

## Вопросы к экзамену.

1. Вектор- функция одного скалярного аргумента и техника дифференцирования.
2. Гладкие кривые. Длина дуги. Натуральный параметр. Замена параметризации. Неявное задание кривой.
3. Касательная к гладкой кривой. Теорема о существовании и единственности касательной. Уравнения касательной. Нормальная плоскость.
4. Кривизна кривой. Теорема о геометрическом смысле кривизны кривой. Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Репер Френе.
5. Формулы Френе.
6. Кручение линии, формула вычисления. Теорема о геометрическом смысле кручения.
7. Формула для вычисления кривизны, заданной в произвольной параметризации.
8. Формула для вычисления кручения линии, заданной в произвольной параметризации.
9. Вектор-функция двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Криволинейные координаты.
10. Замена параметризации в уравнениях поверхности. Неявные уравнения поверхности.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Различные способы задания и виды уравнений.
12. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины дуги.
13. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
14. Вычисление площади на поверхности.
15. Вторая квадратичная форма. Различные формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.
16. Нормальная кривизна линии на поверхности. Формула для ее вычисления.
17. Кривизна нормального сечения поверхности, свойства. Теорема Менье.
18. Индикатриса Дюпена.
19. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности. Критерий асимптотической линии. Теорема о количестве асимптотических направлений.
20. Главные направления поверхности. Теорема Родрига.
21. Главные кривизны поверхности. Теорема Эйлера.
22. Полная кривизна поверхности.
23. Средняя кривизна поверхности.
24. Поверхности постоянной полной кривизны.

## Дополнительные вопросы к экзамену.

1. Зависит ли подвижной репер от выбора параметризации кривой?
2. Существуют ли кривые, все главные нормали которых проходят через одну точку? параллельны между собой?
3. На листе бумаги нарисованы восьмерка и четверка. Будут ли эти линии гладкими?
4. На бумаге нарисована плоская кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Изобразите векторы  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  и  $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ .
5. Используя знания о циклоиде, объясните, почему грязь с дороги неизбежно попадает на спину велосипедисту, даже если заднее колесо прикрыто щитком.
6. Могут ли все коэффициенты первой квадратичной формы поверхности быть тождественно равны нулю? А какие-нибудь из трех?
7. Почему на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны?

8. Может ли поверхность, состоящая из касательных к данной пространственной кривой иметь эллиптические точки?
9. Может ли винтовая линия быть нормальным сечением некоторой поверхности?
10. Существуют ли асимптотические линии на поверхности положительной полной кривизны?
11. Каким может быть тип точки а) для 1-линейчатых поверхностей, б) 2-линейчатых поверхностей?
12. Существуют ли омбилические точки на параболоиде вращения, эллипсоиде вращения, однополостном гиперболоиде вращения?
13. На поверхности  $F$  в криволинейных координатах уравнение кривой задано линейным уравнением  $Au + Bv + C = 0$ . Верно ли, что это всегда уравнение прямой? Может ли прямая в криволинейных координатах иметь не линейное уравнение?
14. Почему индикатриса Дюпена не может быть параболой, парой совпавших прямых, парой пересекающихся прямых?
15. На рисунке изображена индикатриса Дюпена и указано несколько направлений. Определите, в каком направлении нормальная кривизна больше, а в каком меньше.
16. Запишите первую квадратичную форму плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, в аффинной системе координат, в полярной системе координат. Изобразите координатные линии в каждом случае.
17. На верхней окружности тора укажите главные направления и главные кривизны (не проводя вычислений).
18. Зависит ли нормальная кривизна линии от поверхности, на которой находится?
19. Докажите, что если поверхность касается плоскости по некоторой линии, то все точки линии параболического типа. (Можно ли параболоид вращения „положить“ на стол?)
20. Используя теорему Менье, выясните, можно ли на прямом круговом цилиндре нарисовать окружность (множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки), имеющую прямолинейную образующую цилиндра своей касательной? (Можно ли в круговом цилиндре вырезать круглую дырку?)
21. Изобразите индикатрису Дюпена для произвольной точки кругового цилиндра (конуса), укажите главные и асимптотические направления.
22. Как по картинке отличить эллиптическую точку от гиперболической?
23. Может ли асимптотическая линия быть линией кривизны?
24. Как известно, главные кривизны – это максимальное и минимальное значения нормальных кривизн в данной точке. Проиллюстрируйте это утверждение для а) эллиптической точки; б) для параболической точки; в) для гиперболической точки.

#### **Критерии начисления баллов на экзамене.**

5 – 12 баллов: знание 60 – 100 процентов понятий курса, умение приводить простейшие примеры понятий, умение проводить простые доказательства. Хотя бы один вопрос билета рассказан не менее, чем на 50 процентов.

13 – 19 баллов: знание 60 – 100 процентов понятий курса, умение приводить примеры понятий, умение проводить доказательства. Оба вопроса билета рассказаны более чем на 50 процентов.

20 – 25 баллов: знание 60 – 100 процентов понятий курса, умение приводить примеры понятий, умение проводить доказательства. Оба вопроса билета рассказаны полностью. Допускаются незначительные неточности, которые исправляются студентом самостоятельно или при помощи преподавателя.

26 – 30 баллов: к критериям оценки 20 – 25 баллов добавляются ответы на дополнительные вопросы к экзамену (от одного до трех штук в зависимости от ответа студента).