лекция 1. (дата проведения проверочной 18 февраля)

определения: вектор-функция скалярного аргумента, производная вектор-функции в точке t_0, координаты вектор-функции, дифференцируемая вектор-функция в точке, сумма вектор-функций, скалярное произведение вектор-функций, векторное произведение вектор-функций, смешанное произведение вектор-функций, произведение скалярной функции на вектор-функцию

1. Докажите, что если вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то в этой же точке дифференцируемы ее координаты и $\vec{r}'(t_0)(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

2. Докажите, что если координаты вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то дифференцируема сама вектор-функция.

3. Докажите, что $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 + \frac{d}{dt}\vec{r}_2$.

4. Докажите, что $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1\vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{r}_2 + \vec{r}_1\frac{d\vec{r}_2}{dt}$.

5. Докажите, что $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1, \vec{r}_2] = [\frac{d\vec{r}_1}{dt}, \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), \frac{d\vec{r}_2}{dt}]$.

6. Докажите, что $\frac{d}{dt}(f\vec{r})(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\frac{d\vec{r}}{dt}$.

7. Докажите, что если $|\vec{r}(t)| = const$ для любого $t \in U$, то $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ для любого $t \in U$.

8. Докажите, что если $\forall t \in U$ $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$, то $|\vec{r}(t)| = const$ для любого $t \in U$.

лекция 2. (дата проведения проверочной 25 февраля)

определения: параметризованная кривая, гладкая кривая, кусочно гладкая кривая, натуральный параметр, координаты вектор-функции, векторное параметрическое уравнение кривой.

1. Задайте прямую векторным параметрическим уравнением и выведите из него параметрические уравнения прямой. Покажите, что прямая является гладкой линией.

2. Покажите, что циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$ ($a > 0$, константа) является кусочно гладкой линией.

3. Получите три требования для функции $t = \varphi(\tau)$, выполнение которых позволяет ей осуществлять допустимую замену параметра.

4. Покажите, что функция $s = s(t)$ является допустимой заменой параметра. Покажите, что в натуральной параметризации $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = 1$.

5. Приведите примеры допустимой замены параметра и не допустимой (ответ обосновать).

6. Пусть множество $G \subset E^3$ задано системой уравнений $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная фиксированная точка множества G, функции F, Φ – гладкие (то есть они имеют частные производные любого порядка по каждой переменной). Если ранг матрицы, составленной из частных производных F и Φ, равен двум в точке M_0, то существует окрестность $U(M_0)$, такая что множество $G \cap U(M_0)$ является гладкой кривой. Докажите.

лекция 3. (дата проведения проверочной 4 марта)

определения: направляющий вектор касательной в точке кривой (касательный вектор), вектор кривизны, кривизна кривой, орт главной нормали, соприкасающаяся плоскость, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость, касательная, главная нормаль, бинормаль, орт вектора бинормали, орт главной нормали, репер Френе.

1. Докажите, что вектор $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}$ является направляющим вектором касательной к кривой γ в точке со значением параметра t_0.

2. Докажите, что при выборе различных параметризаций одной и той же кривой касательные векторы в данной точке будут коллинеарны.

3. Получите общие уравнения касательной к кривой γ: $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$, где $a, b > 0$.

4. Докажите, что кривизна гладкой кривой γ в точке M_0 есть предел, к которому стремится отношение угла между касательными в точках M_0 и M к γ к длине дуги M_0M, когда точка M, оставаясь на γ, стремится к M_0.

5. Докажите, что если γ – прямая (или ее часть), то в каждой ее точке кривизна равна нулю.

6. Докажите, что если для гладкой линии γ во всех ее точках кривизна равна нулю, то γ прямая (или ее часть).

7. Покажите, что вектор кривизны направлен „внутрь“ кривой (рассмотрите случаи, когда точка M движется к M_0 а) слева, б) справа).

8. Выведите уравнение соприкасающейся плоскости.

9. Докажите, что при произвольной параметризации векторы $\frac{d\vec{r}}{dt}|_{t_0}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_{t_0}$ параллельны соприкасающейся плоскости.

10. Выведите вторую формулу Френе (для вектор-функции $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$).

семинары 2 и 3. (дата проведения проверочной 11 марта)

Будет одна задача из разделов Задачи и Домашнее задание.

лекция 4. (дата проведения проверочной 18 марта)

определения: плоская линия, кривизна кривой, орт бинормали, орт главной нормали, кручение кривой, соприкасающаяся плоскость, координаты вектор-функции.

1. Выведите третью формулу Френе (для вектор-функции $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$).

2. Выведите формулу для вычисления кручения для линии, заданной в натуральной параметризации.

3. Докажите, что $|\varkappa(s_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\angle(\vec{\beta}_0, \vec{\beta})}{|\Delta s|}$.

4. Докажите, что если линия – плоская, то $\varkappa(s) = 0$ для любой s.

5. Докажите, что если $\varkappa(s) = 0$ для любой s, то линия является плоской.

6. Выведите формулу для вычисления кривизны для линии в произвольной параметризации.

7. Выведите формулу для вычисления кручения для линии в произвольной параметризации.

лекция 5. (дата проведения проверочной 8 апреля)

определения: вектор-функция двух скалярных аргументов, предел вектор-функции двух скалярных аргументов, частная производная вектор-функции в точке, координаты вектор-функции, дифференциал вектор-функции в точке, поверхность в параметрическом представлении, гладкая поверхность, обыкновенная точка.

1. Докажите, что соответствие между парами чисел (u, v) и точками M поверхности взаимно однозначно.

2. Определите линии u и линии v. Докажите, что любые две линии разных семейств пересекаются в одной точке, а любые две одного – не пересекаются.

3. Выведите три условия для функций $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, осуществляющих замену параметра.

4. Получите из параметрических уравнений поверхности общее уравнение поверхности и сформулируйте теорему о неявном задании поверхности.

лекция 6. (дата проведения проверочной 15 апреля)

определения: касательная плоскость к поверхности, нормаль к поверхности, первая квадратичная форма, гладкая поверхность, касательный вектор к кривой, координаты вектор-функции двух скалярных аргументов, криволинейные координаты.

1. Докажите, что касательные векторы всех кривых, лежащих на поверхности и проходящих через точку M_0, параллельны касательной плоскости.

2. Докажите, что для любого вектора $\vec{p}$, параллельного касательной плоскости в точке M_0 поверхности F, существует кривая на этой поверхности, для которой $\vec{p}$ будет касательным.

3. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали, если поверхность задана векторным параметрическим уравнением.

4. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали, если поверхность задана общим уравнением.

5. Докажите, что касательная плоскость и нормаль не зависят от выбора параметризации.

6. Выведите формулу для вычисления длины дуги кривой на поверхности.

7. Выведите формулу для вычисления угла между кривыми на поверхности.

лекция 7. (дата проведения проверочной 22 апреля) определения: нормальная кривизна кривой на поверхности, нормальное сечение, кривизна кривой, нормаль к поверхности, вектор главной нормали кривой, первая квадратичная форма, вторая квадратичная форма, частная производная (по u или по v) вектор-функции $\vec{r}(u, v)$.

1. Выведите формулу для вычисления площади поверхности.

2. Выведите выражение для второй квадратичной формы и первый набор формул для вычисления ее коэффициентов.

3. Получите второй набор формул для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.

4. Докажите, что если поверхность является плоскостью (или ее частью), то коэффициенты второй квадратичной формы тождественно равны нулю.

5. Докажите, что если коэффициенты второй квадратичной формы тождественно равны нулю, то поверхность является плоскостью (или ее частью).

6. Выведите формулу для вычисления нормальной кривизны кривой на поверхности.

7. Докажите, что все линии поверхности, проходящие через данную точку и имеющие в ней одну касательную, имеют равные нормальные кривизны.

8. Покажите, что нормальная кривизна нормального сечения с точностью до знака совпадает с кривизной нормального сечения.

лекция 8. (дата проведения проверочной 6 мая)

определения: нормальное сечение, асимптотическое направление, асимптотическая линия, индикатриса Дюпена, эллиптическая точка поверхности, гиперболическая точка поверхности, параболическая точка поверхности, омбилическая точка поверхности, нормальная кривизна кривой.

1. Докажите, что кривизна кривой на поверхности в данной точке равна отношению кривизны нормального сечения в этой точке на угол между плоскостью нормального сечения и соприкасающейся плоскостью кривой (если угол отличен от прямого). Почему все кривые поверхности, проходящие через данную точку и имеющие одну и ту же соприкасающуюся плоскость имеют одинаковые кривизны (угол не прямой)?

2. Выведите критерий асимптотического направления и покажите, что либо любое направление асимптотическое, либо их существует не больше двух.

3. Выведите уравнение индикатрисы Дюпена.

4. Выясните, какой линией второго порядка может быть индикатриса Дюпена.

5. Докажите, что направление в касательной плоскости является асимптотическим тогда и только тогда, когда оно является асимптотическим относительно индикатрисы Дюпена.

лекция 9. (дата проведения проверочной 27 мая)

определения: главное направление, главная кривизна, линия кривизны, вектор нормали к поверхности, нормальная кривизна кривой на поверхности, кривизна кривой.

1. Выведите уравнение для вычисления главных направлений.

2. Докажите, что из сопряженности векторов $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ следует, что $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$ и $\delta\vec{n}d\vec{r} = 0$.

3. Докажите, что если $d\vec{r}$ задает главное направление, то $d\vec{n} = -k_n\vec{r}$.

4. Докажите, что если $d\vec{n} = -k_n\vec{r}$, то $d\vec{r}$ задает главное направление.

5. Выведите уравнение для вычисления главных кривизн.

6. Докажите теорему Эйлера.

7. Докажите, что главные кривизны являются наибольшим и наименьшим значениями среди нормальных кривизн в данной точке.