Практикум по решению геометрических задач.

13 марта 2020 г.

Содержание

1. Планиметрия

Литература.

1. И.Ф. Шарыгин Геометрия. Планиметрия классы 9-11, Москва, Дрофа, 2001.

2. Г.З.Генкин Геометрические решения негеометрических задач. Москва, Просвещение, 2007.

3. Е.В. Потоскуев Математика. Профильный уровень. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия.

4. сайт Гущина Решу ЕГЭ https://ege.sdamgia.ru/

5. Семенов А.В., Ященко И.В. и др. Как получить максимальный балл на ЕГЭ, Москва, 2015

6. Литвиненко В.Н. Сборник задач по стереометрии с методами решений, Просвещение, 1998.

7. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. Просвещение, 1967.

1.1. Разминка 1

1.1. Семинар

1. Пусть AB хорда окружности, l — касательная к окружности (A — точка касания). Докажите, что каждый из двух углов, образованных AB и l измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

2. Пусть AM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BM : CM = AB : AC$. То же верно для биссектрисы внешнего угла треугольника.

3. В треугольнике ABC даны стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

4. Докажите, что если a и b — две стороны треугольника, α — угол между ними и l — биссектриса этого угла, то
$$l = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

5. Докажите, что расстояние от вершины A треугольника ABC до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC равны $p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC, $a = BC$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взята точка M так, что $AM = a$, $MC = b$. В треугольники ABM и CBM вписаны

окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

7. В параллелограмме со сторонами a и b и углом 2α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

1.2. Дополнительные задачи

1. (задача, которая потребуется в теме пирамиды) Дан треугольник ABC. Известно, что AA_1 — его медиана, а отрезок BK (K на стороне AC) делится точкой пересечения N в отношении $2:1$, считая от B. Докажите, что BK является медианой треугольника ABC.

2. (вариация задачи 7) Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, не являющегося ромбом, пересекаясь попарно, образуют прямоугольник, диагональ которого равна разности смежных сторон параллелограмма.

3. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Найдите расстояние между точками пересечения высот двух получившихся треугольников, если катеты данного треугольника равны a, b.

1.3. Домашнее задание

Теоретическая справка

1. Центр описанной около треугольника окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

2. Угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла.

3. Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

4. Теорема синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Задачи.

1. Докажите, что диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению его стороны к синусу противолежащего угла.

2. Докажите справедливость следующих формул для площади треугольника

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}; \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

где R — радиус описанной окружности.

3. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Докажите, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

4. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

5. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что длина медианы m_a, проведенной к стороне a, вычисляется по формуле

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

6. В прямоугольном треугольнике медиана равна m и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найдите площадь треугольника.

1.2. Разминка 2

2.1. Семинар

1. Определите острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое его диагоналей.

2. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

3. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят сторону AD на три равные части. Найдите $\angle AMB + \angle AND + \angle ADB$.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Докажите, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

5. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделенной на три дуги, которые относятся как $3 : 4 : 5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными.

6. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из ее боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

7. В равнобочной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

2.2. Дополнительные задачи

1. На стороне ромба $ABCD$ с центром в точке O построен правильный треугольник ABE, F — середина BE, угол OFB равен 70^0. Найдите угол ромба. (Использовать вписанные в окружность углы нельзя)

2.3. Домашнее задание

Теоретическая справка

1. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его биссектрис.

2. Отрезки касательных, проведенных из точки к одной окружности, равны между собой.

1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, опущенными на гипотенузу.

3. Около окружности описана равнобочная трапеция с боковой стороной l, одно из оснований которой равно a. Найдите площадь трапеции.

4. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, если основания трапеции равны a и b.

5. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

6. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Найдите радиус вписанного круга.

1.3. Треугольники 1

3.1. Семинар

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$. а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

2. Две стороны остроугольного треугольника равны 3 и 4, а медианы этих сторон пересекаются под прямым углом. Найдите третью сторону треугольника.

3. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD. а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный. б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

4. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно. а)Докажите, что прямые EH и AC параллельны. б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30^0.

5. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найдите длину стороны AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и $AB = 4$.

6. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен α. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определите, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

3.2. Дополнительные задачи

1. Зная медианы треугольника, найдите его стороны и площадь.

2. Пусть дан треугольник ABC, AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты, H — ортоцентр. Докажите, что $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

3.3. Домашнее задание

Теоретическая справка

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1, считая от вершины.

2. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

3. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, является прямым.

4. Формула для вычисления длины медианы треугольника по трем его сторонам

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

5. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам.

6. (Теорема Менелая) см. семинар ниже.

1. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$. а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$. б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, CH — высота. а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны. б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 12$, $BH = 3$.

4. В треугольнике ABC известно: $AB = c$, $BC = a$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка M так, что $2AM = 3MB$. Найдите расстояние от M до середины стороны AC.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

1.4. Многоугольники 1

4.1. Семинар

1. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30^0. Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120^0$. а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$. б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Тогда M — середина стороны AB. а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$. б) Найдите расстояние от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^0$.

3. В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O. а) Докажите, что площади четырехугольника $AMOE$ и треугольника COD равны. б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырехугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

4. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма, если его стороны равны a, b $(a < b)$.

5. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем M — середина AD, $BN : NC = 1 : 3$. а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части. б) Найдите площадь четырехугольника, вершины которого находятся в точках C, N

и точках пересечения прямых BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

6. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков MA, MB, MC соответственно. а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдовое меньше площади треугольника ABC. б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$, $AC = 8$.

7. Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17. а) Докажите, что диагонали перпендикулярны. б) Найдите площадь трапеции.

4.2. Дополнительные задачи

1. (вариация 2)На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB. а) Докажите, что точка M равноудалена от центром квадратов. б) Найдите площадь треугольника DMG, если $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.

2. (вариация 5) Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части. а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма. б)Найдите площадь четырехугольника, ограниченного двумя проведенными лучами и прямыми BD, BC, если площадь параллелограмма равна 40.

3. Докажите, что радиус окружности, описанной около четырехугольника со сторонами a, b, c, d вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC. Углы BAC и BCA равны 80^0. Из вершин A и C проведены две прямые до пересечения с противоположными сторонами соответственно в точках D и E. Угол CAD равен 60^0, угол $ACE = 50^0$. Определите величину ADE.

4.3. Домашнее задание

Теоретическая справка

1. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от ее середины. Из нее на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили

перпендикуляры. а)Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией. б)Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60^0.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120^0 при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB. а) Докажите, что $FH = 2DH$. б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

3. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. (Теорема Вариньона) В каком случае этот параллелограмм является ромбом? Прямоугольником? Квадратом?

4. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = d$.

5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Определите расстояние между серединой отрезка AM, где M — середина BC, и точкой N на стороне CD, делящей ее так, что $CN : ND = 3 : 1$.

6. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

1.5. Треугольники и окружности

5.1. Семинар

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC. б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $PQ = 8$, $\angle ABC = 60^0$.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O, величина угла AOC равна 120^0. а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$ можно описать окружность. б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, $\angle BED = 75^0$.

3. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = BM + MC$. (еще одно решения мы посмотрим в семинаре 1.9.)

4. Через вершины A и B треугольника проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D, C, если $AB = c$, $AC = b$.

5. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны. а) Докажите. что треугольник ABC — равнобедренный. б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$, $AC = 2a$.

6. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в него окружности.

7. (окружность девяти точек или окружность Эйлера или окружность Фейербаха) Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной прямой.

5.2. Домашнее задание

Теоретическая справка

1. Пусть к окружности проведена касательная XA и секущая XB, пересекающая окружность еще и в точке C. Тогда $XA^2 = XA \cdot XB$.

1. В треугольнике ABC угол ABC равен α. Найдите угол AOC, где O — центр вписанной окружности.

2. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha > 90^0$ и $BC = a$. Найдите расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот.

3. Окружность, касающаяся сторон AB и BC треугольника ABC, пересекает сторону AC в точках M и P, причем $AM = MP = PC$. а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный. б) Найдите радиус окружности, если $AC = 21$, а центр окружности лежит на высоте к стороне BC.

4. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA. а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK. б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если $KN = 8\sqrt{2}$, $\angle KMN = 45^0$.

5. В треугольнике ABC заданы $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC.

6. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB. Касательная к окружности, проведенная в точке B, пересекает эту прямую в точке K. а) Докажите, что треугольник BCK равнобедренный. б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{4}$.

1.6. Многоугольники и окружность

6.1. Семинар

1. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найдите радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна a.

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найдите $\angle ACD$.

3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T. а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны. б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$, $KT = 3$.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые. а) Докажите, что $AB = CD$. б) Найдите AD, если $AB = 2$, $BC = 7$.

5. Дан квадрат со стороной a. Найдите радиус окружности, проходящей через середину стороны AB, центр квадрата и вершину C.

6. Угол BAC треугольника ABC равен α. Сторона BC является хордой окружности с центром в точке O и радиуса R, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC. а) Докажите, что около четырехугольника $ABOC$ можно описать окружность. б) Известно, что в четырехугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 6$, $\alpha = 60^0$.

7. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P. а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$. б) Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.

6.2. Домашнее задание

1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = 30^0$, $\angle BCA = 40^0$, $\angle CAD = 50^0$, $\angle ACD = 60^0$. Найдите угол между его диагоналями.

2. Найдите острый угол ромба, если площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

3. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$, $DN = 2CN$. а) Докажите, что $AD = 4BC$. б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

4. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 10$. Известно, что $AB = BC = CD = 6$. а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны. б) Найдите AD.

6. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD.

1.7. Окружности

7.1. Семинар

1. Дана окружность и точка A вне нее. AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

2. Вне окружности радиуса R взята точка A, из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая на расстоянии $R/2$ от центра. Найдите площадь части круга, расположенного между этими секущими.

3. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй окружности — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C. а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны. б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

4. (сайт Гущина 526677) Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH. а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равна $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$. б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH, вторично пересекающей отрезок AC в точке P, а O_2 — центр окружности, построенной на HB как на диаметре, вторично пересекает BC в точке Q. Найдите площадь четырехугольника O_1PQO_2, если $AC = 22$, $BC = 18$.

5. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если длина одной из хорд равна a.

6. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных

с общими внутренними касательными лежат на одной окружности. Найдите радиус этой окружности.

7. Докажите, что отрезок внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен длине общей внутренней касательной.

7.2. Дополнительные задачи

1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. а) Докажите, что четырехугольник $ACED$ вписанный. б) Найдите AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

7.3. Домашнее задание

1. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найдите радиус меньшей окружности.

2. К окружности радиуса R из внешней точки M проведены касательные MA и MB, образующие угол α. Определите площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей дугой окружности.

3. Дан полукруг с диаметром AB. Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB?

4. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания данных окружностей между собой.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружностью в точке M, отличной от A. учи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P. а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны. б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

6. В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные хорды MN и PQ. Найдите расстояние между точками M и P, если $NQ = a$.

1.8. Геометрия помогает алгебре

8.1. Семинар

1. Для положительных x, y, z из условий $y^2+z^2 = 50$, $x^2+xy+\frac{y^2}{2} = 169$, $x^2+xz+\frac{z^2}{2} = 144$, не находя значений x, y, z, вычислите значение выражения $xy + yz + zx$.

2. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

решение для положительных x, y, z?

3. Для положительных x, y, z найдите $x + y + z$, если

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + xz + x^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений для положительных x,y

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1 \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + a^2 - ax\sqrt{3}}+\sqrt{y^2 + b^2 - by\sqrt{3}}+\sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a, b > 0).$$

7. Докажите, что

$$2 \operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = 0.$$

8. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arcctg} 7 + \operatorname{arctg} 1$.

8.2. Домашнее задание

1. Для положительных x, y, z найдите $\sqrt{3}xz+y(x+z)$, если $x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{xy}{\sqrt{3}} = 625$, $\frac{y^2}{3} + z^2 + \frac{yz}{\sqrt{3}} = 49$, $x^2 + z^2 + xz = 576$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^x+3^y+3^z=9 \\ 9^x+9^y+9^z=27 \\ x^y+y^z+z^x=3; \end{cases}$$
для положительных x, y, z.

4. Докажите, что $\arccos\frac{15}{17} - 2\,\mathrm{arcctg}\,4 = 0$.

5. Докажите, что $\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + \mathrm{arctg}\,4 + \arcsin\frac{8}{17} = 180^0$.

6. Вычислите $\mathrm{arctg}\,1 + \mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3$.

1.9. Применение движений плоскости и гомотетии

9.1. Семинар

1. Внутри угла с вершиной O дана точка M. Постройте прямую OM, не используя точку O.

2. На прямой l даны три точки $A-B-C$. На отрезках AB и BC по одну сторону от прямой l построены правильные треугольники ABD и BCE. Точки M и N середины отрезков AE и CD соответственно. Докажите, что BMN правильный.

3. В данном остроугольном треугольнике ABC найти точку P, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна. (задача Ферма)

   Дополнительная информация. Треугольник имеет точку Торричелли тогда и только тогда, когда все его углы меньше 120^0.

4. Треугольник A_1B_1C симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы прямого угла C. Докажите, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна A_1B_1.

5. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = BM + MC$. (сравните с решением этой же задачи из семинара 1.5.)

6. Докажите, что в неравностороннем треугольнике ABC точка пересечения медиан G, ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$.

7. Точка M принадлежит плоскости треугольника ABC, а точки A', B', C' симметричны точке M относительно середин A_0, B_0, C_0 сторон BC, AC, AB. Докажите, что существует центральная симметрия, переводящая треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$.

9.2. Дополнительные задачи

1. Докажите, что среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет тот, вершины которого являются основаниями высот данного треугольника.

2. На сторонах произвольного треугольника ABC внешним образом построены треугольники ABC_1, ACB_1, BCA_1 с центрами C_2, B_2, A_2. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны и пересекаются в одной точке F (точка Ферма) и образуют между собой равные углы, 2) три окружности, описанные около правильных треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника, пересекаются в той же точке F; 3) все стороны треугольника видны из точки F под равными углами; 4) отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке ((первая) точка Наполеона).

9.3. Домашнее задание

1. По одну сторону от прямой l даны две точки A и B. Постройте на прямой l точку C так, что $AC + BC$ была наименьшей.

2. По разные стороны от реки находятся пункты A и B. Где нужно построить мост, чтобы путь из A и B по нему был кратчайшим?

3. С помощью построений определите расстояние от данной точки на стороне угла до его вершины, если эта вершина недоступна.

4. На сторонах параллелограмма вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами параллелограмма.

5. Постройте параллелограмм, у которого две противоположные вершины находятся в данных точках, а две другие — на данной окружности.

6. Внутри острого угла Ohk дана точка M. Постройте треугольник MHK наименьшего периметра, у которого точки H и K лежат на сторонах данного угла.

7. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его соседние вершины лежали на одной стороне треугольника, а две другие вершины соответственно на двух других сторонах треугольника.

1.10. Теоремы Чевы и Менелая. Теорема Ван-Обеля

10.1. Семинар

1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 точки на прямых BC, CA, AB. Введем следующие обозначения

$$R = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A};$$
$$R^* = \frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB} \cdot \frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC} \cdot \frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}.$$

   Докажите, что $R = R^*$.

2. (теорема Чевы) Для того чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке (или все три были параллельны), необходимо и достаточно, чтобы $R = 1$ и при этом из трех точек A_1, B_1, C_1 нечетное число точек лежало на сторонах треугольника ABC, а не на их продолжениях.

3. (теорема Менелая) Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $R = 1$ и при этом из трех точек A_1, B_1, C_1 четное число точек лежало на сторонах треугольника ABC, а не на их продолжениях.

4. Докажите, что если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке или параллельны.

   Дополнительная информация. Отрезки, симметричные медианам треугольника, называются симедианами. Из предыдущей задачи следует, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется точкой Лемуана.

5. (теорема Ван-Обеля) Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC, причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$.

6. Через две данные точки M и N проведены пересекающиеся касательные MP и NQ к окружности, где P, Q — точки касания. Пусть прямые PQ и MN пересекаются в точке L. Докажите, что $ML : LN = MP : NQ$.

7. Используя предыдущую задачу, докажите, что во вписанном четырехугольнике точка пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

10.2. Домашнее задание

1. Сформулируйте теоремы Чевы и Менелая, используя направленные отрезки. Докажите их векторным методом. (в контрольной работе не будет)

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. Причем $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношение $OA : ON$ и $OM : OC$.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N,K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

4. Пусть O — произвольная точка плоскости, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC; P и Q аналогично определены для угла B; R и T — для угла C. Докажите, что прямые MN, PQ, RT пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC соответственно в точках D, E, F. Докажите, что середины отрезков DC, AE, BF лежат на одной прямой (прямая Гаусса).

6. Докажите, что биссектрисы двух внутренних углов треугольника и биссектриса внешнего угла, не смежного с ним, пересекают прямые, содержащие соответственные стороны треугольника в трех коллинеарных точках.

1.11. Геометрические неравенства

11.1. Семинары (2 штуки)

1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше половины периметра этого треугольника.

2. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра.

3. Докажите, что сумма медиан треугольника больше трех четвертей периметра.

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра этого треугольника.

5. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую биссектрису угла при вершине треугольника.

6. На стороне треугольника найдите такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух других сторон была наименьшей.

7. Докажите, что для прямоугольного треугольника имеет место неравенство $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника.

8. Дан треугольник с углами α, β, γ. Докажите, что а) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$, б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$, в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4}$.

   В следующих задачах нужно удачно выбрать переменную.

9. Дан квадрат $ABCD$. От его вершин отложены по одному на каждой из сторон равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd, и точки a, b, c, d соединены отрезками. При каком значении Aa площадь квадрата $abcd$ будет наименьшей?

10. Докажите, что из всех равновеликих прямоугольников квадрат имеет наименьший периметр.

11. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь имеет квадрат.

12. Из всех прямоугольников. описанных около прямоугольника со сторонами a и b, найти тот, который имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

13. В данный треугольник вписан прямоугольник так, что одна его сторона находится на основании треугольника. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади?

14. Докажите. что кратчайший отрезок, который делит равносторонний треугольник со стороной, равной a, на две равновеликие части, равен $a\sqrt{2}/2$ и параллелен стороне треугольника.

11.2. Дополнительные задачи

1. Докажите, что из всех треугольников данной площади равносторонний имеет наименьший периметр.

11.3. Домашнее задание

Теоретическая справка.

Лемма 1.1. *Пусть $x+y+z=c$, где c — положительная константа. Тогда произведение xyz принимает наибольшее значение при $x=y=z=\frac{c}{3}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x,y)=xy(c-x-y)$. Ее наибольшее значение совпадает с наибольшим значением произведения xyz. Ищем частные производные

$$f'_x = yc-2xy-y^2; \quad f'_y = xc-x^2-2xy.$$

Критические точки задаются системой

$$\begin{cases} yc-2xy-y^2=0 \\ xc-x^2-2xy=0 \end{cases}$$

Эта система имеет следующие решения: $(0,0)$, $(0,c)$, $(c,0)$, $(c/3,c/3)$. Непосредственная проверка показывает, что наибольшее значение будет при $x=c/3$, $y=c/3$. Тогда $z=c/3$. □

2. Среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического.

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}; \quad \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}.$$

Задачи.

1. Докажите, что в треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол и наоборот. Докажите, что в треугольнике каждая из сторон меньше суммы двух других сторон.

2. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника меньше удвоенного периметра.

3. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше периметра.

4. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным острым углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую медиану, проведенную из вершины.

5. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным тупым углом при вершине равнобедренный имеет наименьшую медиану, исходящую из вершины тупого угла.

6. Найдите внутри треугольника точку, произведение расстояний которой до сторон треугольника имело бы наибольшее значение.

7. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство $p^2 \geqslant 27r^2$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

2. Стереометрия

2.1. Построение сечений многогранников

1.1. Семинар

1. В гранях MAB, MAD, MBC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q и R. Постройте сечения пирамиды следующими плоскостями а) BCQ, б) CDP, в) PQR.

2. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки P, Q в соседних боковых гранях, R — на нижнем основании. Постройте сечение призмы плоскостями а) APQ, где A не принадлежит граням, содержащим P и Q, б) PQR.

3. На ребрах AB, MB, MC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. Постройте сечения пирамиды плоскостями, параллельными плоскости PQR и проходящими через точку L, лежащую а) на прямой AB, причем точка A лежит между точками B и L, б) на отрезке MK, точка K которого лежит в грани $ABCD$, в) на прямой CN, точка N которой лежит в грани MAB и находится между точками C и L.

4. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ — точка R — точка пересечения диагоналей AC и BD. Постройте сечение пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую DQ параллельно прямой PR, и плоскостью, проходящей через прямую PR параллельно прямой DQ, б) плоскостью, проходящей через прямую DP параллельно прямой QR и наоборот, в) плоскостью, проходящей через прямую DR параллельно прямой PQ и наоборот.

5. На ребрах MA и MD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P и Q. Постройте сечения пирамиды плоскостями параллельными прямым BP и AQ и проходящими через следующие точки: а) K заданную на отрезке CP; б) L, заданную на отрезке BQ; в) N заданную на отрезке MR, где R задана в грани $ABCD$.

6. На ребрах MB, MA, CD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. На диагонали BD задана точка U и в грани MAD —

точка V. Постройте линии пересечения следующих пар плоскостей: а) MBV и PRU; б) MRV и APU; в) PUV и BRQ.

1.2. Дополнительные задачи

1. Дана шестиугольная пирамида (призма) и три точки а) в соседних (не соседних) боковых гранях, б) две в соседних (не соседних) боковых гранях и еще одна в основании. Постройте сечение данного многогранника данной плоскостью.

1.3. Домашнее задание

1. В гранях MAB, MAC, MBC пирамиды $MABC$ заданы соответственно точки P, Q и R. Постройте сечения пирамиды следующими плоскостями а) ACP, б) BPR, в) PQR.

2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ и точки P, Q, R в ее боковых гранях. Постройте сечения призмы плоскостями а) APQ, б) PQR.

3. На ребрах CD, BC, MC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. Постройте сечения пирамиды плоскостями, параллельными плоскости PQR и проходящими через точку L, лежащую а) на ребре AD, б) на ребре MA, в) в грани MAB.

4. На ребрах MB и MC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ — точка R. Постройте сечение пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой DP, и плоскостью, проходящей через прямую DP параллельно прямой AC, б) плоскостью, проходящей через прямую DP параллельно прямой BQ и наоборот, в) плоскостью, проходящей через прямую PR параллельно прямой BQ и наоборот.

5. На ребрах MA и MD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P и Q. Постройте сечения пирамиды плоскостями параллельными прямым BP и AQ и проходящими через следующие точки: а) K заданную в грани MAB; б) L, заданную в грани MCD; в) N заданную $ABCD$.

6. На ребрах MC, MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, K, а на прямых AC и MB соответственно точки Q и R, причем точка A лежит между точками C и Q, а точка M — между точками B и R. Постройте линии пересечения следующих пар плоскостей: а) ACK и PQR; б) APK и PQR; в) BQK и PQR.

2.2. Метрические построения

2.1. Семинар

1. Из вершины A прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит ромб с острым углом, равным 60^0, и отношением ребер $AA_1 : AB = 1 : 2$, опустите перпендикуляры на следующие прямые а) A_1C, б) B_1D, в) C_1D.

2. Опустите перпендикуляр на плоскость грани BB_1C_1C правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ из следующих точек а) A_1, б) K — середины ребра A_1B_1, в) L — середины A_1C.

3. Опустите перпендикуляры на плоскость грани MBC правильного тетраэдра $MABC$ из следующих точек: а) A, б) K — середины ребра AB, в) L — центра треугольника MAC.

4. Ребра AC, BC и MC пирамиды $MABC$ равны и попарно перпендикулярны. На ребрах AB, MB, MC взяты соответственно точки D, E и F — середины этих ребер. Постройте сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными плоскости MBC и проходящими через следующие прямые: а) AE, б) DF.

5. Плоскость α проходит через вершину B_1 и через точки P и Q — середины соответственно ребер AB и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечения куба плоскостями, перпендикулярными плоскости α и проходящими через следующие прямые а) DD_1, б) A_1D_1, в) C_1D_1. Найдите линии пересечения построенных плоскостей с плоскостью α.

2.2. Дополнительные задачи

1.

2. Точка P — середина ребра A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую AP параллельно прямой A_1D проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляры на эту плоскость из следующих точек а) D_1, б) K — середины ребра DD_1, в) L — середины ребра A_1D_1.

3. (Литвиненко 27 стр. 35) Точка P — середина ребра BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношении ребер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Через прямую AC параллельно прямой B_1P проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляры на эту плоскость из следующих точек а) B, б) D_1, в) A_1.

2.3. Домашнее задание

1. Из вершины A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$ опустите перпендикуляры на следующие прямые а) A_1C, б) B_1D, в) DE, где E — середина ребра B_1C_1.

2. Точка E — середина ребра AC прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с прямым углом C. Опустите перпендикуляры на плоскость B_1BE из следующих точек: а) K — середины ребра A_1B_1, б) L — середины ребра AA_1, в) M — середины отрезка C_1E.

3. Ребра CA, CB и CM пирамиды $MABC$ равны и попарно перпендикулярны. Опустите перпендикуляры на плоскость грани MBC из следующих точек: а) K — середины AB, б) L — середины ребра MA, в) N — середины медианы MK треугольника MAB.

4. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$, две боковые грани которой являются квадратами, лежит треугольник с прямым углом при вершине C. На ребре AC призмы взята точка D — середина этого ребра. Постройте сечения призмы плоскостями, перпендикулярными плоскости B_1BD и проходящими через следующие прямые: а) CC_1, б) CA_1, в) B_1D.

5. (Литвиненко 39 стр. 37) Плоскость α проходит через точки A, A_1 и P — середину ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечения куба плоскостями, перпендикулярными плоскости α и проходящими через следующие прямые а) DD_1, б) A_1D, в) CD_1. Найдите линии пересечения построенных плоскостей с плоскостью α.

2.3. Тетраэдр 1

3.1. Семинар

1. Докажите свойства тетраэдра: 1) три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей пополам; 2) прямые, проходящие через вершину тетраэдра и центр тяжести противоположной грани, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 3:1, считая от вершины. Эта точка называется центроидом или центром тяжести тетраэдра; 3) шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра, проходят через одну точку.

2. Если в тетраэдре $ABCD$ высоты, выходящие из вершин C и D, пересекаются, то прямая CD перпендикулярна прямой AB и, обратно, если

прямая CD перпендикулярна прямой CD, то высоты, выходящие из вершин C и D пересекаются. Докажите.

3. Докажите, что если в тетраэдре перпендикулярны две пары противоположных ребер, то и оставшиеся ребра перпендикулярны. При этом все высоты пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что если у тетраэдра двугранные углы при основании равны, то вершина тетраэдра проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

5. Докажите, что объем тетраэдра равен произведению площади параллелограмма со сторонами, равными и параллельными двум скрещивающимся ребрам тетраэдра и одной шестой кратчайшего расстояния между этими ребрами.

6. Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O равны 90^0. Докажите, что площадь треугольника AOB равна среднему геометрическому площадей треугольников ABC и O_1AB, где O_1 — проекция точки O на плоскость (ABC).

7. Пусть $ABCD$ произвольный тетраэдр, $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $\angle ADB = \gamma$, $\angle BDC = \alpha$, двугранный угол при ребре DB равен $\hat{b}$. Докажите, что объем $ABCD$ вычисляется по формуле
$$V = \frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\gamma\sin\hat{b}.$$

3.2. Дополнительные задачи

1. (вариация задачи из домашнего задания) Докажите, что если в тетраэдре два противоположных ребра перпендикулярны, то его можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится прямоугольник.

2. (вариация задачи) Докажите, что если в тетраэдре $ABCD$ сечение плоскостью, параллельной прямым AC и BD, есть прямоугольник и сечение плоскостью, параллельной прямым AD и BC тоже прямоугольник, то и сечение плоскостью, параллельной прямым AB и CD тоже прямоугольник.

3. В двух параллельных плоскостях расположены отрезки AB и CD, концы которых являются вершинами тетраэдра. Докажите, что объем тетраэдра сохраняется, если отрезки в этих плоскостях перемещать параллельно самим себе.

4. Докажите, что если три отрезка, соединяющие точки противоположных ребер тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей пополам, то это бимедианы тетраэдра.

5. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде а) двугранные углы при основании равны; б) двугранные углы при боковых ребрах равны; в) плоскость, проходящая через высоту пирамиды и высоту боковой грани (апофему пирамиды), перпендикулярна к плоскости боковой грани.

3.3. Домашнее задание

Теоретическая справка

Тетраэдр — произвольная треугольная пирамида.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а высота, проведенная из вершины проходит через центр этого многоугольника.

Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны между собой.

Высота тетраэдра — это перпендикуляр, опущенный из вершины тетраэдра на плоскость противоположной грани.

1. Объем тетраэдра вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{osn}h$.

2. Теорема о трех перпендикулярах.

Задачи.

1. Найдите величину двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

2. Докажите, что если одна из высот тетраэдра $ABCD$ проходит через точку пересечения высот противоположной грани, то остальные высоты этого тетраэдра проходят через точки пересечения прямых, на которых лежат высоты противоположных граней.

3. Докажите, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от внутренней точки до всех четырех граней имеет постоянную величину, равную длине высоты.

4. Основанием пирамиды является правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые ребра?

5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна h. Найдите а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания; г) угол между боковой гранью и плоскостью основания; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

6. Все плоские углы при вершине O тетраэдра $OABC$ прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).

2.4. Равногранный и ортоцентрический тетраэдры

4.1. Семинары

1. Будем называть тетраэдр *равногранным*, если все его грани — равные между собой треугольники или, что равносильно, противоположные ребра тетраэдра попарно равны. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда выполняется любое из перечисленных условий: 1) суммы плоских углов при любых трех вершинах тетраэдра равны 180^0; 2) суммы плоских углов при двух вершинах тетраэдра равны 180^0 и ребро, заключенное между этими вершинами, равно противоположному ребру; 3) выполняются равенства $\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = \angle BCD$, где $ABCD$ — данный тетраэдр; 4) центры вписанной и описанной сфер совпадают.

2. Пусть h — высота равногранного тетраэдра, h_1, h_2 — отрезки, на которые одна из высот грани делится точкой пересечения высот этой грани. Докажите, что $h^2 = 4h_1h_2$. Докажите, что основание высоты тетраэдра и точка пересечения высот грани, на которую эта высота опущена, симметричны относительно центра окружности, описанной около этой грани.

3. Докажите, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней лежат на поверхности одной сферы (сфера 12-ти точек).

4. В предыдущем семинаре мы доказали, что если в тетраэдре перпендикулярны две пары противоположных ребер, то оставшаяся пара ребер перпендикулярна. При этом все высоты пересекаются в одной точке. Такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*. Точка пересечения высот называется *ортоцентром* тетраэдра.

   Для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий: 1) противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны; 2) одна из высот тетраэдра проходила через точку пересечения высот противоположной грани; 3) равны суммы квадратов скрещивающихся ребер; 4) равны отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер.

5. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центр тяжести расположен в середине отрезка, соединяющего центр описанной сферы с точкой пересечения высот.

6. Докажите, что для ортоцентрического тетраэдра окружности 9-ти точек каждой грани принадлежат одной сфере (сфера 24-х точек). Напомним, что окружностью 9-ти точек для данного треугольника называется

окружность, содержащая основания высот, середины сторон этого треугольника и середины отрезков высот от вершины до точки их пересечения.

7. Докажите, что для ортоцентрического тетраэдра центры тяжестей и точки пересечения высот граней, а также точки, делящие отрезки каждой высоты тетраэдра от вершины до точки пересечения высот в отношении 2:1, лежат на одной сфере (сфере 12-ти точек).

4.2. Домашнее задание

1. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре все плоские углы, прилегающие к одной вершине, или одновременно острые, или тупые.

2. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре выполняется соотношение $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где O — центр описанной сферы, H — точка пересечения высот, R — радиус описанной сферы, d — расстояние между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра.

3. Высота треугольной пирамиды равна h, а высота каждой боковой грани, проведенной из вершины пирамиды, равна d. Найдите периметр основания, если его площадь равна S.

4. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры противоположных ребер проходят через ортоцентр тетраэдра.

5. Докажите, что в правильном тетраэдре отрезки, соединяющие центры граней, равны между собой.

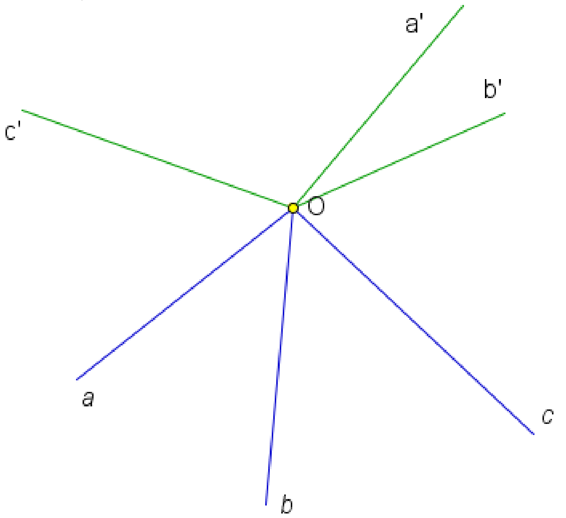
6. сайт Гущина 515687 Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AC, SA, пополам. б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

2.5. Трехгранные углы.

5.1. Семинар

Трехгранный угол — это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной O и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Стороны обозначаются a, b, c и называются сторонами трехгранного угла. Внутренние области плоских углов называются гранями трехгранного угла и обозначаются α, β, γ. Этими же буквами обозначаются величины плоских углов трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями обозначаются $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ (по названию ребер). Обозначение трехгранного угла $Oabc$.

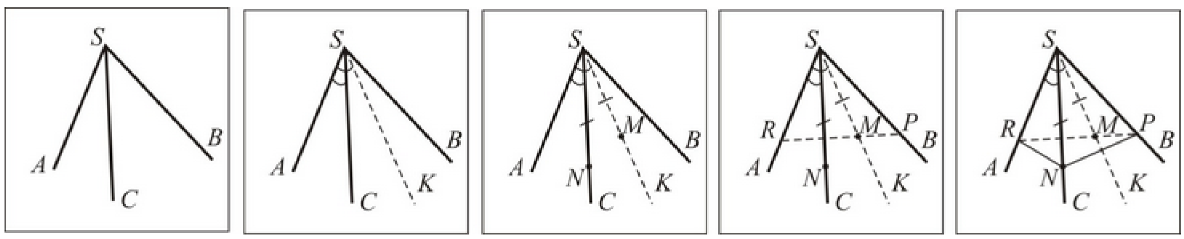
Пусть дан трехгранный угол $Oabc$. *Полярным* к нему трехгранным углом называется трехгранный угол $Oa'b'c'$, где луч a' перпендикулярен плоскости $bc \equiv \alpha$ и лежит по разные стороны с лучом a относительно этой плоскости. Для двух остальных ребер аналогично.



Для трехгранных углов верны свойства:

1. $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ (доказательство см. Адамар Ж. Элементарная геометрия часть 2, стр. 58).

Теорема 1 ***(Свойство плоских углов трехгранного угла).*** Градусная мера каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы градусных мер двух других плоских углов.



1) Рассмотрим трехгранный угол *SABC*. Пусть угол *ASB* его наибольший плоский угол. Покажем, что

$$\angle ASB < \angle ASC + \angle CSB$$

2) Построим в плоскости *ASB* угол *ASK*, равный углу *ASC*. От точки *S* на луче *SK* отложим отрезок *SM*. На луче *SC* отложим *SN* = *SM*. Через точку *M* в плоскости *ASB* проведем прямую до пересечения с лучами *SA* и *SB* в точках *R* и *P*. Соединим точки *R* и *P* с точкой *N*. Получим равные треугольники *SRM* и *SRN* (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон *RM* = *RN*.

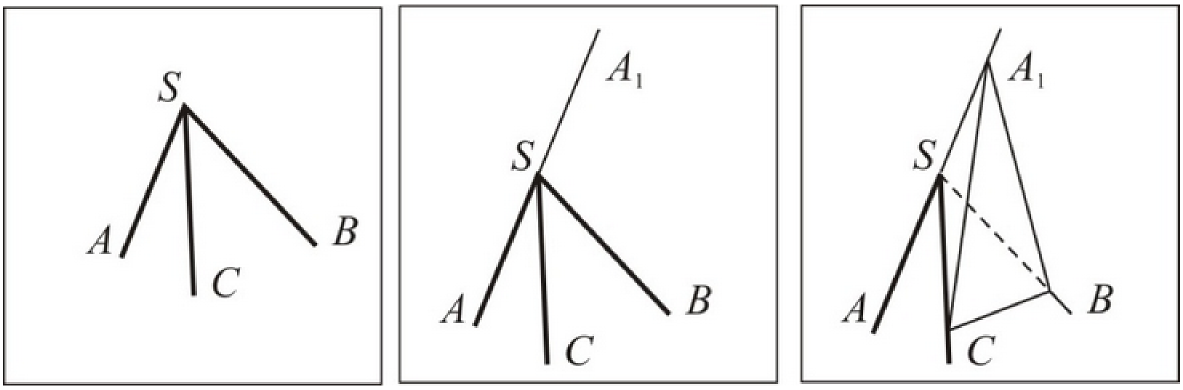
3) Согласно неравенству треугольника в треугольнике *RPN* *RP* < *RN* + *NP*, т.е. *RM* + *MP* < *RN* + *NP*, откуда *MP* < *NP*.

4) В треугольниках *SPM* и *SPN* по две равные стороны, следовательно, против большей стороны лежит больший угол, т.е. $\angle NSP > \angle MSP$, прибавляя к обеим частям этого неравенства по равным углам *RSM* и *RSN*, получим $\angle ASB < \angle ASC + \angle CSB$.

2. $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ (легко следует из свойства 1).

3. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360^0.

Теорема 2 ***(Свойство плоских углов многогранного угла).*** Сумма градусных мер всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360º.



Доказательство проведем для трехгранного угла.

1) Рассмотрим трехгранный угол *SABC*. Построим луч SA_1, противоположный лучу *SA*.

2) Рассмотрим трехгранный угол SA_1BC. Его плоскими углами являются Ð*BSC*, ÐA_1SC= $180° - \angle ASC$, ÐA_1SB= $180° - \angle ASB$. Применим к ним теорему 1, получим:

$$\angle BSC < 180° - \angle ASC + 180° - \angle ASB$$,т.е

$$\angle ASB + \angle ASC + \angle BSB < 360°$$. ‡

4. Для трехгранного угла и полярного к нему имеет место равенство $\hat{a} + \alpha' = \pi$. Откуда следует, что $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} > \pi$.

1. теорема косинусов для трехгранного угла
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\hat{a}.$$
2. теорема синусов для трехгранного угла
$$\frac{\sin\hat{a}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\hat{b}}{\sin\beta} = \frac{\sin\hat{c}}{\sin\gamma}.$$
3. Докажите, что в любом тетраэдре найдется трехгранный угол, все плоские углы которого острые.
4. Докажите, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного третьему плоскому углу, лежат в одной плоскости.
5. Докажите, что три биссекторные плоскости трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

6. Докажите, что для любого трехгранного угла

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

7. Докажите, что если два плоских угла трехгранного угла равны, то биссекторная плоскость, проходящая через общее ребро, перпендикулярна к противоположной грани. (обобщение на трехмерный случай биссектриса к основанию равнобедренного треугольника является высотой).

5.2. Дополнительные задачи

1. Дан трехгранный угол. Выразите угол между его ребром и плоскостью противоположной грани через плоские углы данного трехгранного угла.

2. Дан трехгранный угол $Oabc$. Выразите угол между ребром и лучом в противоположной грани, выходящим из вершины под углом ξ к лучу b, через плоские углы $Oabc$.

3. Известно, что внутренний луч p трехгранного угла $Oabc$, выходящий из его вершины, составляет углы ξ и η с двумя ребрами этого трехгранного угла. Докажите, что величину угла между p и третьим ребром можно выразить через величины плоских углов $Oabc$ и ξ, η.

4. Каждый плоский угол трехгранного угла $Oabc$ равен 60^0. Внутри трехгранного угла расположена точка P, удаленная от двух граней на расстояние a, а от третьей — на расстояние $2a$. Найдите расстояние от этой точки до вершины.

5.3. Домашнее задание

1. Докажите двойственную теорему косинусов, то есть

$$\cos\hat{a} = -\cos\hat{b}\cos\hat{c} + \sin\hat{b}\sin\hat{c}\cos\alpha.$$

   Как будет выглядеть для трехгранных углов «теорема Пифагора» и двойственная «теорема Пифагора» ?

2. Докажите, что если все плоские углы трехгранного угла тупые, то и двугранные углы тоже тупые.

3. Плоские углы трехгранного угла равны φ. Через его вершину проведена прямая, составляющая равные углы с его ребрами. Найдите величину этих углов.

4. Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону и не лежат в одной плоскости. Докажите, что $\angle ACB + \angle CBD + \angle BDA + \angle DAC < 2\pi$.

5. В трехгранном угле с вершиной M все плоские углы прямые. Произвольная плоскость пересекает его ребра в точках A, B, C. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из вершины M ан эту плоскость проходит через точку пересечения высот треугольника ABC.

6. Величины плоских углов трехгранного угла 60^0, 60^0, 90^0. На ребрах от вершины S отложены равные отрезки SA, SB, SC. Найдите величину двугранного угла между плоскостью (ABC) и плоскостью угла, величина которого 90^0.

2.6. Призмы

6.1. Семинар

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину A проведена плоскость, перпендикулярная к диагонали B_1D куба. Найдите двугранный угол между этой плоскостью и плоскостью (ABC).

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, выходящими из конца диагонали, углы α и β. Определите двугранный угол между плоскостями, каждая из которых проходит через диагональ и одно из указанных ребер параллелепипеда.

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с меньшей боковой гранью — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

4. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб. Боковое ребро CC_1 одинаково наклонено к сторонам CD и CB основания. Докажите, что а) CC_1 перпендикулярно BD, б) BB_1D_1D — прямоугольник, в) BD перпендикулярна плоскости (AA_1C_1), г) плоскость (AA_1C_1) перпендикулярна плоскости (BB_1D_1).

5. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до диагонали, соединяющей две другие вершины куба.

6. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

7. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба.

6.2. Дополнительные задачи

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между диагоналями A_1C и B_1D равен 60^0.

2. Основанием параллелепипеда с боковым ребром b является квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6.3. Домашнее задание

Теоретическая справка.

1. Правильная призма — это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

Задачи.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 8$, $BC = 6$, $AA_1 = 10$. Через вершину A проведена плоскость, перпендикулярная диагонали DB_1 параллелепипеда. Найдите двугранный угол между этой плоскостью и плоскостью (ABC).

2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами, величины которых α и β. Найдите величину угла между этими диагоналями.

3. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30^0. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

4. Дан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагональю основания, имеющей длину m, и одной из сторон основания равен φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и DB_1 взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между диагоналями A_1C и B_1D равен 60^0.

6. Найдите расстояние между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

2.7. Пирамиды

7.1. Семинар

1. Угол между боковым ребром и плоскостью $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 60^0. Вычислите угол, который образует с плоскостью основания плоскость, проходящая через вершину A, середину K высоты SO и точку L, делящую отрезок SB в отношении $2 : 1$.

2. Две параллельные плоскости, проходящие через скрещивающиеся медианы граней тетраэдра, разбивают его на три части. Найдите отношение объемов этих частей.

3. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами a и b. Все двугранные углы при основании равны 60^0. Найдите высоту пирамиды.

4. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 и 8, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1. Найдите боковую поверхность пирамиды.

5. (лучше бы в семинар, хорошая задача) Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = 2a$, а высота $SO = 3a$ и проходит через центр основания. Вычислите угол, который образует с плоскостью основания плоскость, проходящая параллельно диагонали BD через вершину A и середину ребра SC.

7.2. Дополнительные задачи

1. (вариация задачи из домашнего задания) Найдите двугранные углы при основании правильной треугольной пирамиды, у которой площадь основания Q, а боковая поверхность S.

2. (громоздкая) Через середину высоты правильной шестиугольной пирамиды параллельно одной из боковых граней проведена плоскость. Найдите отношение объемов многогранников, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду.

3. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10, боковая поверхность 144.

4. Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них выбран отрезок AB, а на двух других — точки C и D, соответственно. Докажите, что объем тетраэдра на зависит от выбора точек C и D.

7.3. Домашнее задание

1. Объем четырехугольной пирамиды $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$, равен V. На ребрах AB, AS и луче AD взяты точки P, Q, R, такие, что $AP : AB = p : 1$, $AQ : AS = q : 1$, $AR : AD = r : 1$. Найдите объем той отсекаемой плоскостью PQR части пирамиды, которая содержит точку A.

2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите высоту.

3. Найдите боковую поверхность треугольной пирамиды, если площадь основания Q, а двугранные углы при основании равны φ.

4. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания — a, а высота — h.

5. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 5, а одна из диагоналей основания равна 4. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60^0.

2.8. Вычисление площадей сечений

8.1. Семинар

1. Докажите, что площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость равна произведению площади треугольника на косинус угла между плоскостями треугольника и его проекции.

2. В правильной шестиугольной пирамиде через точки K и L на одной из сторон основания, делящие эту сторону соответственно в отношениях 1:1 и 3:1, проведены две плоскости, перпендикулярные рассматриваемой стороне. Найдите отношение площадей полученных сечений.

3. Дан прямоугольный параллелепипед. Три ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через середины шести ребер данного параллелепипеда.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной a, M — середина отрезка BC, N — середина отрезка DD_1. Вычислите площадь сечения куба плоскостью (AMN).

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с углом 30^0 и прямым углом C. Все боковые ребра пирамиды равны b и наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через C и середины ребер AD, DB.

6. Через середину высоты правильной шестиугольной пирамиды параллельно одной из боковых граней проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани равна Q.

7. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно a, боковое ребро $a\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения пирамиды

плоскостью, проходящей через середину отрезка AS перпендикулярно ему.

8.2. Дополнительные задачи

1. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a параллельно ребру BC проведена плоскость, образующая угол 30^0 с ребром AB. Найдите площадь сечения.

8.3. Домашнее задание

1. Дана пирамида $ABCD$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC, $AB = a$. Плоскости ADB и ABC перпендикулярны, $DA = DB = b \neq a$. Сечение $MNKL$ — квадрат, $N \in [AC]$, $M \in [CB]$, $L \in [DB]$, $K \in [AD]$. Найдите площадь $MNKL$.

2. Дана правильная шестиугольная призма, каждое ребро которой равно 1. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через два параллельных ребра оснований, не принадлежащих одной грани.

3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = 2a$, а высота $SO = 3a$ и проходит через центр основания. Вычислите площадь сечения $SABCD$ плоскостью, проходящей параллельно диагонали BD через точку A и середину высоты SO.

4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Точка H — центр грани $ABCD$. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середину отрезка B_1H перпендикулярно ему.

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = 4$, $AB = 2$, $AA_1 = 6$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через A_1 и середины ребер DC, CB.

2.9. Комбинация геометрических фигур 1

9.1. Семинар

1. В тетраэдре с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар радиуса R. Докажите, что
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

2. Вокруг шара радиуса r описан конус с углом α при вершине осевого сечения. Найдите объем конуса. При каком α конус имеет наименьший объем?

3. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого одна сторона равна a, а каждая из остальных трех сторон равна b. Вершина пирамиды лежит на середине одной из образующих. Найдите объем пирамиды, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

4. Найдите величину плоского угла при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанной и описанной сфер совпадают.

5. В треугольной пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые. Докажите, что вершина D точка пересечения медиан треугольника ABC и центр сферы, описанной около пирамиды, лежат на одной прямой.

6. В сферу радиуса R вписана правильная n-угольная пирамида. Найдите ее высоту, если она имеет наибольший объем.

9.2. Домашнее задание

Теоретическая справка.

1. Площадь боковой поверхности конуса: $S = \pi r \ell$, где r — радиус основания конуса, ℓ — образующая конуса.

2. Объем и площадь поверхности шара радиуса r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$.

Задачи.

1. В конус вписан шар. Докажите, что отношение объемов конуса и шара равно отношению площадей полной поверхности конуса и сферы, являющейся поверхностью шара.

2. В конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом α, вписан шар. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

3. Дан конус, радиус основания которого равен R, а угол при вершине осевого сечения — α. В конус вписан правильный тетраэдр так, что одна из его вершин совпадает с основанием высоты конуса, а три другие лежат на боковой поверхности конуса. Найдите длину ребра правильного тетраэдра.

4. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с диагоналями 6 и 8. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1. Найдите радиус вписанной сферы.

5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через концы ребра AA_1 и касающейся граней двугранного угла при ребре CC_1.

6. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы, вписанной в конус, имеет длину a. Найдите объем конуса, если угол при его осевом сечении имеет величину 60^0.

2.10. Комбинация геометрических фигур 2

10.1. Семинар

1. В треугольной пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые, а ребра, выходящие из этой вершины, равны a, b, c. Найдите длину ребра куба, вписанного в пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с D, а противоположная ей вершина лежит в плоскости (ABC).

2. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

3. Длины боковых сторон SA и SB четырехугольной пирамиды $SABCD$ относятся как $\sqrt{7} : \sqrt{11}$. Через точки A, B, D проведена сфера, пересекающая боковые ребра SA, SB, SD в точках A_1, B_1, D_1 соответственно, причем $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки B, C, D, D_1 проведена еще одна сфера, пересекающая боковое ребро SB в точке E. Найдите отношение длин отрезков SE и BB_1.

4. На плоскости лежат два шара радиуса r и цилиндр радиуса $R > r$. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, и касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

5. В шар вписаны цилиндр и конус по разные стороны от общего основания. Объемы цилиндра и конуса равны 600π и $\frac{25\pi}{3}$ соответственно. Найдите радиус шара.

6. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, а ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найдите объем пирамиды, если образующая конуса равна d и составляет с высотой угол β.

10.2. Дополнительные задачи

1. Три параллельные прямые касаются в точках A, B, C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найдите угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

2. Определите угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

10.3. Домашнее задание

1. В правильную четырехугольную пирамиду, диагональное сечение которой есть правильный треугольник, вписан цилиндр с максимальным объемом так, что ось параллельна диагонали основания пирамиды. Найдите отношении объемов двух тел.

2. Основанием пирамиды $FABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен $\alpha < 90^0$. В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA_1E_1D_1$, причем A_1, E_1, D_1 лежат соответственно на боковых ребрах AF, CF, BF пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите отношение объема призмы к объему пирамиды.

3. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к стороне основания равно $\sqrt{2}$, а радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 2. Найдите объем пирамиды.

4. Найдите радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, двугранный угол при основании равен α.

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найдите расстояние от центра шара, вписанного в эту пирамиду, до бокового ребра.

2.11. Стереометрические задачи ЕГЭ 1

11.1. Семинар

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

   а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

   б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

   а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

   б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

4. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$.

   а) Докажите, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и A_1B_1C параллельна основаниям призмы.

   б) Найдите угол между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C, если известно, что $AC = 1$, $BC = 2$, $AB = \sqrt{5}$, $CC_1 = 3$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

   а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60^0.

   б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

11.2. Домашнее задание

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

   а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

   б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

2. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$

   а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

   б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

   а) Докажите, что точка T является серединой SM.

   б) Найдите расстояние между NT и SC.

4. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

   а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

   б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

2.12. Геометрические неравенства

12.1. Семинар

1. ([7], 600) В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Докажите, что $(AD + BC)/2 > MN$.

2. ([7], 607) Докажите, что если в данный конус вписать цилиндр наибольшего объема, то радиус основания цилиндра относится к радиусу основания конуса как 2:3.

3. ([7], 609) На какой высоте над круглым столом надо поместить лампу, чтобы она проектировалась в центре стола и чтобы на краях стола была наибольшая освещенность.

4. ([7], 615) Докажите, что сумма углов, составленных ребрами трехгранного угла с противоположными гранями, заключается между суммой плоских углов и половиной этой суммы.

5. ([7], 619) Даны две точки A и B, лежащие по разные стороны от плоскости. Найдите на этой плоскости такую точку, чтобы разность расстояний (по абсолютной величине) от нее до точек A и B была наибольшей.

6. ([7], 616) Из всех плоских сечений конуса, проведенных через его вершину, найдите сечение, имеющее наибольшую площадь.

7. ([7], 622) Докажите, что модуль разности между углами, образованными произвольной прямой с двумя данными плоскостями, меньше угла между этими плоскостями или равен ему.

12.2. Домашнее задание

1. ([7], 601) Из квадратного листа жести со стороной $6a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего объема. Каковы должны быть длины сторон вырезанных квадратов?

2. ([7], 606) Докажите, что если цилиндр и конус имеют равные основания и равные высоты, то отношение боковой поверхности цилиндра к боковой поверхности конуса меньше двух.

3. ([7], 611) Докажите, что если в данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема, то отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара равно $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

4. ([7], 618) Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости. Найдите на этой плоскости такую точку, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B была наименьшей.

5. ([7], 612) Докажите, что если в данный шар вписан конус наибольшего объема, то радиус шара относится к высоте конуса как 3:4.

6. ([7], 610) Докажите, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольшую боковую поверхность имеет тот, у которого осевое сечение есть квадрат.