2 семестр. Стереометрия

15 апреля 2020 г.

Программа коллоквиума. (дата проведения: ?? марта)

Баллы 10–15. Будет вопрос с доказательством (9 баллов) и беседа по программе (6 баллов).

1. Параллельные прямые. Теорема о существовании параллельных прямых. Свойства параллельных прямых.

2. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности. Свойства (2 штуки из учебника, стр. 12 и 13)

3. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Теорема о существовании плоскостей, проходящих через скрещивающиеся прямые.

4. Теорема об углах с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми.

5. Параллельность плоскостей. Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

6. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак. Свойства. Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости.

7. Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах.

8. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей.

   Нужно знать следующие понятия и факты (без доказательств): тетраэдр, пирамида, правильная пирамида, правильный тетраэдр, призма, прямая призма, правильная призма, параллелепипед, прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, куб, сфера, конус, шар, цилиндр; формулы для вычисления объема пирамиды, призмы, шара, конуса, цилиндра.

Литература: Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10–11

Домашняя контрольная работа. (дата сдачи: 15 апреля; начиная с 16 апреля, не приму ни одной задачи из этой контрольной!)

Баллы 10–20. За каждую задачу 5 баллов.

Вариант 1. (Аверьянов)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и MD соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K на ребре AD.

2. На ребрах AD и C_1D_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C соответственно точки R и U. Постройте линию пересечения плоскостей ABQ и DRU.

3. Точка P — середина ребра BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношение ребер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Через прямую AC параллельно прямой B_1P проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки B.

4. На ребрах AC и MB правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне ее основания, взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую MA.

Вариант 2. (Антонова)

1. На ребрах AB, MB, MC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку L, заданную на прямой CN, точка N которой лежит в грани MAB и находится между точками C и L.

2. На ребрах MB, MA и CD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q и R. На диагонали BD задана точка U и в грани NAD — точка V. Постройте линии пересечения плоскостей MRV и PRU.

3. Точки K, L, M — середины соответственно ребер CD, AD, A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости AB_1C и проходящей через прямую DM. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью AB_1C.

4. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр на плоскость грани MCD из точки O — центра основания пирамиды.

Вариант 3. (Белова)

1. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки P и Q соответственно на отрезках DB и A_1B_1. Постройте сечение призмы плоскостью PQK, проходящей через точку K, лежащую на ребре AB.

2. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, K, а на прямых AC и MB соответственно точки Q и R, причем точка A лежит между точками C и Q, а точка M — между точками B и R. Постройте линию пересечения плоскостей ACK и PQR.

3. На ребре MB пирамиды $MABCD$, в основании которой лежит квадрат и боковое ребро MC которой равно стороне основания и перпендикулярно плоскости основания, взята точка E — середина этого ребра. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую AC.

4. Точки D и E — середины соответствующих ребер AC и MC правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне основания. Через прямую BE параллельно прямой MD проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки A.

Вариант 4. (Гриценко)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и MD соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K в грани $ABCD$.

2. На ребрах MB, MA и CD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q и R. На диагонали BD задана точка U и в грани NAD — точка V. Постройте линии пересечения плоскостей MBV и PRU.

3. Плоскость α проходит через вершину B_1 и через точки P и Q, взятые соответственно на ребрах AB и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $BP : BA = BQ : BC = 3 : 4$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости α и проходящей через прямую C_1D. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью α.

4. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр на плоскость грани MCD из точки K — середины ребра AB.

Вариант 5. (Жавнерова)

1. На ребрах AB, MB, MC пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку L, заданную на отрезке MK, точка K которого лежит в грани $ABCD$.

2. На ребрах CC_1 и AB призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани AA_1D_1D — точка R. Постройте точку пересечения плоскости PQR и прямой DK, где K задана на ребре B_1C_1.

3. Точка P — середина ребра BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношение ребер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Через прямую AC параллельно прямой B_1P проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки D_1.

4. На ребрах AC и MB правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне ее основания, взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую AC.

Вариант 6. (Козина)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и MD соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K на ребре BC.

2. На ребрах CC_1 и AB призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани AA_1D_1D — точка R. Постройте точку пересечения плоскости PQR и прямой DL, где L в грани AA_1B_1B.

3. Точки K, L, M — середины соответственно ребер CD, AD, A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости AB_1C и проходящей через прямую A_1K. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью AB_1C.

4. Точки D и E — середины соответствующих ребер AC и MC правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне основания. Через прямую BE параллельно прямой MD проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки F — середины ребра AB.

Вариант 7. (Мельников)

1. На ребрах AB, MB, MD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q, R. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку L, заданную

в грани $ABCD$.

2. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, K, а на прямых AC и MB соответственно точки Q и R, причем точка A лежит между точками C и Q, а точка M — между точками B и R. Постройте линию пересечения плоскостей APK и PQR.

3. Плоскость α проходит через вершину B_1 и через точки P и Q, взятые соответственно на ребрах AB и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $BP : BA = BQ : BC = 3 : 4$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости α и проходящей через прямую A_1D. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью α.

4. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр на плоскость грани MCD из точки A.

Вариант 8. (Мельникова)

1. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки P и Q соответственно на отрезках DB и A_1B_1. Постройте сечение призмы плоскостью PQK, проходящей через точку K, лежащую на ребре AB.

2. На ребрах AD и C_1D_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C соответственно точки R и U. Постройте линию пересечения плоскостей ACU и PQR.

3. На ребре MB пирамиды $MABCD$, в основании которой лежит квадрат и боковое ребро MC которой равно стороне основания и перпендикулярно плоскости основания, взята точка E — середина этого ребра. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую D.

4. Точка D — середина ребра MA пирамиды $MABC$, у которой ребра AC, BC, MC равны и попарно перпендикулярны. Опустите перпендикуляры на плоскость BCD из точки L — центра грани ABC.

Вариант 9. (Сенькина)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и CQ соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K на луче MR, где $R \in CD$, причем $M - R - K$.

2. На ребрах CC_1 и AB призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани AA_1D_1D — точка R. Постройте точку пересечения плоскости PQR и прямой MN, где M задана на ребре C_1D_1, N — в грани $ABCD$.

3. Точка P — середина ребра BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношение ребер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Через прямую AC параллельно прямой B_1P проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки A_1.

4. На ребрах AC и MB правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне ее основания, взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую DE.

Вариант 10. (Хрулев)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и CQ соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K на отрезке MR, где R лежит на диагонали AC.

2. На ребрах MB, MA и CD пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, Q и R. На

диагонали BD задана точка U и в грани NAD — точка V. Постройте линии пересечения плоскостей PUV и BRQ.

3. Точки K, L, M — середины соответственно ребер CD, AD, A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости AB_1C и проходящей через прямую C_1L. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью AB_1C.

4. Точки D и E — середины соответствующих ребер AC и MC правильной пирамиды $MABC$, высота которой равна стороне основания. Через прямую BE параллельно прямой MD проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки D.

Вариант 11. (Шишков)

1. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ — точка R. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DR параллельно прямой PQ.

2. На ребрах AD и C_1D_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P и Q, а в гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C соответственно точки R и U. Постройте линию пересечения плоскостей PRU и AQR.

3. На ребре MB пирамиды $MABCD$, в основании которой лежит квадрат и боковое ребро MC которой равно стороне основания и перпендикулярно плоскости основания, взята точка E — середина этого ребра. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости MBC и проходящей через прямую DE.

4. Точка D — середина ребра MA пирамиды $MABC$, у которой ребра AC, BC, MC равны и попарно перпендикулярны. Опустите перпендикуляры на плоскость BCD из точки A.

Вариант 12. (Шулика)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и MD соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K в грани MBC.

2. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, K, а на прямых AC и MB соответственно точки Q и R, причем точка A лежит между точками C и Q, а точка M — между точками B и R. Постройте линию пересечения плоскостей BQK и PQR.

3. Плоскость α проходит через вершину B_1 и через точки P и Q, взятые соответственно на ребрах AB и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $BP : BA = BQ : BC = 3 : 4$. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной плоскости α и проходящей через прямую A_1C_1. Найдите линию пересечения построенной секущей плоскости с плоскостью α.

4. Точка D — середина ребра MA пирамиды $MABC$, у которой ребра AC, BC, MC равны и попарно перпендикулярны. Опустите перпендикуляры на плоскость BCD из точки K — середины ребра MB.

Вариант 13. (Толмачева)

1. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, точки P, Q на ребрах AM и MD соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной прямым BP и CQ и проходящей через точку K на луче MR, где $R \in CD$, причем $M - R - K$.

2. На ребрах MC и MB пирамиды $MABCD$ заданы соответственно точки P, K, а на прямых AC и MB соответственно точки Q и R, причем точка A лежит между точками C и Q, а точка M — между точками B и R. Постройте линию пересечения плоскостей APK и PQR.

3. Точка P — середина ребра BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношение ребер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$. Через прямую AC параллельно прямой B_1P проведена секущая плоскость. Опустите перпендикуляр на эту плоскость из точки D_1.

4. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. Опустите перпендикуляр на плоскость грани MCD из точки K — середины ребра AB.

Контрольная работа (дата проведения: 28 апреля)

Будут задачи из Семинаров и Домашних заданий 2.3 (Тетраэдр 1) – 2.8 (Вычисление площадей сечений)

Баллы 10–30 баллов. Обязательными являются четыре задачи, 5-я задача на дополнительные баллы (это задача из Семинаров и Домашних заданий 2.9 – 2.12, 1.11.

Примерный вариант контрольной работы.

1. (7 баллов) Найдите величину двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

2. (7 баллов) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центр тяжести расположен в середине отрезка, соединяющего центр описанной сферы с точкой пересечения высот.

3. (8 баллов) Объем четырехугольной пирамиды $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$, равен V. На ребрах AB, AS и луче AD взяты точки P, Q, R, такие, что $AP : AB = p : 1$, $AQ : AS = q : 1$, $AR : AD = r : 1$. Найдите объем той отсекаемой плоскостью PQR части пирамиды, которая содержит точку A.

4. (8 баллов) Дана правильная шестиугольная призма, каждое ребро которой равно 1. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через два параллельных ребра оснований, не принадлежащих одной грани.

5. (необязательная, доступна только в день проведения контрольной работы +9 баллов)

Основанием пирамиды $FABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен $\alpha < 90^0$. В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA_1E_1D_1$, причем A_1, E_1, D_1 лежат соответственно на боковых ребрах AF, CF, BF пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите отношение объема призмы к объему пирамиды.

Зачет (дата проведения: ?? мая)

Баллы 22–35. Будет беседа по программе коллоквиума (все факты без доказательств) (5 баллов). Далее будут 3 задачи из Семинаров и Домашних заданий 2.3 (Тетраэдр 1) – 2.8 (Вычисление площадей сечений). Можно пользоваться своими (!!!) записями при подготовке. Использование книг, чужих записей, технических устройств не допускается. На подготовку по каждой задаче 5 минут. После этого нужно рассказать ее решение без подглядывания в записи. За каждую задачу максимум 10 баллов.