. По теореме Пифагора и обратной к теореме Пифагора получаем для того чтобы окружности (A, R) и (B, r) были ортогональны необходимо и достаточно, чтобы $|AB|^2 = R^2 + r^2$. Если окружности заданы уравнениями

$$z\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{z} + b = 0, \bar{b} = b,$$
$$z\bar{z} + \bar{v}z + v\bar{z} + c = 0, \bar{c} = c,$$

то критерий их ортогональности будет выглядеть так:

$$u\bar{v} + \bar{u}v = b + c. \tag{1.7}$$

4. Задачи

1. Напишите каноническое уравнение окружности и уравнение окружности с центром $Q(-1-i)$ радиуса 2.

   Указания к решению. Смотрим на каноническое уравнение окружности и подставляем в него наши данные:

   $$(z - (-1-i))(\bar{z} - (-1+i)) = 4.$$

   Раскрываем скобки, чтобы получить уравнение окружности:

   $$z\bar{z} - (-1+i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0.$$

   □

2. Найдите множество центров окружностей, проходящих через данную точку $M(m)$ ортогонально данной окружности $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha_0 = 0$.

   Указания к решению. Пусть ортогональная окружность имеет уравнение $z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \beta_0 = 0$. Записываем, что точка M ей принадлежит и условие ортогональности. Получаем систему из двух уравнений. Из нее нужно получить одно уравнение, которое описывает поведение β (это минус центр). Значит, нужно исключить β_0 (остальные — данные константы). Получим уравнение

   $$(\bar{\alpha} + \bar{m})\beta + (\alpha + m)\bar{\beta} + m\bar{m} - \alpha_0 = 0.$$

   Это прямая с нормальным вектором $(\alpha + m)$, который есть вектор $\overrightarrow{AM}$, где $A(-\alpha)$ — центр данной окружности. Следовательно, искомое множество точек — это прямая, перпендикулярная вектору AM. □

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC дана точка P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников APC и BPC, ортогональны.

   Указания к решению. Выбираем систему координат с началом в C и осями по катетам. Тогда $A(ia)$, $a \in \mathbb{R}$, $B(b)$, $b \in \mathbb{R}$, $P(p)$, $C(0)$. Пишем уравнения двух окружностей по трем точкам. Считываем коэффициенты и проверяем условие ортогональности. Должно получиться. $\square$

4. Три равные окружности имеют общую точку O и вторично пересекаются в точках A, B, C. Докажите, что описанная около треугольника ABC окружность , равна данным.

   Указания к решению. Пусть O — начало системы координат. Центры окружностей OBC, OCA, OAB обозначим A_1, B_1, C_1. Так как четырехугольник AB_1OC ромб, $a = b_1 + c_1$ и аналогично b, c. Поскольку окружности равны, то $|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1$. Положим $a_1 + b_1 + c_1 = s$. Проверим, что A, B, C лежат на окружности с центром s радиуса 1. $\square$

5. Окружности с центрами S и S_1 пересекаются в точках A и B. Прямые SA и S_1A пересекают окружности S_1 и S вторично в точках C и D. Докажите, что точки B, S, D, C, S_1 принадлежат одной окружности.

   Указания. Точка $A(0)$, $B(1)$. Используя уравнения окружности, проходящей через начало координат и три точки на одной прямой, выражаем координаты точек. По 4 штуки проверить, что лежат на одной окружности. Долгие расчеты.

5. Домашнее задание

1. Окружность задана уравнением $z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 3 = 0$. Найдите координаты ее центра и радиус.

2. Проведите подробное доказательства критерия ортогональности окружностей.

3. Докажите, что окружность $z\bar{z}+\bar{u}z+u\bar{z}+b = 0$ проходит через начало системы координат тогда и только тогда, когда $b = 0$.

4. Найдите центр окружности, описанной около треугольника ABC, если начало совпадает с точкой A.

5. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A(2+i)$ и ортогональной окружности а) $z\bar{z} = 1$, б) $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

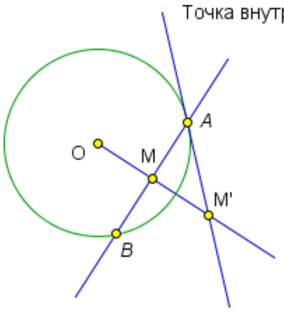
1.7. Занятие 7. Инверсия

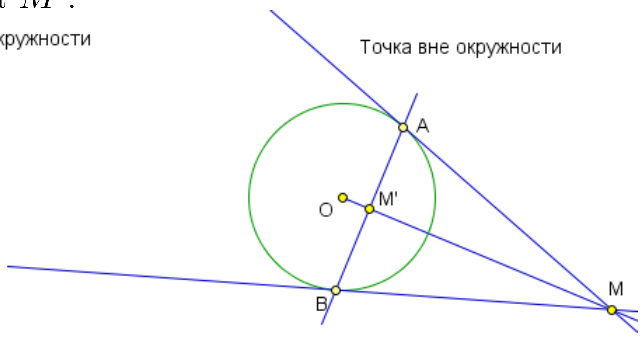
1. Определение инверсии

Рассмотрим евклидову плоскость σ. Фиксируем на ней точку O и окружность ω радиуса R с центром в этой точке. Отображение I множества $\sigma \setminus O$ на себя, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', такую, что

$$1)\, M' \in [OM); \quad 2) OM \cdot OM' = R^2.$$

Образ точки M строится следующим образом: 1) если точка внутри окружности. Строим луч OM. Через точку пересечения с окружностью проводим касательную к ней. Пересекаем касательную с лучом OM. Получаем точку M'.
2) если точка вне окружности. Строим луч OM. Через M проводим касательные к окружности. Соединяем точки касания A и B. Пересечение прямой AB и луча OM – искомая точка M'.



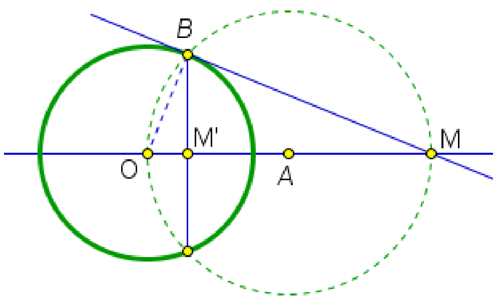


Динамический рисунок Инверсия можно посмотреть здесь
http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25

Очевидно, что инверсия I является инволютивным преобразованием, то есть $I^2 = id$.

Легко видеть, что точки, лежащие на окружности инверсии являются инвариантными (докажите самостоятельно). Если точка M приближается к центру инверсии, то ее образ удаляется от центра инверсии и наоборот.

Инверсию можно задать центром O и парой соответствующих точек M и M'. Другими словами, если известен центр инверсии и пара соответствующих точек, то можно построить окружность инверсии.

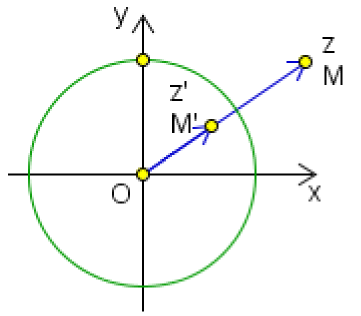


Построим на отрезке OM как на диаметре окружность, а через точку M' проведем прямую a, перпендикулярную OM. Тогда точка пересечения B окружности и прямой a будет точкой, принадлежащей окружности инверсии. (Докажите самостоятельно, что это действительно так.)

2. Формулы инверсии

Выведем формулу для инверсии в комплексных числах. Пусть дана окружность радиуса R с центром O. Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O. Точка $M(x, y)$ будет задаваться комплексным числом

$z = x+iy$. Точка $M'(x', y')$ (ее образ при инверсии) будет задаваться комплексным числом z'. Так как векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ сонаправлены, их комплексные координаты отличаются на положительный вещественный множитель.



Тогда $z' = \lambda z$, где λ – некоторое положительное вещественное число, которое нужно найти. Мы знаем из определения инверсии, что $OM \cdot OM' = R^2$. Длина отрезка OM – это модуль комплексного числа z, а длина отрезка OM' – это модуль комплексного числа z'. Тогда получим

$$|z||z'| = R^2.$$

Подставляем $z' = \lambda z$ и учитываем, что $|\lambda z| = \lambda |z|$ (очевидное равенство, если представлять комплексные числа как векторы и учесть положительность λ). Тогда

$$\lambda |z|^2 = R^2 \Leftrightarrow \lambda z\bar{z} = R^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{R^2}{z\bar{z}}.$$

Подставляем найденное λ в $z' = \lambda z$, сокращаем на z и получаем формулу инверсии в удобной системе координат (центр системы в центре окружности инверсии)

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Если центр окружности инверсии находится в точке z_0, то формулы инверсии будут иметь вид

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0. \tag{1.8}$$

3. Образы прямых и окружностей при инверсии

Посмотрим, что будет происходить с прямыми и окружностями при инверсии. Напомним, что прямые и окружности в комплексных числах задаются уравнениями

$$\varepsilon z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

где при $\varepsilon = 0$ получаем прямую, а при $\varepsilon = 1$ получаем окружность.

Чтобы найти образ прямой (окружности) при инверсии, берем уравнение инверсии (в удобной системе координат, в которой начало находится в центре инверсии), выражаем z и подставляем в уравнение (1.9)

$$\varepsilon \frac{R^4}{z'\bar{z}'} + u\frac{R^2}{z'} + \bar{u}\frac{R^2}{z'} + b = 0$$

или, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, так как $z \neq 0$ (центр инверсии при определении инверсии выбросили), получаем

$$\varepsilon R^4 + uR^2\bar{z}' + \bar{u}R^2 z' + bz'\bar{z}' = 0.$$

Это будет уравнение образа. Уберем у переменной штрихи (обозначим ее z) и проанализируем, что же получилось

$$\varepsilon R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z + bz\bar{z} = 0.$$

1) Если изначально у нас была прямая, причем проходящая через центр инверсии ($\varepsilon = 0$ – прямая, $b = 0$ – проходящая через центр инверсии, то есть $u\bar{z} + \bar{u}z = 0$), то мы получаем

$$uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z = 0 \Leftrightarrow u\bar{z} + \bar{u}z = 0,$$

то есть мы получили ту же самую прямую. Итак, при инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, (а точнее множество точек прямой без центра инверсии) переходит в себя.

2) Если изначально у нас была прямая, не проходящая через центр инверсии ($\varepsilon = 0$ – прямая, $b \neq 0$ – не проходящая через центр инверсии, то есть $u\bar{z}+\bar{u}z+b = 0$), то мы получим

$$uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z + bz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{uR^2}{b}\bar{z} + \frac{\bar{u}R^2}{b}z + z\bar{z} = 0.$$

Это уравнение окружности. Так как свободный члена равен нулю, то окружность проходит через начало координат, то есть через центр инверсии. Итак, при инверсии прямая, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, (точнее в множество точек окружности без центра инверсии) проходящую через центр инверсии.

3) Рассмотрим окружность, проходящую через центр инверсии ($z\bar{z}+u\bar{z}+\bar{u}z = 0$). Она переходит в

$$R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z = 0 \Leftrightarrow R^2 + u\bar{z} + \bar{u}z = 0.$$

прямую, не проходящую через центр инверсии (так как $R^2 \neq 0$).

4) Наконец, окружность, не проходящая через центр инверсии ($z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0$, $b \neq 0$) переходит в

$$R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z + bz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{R^4}{b} + \frac{uR^2}{b}\bar{z} + \frac{uR^2}{b}z + z\bar{z} = 0$$

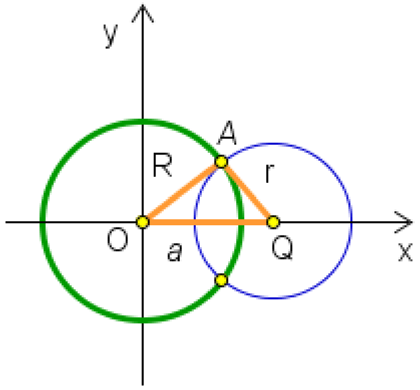
окружность, не проходящую через центр инверсии.

4. Инвариантные окружности инверсии

Мы уже видели, что прямые проходящие через центр инверсии, переходят в себя, то есть являются инвариантными. Все остальные прямые (не проходящие через центр инверсии) переходят в окружности, то есть инвариантными не являются. Мы получаем, что прямая будет инвариантной при инверсии тогда и только тогда, когда она проходит через центр инверсии.

Поставим аналогичный вопрос для окружностей плоскости: какие окружности являются инвариантными. Сразу видим, что инвариантной окружностью является сама окружность инверсии (все ее точки остаются на своих местах).

Пусть дана инверсия (центр O, радиус R) и окружность ω (центр Q, радиус r). Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало находилось в центре инверсии, а ось Ox совпадала бы с прямой, проходящей через центр данной окружности ω и центр окружности инверсии.



Тогда инверсия будет задаваться уравнением $z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а данная окружность будет задаваться уравнением $(z-a)(\bar{z}-a) = r^2$, где $Q(a)$. Так как центр окружности Q лежит на оси Ox, то координата a является вещественным числом. Раскрывая скобки, мы получим

$$z\bar{z} - az - a\bar{z} + a^2 - r^2 = 0.$$

Находим образ этой окружности при инверсии:

$$\frac{R^4}{z'\bar{z}'} - \frac{aR^2}{\bar{z}'} - \frac{aR^2}{z'} + a^2 - r^2 = 0.$$

Приводим к общему знаменателю и делим на $a^2 - r^2$ (это число не нуль, так как данная окружность не проходит через центр инверсии, то есть через начало координат)

$$z'\bar{z}' - \frac{aR^2}{a^2-r^2}z' - \frac{aR^2}{a^2-r^2}\bar{z}' + \frac{R^4}{a^2-r^2} = 0.$$

Окружность ω будет инвариантной тогда и только тогда, когда уравнения ее и ее образа будут одинаковыми, то есть

$$a = \frac{aR^2}{a^2-r^2}; \Leftrightarrow\ a^2 - r^2 = R^2.$$

Если $a \neq 0$, то это условие ортогональности окружности ω и окружности инверсии. Если $a = 0$, то $r^2 = R^2$ и центр данной окружности в нуле, то есть данная окружность совпадает с окружностью инверсии. Итак, мы получаем: окружности будет инвариантной относительно инверсии тогда и только тогда, когда это окружность инверсии или окружность, ортогональная окружности инверсии.

Для построения инвариантных окружностей нам потребуется следующая теорема

Теорема 1.1. *Если окружность проходит через две соответственно инверсные точки, то она будет инвариантной при данной инверсии.*

Доказательство. (на следующий семинар, если не успеем) Выбираем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало находилось в центре инверсии, а ось Ox совпадала с прямой, проходящей через центры окружности инверсии и данной окружности ω. Тогда инверсия задается формулой $z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$. Обозначим данную точку $A(z_0)$. Тогда точка, соответствующая ей при инверсии будет $A'(\frac{R^2}{\bar{z}_0})$. По условию окружность ω проходит через A и A'. Тогда для нее верны два равенства:

$$z_0\bar{z}_0 - az_0 - a\bar{z}_0 + a^2 - r^2 = 0;\ z_0\bar{z}_0 - \frac{aR^2}{a^2-r^2}z_0 - \frac{aR^2}{a^2-r^2}\bar{z}_0 + \frac{R^4}{a^2-r^2} = 0.$$

Умножим первое равенство на $-\frac{R^2}{a^2-r^2}$ и сложим со вторым (группируем слагаемые так, чтобы получились две скобки):

$$\left(1 - \frac{R^2}{a^2-r^2}\right)(z_0\bar{z}_0 - R^2) = 0.$$

Так как точка z_0 была не инвариантной, она не может лежать на окружности инверсии (уравнение окружности инверсии в данном случае $z\bar{z} = R^2$), а значит вторая скобка в полученном равенстве не равна нулю. Следовательно, нулю равна первая скобка:

$$a^2 = R^2 + r^2.$$

то есть окружность ω ортогональна окружности инверсии, следовательно инвариантна. $\square$

Очевидно, что если окружность инвариантна относительно инверсии, то для любой ее точки образ тоже лежит на этой окружности.

5. Домашнее задание

1. Докажите, что точка M', построенная по алгоритму для построения образа точки при инверсии, действительно является образом точки M при этой инверсии.

   Указания. Используйте тот факт, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, является прямым. Рассмотрите подобные треугольники.

2. Выведите формулу (1.8).

3. Пусть инверсия задана окружностью с центром в начале системы координат и радиусом 1. Найдите образ окружности с центром в точке $Q(-i)$ радиуса 2 при этой инверсии.

   Указания. Решение полностью повторяет наши рассуждения на занятии, в которых мы исследовали, во что переходят прямые и окружности при инверсии.

4. Пусть окружность ω с центром Q при инверсии переходит в окружность ω' с центром S. Докажите, что точка S не является образом Q при данной инверсии.

5. Пусть инверсия задана окружностью с уравнением $z\bar{z} = 1$. Выясните, будет ли а) окружность $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$, б) окружность $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 1 = 0$ инвариантная относительно данной инверсии. Ответ обосновать.

Указания. Вспоминаем, что окружность является инвариантной тогда и только тогда, когда она либо окружность инверсии, либо ортогональная окружности инверсии. Проверяем ортогональность.

6. Инверсия задана с помощью окружности $z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$. Выясните, будет ли окружность $z\bar{z} - (4+2i)\bar{z} - (4-2i)z + 11 = 0$ инвариантной при этой инверсии.

1.8. Занятие 8. Гомотетия. Параллельный перенос. Осевая симметрия

Напомним, что на евклидовой плоскости есть такие преобразования как параллельный перенос, гомотетия и осевая симметрия. Получим их уравнения в комплексной координате и рассмотрим нужные нам в дальнейшем композиции

1. Гомотетия

Гомотетия с центром S и коэффициентом $m \neq 0$ – это преобразование плоскости, которое каждой точке M этой плоскости ставит в соответствие точку M', такую, что $\overrightarrow{SM'} = m\overrightarrow{SM}$. Обозначение H_S^m.

Основные свойства гомотетии, которые нам понадобятся в дальнейшем:

1. Прямая, проходящая через центр гомотетии, переходит в себя.

2. Прямая, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную прямую.

Пусть комплексные координаты точек обозначены так: $S(z_0)$, $M(z)$, $M'(z')$. Тогда записывая векторное равенство из определения гомотетии в комплексной координате, получим формулу для гомотетии:

$$z' = m(z - z_0) + z_0.$$

В частности, если $S(0)$ (начало системы координат находится в центре гомотетии), то формулы принимают наиболее простой вид: $z' = mz$.

2. Параллельный перенос

Параллельный перенос на вектор $\vec{p}$ – это преобразование плоскости, которое каждой точке M этой плоскости ставит в соответствие такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Обозначение $T_{\vec{p}}$.

Записывая векторную формулу в комплексной координате, получим формулу параллельного переноса:

$$z' = z + p,\ \vec{p}(p), M(z), M'(z').$$

Основные свойства:

1. Прямая, параллельная вектору $\vec{p}$, переходит в себя.

2. Прямая, не параллельная вектору $\vec{p}$, переходит в параллельную прямую.

3. Осевая симметрия

Осевая симметрия с осью ℓ — это преобразование плоскости, которое каждую точку M на прямой ℓ переводит в себя, а каждую точку M, не лежащую на ℓ, переводит в точку M' такую, что MM' перпендикулярна ℓ и середина отрезка MM' лежит на прямой ℓ. Прямая ℓ называется осью симметрии.

Основные свойства:

1. Любая прямая, перпендикулярная оси симметрии, является инвариантной.

2. Если прямая a переходит в прямую a' при осевой симметрии с осью ℓ, то они все три либо параллельны, либо прямые a и a' пересекаются в точке, лежащей на прямой ℓ.

Выведем формулу для осевой симметрии в комплексной координате. Пусть ось симметрии ℓ задается уравнением $\bar{u}z + u\bar{z} + b = 0$. Возьмем произвольную точку $M(z)$. Пусть ее образ будет $M'(z')$. Так как вектор нормали к ℓ имеет комплексную координату u и он коллинеарен вектору $\overrightarrow{MM'}$, получим

$$z' - z = \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Теперь запишем в виде равенства тот факт, что середина отрезка MM' лежит на прямой ℓ:

$$\bar{u}\frac{z + z'}{2} + u\frac{\bar{z} + \bar{z}'}{2} + b = 0.$$

Подставим в это равенство $z' = z + \lambda u$, приведем подобные и выразим λ:

$$\lambda = -\frac{u\bar{z} + \bar{u}z + b}{u\bar{u}}.$$

Окончательно получаем формулу осевой симметрии в виде:

$$z' = z - \frac{u\bar{z} + \bar{u}z + b}{\bar{u}}.$$

В частности, если рассмотреть осевую симметрию относительно оси ℓ перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(a)$, $a \in \mathbb{R}$, то формула осевой симметрии с осью $\ell : z + \bar{z} - 2a = 0$ станет такой:

$$z' = -\bar{z} + 2a.$$

В частности, для осевой симметрии с осью Oy получаем ожидаемую формулу: $z' = -\bar{z}$.

4. Осевая симметрия как предельный случай инверсии

Рассмотрим инверсию, окружность которой имеет центр в точке $z_0 \in \mathbb{R}$, проходящую через 0. Пусть эта окружность располагается справа от оси Oy. Тогда ее радиус будет z_0. Формула инверсии с данной окружностью имеет вид

$$z' = \frac{z_0^2}{\bar{z} - z_0} + z_0 = \frac{\bar{z}}{\frac{\bar{z}}{z_0} - 1},\ \bar{z}_0 = z_0.$$

Если устремить z_0 в бесконечность, но по-прежнему требовать, чтобы окружность проходила через начало координат, то эта окружность устремится к прямой — оси Oy. Посмотрим к чему устремится формула инверсии:

$$z' = -\bar{z}.$$

Это как раз уравнение осевой симметрии с осью Oy. Итак, мы получили, что осевую симметрию можно рассматривать как предельный случай инверсии.

5. Композиции преобразований

Покажем, что любую гомотетию с положительным коэффициентом можно представить в виде композиции двух инверсий с тем же центром.

Пусть дана гомотетия H_O^m, $m > 0$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат с началом в центре гомотетии. Рассмотрим инверсию I_1 с центром в той же точке O и произвольно выбранным радиусом R. Тогда формулы данной гомотетии и выбранной инверсии будут иметь вид

$$H_O^m : z' = mz; \quad I_1 : z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Рассмотрим их композицию: $H_O^m \circ I_1$. Выясним, что это будет за преобразование. Для этого заметим, что при этом преобразовании точка z сначала под действием инверсии переходит в точку $\tilde{z} = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а затем эта точка $\tilde{z}$ под действием гомотетии переходит в точку $z' = m\tilde{z}$. Тогда композиция переводит точку z в точку

$$z' = \frac{mR^2}{\bar{z}}.$$

Это уравнение инверсии I_2 с центром O и радиусом $R\sqrt{m}$. Тогда получаем

$$H_O^m \circ I_1 = I_2; \; H_O^m = I_2 \circ (I_1)^{-1} = I_2 \circ I_1.$$

6. Задачи

1. Гомотетия задана центром S и парой соответствующих точек A, A'. Постройте образ точки B при этой гомотетии, если а) $B \notin AA'$, б) $B \in AA'$.

2. Докажите, что композиция любых двух инверсий с общим центром будет гомотетией с тем же центром.

3. Докажите, что любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух гомотетий с различными центрами и взаимно обратными коэффициентами. Выясните, как связаны между собой центры этих гомотетий и вектор параллельного переноса.

4. Даны две концентрические окружности. Укажите пары соответствующих точек а) для гомотетии с отрицательным коэффициентом, переводящей первую окружность во вторую, б) для гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей первую окружность во вторую, в) инверсии, переводящей первую окружность во вторую.

7. Домашнее задание

1. Гомотетия задана S и парой соответствующих точек A, A'. Постройте а) образ, б) прообраз данной прямой при этой гомотетии. Постройте образ данной окружности при этой гомотетии.

2. Даны две параллельные прямые a и a' и прямая b их пересекающая. Задайте центр какой-либо гомотетии а) с положительным коэффициентом, б) с отрицательным коэффициентом, которая переводит a в a' и прямая b инвариантна.

3. Даны две пары параллельных прямых $a\|a'$, $b\|b'$, a пересекает b. Определите вектор параллельного переноса, который переводит a в a' и b в b'. Определите вектор параллельного переноса, который переводит a в a', а прямая b инвариантна.

4. Осевая симметрия задана парой соответствующих пересекающихся прямых a и a', а также парой соответствующих точек A и A'. Постройте образ данной окружности при этой осевой симметрии.

5. Докажите, что композиция любых двух гомотетий с различными центрами и взаимно обратными коэффициентами является параллельным переносом.

1.9. Занятие 9. Различные способы задания инверсии

Пусть даны прямая a и окружность ω. Нужно найти инверсию, которая переводит окружность ω в прямую a . Как мы видели выше, чтобы окружность перешла в прямую, центр инверсии должен лежать на этой окружности. Выясним, где.

1. Инверсия задана прямой и окружностью

Предположим, что инверсия найдена. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало было в центре инверсии, а ось Ox совпадала бы с прямой, соединяющей центры окружности инверсии и окружности ω. Тогда инверсия задается уравнением $z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а окружность ω задается уравнением

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

Так как центр окружности ω лежит на оси Ox, число z_0 будет вещественным (это и есть координата центра), то есть $\bar{z}_0 = z_0$. Так как ω проходит через начало системы координат, свободный член в уравнении ω должен быть равен нулю. Тогда уравнение окружности ω будет иметь вид

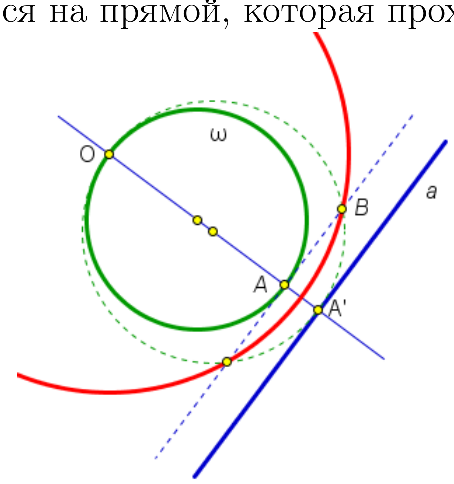
$$z\bar{z} - z_0 z - z_0\bar{z} = 0.$$

При инверсии эта окружность переходит в прямую с уравнением

$$R^2 - z_0 z - z_0\bar{z} = 0.$$

Заметим, что если точка $M(z)$ принадлежит этой прямой, то ей принадлежит и комплексно сопряженная точка, то есть точка с координатой $\bar{z}$. Получаем, что найденная прямая будет перпендикулярна оси Ox. Итак, мы получили, что прямая, являющаяся образом окружности при инверсии, должна быть перпендикулярна прямой, которая соединяет центр инверсии и центр данной окружности.

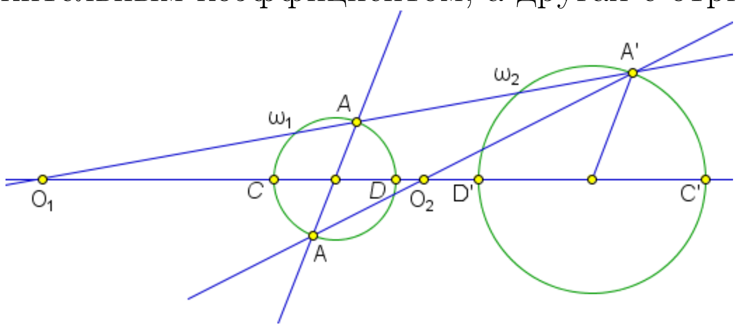
Возвращаемся к нашей задаче. У нас есть окружность ω и прямая a. Нужна инверсия, которая переводит окружность ω в прямую a. Как мы выяснили центр инверсии должен, во-первых, находиться на окружности ω, во-вторых, находиться на прямой, которая проходит через центр ω перпендикулярно к a.

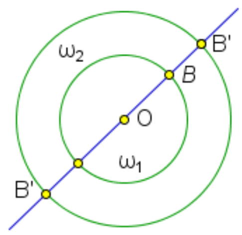


На рисунке изображены соответствующие при этой инверсии точки A и A', а также проведено построение точки B, которая принадлежит окружности инверсии. Подробности по построению окружности инверсии по центру и двум соответствующем точкам мы обсуждали в начале темы инверсия плоскости.

2. Инверсия задана двумя окружностями

Пусть даны две окружности ω_1 и ω_2 различных радиусов. Тогда существуют две гомотетии, переводящие одну окружность в другую: одна гомотетия с положительным коэффициентом, а другая с отрицательным.





В случае не концентрических окружностей получаем две гомотетии: первая (с положительным коэффициентом) имеет центр O_1, а вторая (с отрицательным коэффициентом) имеет центр O_2. На рисунке изображены соответствующие точки A и A' для первой и второй гомотетий в случае двух не пересекающихся окружностей.

В случае концентрических окружностей получаем две гомотетии с одним и тем же центром O. На рисунке изображены соответствующие точки B и B' этих гомотетий.

Если окружности пересекаются, то оба центра гомотетии являются центрами инверсии. Если окружности не пересекаются или касаются, то только один из центров гомотетий является центром инверсии.

Доказательство этой теоремы достаточно просто проводится элементарными методами (см. [4]). Мы докажем эту теорему аналитическим методом. Рассмотрим случай, который изображен на рисунке: две неконцентрические окружности не пересекаются. Покажем, что в этом случае центр O_1 будет центром инверсии.

Пусть окружность ω_1 переводится в окружность ω_2 гомотетией с центром O_1. Коэффициент гомотетии положителен и будет равен $\frac{r_2}{r_1}$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат с началом в выбранном центре гомотетии и осью Ox, проходящей через центры окружностей ω_1 и ω_2. Тогда у окружностей будут вещественные центры. Обозначим координату центра ω_1 через a. Тогда уравнение гомотетии и уравнения окружности ω_1 будут иметь вид

$$H_{O_1,2}: \ z' = \frac{r_2}{r_1}z; \quad \omega_1: \ z\bar{z} - az - a\bar{z} + a^2 - r_1^2 = 0.$$

При гомотетии ω_1 перейдет в ω_2:

$$z\bar{z} - a\frac{r_1}{r_2}z - a\frac{r_1}{r_2}\bar{z} + \frac{r_1^2(a^2 - r_1^2)}{r_2^2} = 0.$$

Рассмотрим инверсию с выбранным центром и некоторым радиусом q. Ее уравнение в выбранной системе координат будет иметь вид $z' = \frac{q^2}{\bar{z}}$. Найдем образ окружности ω_1 при этой инверсии

$$z\bar{z} - \frac{aq^2}{a^2 - r_1^2}z - \frac{aq^2}{a^2 - r_1^2}\bar{z} + \frac{q^4}{a^2 - r_1^2} = 0.$$

Потребуем, чтобы это была та же окружность ω_2. Значит, уравнения образа ω_1 при гомотетии и инверсии должны быть одинаковыми, то есть

$$-\frac{aq^2}{a^2 - r_1^2} = -a\frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{q^4}{a^2 - r_1^2} = \frac{r_1^2(a^2 - r_1^2)}{r_2^2}.$$

Откуда получаем, что $q^2 = \frac{r_1(a^2 - r_1^2)}{r_2}$. Так как $a > r_1$ в нашем случае, вещественное число q существует и существует инверсия с центром в точке O_1 и радиусом q, переводящая ω_1 в ω_2.

Итак, радиус окружности инверсии будет равен $q = \sqrt{\frac{r_1(a^2 - r_1^2)}{r_2}}$. Выясним, какие точки окружностей ω_1 и ω_2 будут соответствующими при этой инверсии. Вспоминаем, что точка и ее образ, во-первых, должны лежать на одном луче и, во-вторых, чем ближе точка к центру инверсии, тем дальше от центра инверсии ее образ. Тогда соответствующими точками будут точки C и C', а также D и D'.

Заметим, что в силу первого условия (точка и ее образ при инверсии лежат на одном луче) второй центр гомотетии окружностей (точка O_2) не может быть центром инверсии для этих окружностей.

Задача 1.1. Рассмотрите случаи, когда окружности ω_1 и ω_2 касаются (внешним и внутренним образом), не пересекаются и находятся одна внутри другой, пересекаются. Выясните, какие центры гомотетий будут центрами инверсий в этих случаях. Постройте окружность инверсии.

3. Задачи

1. Постройте центр и окружность инверсии, которая переводит данную прямую в данную окружность.

2. Даны две не пересекающиеся внешним образом окружности. Найдите их центры гомотетий. Определите, какой из центров гомотетий будет центром инверсии. Аналогичным образом исследуйте случай окружностей не пересекающихся внутренним образом.

3. Даны две касающиеся окружности а) внутренним образом, б) внешним образом. Найдите их центры гомотетий. Определите, какой из них является центром инверсии.

4. Даны две концентрические окружности. Постройте окружность инверсии, переводящей первую окружность во вторую.

4. Домашнее задание

1. Инверсия задана окружностью и прямой (окружность переходит в прямую). Постройте окружность инверсии и образ данной точки при данной инверсии. Найдите образ произвольной прямой при данной инверсии.

2. Инверсия задана парой окружностей (рассмотрите все возможные случаи их взаимного расположения этих окружностей). Для каждого случая постройте окружность инверсии и образ произвольной прямой при этой инверсии.

2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского

2.1. Занятие 10. Абсолютная геометрия. Развилка в пятой группе. Геометрия Лобачевского. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Проверка выполнения I и II групп аксиом

1. Абсолютная геометрия. Пятая группа аксиом

Напомним, как строится абсолютная геометрия. Берется три группы основных понятий (точки, прямые, плоскости) и вводятся основные отношения (принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности). Эти отношения удовлетворяют соответственно четырем группам аксиом. Геометрия, которая получается в результате, называется *абсолютной геометрией*. Нас будет интересовать только геометрия на плоскости (планиметрия). Поэтому нам потребуются только точки и прямые. Количество аксиом при этом уменьшится. Напомним их.

I группа аксиом – аксиомы принадлежности точек прямым.

I_1. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует прямая a, проходящая через эти точки.

I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, которая проходит через них.

I_3. На каждой прямой лежит по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

В этой группе аксиом новые объекты не появляются.

II группа аксиом – аксиомы порядка. Это отношение между точками одной прямой называется отношением «лежать между» и обозначается $A - B - C$.

II_1. Если $A - B - C$, то это три различные точки одной прямой и $C - B - A$.

II_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует точка C, такая, что $A - B - C$.

II_3. Среди любых трех различных точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

После этих трех аксиом можно ввести понятие отрезка. Гильберт называется отрезком пару точек A и B. Мы назовем отрезком пару точек A и B и множество всех точек C, лежащих между ними. Кстати, что точки, лежащие между A и B, существует еще нужно доказать. Точки A и B называются концами отрезка AB, а точки, лежащие между ними, называются внутренними точками этого отрезка.

II_4 (аксиома Паша) Пусть A, B, C – три точки плоскости, не лежащие на одной прямой и a – прямая этой плоскости, которая не проходит ни через одну из них. Если прямая проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит через внутреннюю точку отрезка AC или BC.

Аксиомы второй группы позволяют ввести понятие треугольника, луча, полуплоскости, угла. Треугольник – это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Луч определяется сложнее. Доказывается теорема о том, что любая точка O прямой делит множество точек этой прямой (без точки O) на два множества: две точки принадлежат одному множеству тогда и только тогда, когда точка O не лежит между ними и принадлежат разным множествами тогда и только тогда, когда точка O лежит между ними. Каждое из этих множеств называется *лучом.* Точка O называется *началом луча* (для каждого из двух полученных лучей). Сами лучи называются *взаимно дополнительными.* Заметим, что по такому определению начало луча самому лучу не принадлежит.

Угол определяется уже попроще. *Угол* – это фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом. Общая точка этих лучей называется *вершиной угла.* Лучи называются *сторонами* угла. Заметим, что вершина угла углу не принадлежит.

Угол называется *развернутым*, если его стороны являются взаимно дополнительными лучами. Также вводятся понятия смежных углов и вертикальных углов. Углы называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие – взаимно дополнительные лучи. Два угла называются *вертикальными*, если их стороны являются попарно взаимно дополнительными лучами.

Для не развернутого угла вводится понятие внутренней области угла.

III группа аксиом – аксиомы конгруэнтности.

III_1. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что $AB = A'B'$.

Эта аксиома позволяет на данном луче откладывать отрезок, равный данному.

III_2. Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$.

Отрезки конгруэнтные по отдельности третьему отрезку, конгруэнтны между собой.

III_3. Пусть $A-B-C$, $A'-B'-C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Тогда $AC = A'C'$.

Отрезки конгруэнтные по кускам, конгруэнтны целиком.

III_4. Пусть даны угол $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k', исходящий из точки O', такой, что $\angle hk = \angle h'k'$.

Эта аксиома позволяет от данного луча в данную полуплоскость откладывать угол, равный данному.

Дается определение конгруэнтных треугольников. Треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$, если все их соответствующие стороны и соответствующие углы конгруэнтны.

III_5. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Это почти что первый признак равенства треугольников. А точнее аксиома, из которой он достаточно легко следует. И именно он доказывается здесь первым. За ним доказываются второй и третий признаки равенства треугольников.

Вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен смежному.

Появляются понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Появляются понятия медианы, высоты и биссектрисы треугольника, равнобедренный и равносторонний треугольники.

Основной теоремой этой группы аксиом является такая: через данную точку проходит единственный перпендикуляр к данной прямой.

Следствием этой теоремы является построение двух не пересекающихся прямых. Берем точку A, не лежащую на прямой a. Опускаем из точки A перпендикуляр AH на прямую a, а затем к прямой AH восстанавливаем перпендикуляр b в точке A. Прямые a и b не пересекаются. Это доказывает, что через каждую точку, не лежащую на прямой можно провести прямую, не пересекающую данную. Разговор о том, сколько таких прямых может быть мы сможем вести только в пятой группе аксиом. А пока

IV группа аксиомы непрерывности. Из две: аксиома Кантора и аксиома Архимеда. Они позволяют ввести измерение отрезков и углов. В этой группе аксиом доказывается теорема Саккери-Лежандра: если выполняются четыре группы аксиом, то сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых углов (то есть быть больше π).

Геометрия, которая построена на перечисленных четырех группах аксиом, называется *абсолютной геометрией.*

На пятой группе аксиом идет развилка. Пятая группа аксиом содержит всего одну аксиому. Возьмем пятый постулат Евклида: и всякий раз, когда две прямые, пересеченные третьей, образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, они пересекаются, причем пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых. В этом случае мы получим евклидову геометрию, которую хорошо знаем со школьных времен. Эквивалентом пятого постулата Евклида является аксиома о параллельной: через любую точку, не лежащую на прямой, проходит не более одной прямой, не пересекающая данную. Вместе с утверждением о существовании прямой, которая проходит через данную точку и не пересекает данную прямую (доказали в третьей группе аксиом) мы получаем, что через каждую точку, не лежащую на прямой проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Такие прямые называются параллельными в геометрии Евклида. Напомним, что эквивалент аксиомы – это утверждение, которым мы можем заменить аксиому, получив ту же самую геометрию (то есть эквивалент $\Leftrightarrow$ аксиома).

Аксиому о параллельной мы заменим на другую: через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную. Это аксиома Лобачевского. Если ею дополнить четыре группы аксиом абсолютной геометрии, мы получим геометрию Лобачевского. Именно ее мы и будем рассматривать в этом курсе.

Чтобы доказать, что та или иная геометрия, построенная на наборе аксиом, не противоречива, нужно построить ее модель. Другими словами, нужно взять объекты, уже построенные в рамках какой-то другой непротиворечивой теории, сказать, какие из этих объектов будут играть роль точек, какие прямых, какие плоскостей и сказать, как будут задаваться отношения между ними. Затем проверить, что при этом выполняются все аксиомы. Тем самым доказывается непротиворечивость новой теории. Непротиворечивость теории (в частности, геометрии) можно доказать только относительно, то есть относительно какой-то другой уже построенной теории. В самом начале этого пути стоит арифметика натуральных чисел.

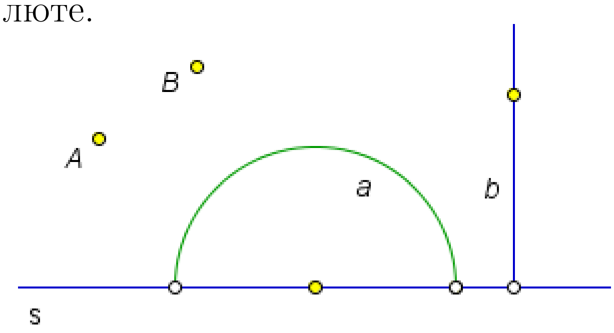
Для геометрии Лобачевского мы построим модель, используя евклидову плоскость. Эта модель не только позволит убедиться в непротиворечивости геометрии Лобачевского, но еще и даст возможность изображать чертежи объектов, которые мы будем изучать. Как и в евклидовой геометрии картинка помогаем проводить доказательства.

2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Проверка выполнения I группы аксиом

Будем считать, что евклидова плоскость σ у нас уже построена (будем называть ее Е-плоскостью). Ее точки будем называть *Е-точками*, а ее прямые – *Е-прямыми*. Говоря об отношениях на евклидовой плоскости мы тоже будем добавлять букву Е.

Возьмем на Е-плоскости σ Е-прямую s. Назовем ее *абсолютом*. Эта Е-прямая делит плоскость σ на две Е-полуплоскости. Договоримся рисовать Е-прямую s горизонтально. Тогда эти полуплоскости условно назовем верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю Е-полуплоскость. Обозначим ее Λ.

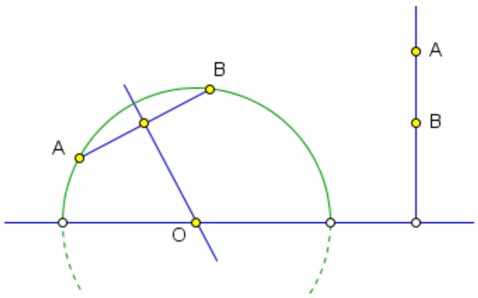
Будем называть Е-полуплоскость Λ плоскостью в геометрии Лобачевского, короче, *плоскостью*. (У нас будет только одна плоскость, так как мы ограничимся построением планиметрии Лобачевского). Точки Е-полуплоскости Λ будем называть точками в геометрии Лобачевского, короче, точками. Прямыми в геометрии Лобачевского, короче, прямыми, будем называть перпендикулярные ему Е-лучи с началом на абсолюте и Е-полуокружности Е-окружностей с центрами на абсолюте.



На рисунке изображены три точки A, B и C, а также две прямые a и b. Прямая a представляет из себя Е-полуокружность. Обратите внимание, что концы Е-полуокружности выколоты. Они не являются точками плоскости Λ. Прямая b представляет из себя Е-луч. Итак, мы смоделировали основные объекты. Будем говорить, что точка M принадлежит прямой m, если соответствующая Е-точка M принадлежит Е-полуокружности (либо Е-лучу) m. Тем самым мы смоделировали отношение принадлежности точек прямым. Наша следующая задача проверить выполнение аксиом первой группы. Так как мы ограничиваемся планиметрией Лобачевского, то проверить нам нужно только аксиомы, относящиеся к планиметрии.

I_1, I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует единственная прямая, которой они принадлежат.

Доказательство. Возьмем две произвольные различные точки A и B. Е-точки A и B могут располагаться двумя разными способами: Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s и Е-прямая AB не перпендикулярна Е-прямой s.



Если Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s, то проводим ее и берем луч, лежащий в модели. Если не перпендикулярна, то проводим серединный перпендикуляр к Е-отрезку AB и выходим на центр O Е-окружности. Берем нужную полуокружность. Единственность прямой AB следует из однозначной определенности Е-луча и Е-окружности с центром на s, проходящей через две заданные точки. □

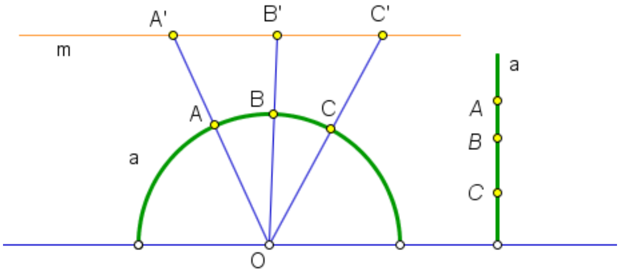
I_3. На каждой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Это следует из того, что на евклидовой плоскости на любой Е-полуокружности и Е-луче можем взять по крайней мере две точки. Существуют три точки не лежащие ни на одной Е-окружности ни на одном Е-луче (как их выбрать?)

3. Проверка выполнения II группы аксиом

Пусть даны три точки A, B, C на прямой a. Проведем Е-прямую m параллельную абсолюту. Если прямая a изображается Е-полуокружностью, то спроектируем Е-точки A, B, C из центра Е-полуокружности O на Е-прямую m: A', B', C'.

Будем говорить, что точка B лежит между точками A и C на прямой a, если
1) (a – Е-луч) Е-точка B лежит между Е-точками A и C;
2) (a – Е-полуокружность с центром O) Е-точка B' лежит между Е-точками A' и C'.



Будем в этом случае обозначать $A - B - C$. Посмотри на аксиомы.
II_1. Если $A - B - C$, то A, B и C – три различные точки прямой и $C - B - A$.
Выполнение этой аксиомы непосредственно следует из аксиом евклидовой геометрии. (Как?)

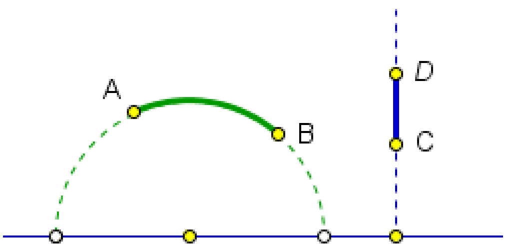
II_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует по крайней мере еще одна точка C на прямой AB, такая, что $A - B - C$.

Выполнение этой аксиомы тоже непосредственно следует из свойств фигур в евклидовой геометрии. Проведите подробные рассуждения самостоятельно.

II_3. Среди трех точек одной прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

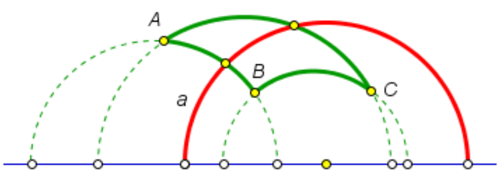
Проведите рассуждения самостоятельно.

Теперь мы можем ввести понятия отрезка.



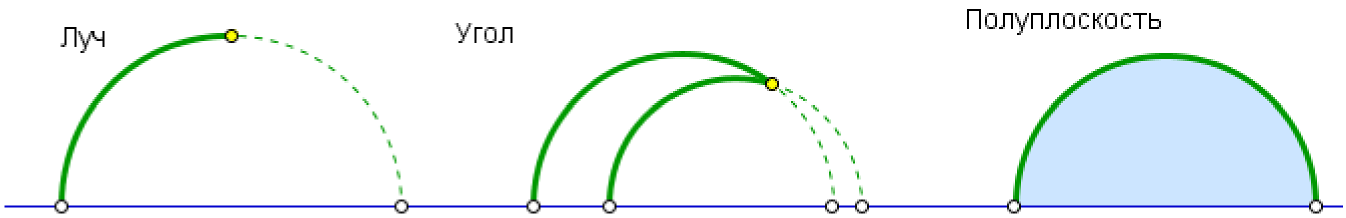
На рисунке изображены отрезки AB и CD.

II_4. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и a – прямая, лежащая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит через точку отрезка AC или BC.



Доказательство основывается на теореме из евклидовой геометрии: две окружности пересекаются тогда и только тогда, когда одна из них проходит через внутреннюю точку другой окружности. Пусть прямая a пересекает отрезок AB. Тогда либо точка A будет внутренней для Е-окружности a, либо B. Пусть это точка B. Тогда если точка C является внутренней для Е-окружности a, то пересечет AC, в противном случае – BC.

Теперь можно изобразить луч, полуплоскость, угол.



Луч – жирная зеленая линия. Дополнительный к нему луч – пунктирная линия. Угол изображен жирными зелеными линиями. Пунктирными линиями изображены вертикальный к нему угол и два смежный (постарайтесь их увидеть). Одна полуплоскость закрашена голубым. Все не закрашенное – дополнительная полуплоскость.

4. Домашнее задание

Во всех следующих задачах нужно изобразить фигуры в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

1. Изобразите две пересекающиеся прямые, две не пересекающиеся прямые. Рассмотрите все возможные виды прямых. Изобразите точки лежащие и не лежащие на этих прямых.

2. Изобразите два луча с различными началами. Изобразите два взаимно дополнительных луча.

3. Изобразите смежные и вертикальные углы. Изобразите угол и его внутреннюю область. Рассмотрите все возможные случаи изображения сторон угла.

4. Изобразите полуплоскость и две точки в ней. Изобразите отрезок, соединяющих эти точки. Изобразите две точки в различных полуплоскостях и отрезок их соединяющий.

5. Изобразите треугольник и четырехугольник. Рассмотрите все возможные случаи изображения их сторон. Изобразите прямую, пересекающую две стороны треугольника и не проходящую через его вершины.

2.2. Занятие 11. Третья группа аксиом. Откладывание отрезка, равного данному

Третья группа аксиом – это аксиомы конгруэнтности. Договоримся конгруэнтность называть равенством. Мы должны сейчас сказать, какие фигуры в модели плоскости Лобачевского мы будем называть равными.

Будем называть *Л-движениями* инверсии с центрами на абсолюте, осевые симметрии с осями, перпендикулярными абсолюту, параллельные переносы с векторами, параллельными абсолюту, и их композиции.

Теперь мы можем ввести отношение равенства фигур. Будем называть две фигуры в модели *равными*, если существует Л-движение, переводящее одну фигуру в другую.

Замечание 2.1. Оказывается все Л-движения можно свести к инверсиям. Тогда определение равенства фигур можно будет сформулировать так: две фигуры в модели Пуанкаре называются равными, если существует конечная цепочка инверсий (с центрами на абсолюте), переводящая одну фигуру в другую.

Покажем, что параллельный перенос (вектор параллелен абсолюту) можно представить как композицию инверсий. Как мы видели выше, параллельный перенос можно представить в виде композиции двух гомотетий с разными центрами и взаимно обратными коэффициентами. При этом вектор параллельного переноса параллелен вектору, который задается центрами этих гомотетий. Мы выберем центры на абсолюте. Тогда каждая из гомотетий представится в виде композиции двух инверсий с теми же центрами. Таким образом, параллельный перенос на вектор, параллельный абсолюту, можно представить в виде композиции инверсий с центрами на абсолюте.

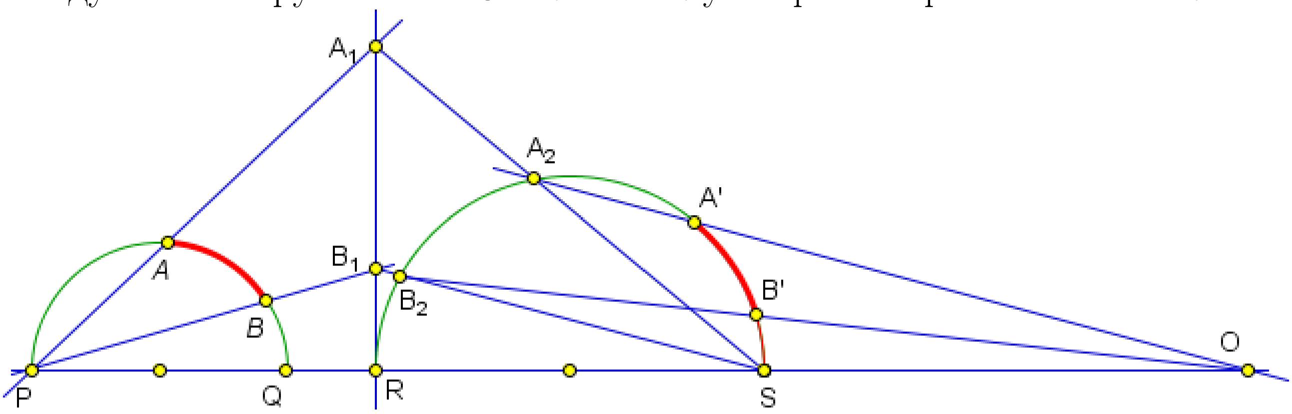
Осевую симметрию можно рассматривать как предельный случай инверсии.

Тогда Л-движения – это инверсии (с центром на абсолюте) и их всевозможные композиции.

Проверим выполнимость аксиом третьей группы.

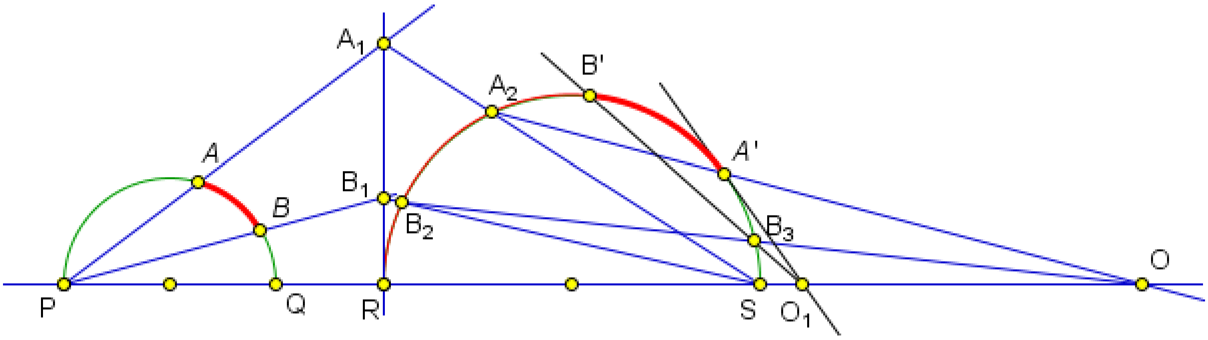
III_1. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что $AB = A'B'$.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB и луч с началом в точке A' изображаются дугами Е-окружностей. Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.



Отрезок AB и луч с началом в точке A' изображены на рисунке красным. Построим цепочку инверсий, которые переведут отрезок AB в нужный нам отрезок $A'B'$. Сначала рассмотрим инверсию с центром в Е-точке P, которая переводит Е-точку Q в Е-точку R. Так как Е-окружность, на которой лежит отрезок AB, проходит через центр инверсии, она перейдет в Е-прямую, перпендикулярную Е-прямой PR и проходящую через Е-точку R. Точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1. Теперь рассмотрим инверсию с центром в Е-точке S, для которой точка R будет инвариантной. Тогда Е-прямая A_1B_1 перейдет в окружность с диаметром RS. Строим A_2 и B_2 – образы точек A_1 и B_1. Осталось отобразить инверсией Е-точку A_2 в Е-точку A'. Тогда B_2 перейдет в искомую точку B'. Получаем, что Е-окружность с радиусом RS должны переходить в себя, а A_2 должна перейти в A'. Такая инверсия существует (как мы видели выше) и ее центр будет пересечением Е-прямых A_2A' и RS. Получаем Е-точку O и строим образ точки B_2, то есть точку B'. Итак, мы построили отрезок $A'B'$, конгруэнтный отрезку AB на заданном луче.

Поменяем данный луч с началом в точке A' на дополнительный к нему. Посмотрим, как в этом случае построить отрезок, равный данному.



Первые три инверсии такие же как в первом случае. Четвертая инверсия должна перебросить точку B_3 на дополнительный луч. Значит, она должна перевести окружность с диаметром RS в себя, точку A перевести в себя. Получаем, что окружность инверсии должны быть ортогональна к данной окружности и точка A' должна лежать на окружности инверсии. Значит, центр окружности инверсии будет точкой пересечения касательной в точке A' к окружности с диаметром RS и абсолюта. (Посмотрите динамический рисунок Аксиомы 3 группа на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25)

Замечание 2.2. Это не единственный набор Л-движений, который позволил отложить на данном луче отрезок, равный данному. Построения можно упростить, если более выгодно построить вспомогательный Е-луч.

III_2. Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$.

Так как отрезки $A'B'$ и AB равны, существует цепочка инверсий $I_1 \circ \ldots \circ I_r$, которая переводит первый отрезок во второй. Аналогично, существует цепочка инверсий $\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s$, которая переводит $A''B''$ в AB. Тогда цепочка инверсий

$$(\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s)^{-1} \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r = \tilde{I}_s \circ \ldots \circ \tilde{I}_1 \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r$$

переведет отрезок $A'B'$ в отрезок $A''B''$. Следовательно, они равны.

III_3. Пусть $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Тогда $AC = A'C'$.

1. Задачи

1. Пусть отрезок AB принадлежит Е-лучу, а луч с началом A' принадлежит Е-окружности. Постройте отрезок $A'B'$ на данном луче, равный отрезку AB. А как построить равный отрезок, если AB на Е-окружности, а A' – на Е-луче?

2. Рассмотрите различные возможные изображения отрезков и лучей. Отложите отрезок, равный данному. Попробуйте для каждого случая рассмотреть различные наборы Л-движений.

2. Домашнее задание

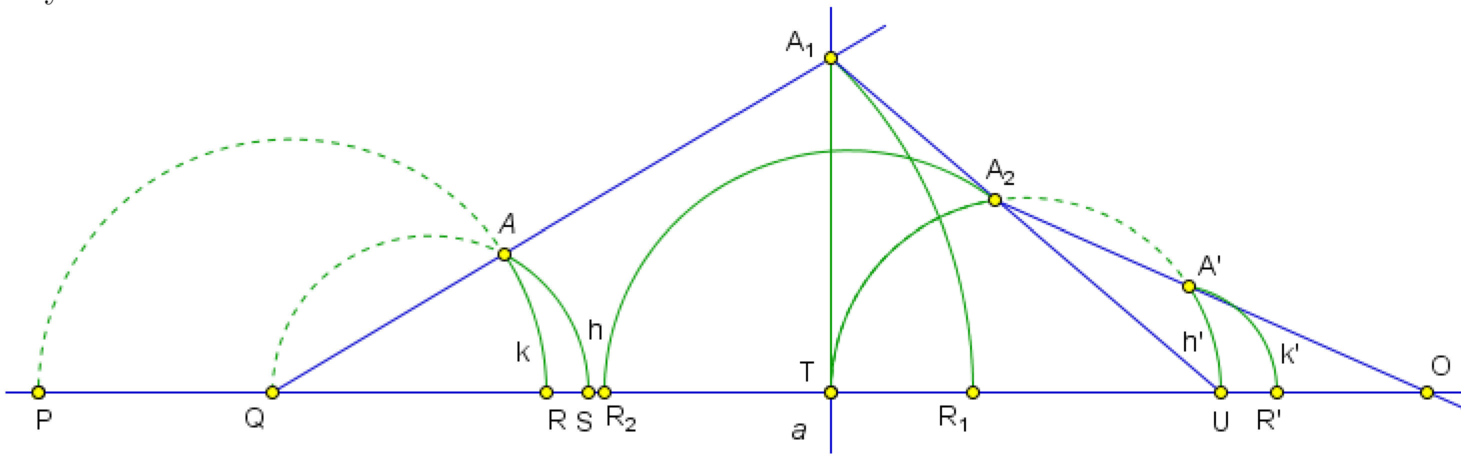
1. Изобразите 5 случаев взаимного расположения и вида отрезков и лучей, постройте в каждом случае отрезок, равный данному.

2. Проверьте выполнение аксиомы III_3.

2.3. Занятие 12. Третья группа аксиом. Откладывание угла, равного данному

III_4. Пусть даны $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k', исходящий из точки O', такой, что $\angle hk = \angle h'k'$.

Покажем, как мы можем отложить от данного луча h' угол, равный данному углу $\angle hk$.



Сначала получим цепочку инверсий, которая переводила бы луч h данного угла $\angle hk$ в луч h'. Переводить будем аналогично случаю построения отрезка, равного данного. Сначала отобразим Е-окружность QS инверсией с центром Q и соответствующими точками $S \to T$. Эта Е-окружность перейдет в Е-прямую a, точка A перейдет в точку A_1, а точка S в точку T. Значит, луч h перейдет в луч A_1T. Затем, переводим Е-прямую a в Е-окружность TU. Центр инверсии будет U, а точка T будет инвариантной. При такой инверсии точка A_1 перейдет в точку A_2 и луч A_1T перейдет в луч A_2T. Осталось перевести луч A_2T в луч h'. Для этого нужна инверсия, которая оставит окружность TU инвариантной, а точку A_2 переведет в точку A'. Это инверсия с центром O (вспоминаем, что окружность, проходящая через две инверсные точки, является инвариантной). Мы получили последовательность из трех инверсий, которые перевели луч h в луч h'. Теперь теми же инверсиями переводим луч k:

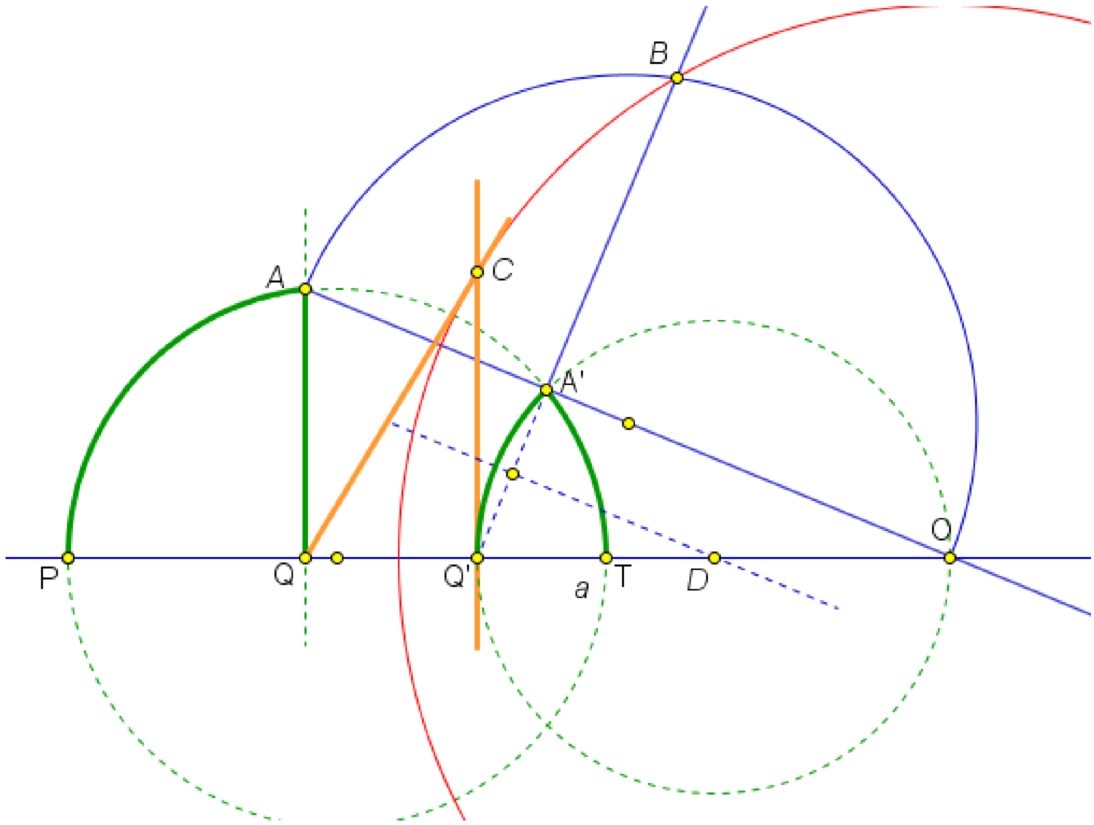
$$k \to A_1R_1 \to A_2R_2 \to A'R' = k'.$$

Подробные построения можете посмотреть на динамическом рисунке Аксиомы 3 группы на сайте.

Замечание 2.3. Мы указали способ построения угла, равного данного в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Заметим, что при этом построении мы не указали, в какую полуплоскость мы откладываем угол. Что делать, если луч k' оказался не в той полуплоскости, которая нужна?

Задача 2.1. Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' во внутреннюю полуплоскость угол, равный данному.

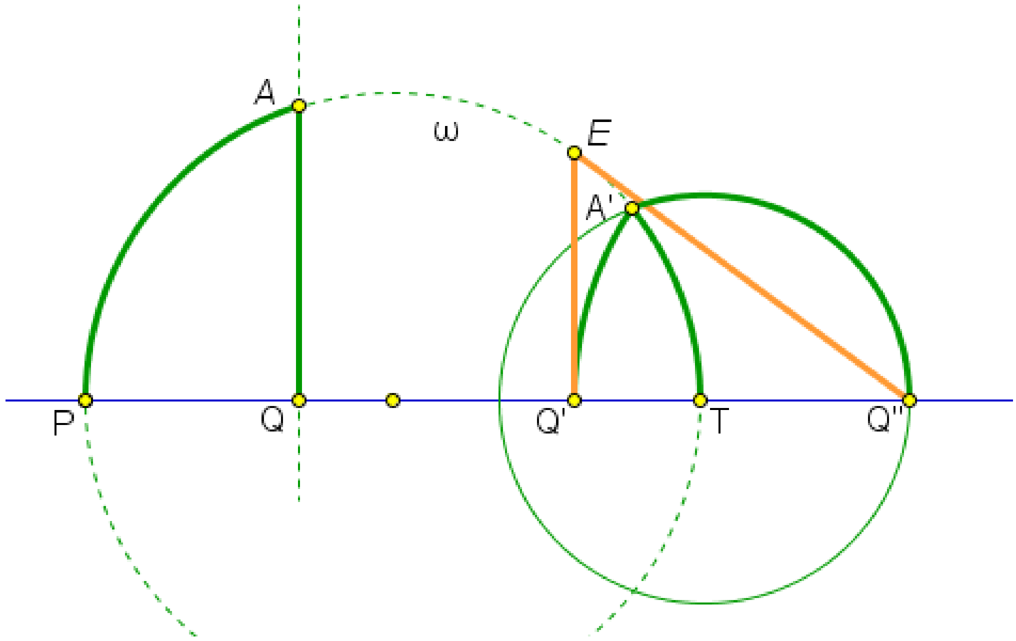
Решение. Нам нужно найти одно или несколько Л-движений, последовательное выполнение которых перевело бы луч AP в луч $A'T$, а луч AQ в какой-то луч во внутренней полуплоскости.



Заметим, что лучи AP и $A'Q$ находятся на одной Е-окружности (зеленая пунктирная). Поэтому рассмотрим инверсию, при которой эта Е-окружность переходит в себя, а точка A в точку A'. Ее центр будет на пересечении AA' с абсолютом. Это точка O. Нам нужно построить саму окружность этой инверсии. Заметим, что она задается центром O и парой соответствующих точек A и A'. Мы это уже умеем делать. На AO как на диаметре строим Е-окружность (синяя) и пересекаем ее с перпендикуляром (к AO) в точке A'. Получим точку B. Проводим красную окружность с центром в точке O радиуса OB – это окружность инверсии. Нам осталось перевести этой инверсией вторую сторону данного угла, то есть луч AQ. Для этого нам достаточно построить образ точки Q при этой инверсии. Строим стандартным образом: проводим из точку Q касательную к окружности инверсии и из точки касания опускаем перпендикуляр на Е-луч OQ (оранжевые Е-прямые). Получаем точку Q'. Так как Е-прямая AQ не проходила через центр инверсии, то при этой инверсии она перейдем в Е-окружность. Следовательно, нам нужно соединить точки A' и Q' дугой Е-окружности. Это и будет искомая сторона угла. □

Задача 2.2. Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' во внешнюю полуплоскость угол, равный данному.

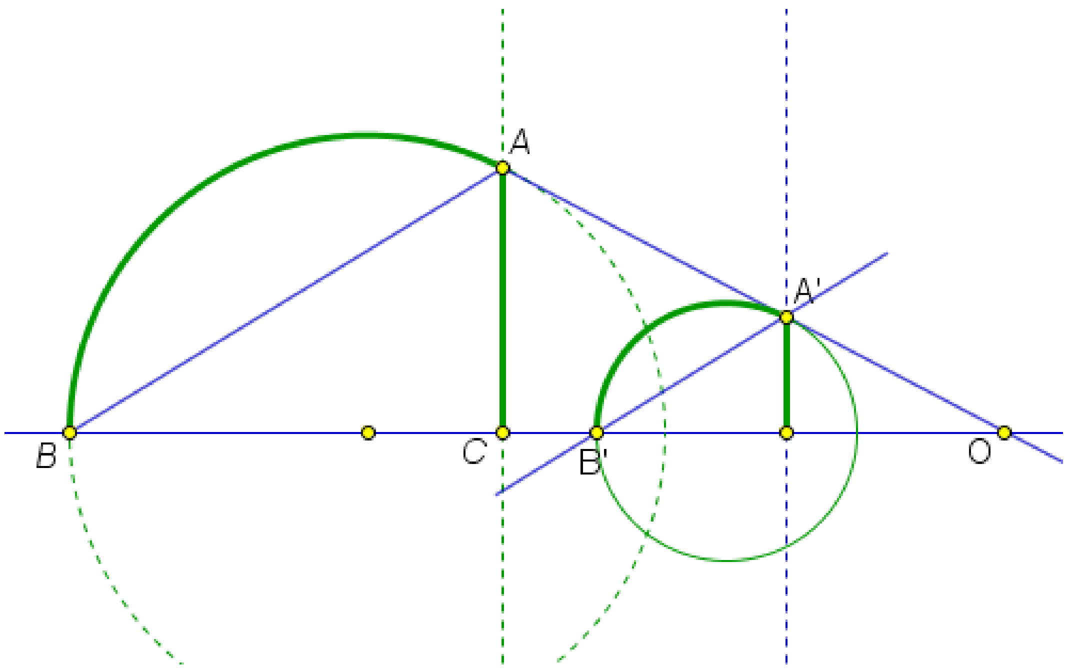
Решение. Задача такая же как предыдущая, но отложить угол теперь нужно во внешнюю полуплоскость. Решить ее можно, например, так. Сначала, как в предыдущей задаче, мы откладываем угол во внутреннюю полуплоскость.



И получаем угол $Q'A'T$. Теперь нам нужно каким-то Л-движением оставить на месте луч $A'T$ и перебросить во внешнюю полуплоскость луч $A'Q'$. Это опять инверсия с окружностью инверсии ω. Строим образ точки Q'. Это будет точка Q'' и проводим дугу $A'Q''$. Тогда угол $TA'Q''$ искомый. □

Задача 2.3. Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' а) в левую, б) в правую полуплоскость угол, равный данному.

Решение. Пусть даны такие углы.



Мы помним, что кроме инверсий у нас есть еще Л-движения. Посмотрим, как они работают в решении задач.

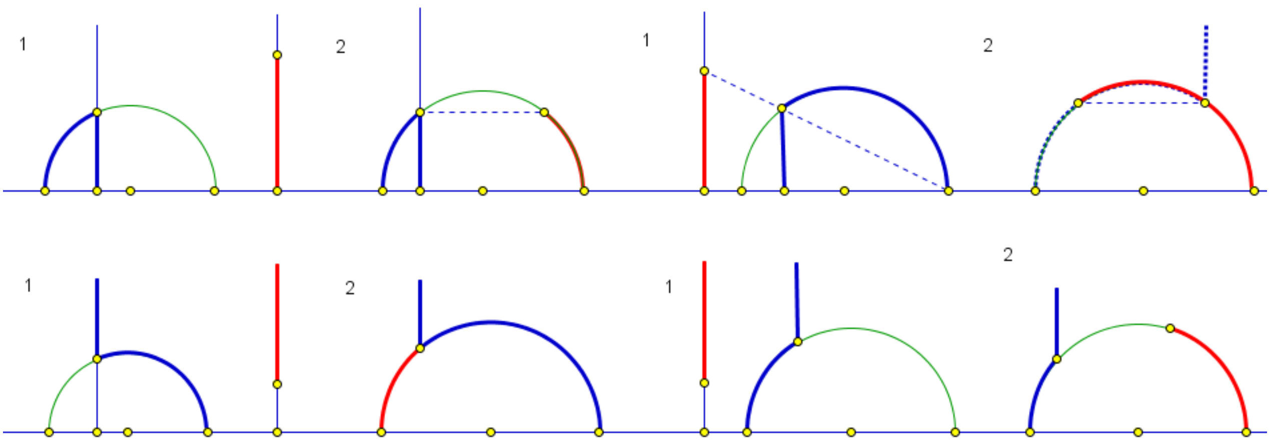
Воспользуемся гомотетией, которая переводит A в A'. Ее центр O. Так как при гомотетии, Е-прямая, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную Е-прямую, то сторона AC данного угла при этой гомотетии перейдет в нужный луч с началом в A'. Осталось построить образ Е-дуги AB при этой гомотетии. Строим образ точки B (как на первом курсе) и проводим через точки A' и B' Е-окружность.

Если нужно отложить угол в правую полуплоскость, то воспользуемся осевой симметрией с осью, перпендикулярной абсолюту (она тоже будет Л-движением). Что это будет за осевая симметрия в данном случае? Постройте образ Е-дуги $A'B'$ при этой осевой симметрии самостоятельно. □

Замечание 2.4. Когда у нас появится четвертая группа аксиом, мы сможем указать более простой способ построения угла, равного данному.

1. Домашнее задание

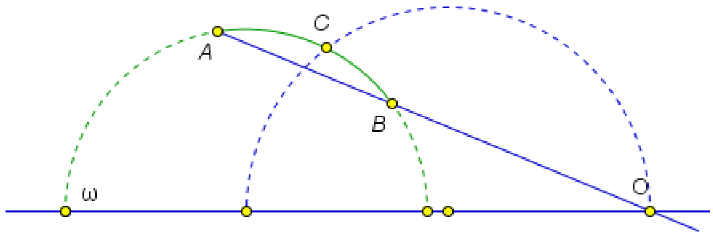
1. Для следующих случаев от красного луча в любую (а лучше обе) полуплоскость отложите угол, равный синему.



2.4. Занятие 13. Построение середины отрезка и прочее. Четвертая группа аксиом. Измерение величин углов. Откладывание угла, равного данному с использованием его величины

Задача 2.4. Пусть дан отрезок AB. Постройте его середину C.

Решение. Рассмотрим случай, когда отрезок AB располагается на Е-окружности ω. Случай, когда отрезок AB располагается на Е-луче, рассмотрите самостоятельно.



Как и на евклидовой плоскости, задачи на построение на модели плоскости Лобачевского начинаются с анализа. Пусть точка C построена. Тогда отрезок AC равен отрезку CB.

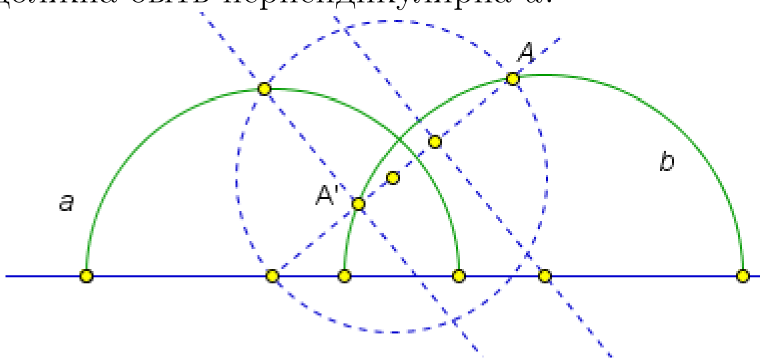
Следовательно, должна существовать последовательность инверсий, переводящая отрезок AC в отрезок CB. Смотрим, нельзя ли обойтись одной инверсией. Точка C должна переходить в себя (то есть являться инвариантной), а точка A должна переходить в точку B. Рассмотрим инверсию I, для которой точки A и B соответствуют друг другу. Тогда окружность, содержащая эти точки перейдет в себя, а ее точка пересечения с окружностью инверсии будет инвариантной. Это и будет точка C. Следовательно, нам нужно построить окружность инверсии, для которой точка A переходит в точку B, а ее центр лежит на абсолюте.

Центр инверсии O получается как пересечение Е-прямой AB и абсолюта. Далее, так как Е-окружность ω инвариантна, она ортогональна окружности инверсии. Как мы видели в теме инверсия, это означает, что радиус каждой из этих Е-окружностей будет касательной к другой из них. Значит, нам нужно из точки O провести касательную к окружности ω. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Напомним, что в третьей группе аксиом вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он равен смежному. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образую прямой угол.

Задача 2.5. Дана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой. Постройте прямую, перпендикулярную a и проходящую через точку A.

Решение. Начинаем с анализа. Пусть искомая прямая b построена. Эта прямая должна быть перпендикулярна a.

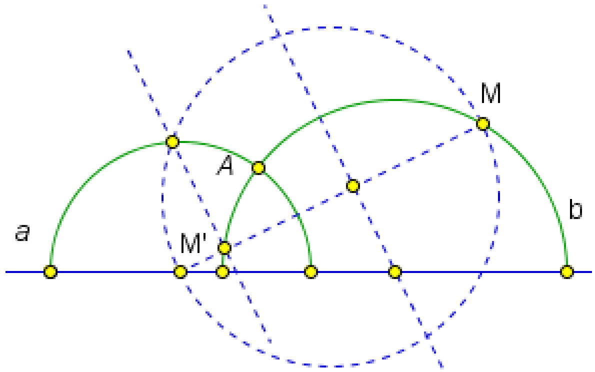


Тогда при инверсии с Е-окружностью a Е-окружность b должна переходить в себя, то есть она должна проходить через две инверсные точки.

Следовательно, для построения Е-окружности b нужно построить образ A' точки A при инверсии относительно Е-окружности a и провести через точки A и A' Е-окружность с центром на абсолюте. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Задача 2.6. Докажите, что инверсия моделирует осевую симметрию в случае, если ось осевой симметрии изображается Е-полуокружностью.

Решение. Напомним определение осевой симметрии.



Пусть дана прямая a. Преобразование плоскости, которое каждой точке $M \in a$ ставит в соответствие ее же, а каждой точке $M \notin a$ ставит в соответствие точку M', такую, что $MM' \perp a$ и середина отрезка MM' принадлежит a.

Рассмотрим прямую a на модели и точку $M \in a$. Тогда при инверсии с Е-окружностью a точка M будет инвариантной, то есть перейдет в себя. Пусть $M \notin a$. При инверсии она перейдет в точку M', такую, что Е-окружность b с центром на абсолюте, проходящая через точки M и M' будет инвариантной. Эта Е-окружность является прямой MM', которая перпендикулярна a. Кроме того, точка A пересечения Е-окружности a и Е-окружности b будет инвариантной. Тогда при инверсии отрезок MA перейдет в отрезок $M'A$, то есть A является серединой отрезка MM'. □

1. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Четвертая группа аксиом

Эта группа аксиом состоит из двух аксиом: Архимеда и Кантора.

IV_1. (аксиома Архимеда) Пусть AB и CD – какие-нибудь отрезки. Тогда на прямой AB существует конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, таких, что выполняются условия: а) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, $\ldots$, $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$; б) $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$; в) $A - B - A_n$.

IV_2. (аксиома Кантора) Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего и, кроме того, для любого отрезка CD найдется натуральное число n, такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков данной последовательности.

Мы опустим проверку выполнения этих аксиом в модели Пуанкаре.

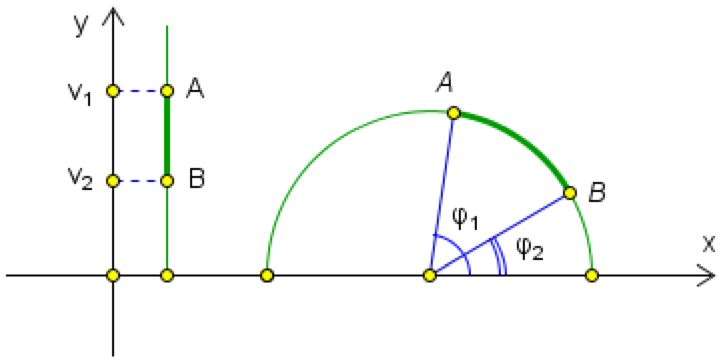
Говорят, что установлено измерение отрезков, если определено отображение $\ell : L \to \mathbb{R}_+$ из множества всех отрезков в множество положительных вещественных чисел, которое удовлетворяет условиям:

1) если отрезки AB и $A'B'$ конгруэнтны, то $\ell(AB) = \ell(A'B')$;

2) если $A - B - C$, то $\ell(AB) + \ell(BC) = \ell(AC)$;

3) существует отрезок PQ, такой, что $\ell(PQ) = 1$.

Введем отображение ℓ в нашем случае.



Введем систему координат как показано на рисунке. Если отрезок AB лежит на Е-полуокружности, то обозначим через φ_1 и φ_2 углы между положительным направление оси Ox и радиусом Е-окружности, проведенным в соответствующую точку.

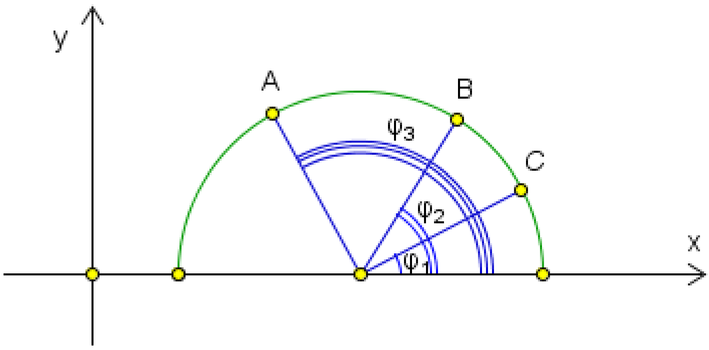
Если отрезок AB лежит на Е-луче, то обозначим через v_1 и v_2 координаты точек A и B соответственно в выбранной системе координат.

Положим по определению

$$1)\,\ell(AB) = \left|\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}\right|;\ 2)\,\ell(AB) = \left|\ln\frac{v_1}{v_2}\right|.$$

Эти формулы выводятся с помощью дифференциальной геометрии и теории функций комплексного переменного. Там же доказывается, что при этом конгруэнтные отрезки имеют равные длины. Подробности можете посмотреть в [5]. Доказательство равенства длин конгруэнтных отрезков методами элементарной геометрии можно посмотреть в [6].

Доказательство двух оставшихся условий измерения отрезков продемонстрируем на примерах. Докажем второе условие в случае, когда точки A, B, C лежат на Е-окружности. Пусть они располагаются так, как показано на рисунке.



Тогда

$$\ell(AB) = \ln\frac{\operatorname{tg}\varphi_3/2}{\operatorname{tg}\varphi_2/2};\ \ell(BC) = \ln\frac{\operatorname{tg}\varphi_2/2}{\operatorname{tg}\varphi_1/2}.$$

Модули сняли, так как при логарифмы будут положительны (угол в числителе больше угла в знаменателе, тангенс функция возрастающая и логарифм числа, большего 1, положителен).

По свойствам логарифма получаем

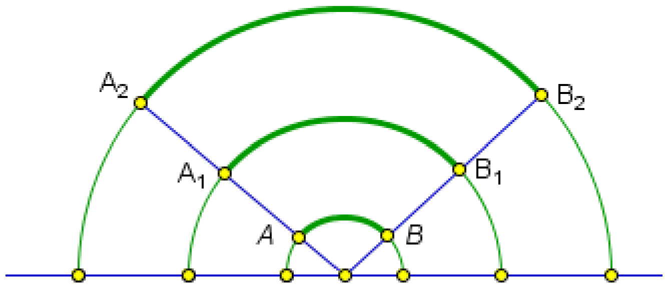
$$\ell(AB)+\ell(BC) = \ln(\operatorname{tg}\varphi_3/2)-\ln(\operatorname{tg}\varphi_2/2)+\ln(\operatorname{tg}\varphi_2/2)-\ln(\operatorname{tg}\varphi_1/2) = \ln\frac{\operatorname{tg}\varphi_3/2}{\operatorname{tg}\varphi_1/2} = \ell(AC).$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи.

Проверим третье условие. Возьмем две точки P и Q на Е-луче. Пусть $P(v_1)$, $Q(v_2)$ (предположим, что P выше Q, то есть $v_1 > v_2$). Потребуем, чтобы $\ell(P,Q) = 1$. Тогда $\ln\frac{v_1}{v_2} = 1$, то есть $v_1 = ev_2$. Возьмем Q с $v_2 = 1$ (такая точка есть), а P с $v_1 = e$. (Такая точка тоже есть на модели.) Это будут искомые точки, для которых длина отрезка PQ будет 1.

Итак, мы ввели измерение длин отрезков на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

На рисунке приведены примеры отрезков равной длины.



Отрезки AB, A_1B_1, A_2B_2 имеют одинаковые длины на плоскости Лобачевского, так как они лежат на гомотетичных Е-окружностях, а гомотетию можно получить как композицию двух инверсий.

Значит, один отрезок переходит в другой при помощи цепочки инверсий, то есть они конгруэнтны, следовательно имеют равные длины. (Также равенство длин можно доказать, заметив, что углы φ_1 и φ_2 у всех трех отрезков одинаковые). Мы видим, что чем ближе к абсолюту, тем евклидова длина дуги, моделирующей отрезок плоскости Лобачевского, меньше.

Если зафиксировать точку A, а точку B устремить к абсолюту, то в формуле

$$\ell(AB) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \right|$$

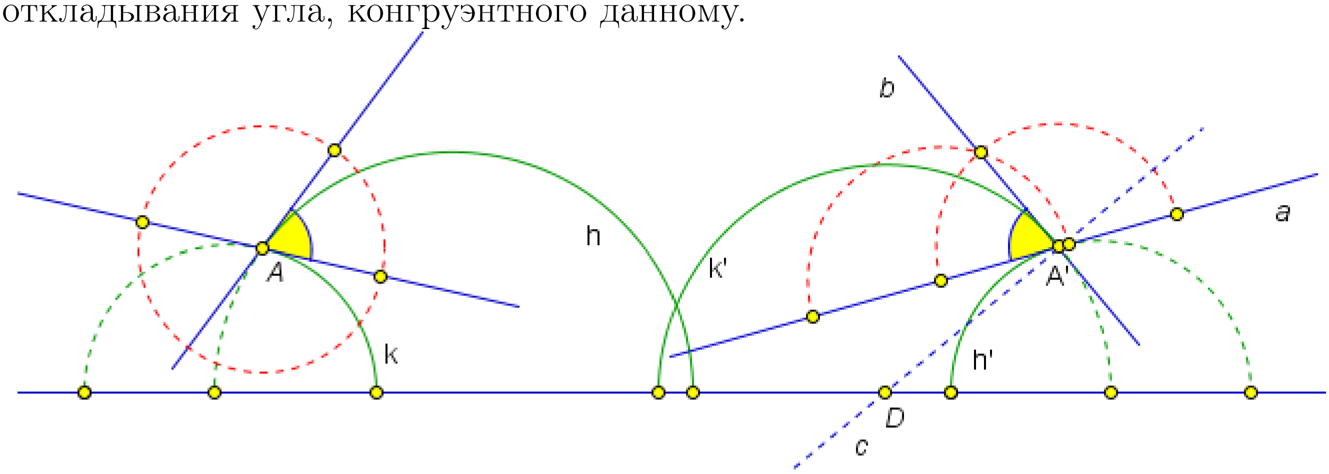
Е-угол φ_1 будет постоянным, а Е-угол φ_2 будет уменьшаться. Так как тангенс – функция возрастающая, знаменатель дроби будет уменьшаться и логарифм увеличиваться в бесконечность.

2. Измерение величин углов

Перейдем к углам. *Величиной угла AOB* модели Пуанкаре плоскости Лобачевского будем называть величину Е-угла между дугами окружностей, которые изображают этот угол.

Нетрудно показать, что два угла конгруэнтны тогда и только тогда, когда равны их величины.

Итак, величина угла в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и его евклидова величина совпадают. Благодаря этому мы можем получить простой алгоритм откладывания угла, конгруэнтного данному.



Строим касательные к Е-дугам h и k в точке A. Мы получаем величину угла $\angle hk$

– это отмеченный на рисунке угол между касательными. Проводим касательную в точке A' к Е-дуге h'. Это Е-прямая a. От нее в нужную полуплоскость (в которую хотим отложить луч k') откладываем Е-угол, равный углу между касательными в точке A. Построение этого угла (хорошо известно из школьного курса геометрии) изображено на рисунке красными пунктирными линиями. В результате получаем прямую b. Это будет касательная к искомой Е-дуге k'. Чтобы построить эту дугу, нам нужно в точке A' провести перпендикуляр к b. Тогда получим точку D – центр Е-окружности, содержащей k'. В результате получаем угол $\angle h'k'$, конгруэнтный углу $\angle hk$.

3. Домашнее задание

1. Постройте прямоугольный треугольник и проведите медиану к его гипотенузе. Рассмотрите разные случаи изображения сторон треугольника.

2. Постройте равнобедренный треугольник и проведите высоту к одной из его боковых сторон (рассмотрите случаи, когда стороны треугольника изображаются Е-лучом или Е-дугой).

3. Постройте биссектрису угла произвольного треугольника. Рассмотрите различные случаи для изображения сторон треугольника.

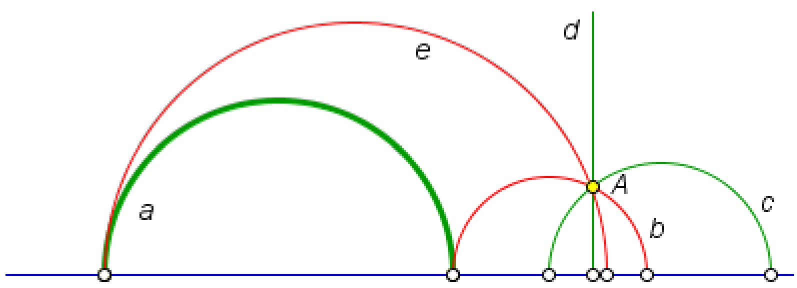
2.5. Занятие 14. Аксиома Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые. Общий перпендикуляр. Ось симметрии. Равнонаклонная

1. Аксиома Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые.

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы – аксиомы Лобачевского.

V^*. Через точку, не лежащую на данной прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную.

Проиллюстрируем, что эта аксиома выполняется в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.



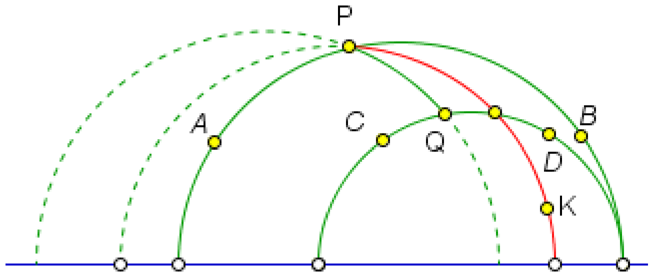
На рисунке изображено несколько прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a. Следовательно, аксиома Лобачевского в модели Пуанкаре выполняется.

Обратите внимание на прямые b и e. Они выделяются среди других прямых, не пересекающих прямую a. Эти прямые называются параллельными прямой a. Дадим строгое определение параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Сначала вспомним определение направления на прямой. Рассмотрим на прямой множество всех лучей. На этом множестве задается отношение эквивалентности: два луча h и k называются сонаправленными, если либо $h \subset k$, либо $k \subset h$.

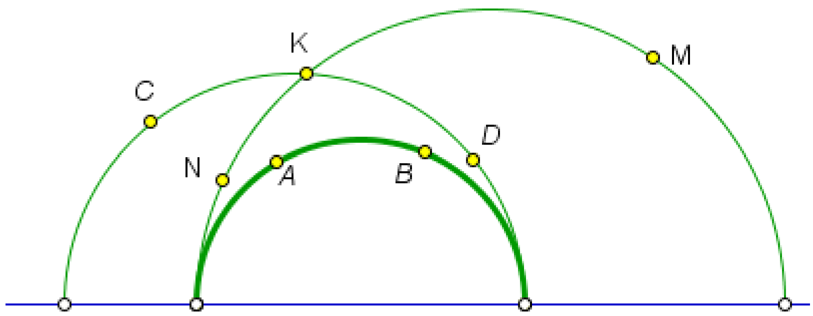
В противном случае лучи называются противоположно направленными. Это отношение разбивает все лучи прямой на два класса эквивалентности: в каждом классе лежат сонаправленные между собой лучи, а лучи разных классов противоположно направленные. Каждый из этих классов называется направлением на прямой. Обозначать направленные прямые будем также, например AB, а направление будем считать от первой буквы ко второй.

Будем говорить, что направленные прямые AB и CD *параллельны (в направлении точек B и D)*, если 1) эти прямые не пересекаются, 2) для любой точки P на прямой AB и любой точки Q на прямой CD любой внутренний луч PK угла QPB пересекает луч QD.



На рисунке изображены параллельные прямые AB и CD.

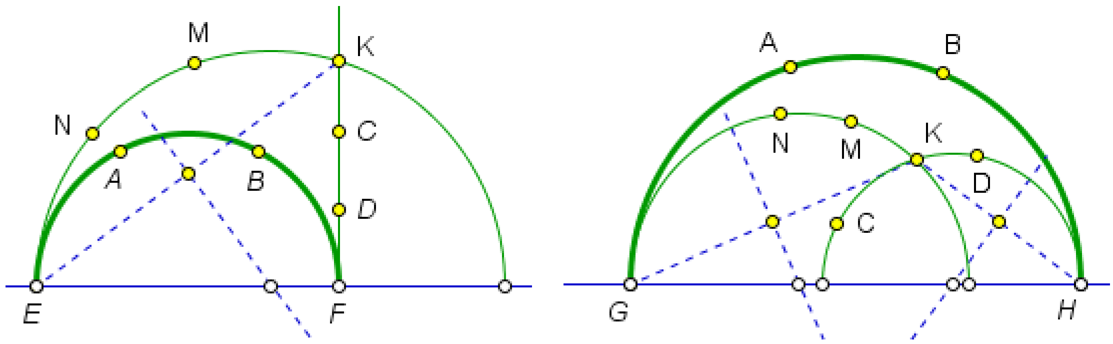
Рассмотрим направленную прямую BA (та же прямая AB только выбрано другое направление). Для нее тоже существует параллельная прямая. Это прямая MN.



Если фиксировать точку K, не лежащую на прямой AB, то существует единственная направленная прямая CD, проходящая через точку K, и параллельная направленной прямой AB, и единственная направленная прямая MN, проходящая через точку K и параллельная направленной прямой BA. Доказательство этого факта можно посмотреть в учебнике [1], а мы посмотрим, как через данную точку K построить прямую, параллельную направленной прямой AB.

Задача 2.7. На модели даны прямая AB и точка K, не лежащая на ней. Построить направленные прямые CD и MN, проходящие через K и параллельные направленным прямым AB и BA соответственно.

Решение. Рассмотрим два возможных случая.



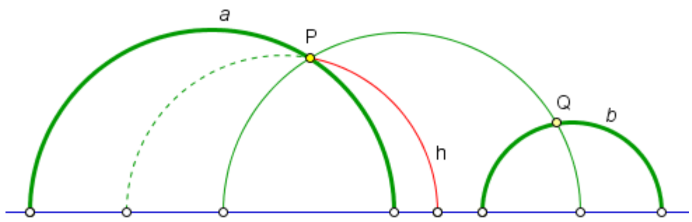
1. Пусть точка K лежит на Е-луче, перпендикулярном абсолюту и проходящем через точку пересечения Е-окружности AB и абсолюта F. Тогда прямая CD будет совпадать с этим Е-лучом. Прямая MN должна изображаться Е-дугой, которая проходит через точку K и вторую точку пересечения Е-окружности AB с абсолютом E. Для построение центра искомой Е-окружности строим серединный перпендикуляр к EK и проводим Е-окружность. Получаем прямую MN.

2. Точка K не лежит на перпендикулярах к абсолюту проходящих через точки G и H. В этом случае нам нужно построить две Е-окружности. Строим их также, как в предыдущем случае. □

Две прямые a и b (не направленные) называются *параллельными*, если на них можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны в выбранном направлении.

Как мы видели, среди прямых, не пересекающих данную, кроме параллельных есть еще один тип прямых.

Прямые плоскости Лобачевского, которые не пересекаются и не параллельны называются *расходящимися*. Для них нарушается второе условие из определения параллельных прямых:

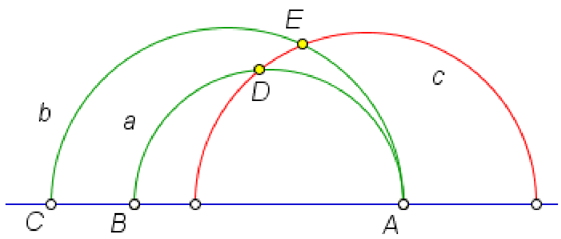


На рисунке изображены расходящиеся прямые a и b. Для любого выбора точек P и Q на этих прямых мы всегда можем найти внутренний луч h, который не пересекает a.

Используя модель, докажем выполнение некоторых свойств параллельных и расходящихся прямых.

Задача 2.8**.** Используя модель Пуанкаре, покажите, что параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра.

Решение. Пусть даны две параллельные прямые a и b.

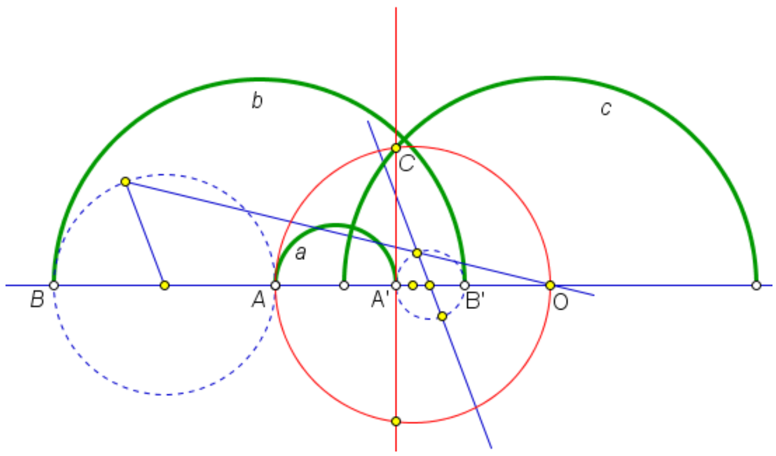


Предположим, что у них есть общий перпендикуляр c. Так как Е-окружность a перпендикулярна Е-окружности c, то она инвариантна при инверсии с Е-окружностью c. Аналогично для Е-окружности b. Точка A, лежащая на Е-окружности a, с одной стороны, должна при этой инверсии перейти в точку Е-окружности b, а, с другой стороны, должна перейти в точку, лежащую на прямой, соединяющей центр инверсии и точку A, то есть должна перейти в какую-то точку синей прямой (абсолюта). Значит, точка A переходит в точку C.
Теперь посмотрим на точку A как на точку Е-окружности b. Рассуждая аналогично, получаем, что она должна перейти в точку B. Итак, при инверсии одна и та же точка должна перейти в две различные точки. Это противоречие. Следовательно, общего перпендикуляра у параллельных прямых не существует. □

Как мы доказывали в основном курсе геометрии две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Построим его в модели.

Задача 2.9. Постройте общий перпендикуляр двух расходящихся прямых.

Решение. Пусть даны две расходящиеся прямые a и b.

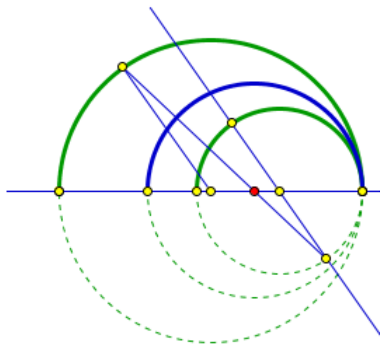


Если общий перпендикуляр двух расходящихся прямых существует, то он должен быть осью симметрии этих прямых. Обратимся к модели. Осевая симметрия в модели Пуанкаре – это инверсия относительно окружности. Другими словами, наша задача свелась к нахождению инверсии, при которой Е-окружности a и b каждая перейдет в себя. Значит, нам нужна инверсия, центр которой лежит на абсолюте и при которой точка A переходит в точку A', а точка B переходит в B'.
Наша задача свелась к нахождению инверсии по двум парам соответственно инверсных точек. Временно забываем о геометрии Лобачевского, работаем с евклидовой плоскостью. Инверсия, которую мы ищем, будет переводить окружность, построенную на Е-отрезке AB в окружность, построенную на отрезке $A'B'$ как на диаметре. Значит, нам нужно найти инверсию, переводящую одну окружность в другую. Как мы видели выше, для двух окружностей, не имеющих общих точек, один из центров гомотетий будет центром инверсии. Как мы видели, в ситуации,

которая реализуется на рисунке это будет центр гомотетии с положительным коэффициентом. Строим центр (синие линии) и строим радиус (красные линии) окружности инверсии (как мы это делали в теме инверсия).

Итак, мы получаем, что при инверсии с Е-окружностью c Е-окружности a и b инвариантны, следовательно, ортогональны c, следовательно, c есть искомый общий перпендикуляр. □

Задача 2.10**.** Постройте ось симметрии двух параллельных прямых. Рассмотрите различные случаи изображения прямых.



Указания. При осевой симметрии относительно искомой оси симметрии двух параллельных прямых одна прямая должна переходить в другую. Осевая симметрия в модели – инверсия. Нужна инверсия, переводящая одну окружность в другую (или чем там изображаются прямые). Применяем прием, сработавший в предыдущей задаче. Если задача не решается, посмотрите на рисунок и расставьте обозначения всех объектов.

Для параллельных прямых в основном курсе геометрии была введена секущая равного наклона. Пусть даны параллельные прямые a и b. *Секущей равного наклона* (или *равнонаклонной*) называется прямая, образующая с ними равные внутренние односторонние углы. Мы доказывали, что через каждую точку одной из двух параллельных прямых проходит единственная секущая равного наклона.

Задача 2.11**.** Постройте секущую равного наклона двух параллельных прямых, проходящую через данную точку на одной из двух параллельных прямых.

Решение. Пусть даны две параллельные прямые a и b. Как мы знаем из курса геометрии, секущая равного наклона перпендикулярна оси симметрии параллельных прямых. Тогда при этой осевой симметрии прямая a переходит в b, а секущая равного наклона в себя. Тогда данная точка A перейдет в точку также принадлежащую секущей равного наклона. Так как осевая симметрия моделируется инверсией, нам нужно сначала построить ось симметрии данных прямых (это будет окружность инверсии), а затем надо найти образ точки A при данной инверсии. Тогда Е-окружность с центром на абсолюте, проходящая через точки A и A' будет искомой секущей равного наклона.

Посмотрите динамический рисунок Секущая равного наклона на http://liaign.ucoz.ru/geometrii/0-25 □

2. Домашнее задание

1. Используя модель Пуанкаре, докажите, что прямые, параллельные в одном направлении, расходятся в другом.

2. Постройте общий перпендикуляр двух расходящихся прямых в случаях: 1) они изображаются Е-полуокружностями, которые не пересекаются внешним образом; 2) одна прямая изображается Е-лучом, а другая Е-полуокружностью.

3. Приведите пример двух параллельных прямых, для которых ось симметрии изображалась бы Е-лучом.

   Могут ли быть две параллельные прямые, которые изображаются Е-полуокружностя а их ось симметрии изображается Е-лучом? Ответ обосновать.

4. Постройте секущую равного наклона для двух данных прямых, проходящую через данную точку, не лежащую на данных прямых.

2.6. Занятие 15. Контрольная работа

Примерный вариант контрольной работы.

1. (4у.е.) Треугольник A_1B_1C симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы прямого угла C. Докажите, используя метод комплексной координаты, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна A_1B_1.

2. (4у.е.) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3+5i)$ параллельно прямой $(1+i)z+(1-i)\bar{z}-2=0$.

3. (4у.е.) Докажите, что любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух гомотетий с различными центрами и взаимно обратными коэффициентами.

4. (4у.е.) Пусть отрезок AB принадлежит Е-лучу, а луч с началом A' принадлежит Е-окружности. Постройте отрезок $A'B'$ на данном луче, равный отрезку AB.

5.(4у.е.) Постройте середину отрезка, если он изображается как часть Е-луча.

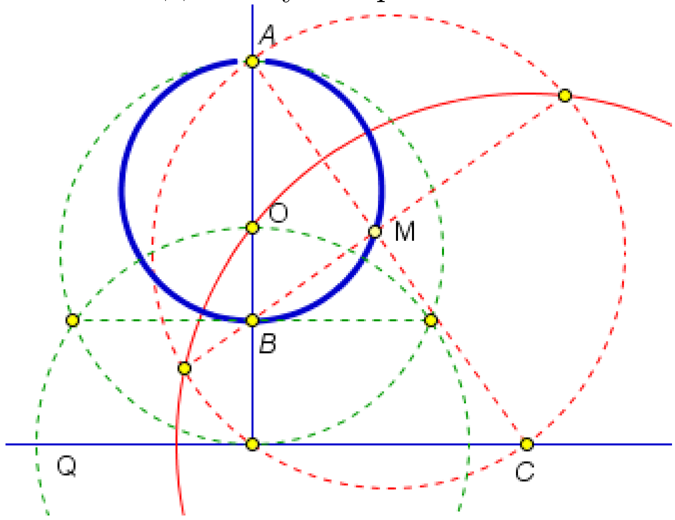
2.7. Занятие 16. Окружность. Эквидистанта. Орицикл

1. Окружность.

Напомним, что окружность Ω в плоскости Лобачевского определяется также как и на евклидовой плоскости. Окружностью называется множество точек плоскости Лобачевского, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром. Расстояние мы можем задать с помощью отрезка PQ. Тогда для построения точек окружности Ω нужно взять точку O (центр окружности), провести прямую через эту точку и отложить от точки O на этой прямой в обе стороны отрезки, конгруэнтные PQ. Проводим еще одну прямую через точку O и опять откладываем отрезки, конгруэнтные PQ.

Еще один способ построения точек окружности Ω основан на следующем свойстве окружности: любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Другими словами, если взять на окружности произвольную точку A, провести через центр окружности O прямую и отразить точку A от этой прямой, то мы попадем опять на окружность. Вспоминаем, что осевая симметрия на модели Пуанкаре – это инверсия. Значит, чтобы построить точки окружности, нужно взять точку O – центр окружности, взять точку A, такую, что отрезок OA равен радиусу окружности, провести через точку O прямую Q (Е-дугу с центром на абсолюте) и построить образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. В результате получим еще одну точку данной окружности. (Посмотрите динамический рисунок Окружность, эквидистанта, орицикл.)

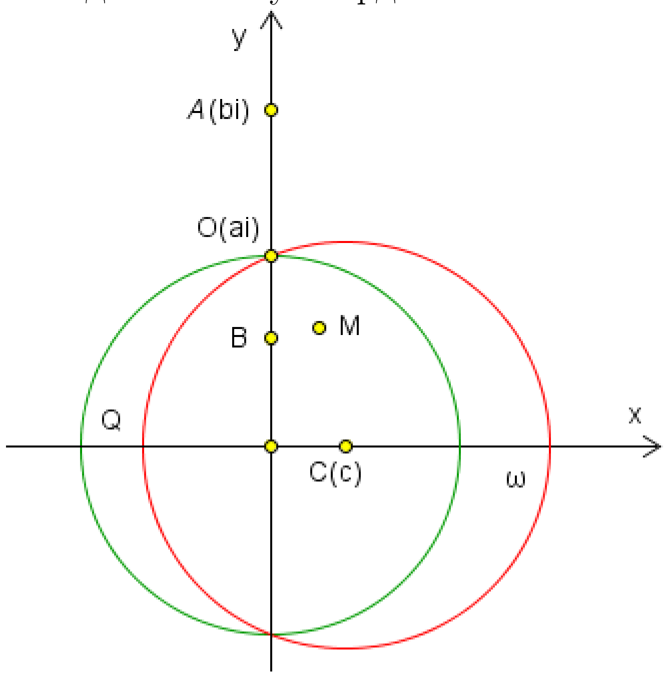
Возникает вопрос: какой линией евклидовой плоскости изображается окружность в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.



Возьмем точку O – центр окружности Ω и точку A, так, чтобы они лежали на Е-луче (удобно задаем себе радиус окружности с помощью отрезка OA). Сначала построим диаметрально противоположную точку B. Для этого нам потребуется Е-окружность Q, проходящая через точку O с центром в точке пересечения Е-луча OA и абсолюта. Строим стандартным образом образ точки A при этой инверсии.

Для построения произвольной точки M искомой окружности будем двигать точку C по абсолюту, проводить Е-окружности с центром в точке C и проходящие через точку O, и находить образы точки A относительно этих инверсий. Мы видим, что получается линия, похожая на Е-окружность, но центр у нее не в точке O. Докажем это аналитически.

Введем систему координат как показано на рисунке.



Точки A и O лежат на оси y, то есть на мнимой оси, а значит им соответствую чисто мнимые числа, которые мы обозначим $O(ai)$, $A(bi)$. Найдем, какое комплексное число соответствует точке B. Она является образом точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. Формула этой инверсии имеет вид

$$z' = \frac{a^2}{\bar{z}}$$

(очевидно, что радиус Е-окружности Q равен a).

Тогда точке B сопоставляется чисто мнимое число $\frac{a^2}{-bi} = \frac{a^2}{b}i$. Инверсия относительно Е-окружности ω с центром в точке $C(c)$ будет иметь формулу

$$z' = \frac{|c - ai|^2}{\bar{z} - c} + c = \frac{c^2 + a^2}{\bar{z} - c} + c.$$

Тогда точке M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности ω) будет соответствовать комплексное число

$$z = \frac{a^2 + c^2}{-bi - c} + c.$$

Окружность ω будет меняться, следовательно, будет меняться число c и за ним следом будет меняться число z. Получаем множество точек M. Множество всех точек M и образует искомую нами окружность (в смысле Лобачевского). Мы подозреваем, что это множество изображается Е-окружностью с диаметром AB и радиусом $\frac{AB}{2}$ (в смысле Евклида). Центр этой Е-окружности будет в точке, которой соответствует комплексное число

$$\frac{bi + \frac{a^2}{b}i}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2b}i.$$

Радиус этой Е-окружности будет

$$\frac{b - \frac{a^2+b^2}{2b}}{=}\frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Уравнение такой Е-окружности в комплексных числах имеет вид

$$(z - \frac{a^2 + b^2}{2b}i)(\bar{z} + \frac{a^2 + b^2}{2b}i) = \left(\frac{b^2 - a^2}{2b}\right)^2. \tag{2.1}$$

Чтобы проверить принадлежность точки M этой Е-окружности, нужно убедиться, что соответствующее ей комплексное число удовлетворяет этому уравнению. Подставляем в левую часть уравнения (2.1) комплексное число, соответствующее M и преобразовываем полученное выражение. Должны получить то, что стоит справа в (2.1).

$$\left(\frac{a^2 + c^2}{-c - bi} + c - \frac{a^2 + b^2}{2b}i\right)\left(\frac{a^2 + c^2}{-c + bi} + c + \frac{a^2 + b^2}{2b}i\right) =$$

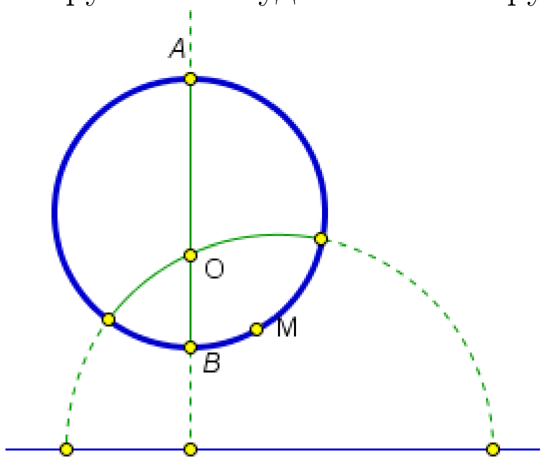
Преобразуем первую скобку, вторая будет ей комплексно сопряжена и получится автоматически.

$$\frac{a^2 + c^2}{-c - bi} + c - \frac{a^2 + b^2}{2b}i = \frac{a^2c - b^2c - a^2bi - bc^2i}{-(b^2 + c^2)} - \frac{a^2 + b^2}{2b}i =$$
$$= \frac{2bc(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(c^2 - b^2)i}{-2b(b^2 + c^2)} = \frac{(a^2 - b^2)}{-2b(b^2 + c^2)}(2bc + (c^2 - b^2)i). \tag{2.2}$$

Возвращаемся к прерванной цепочке равенств

$$= \left(\frac{(a^2 - b^2)}{-2b(b^2 + c^2)} \right)^2 (4b^2c^2 + (c^2 - b^2)^2) = \left(\frac{b^2 - a^2}{2b} \right)^2.$$

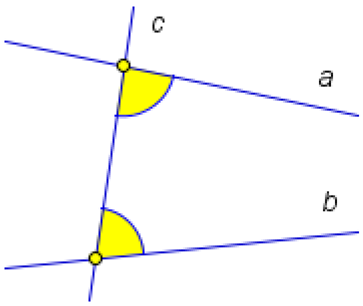
Мы получили то, что ожидали. Таким образом, мы показали, что все точки окружности Ω лежат на Е-окружности. Можно показать, что любая точка этой Е-окружности будет точкой окружности Ω.



Итак, мы получили, что окружность Ω в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского изображается Е-окружностью, но центры их не совпадают. На рисунке изображена окружность Ω, ее центр O и два диаметра AB и CD.

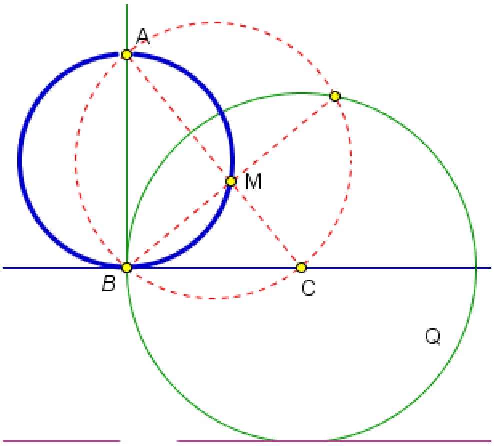
2. Орицикл.

Напомним определение орицикла.



Секущей равного наклона двух прямых a и b на плоскости Лобачевского называется прямая c, которая при пересечении с ними образует равные односторонние углы.

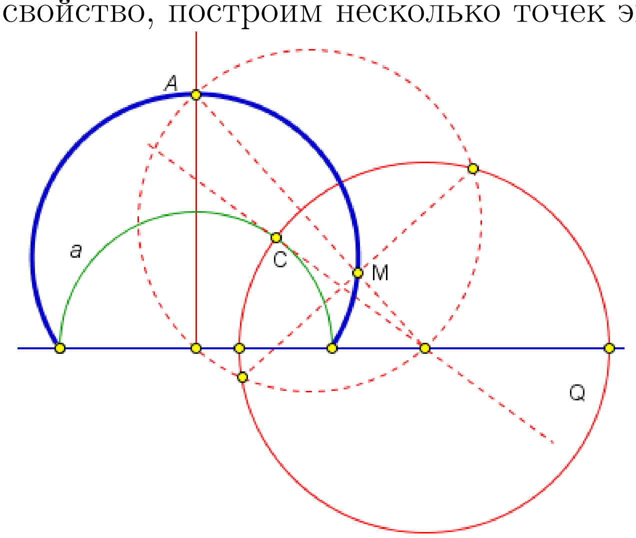
Пусть дано семейство направленных прямых, любые две из которых параллельны. Будем говорить, что точки A и B плоскости Лобачевского находятся в отношении Δ, если прямая AB является секущей равного наклона к прямым данного семейства, проходящим через точки A и B. Отношение Δ является отношением эквивалентности. Множество всех точек плоскости Лобачевского разбивается на классы эквивалентности по этому отношению. Каждый из классов называется *орициклом*. В курсе геометрии Лобачевского бакалавриата было доказано, что любая прямая из семейства параллельных прямых, задающих орицикл, является его осью симметрии. Другими словами, если взять точку на орицикле и отобразить ее осевой симметрией с осью из данного пучка параллельных прямых, то попадем опять на тот же орицикл. Используя это свойство, можно построить точки орицикла.



Рассмотрим пучок параллельных прямых. На рисунке изображены две такие прямые – это Е-луч и Е-дуга Q, проходящие через точку B. Возьмем точку A (может быть выбрана произвольно на плоскости Лобачевского). Построим еще одну точку, принадлежащую орициклу, который проходит через A. Строим точку M – образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка орицикла. Двигаем точку C – центр окружности Q – вдоль абсолюта и строим относительно получающихся окружностей образы точки A. Это будут точки орицикла. Построив несколько точек, мы можем выдвинуть гипотезу, что орицикл в модели Пуанкаре изображается окружностью. Докажем это. Так как Е-прямая AB является касательной к любой окружности Q, красная пунктирная окружность (построена на AC как на диаметре) всегда проходит через точку B. Из алгоритма построения образа точки при инверсии следует, что AM перпендикулярно BM. Следовательно, угол AMB прямой и точка M является точкой окружности с диаметром AB. Можно показать и обратное, что любая точка Е-окружности с диаметром AB является образом точки A относительно некоторой окружности Q, то есть будет точкой орицикла.

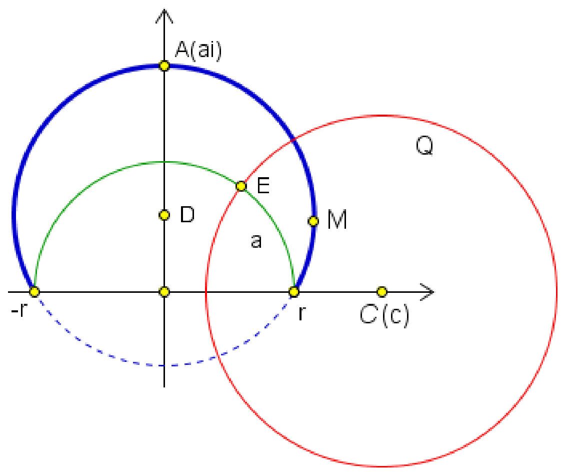
3. Эквидистанта

Напомним определение эквидистанты. Пусть на плоскости Лобачевского дана прямая a и отрезок MN. Множество точек, принадлежащих одной полуплоскости относительно a и находящихся на расстоянии MN от нее, называется *эквидистантой*. Прямая a называется базой эквидистанты. Другими словами, эквидистанта – это множество точек плоскости, которое получается следующим образом: через каждую точку базы проводим прямую, перпендикулярную ей, и откладываем на этой прямой отрезок, равный MN. В курсе бакалавриата было доказано, что каждая такая прямая является осью симметрии эквидистанты. Используя это свойство, построим несколько точек эквидистанты в модели Пуанкаре.



База a изображена зеленым. Возьмем Е-окружность Q, ортогональную Е-окружности a. Найдем образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка M эквидистанты. Меняя окружность Q и строя образы точки A относительно этих окружностей, мы можем построить точки эквидистанты. Опять возникает гипотеза, что эквидистанта изображается Е-окружностью.

Докажем это. Вводим систему координат, как показано на рисунке.



Обозначаем комплексные числа, которые соответствуют точкам (см. рисунок). Мы подозреваем, что эквидистанта будет изображаться дугой Е-окружности с центром в точке D, равноудаленной от точек r, $-r$ и $A(ai)$. Расстояние здесь обычное евклидово, поэтому комплексное число di, которое соответствует точке D, будет вычисляться так:

$$\sqrt{r^2 + d^2} = a - d.$$

Выражаем отсюда d и получаем

$$d = \frac{a^2 - r^2}{2a}.$$

Итак, нам нужно показать, что точка M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q) попадает на Е-окружность с радиусом DA (он равен $a - \frac{a^2-r^2}{2a}$ и центром D (ей соответствует комплексное число $\frac{a^2-r^2}{2a}i$. Другими словами, нам нужно убедиться, что комплексное число, соответствующее M удовлетворяет уравнению

$$(z - \frac{a^2 - r^2}{2a}i)(\bar{z} + \frac{a^2 - r^2}{2a}i) = \left(a - \frac{a^2 - r^2}{2a}\right)^2. \tag{2.3}$$

Найдем z. Окружность Q ортогональна a, следовательно, по условию ортогональности ее радиус равен $\sqrt{c^2 - r^2}$. Тогда формула инверсии будет иметь вид

$$z' = \frac{c^2 - r^2}{\bar{z} - c} + c.$$

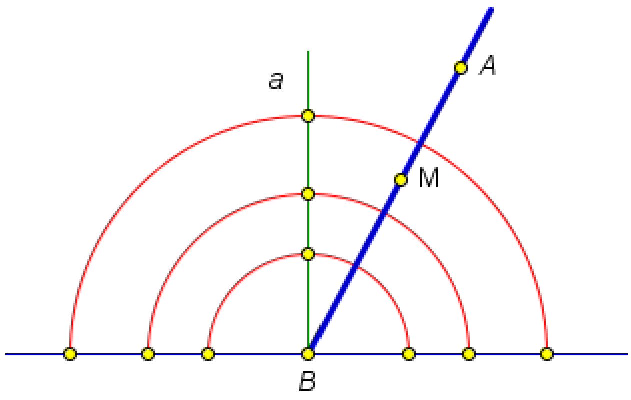
Подставляем комплексное число, задающее A

$$z = \frac{c^2 - r^2}{-c - ai} + c = \frac{(r^2 + aci)(c - ai)}{c^2 + a^2} = \frac{c(r^2 + a^2) + a(c^2 - r^2)i}{c^2 + a^2}.$$

Тогда, подставляя это z в левую часть уравнения (2.3) и проводя преобразования, получим правую часть этого уравнения. (Проведите подробные вычисления самостоятельно.) Таким образом, мы показали, что любая точка данной эквидистанты лежит на Е-окружности. Можно показать, что любая точка синей дуги Е-окружности является образом точки A при инверсии относительно некоторой окружности Q, следовательно, является точкой эквидистанты.

Итак, мы показали, что эквидистанта, у которой база изображается дугой Е-окружности, изображается в модели Пуанкаре дугой Е-окружности.

Посмотрим, как будет выглядеть эквидистанта, если ее база изображается Е-лучом.



Если база – Е-луч a, то ортогональные ей прямые будут изображаться дугами Е-окружностей с центром в начале этого Е-луча. Тогда если точка A принадлежит эквидистанте, то ее образы относительно этих Е-окружностей будут лежать на Е-луче BA. Обратно, для любой точки Е-луча BA найдется окружность с центром в точке B, такая, что относительно этой окружности в данную точку отобразится точка A. Итак, мы показали, что в случае, когда база эквидистанты изображается Е-лучом, эквидистанта изображается тоже Е-лучом, но уже не перпендикулярным абсолюту.

Задача 2.12. На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $2i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

Указания к решению. Напишите уравнение Е-окружности, проходящей через эти точки. Выясните, как она будет располагаться относительно абсолюта.

4. Домашнее задание

1. Задайте окружность центром и точкой на ней. Постройте еще несколько точек окружности. Постройте всю окружность.

2. Задайте эквидистанту базой и точкой на ней. Постройте еще несколько точек эквидистанты. Постройте всю эквидистанту.

3. Задайте орицикл осью и точкой на нем. Постройте несколько точек орицикла. Постройте весь орицикл.

4. На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $3i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

5. На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $1.5i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

2.8. Занятие 17. Замечательные точки и прямые треугольника

Замечательными прямыми треугольника называются прямые, содержащие биссектрисы, высоты, медианы треугольника, а также прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точки пересечения соответствующих групп замечательных прямых называются *замечательными точками* треугольника.

2.9. Биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника является объектом абсолютной геометрии (то есть геометрии, построенной на первых четырех группах аксиом). Понятие биссектрисы угла вводится в третьей группе аксиом. Теорема о пересечении биссектрис треугольника в одной точке также является теоремой абсолютной геометрии. Она также доказывается в третьей группе аксиом. Значит, эта теорема верна и в геометрии Лобачевского. (Посмотрите динамический рисунок Замечательные прямые треугольника.)

Используя теорему о точке пересечения биссектрис треугольника, доказывается теорема об окружности, вписанной в треугольник: в любой треугольник можно вписать окружность.

2.10. Медианы треугольника.

Медиана треугольника является объектом абсолютной геометрии. Она определяется в третьей группе аксиом (для нее нужно понятие конгруэнтности отрезков, сам треугольник возникает уже во второй группе аксиом). Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке в евклидовой геометрии доказывается с помощью подобия, то есть для ее доказательства существенен пятый постулат Евклида. Но, оказывается эта теорема верна также и в геометрии Лобачевского. Ее доказательство проводится с помощью тригонометрии.

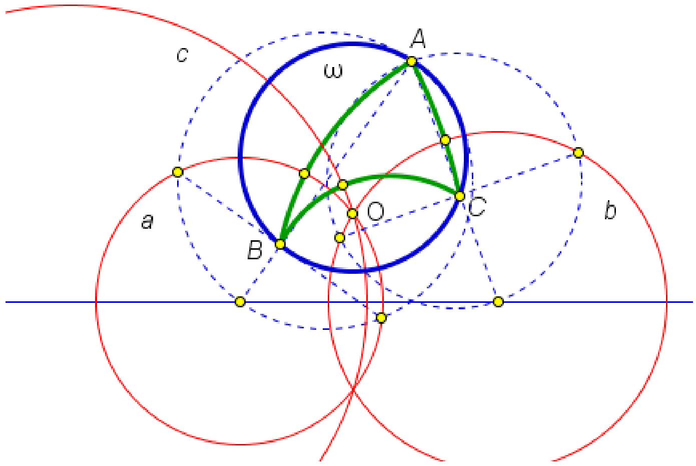
Задача 2.13**.** Постройте треугольник в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и три его медианы.

2.11. Серединные перпендикуляры треугольника.

Понятие серединного перпендикуляра также как и понятия медианы и биссектрисы вводится в третьей группе аксиом. Но в отличие от них серединные перпендикуляры треугольника в геометрии Лобачевского не обязательно пересекаются в одной точке. Доказывается, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат к одному пучку прямых, то есть либо все три пересекаются в одной точке, либо все три параллельны, либо все три расходятся. (доказательство можно посмотреть в [7])

Построим в модели Пуанкаре примеры треугольников для всех трех случаев.

Сначала рассмотрим пересекающиеся серединные перпендикуляры.

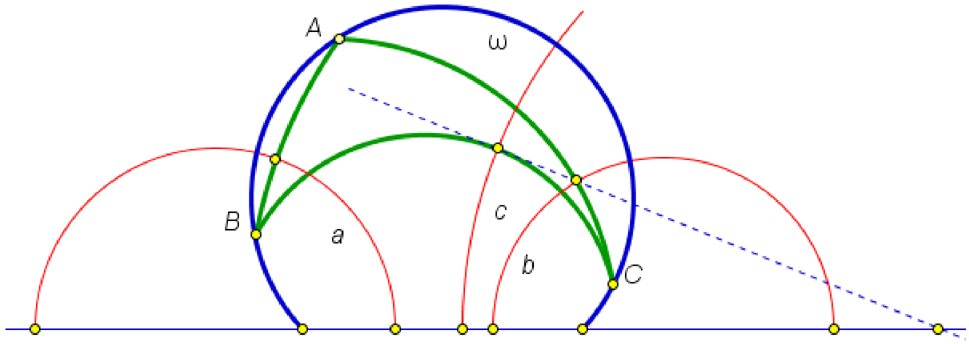


Изображаем два серединных перпендикуляра a и b, которые пересекаются в точке O. Берем произвольную точку A и инверсией отображаем ее от Е-окружности a и Е-окружности b (синие пунктирные линии). Тогда получим еще две точки B и C искомого треугольника. Так как инверсия в модели Пуанкаре моделируем осевую симметрию, мы по получаем нужный треугольник ABC и два серединных перпендикуляра к его сторонам.

Изобразим третий серединный перпендикуляр c. Так как он должен проходить через точку O, нам нужно построить еще одну его точку. Построим середину стороны BC (как это делается, см. задачу выше). Двух точек достаточно, чтобы изобразить дугу с центром на абсолюте.

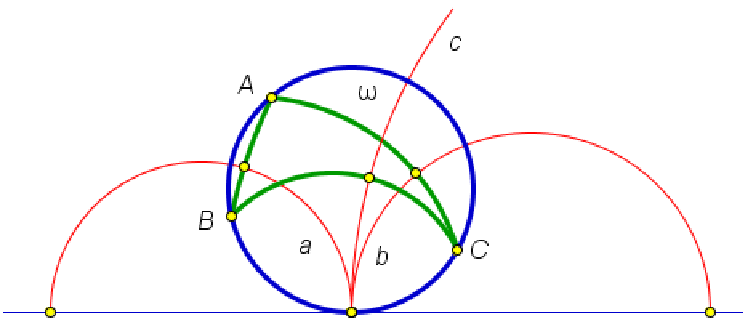
Около треугольника, серединные перпендикуляры которого пересекаются в одной точке, можно описать окружность. Чтобы изобразить ее, строим Е-окружность, проходящую через точки A, B, C. Это окружность ω.

Рассмотрим расходящиеся серединные перпендикуляры.



Опять берем два серединных перпендикуляра a и b, которые теперь расходятся, и точку A между ними.

Отображаем точку A относительно Е-окружностей a и b инверсией и получаем треугольник ABC. Строим серединный перпендикуляр c к стороне BC и изображаем эквидистанту, описанную около треугольника.



Аналогичным образом строим треугольник ABC с параллельными серединными перпендикулярами a, b, c и строим описанный около него орицикл ω.

1. Задачи

1. Постройте треугольник, две его биссектрисы и вписанную в него окружность.

2. Постройте треугольник, около которого можно описать а) окружность, б) эк-

видистанту, в) орицикл.

3. Постройте треугольник и его медианы.

4. Постройте треугольник, у которого высоты а) пересекаются в одной точке, б) расходятся, в) параллельны.

2.12. Занятие 18. Зачет