Дополнительные главы проективной геометрии.

13 марта 2016 г.

Литература.

1. Гусева Н.И. и др. Геометрия. Том 2, Москва, Академия, 2013.

2. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии к неевклидовой, Москва, Просвещение, 1979.

§ 1. Возникновение проективного пространства.

Проективная геометрия берет свое начало в изобразительном искусстве. Рассмотрим такой пример (картинка): две параллельные прямые в пространстве и плоскость (холст или сетчатка глаза). Лучи света, идущие в глаз, пересекают плоскость, в результате на ней получается изображение. Будем рассматривать лучи, идущие от удаляющихся точек на данных прямых. Что будет происходить с их изображениями? Они будут приближаться к точке A на плоскости изображения. Сама точка A будет точкой пересечения луча света, который параллелен данным прямым, то есть A – это изображение точки, которой нет в евклидовом пространстве. Но на изображении мы ее видим. Итак, мы видим больше, чем есть в евклидовом пространстве. Процесс, который мы описали, называется центральным проектированием (одной плоскости на другую). Это отображение точек (в нашем примере точки одной плоскости отображаются на точки другой плоскости). Мы увидели, что для взаимной однозначности центрального проектирования (которое лежит в основе нашего зрительного восприятия окружающего мира) на евклидовой плоскости, а значит, и в евклидовом пространстве точек не хватает. Их придется добавлять. Но этим странности центрального проектирования не исчерпываются.

Понятно, что длины и углы при центральном проектировании не сохраняются (на картинке были параллельные прямые с углом 0 градусов, стали пересекающиеся с углом не нуль). Но отрезок может перейти в луч, следовательно, простое отношение трех точек не сохраняется. Зато точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки также лежащие на одной прямой. Еще интереснее обстоит дело с невырожденными линиями второго порядка: эллипсом, гиперболой и параболой. При центральном проектировании каждая из них может превратиться в другую. Мы нарисуем случай, когда эллипс (окружность) превращается в гиперболу и параболу. Остальные случаи разберите самостоятельно.

Вспомним определение геометрии, которое дал Ф.Клейн. Геометрия – это наука, которая изучает свойства фигур того или иного пространства, инвариантные относительно определенной группы преобразований. Согласно этому определению нам предстоит сначала выделить пространство, в котором мы будем работать (в евклидовом недостает точек); затем построим группу его преобразований, в которую должны входить центральные проектирования (только они группу не образуют); наконец, выделить фигуры, которые инвариантны относительно этой группы преобразований (мы уже увидели, что отрезков там не будет, а значит не будет треугольников и вообще многоугольников, зато будут прямые, и эллипс, гипербола и парабола будут неразличимы с точки зрения этой геометрии). Пространство, о котором идет речь, называется проективным. Обычно, когда говорят просто проективное пространство, то имеют ввиду трехмерное проективное пространство. Но построить проективное пространство любой размерности $n \geq 1$. В нашем курсе будут рассматриваться 1-мерные проективные пространства, которые называются проективными прямыми, и 2-мерные проективные пространства, которые называются проективными плоскостями. Используя проективные плоскости, можно построить, знакомые вам, геометрию Лобачевского и эллиптическую геометрию Римана, а также ряд других геометрий, чем мы и займемся во второй части курса.

§ 2. Проективная прямая

2.1. Определение

Пусть L – двумерное векторное пространство (нас будет особо интересовать множество векторов, параллельных фиксированной плоскости), P – не пустое множество произвольной природы. Зададим отображение $\pi : L \setminus \{\vec{0}\} \to P$ (все множество векторов $L \setminus \{\vec{0}\}$ отображается на P), такое, что

1) π – сюръективно (у каждой точки из P есть прообраз в $L \setminus \{\vec{0}\}$);

2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} \| \vec{y}$, то есть образы двух векторов при отображении π совпадают в том и только том случае, когда векторы коллинеарны.

Множество P с заданным отображением π называется *проективной прямой*. Элементы множества P называются *точками* проективной прямой. Если выполняется равенство $\pi(\vec{x}) = X$, то говорят, что вектор $\vec{x}$ порождает точку X или что точка X порождена вектором $\vec{x}$.

Из определения проективной прямой следует, что два вектора порождают одну и ту же точку тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

В определении проективной прямой было указано множество P произвольной природы. Нас будет интересовать конкретное множество P, а именно множество, частью которого будут точки обычной прямой d. Посмотрим, сколько точек на прямой d нам не хватит для того, чтобы превратить ее в проективную прямую.

Пусть дана прямая d (картинка). Возьмем точку O, не лежащую на прямой d. Прямая d и точка O однозначно определяют плоскость α. Пусть L – это множество всех векторов, параллельных плоскости α. Построим отображение π следующим образом: для каждого вектора $\vec{x} \in L$ будем проводить через точку O, параллельную ему прямую и пересекать ее с прямой d. Точка, которая при этом получается, будет образом вектора $\vec{x}$ при отображении π (обозначим ее X), то есть $\pi(\vec{x}) = X$. Будет ли множество точек прямой d с заданным отображением π проективной прямой? Условия 1) и 2) выполняются (посмотрите на картинку). Но отображение π задано не для всех векторов из $L \setminus \{\vec{0}\}$. Для векторов, параллельных прямой d, образа при отображении π нет. Для них требуются еще дополнительные точки. Сколько? Все названные векторы коллинеарны между собой, а значит, они должны порождать одну точку. Следовательно, к точкам прямой d нужно добавить всего одну точку, чтобы она стала проективной прямой. Добавленную точку называют *несобственной точкой* и обозначают A_∞ или B_∞ и т.д. Множество $d \cup \{A_\infty\}$ обозначается $\bar{d}$ и называется *расширенной прямой*.

Задача 2.1. Существуют и другим примеры (еще говорят модели) проективных прямых. Например, в качестве множества P можно взять пучок прямых с центром в точке O обычной плоскости. Напомним, что пучком прямых с центром в точке O называется множество всех прямых плоскости, проходящих через точку O. Элементом этого множества является прямая пучка. В качестве L опять возьмите множество всех векторов, параллельных плоскости пучка прямых, и постройте отображение π для него.

Задача 2.2. $*$ Еще одним примером проективной прямой может служить окружность с отождествленными диаметрально противоположными точками. Докажите.

Указания. Поместите в центр окружности пучок прямых и действуйте по определению проективной прямой.

2.2. Координаты точки на расширенной прямой

На обычной прямой d мы могли каждой точке взаимно однозначно сопоставить число. Для этого нужно было фиксировать одну точку O на этой прямой и вектор $\vec{e}$, параллельный ей. Тогда для каждой точки M прямой d ставилось в соответствие число x, которое получалось так: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$. Пара $(O, \vec{e})$ называется *аффинной системой координат* на прямой d. Число x называется координатой точки M в системе координат $(O, \vec{e})$.

На расширенной прямой $\bar{d}$ тоже можно построить соответствие между точками и числами. Но из-за появления несобственной точки координат уже будет две и определяться они будут не взаимно однозначно, а с точностью до пропорциональности. Проведем подробные построения.

Начать нужно с аналога аффинной системы координат. Возьмем на расширенной прямой $\bar{d}$ упорядоченную систему из трех различных точек (A_1, A_2, E). Она называется *проективным репером* на расширенной прямой $\bar{d}$. Вспомним, что отображение π нам помогала строить точка O, не лежащая на прямой d. С ее помощью мы сможем еще и обеспечить каждую точку расширенной прямой $\bar{d}$ парой чисел (картинка). Обозначим векторы, порождающие точки A_1, A_2, E через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$ соответственно. Таких векторов много (любой вектор, параллельный прямой OA_1 порождает точку A_1 и т.д). Мы начнем с выбора вектора $\vec{e}$. Сделаем его произвольным образом. Отложим представитель $\overrightarrow{OE}$ этого вектора от точки O. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ так, чтобы получился параллелограмм со сторонами, лежащими на прямых OA_1 и OA_2 и диагональю OE. Пару векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ будем называть *согласованной*. Теперь берем точку $M \in \bar{d}$. Ее порождает любой вектор $\vec{m}$, параллельный прямой OM. Выбираем любой. В результате мы имеем вектор $\vec{m}$ и базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Раскладываем вектора $\vec{m}$ по этому базису:

$$\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2.$$

Упорядоченная пара чисел (m_1, m_2) называется *координатами* точки M относительно проективного репера прямой $\bar{d}$. Эта пара чисел определена не однозначно. Почему? Во-первых, мы могли выбрать другой вектор $\vec{n}$, порождающий точку M. Тогда $\vec{n} = \lambda\vec{m}$ и

$$\vec{n} = \lambda\vec{m} = \lambda(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2) = (\lambda m_1)\vec{a}_1 + (\lambda m_2)\vec{a}_2,$$

то есть пара чисел $(\lambda m_1, \lambda m_2)$ тоже будет координатами точки M. Эта пара отличается от первой на множитель λ. Во-вторых, мы могли выбрать другой вектор $\vec{e}$ и построить по нему другую пару $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Докажите самостоятельно, что в этом случае тоже получится пара чисел, пропорциональная первой.

Итак, на расширенной прямой $\bar{d}$ с помощью проективного репера (A_1, A_2, E) мы обеспечили каждую точку упорядоченной парой чисел (координатами). Эта пара определена однозначно с точностью до общего множителя.

Из очевидных равенств

$$\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2;\ \vec{a}_2 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2;\ \vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

следует, что в проективном репере (A_1, A_2, E)

$$A_1(1,0);\ A_2(0,1);\ E(1,1).$$

Оказывается среди проективных реперов расширенной прямой $\bar{d}$ есть такие, которые однозначно определяют аффинные системы координат прямой d. При этом можно получить зависимость между проективными координатами точки прямой d и аффинной координатой этой же точки в соответствующей аффинной системе координат.

В самом деле, рассмотрим на расширенной прямой $\bar{d}$ проективный репер (A_1^∞, A_2, E) (первая точка репера несобственная). Возьмем произвольную собственную точку M (картинка). Обозначим ее координаты в данном проективном репере через (x_1, x_2). Из двух собственных точек проективного репера, то есть из точек A_2 и E соорудим аффинную систему координат $(A_2, \overrightarrow{A_2E})$. Относительно этой системы координат точка M одну координату. Обозначим ее x. Вспоминаем, как получаются числа (x_1, x_2). Мы брали вспомогательную точку O и строили согласованную систему векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Для этого в качестве вектора $\vec{e}$ возьмем вектор $\overrightarrow{OE}$. Тогда $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$. Достраиваем $\vec{a}_1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{m}$, порождающий точку M. Тогда по определению координат точки в проективном репере

$$\vec{m} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2.$$

С другой стороны, по определению аффинной координаты

$$\overrightarrow{A_2M} = x\overrightarrow{A_2E}.$$

Так как $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, получим

$$x\vec{a}_1 = x\overrightarrow{A_2E} = \overrightarrow{A_2M} = -\vec{a}_2 + \lambda\vec{m} = -\vec{a}_2 + \lambda(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2).$$

По линейной независимости получаем, что $x = \lambda x_1$ и $\lambda x_2 = 1$. Выражая λ, получим

$$x = \frac{x_1}{x_2}. \tag{2.1}$$

§ 3. Проективная плоскость

3.1. Определение

Пусть V – трехмерное векторное пространство, P – не пустое множество произвольной природы. Зададим отображение $\pi : L \setminus \{\vec{0}\} \to P$ (все множество векторов $L \setminus \{\vec{0}\}$ отображается на P), такое, что

1) π – сюръективно (у каждой точки из P есть прообраз в $L \setminus \{\vec{0}\}$);

2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} \| \vec{y}$, то есть образы двух векторов при отображении π совпадают в том и только том случае, когда векторы коллинеарны.

Множество P с заданным отображением π называется *проективной плоскостью*. Если $\pi(\vec{x}) = X$, то говорят, что вектор $\vec{x}$ порождает точку X. Все вектора, параллельные $\vec{x}$ порождают ту же точку X, то есть точка X порождается одномерным подпространством из пространства V. Другими словами, каждое одномерное подпространство из V порождает точку из P. Но в V есть еще двумерные подпространства. Если мы сузим отображение π на такое двумерное подпространство, то мы получим в точности определение проективной прямой. Значит, двумерные подпространства порождают проективные прямые на проективной плоскости P. Все. Подпространств других размерностей в V нет.

Задача 3.1. Докажите, что любые две различные прямые на проективной плоскости пересекаются.

Посмотрим на примеры проективных плоскостей. Начнем с аналога расширенной прямой – расширенной плоскости. Возьмем обычную плоскость α и точку O, не принадлежащую ей. Будем строить отображение π так. Берем ненулевой вектор $\vec{x} \in V$ и проводим прямую через точку O параллельно вектору $\vec{x}$. Пересекаем эту прямую с плоскостью α и полученную точку X ставим в соответствие вектору $\vec{x}$ при отображении π. Как и в случае расширенной прямой, не все вектора из V будут обеспечены точками.

Векторы, которые параллельны плоскости α не будут иметь образов при отображении π. Следовательно, для этих векторов нужно добавить точек к плоскости α. Вопрос, сколько. Для всех коллинеарных между собой векторов достаточно одной точки. А у нас получается целое двумерное подпространство векторов. В нем бесконечно много одномерных подпространств и каждое нужно обеспечить точкой. Как будут располагаться эти точки? Двумерное подпространство порождает проективную прямую. Значит, множество добавленных точек – это проективная прямая. Так добавленные точки мы называем несобственными, то и эту прямую мы назовем несобственной. Несобственные точки будем обозначать A_∞ или A^∞, несобственную прямую будем обозначать ℓ_∞ или ℓ^∞. Расширенная плоскость обозначается α.

Еще один пример проективной плоскости. Рассмотрим связку прямых с центром в точке O (Связкой прямых в пространстве с центром в данной точке называется множество всех прямых пространства, проходящих через эту точку). Отображение π построим так. Каждому ненулевому вектору из V поставим в соответствие параллельную ему прямую из связки. Легко видеть, что оба условия из определения проективной плоскости выполняются. Значит связка прямых является примером проективной плоскости. Каждый пучок прямых из этой связки является проективной прямой. Точками в этом примере проективной плоскости будут являться прямые связки.

3.2. Координаты точки на расширенной плоскости

На обычной плоскости α мы вводили аффинную систему координат, для того, чтобы каждую точку обеспечить упорядоченной парой чисел – координатами этой точки в данной аффинной системе координат. Напомним, что аффинная система координат на плоскости – это тройка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, состоящая из точки O этой плоскости и пары не коллинеарных векторов. Тогда для каждой точки M плоскости α получим

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Упорядоченная пара чисел (x, y) называется координатами точки M в аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Для аффинной системы координат соответствие точка – набор координат взаимно однозначно.

Обеспечим каждую точку расширенной плоскости упорядоченным набором чисел. Сначала нужен проективный репер. Назовем проективным репером упорядоченную систему из четырех точек (A_1, A_2, A_3, E), никакие три из которых не лежат на одной расширенной прямой (среди них могут быть несобственные). Расширенные прямые (A_2A_3), (A_1A_3), (A_1A_2) называются координатными прямыми.

Пусть M – произвольная точка расширенной плоскости, $\vec{m}$ – вектор, порождающий ее. Рассмотрим согласованную систему векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, порождающую соответственно точки A_1, A_2, A_3. Согласованность означает, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{e}$, где $\vec{e}$ – вектор, порождающий точку E. Раскладываем вектор $\vec{m}$ по векторам $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$$\vec{m} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3.$$

Упорядоченная система чисел (x_1, x_2, x_3) называется координатами точки M в проективном репере (A_1, A_2, A_3, E). Эти числа определены однозначно с точностью до постоянного множителя. Другими словами, числа $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ также будут координатами той же точки M. Аналогично расширенной прямой, этот множитель обусловлен неоднозначностью выбора вектора $\vec{m}$, порождающего точку M, и выбором согласованной системы векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Аналогично случаю прямой получаем (проведите доказательство самостоятельно), что

$$A_1(1, 0, 0);\ A_2(0, 1, 0);\ A_3(0, 0, 1);\ E(1, 1, 1).$$

Изобразим проективный репер (A_1, A_2, A_3, E) на расширенной плоскости. Рассмотрим условие согласованности векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

$$\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2) + (\frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3) + (\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_3).$$

Обозначим

$$\vec{e}_3 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_2; \quad \vec{e}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_2 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_3; \quad \vec{e}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_3.$$

Мы получаем три новых вектора из V. Они порождают точки на расширенной плоскости. Выясним, где эти точки лежат. Рассмотрим первое равенство. Так как вектор $\vec{e}_3$ выражается через векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, они лежат в одном двумерном векторном подпространстве. Тогда точки E_3, A_1, A_2, которые порождаются этими векторами будут лежать на одной расширенной прямой. Аналогично получаем для двух остальных равенств (там возникнут точки E_1, E_2). Кроме того,

$$2\vec{e}_3 + \vec{a}_3 = \vec{e},$$

то есть векторы $\vec{e}_3$, $\vec{a}_3$, $\vec{e}$ принадлежат одному двумерному подпространству, а значит порождают точки, лежащие на одной прямой. Теперь мы можем изобразить точки E_1, E_2, E_3 на рисунке. Эти точки получаются с помощью центрального проектирования точки E на прямые (A_2A_3), (A_1A_3), (A_1A_2) из центров A_1, A_2, A_3 соответственно.

Задача 3.2. Найдите координаты точек E_1, E_2, E_3 в проективном репере (A_1, A_2, A_3, E).

Рассмотрим произвольную точку M расширенной плоскости. Пусть эта точка имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в проективном репере (A_1, A_2, A_3, E). Так же как для точки E мы получали точки E_1, E_2, E_3, здесь мы можем построить точки M_1, M_2, M_3. Эти точки лежат на координатных прямых. Координатные прямые – это расширенные прямые. На каждой из них есть по три различных точки: (A_1, A_2, E_3), (A_2, A_3, E_1), (A_1, A_3, E_2) соответственно. Это проективные реперы на этих расширенных прямых. Выясним, какие координаты имеют точки M_1, M_2, M_3 в проективных реперах своих расширенных прямых.

Рассмотрим случай точки M_1 (для нее репер (A_2, A_3, E_1)). Рассуждая также как для точек E_1, E_2, E_3, получаем, что точка M_1 порождается вектором

$$\vec{m}_1 = x_2(\frac{1}{2}\vec{a}_2) + x_3(\frac{1}{2}\vec{a}_3).$$

Следовательно, координаты точки M_1 в проективном репере (A_2, A_3, E_1) прямой (A_2A_3) имеют вид (x_2, x_3). Для двух остальных точек проведите рассуждения самостоятельно.

Вспомним, что расширенная плоскость $\bar{\alpha}$ получалась из обычной плоскости α добавлением прямой несобственных точек. На плоскости α есть аффинные системы координат, которые обеспечивают каждую точку M этой плоскости упорядоченной парой координат (x, y). Но мы можем посмотреть на эту же точку, как на точку расширенной плоскости и обозначить ее координаты относительно проективного репера (x_1, x_2, x_3). По аналогии с расширенной прямой, мы можем выбрать такую аффинную систему координат и проективный репер, что координаты точки M относительно них будут связаны формулами

$$x = \tfrac{x_1}{x_3}; \quad y = \tfrac{x_2}{x_3}. \tag{3.1}$$

Действительно, в качестве проективного репера возьмем репер $(A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$ и обозначим координаты точки M относительно него (x_1, x_2, x_3). Тогда аффинная система координат будет $(A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ и относительно нее обозначим координаты точки M через (x, y). Спроектируем точку M на координатные прямые проективного репера. Точки M_1 и M_2 будут собственными, а M_3 – несобственной. Точка M_1 в проективном репере (A_2^∞, A_3, E_1) имеет координаты (x_2, x_3), а в аффинной системе координат $(A_3, \overrightarrow{A_3E_1})$ имеет координату y. Тогда по формуле для расширенной прямой получим $y = \frac{x_2}{x_3}$. Аналогичные рассуждения проводятся для точки M_2.

Замечание 3.1. В некоторых учебниках координаты собственной точки M расширенной плоскости $\bar{\alpha}$ относительно проективного репера вида $(A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$ называются *однородными координатами* этой точки. Заметим, что для каждой аффинной системы координат существует проективный репер указанного вида.

3.3. Формулы перехода от одного проективного репера к другому

Пусть даны два проективных репера $R_1 = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R_2 = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ на расширенной плоскости. Рассмотрим точку M и обозначим ее координаты (x_1, x_2, x_3) в репере R_1 и (x'_1, x'_2, x'_3) в репере R_2. Так как это координаты вектора $\vec{m}$, порождающего точку M в базисах $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$ соответственно, а формулы перехода от одного базиса к другом линейны, то и формулы перехода для проективных реперов будут линейными. Так как координаты точки на проективной плоскости определяются с точностью до постоянного ненулевого множителя, в левой части этих формул будет стоять этот множитель. В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 \\ \lambda x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 \\ \lambda x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3. \end{aligned}$$

Единственным ограничением на эти формулы будет отличие от нуля следующего определителя

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 4. Уравнения прямой, эллипса, гиперболы и параболы в однородных координатах

4.1. Уравнение прямой

Пусть дана обычная плоскость α, расширенная плоскость $\bar{\alpha}$, аффинная система координат на α и проективный репер, соответствующий этой системе координат. Рассмотрим прямую d. Как мы знаем, относительно аффинной системы координат прямая задается линейным уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \; A^2 + B^2 \neq 0.$$

Мы можем записать это уравнение в однородных координатах, используя формулы (3.1):

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{4.1}$$

Это уравнение задает тоже самое множество точек d, если мы ограничимся только плоскостью α. А если мы будем рассматривать расширенную плоскость $\bar{\alpha}$? Естественно у нас останутся все точки прямой d. Для этих точек $x_3 \neq 0$. Но, например, тройка чисел $(-B, A, 0)$ удовлетворяет этому уравнению, а значит, на расширенной плоскости есть точка с такими координатами. Это несобственная точка этой прямой. Таким образом, уравнение (4.1) задает расширенную прямую $\bar{d}$. Здесь условие $A^2 + B^2 \neq 0$ превращается в условие $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Уравнение расширенной прямой можно вывести непосредственно из определения проективной прямой, причем для любого проективного репера, а не только для проективного репера с двумя бесконечно удаленными точками.

Задача 4.1**.** Пусть на расширенной плоскости $\bar{\alpha}$ дан произвольный проективный репер (A_1, A_2, A_3, E). Выведите уравнение расширенной прямой $\bar{d}$, проходящей через две данные точки $C(c_1, c_2, c_3)$ и $D(d_1, d_2, d_3)$.

Решение. Обозначим через $\vec{c}$ и $\vec{d}$ векторы, порождающие соответственно точки C и D. Пусть $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ – согласованная тройка векторов, порождающая точки A_1, A_2, A_3 данного проективного репера. Тогда по определению координат точки в проективном репере получим, что

$$\vec{c}(c_1, c_2, c_3); \quad \vec{d}(d_1, d_2, d_3)$$

относительно базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ трехмерного векторного пространства V. Пусть M – произвольная точка расширенной прямой $\bar{d}$, обозначим ее координаты через (x_1, x_2, x_3). Тогда вектор $\vec{m}$, порождающий эту точку, будет иметь координаты (x_1, x_2, x_3). Так как точки M, C и D лежат на одной расширенной прямой, а такая прямая порождается двумерным векторным подпространством, векторы $\vec{m}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ принадлежат этому подпространству, то есть коллинеарны. Условие коллинеарности векторов в координатах выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то мы получим уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

где a_1, a_2, a_3 одновременно не равны нулю. Это общее уравнение расширенной прямой.

Мы можем записать параметрические уравнения расширенной прямой. Для этого условие коллинеарности векторов $\vec{m}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ запишем в таком виде

$$\vec{m} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{d}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

причем одновременно не равны нулю. Расписывая это равенство в координатах, получим

$$\begin{cases} x_1 = \lambda c_1 + \mu d_1; \\ x_2 = \lambda c_2 + \mu d_2; \\ x_3 = \lambda c_3 + \mu d_3. \end{cases}$$

Это параметрические уравнения расширенной прямой. □

4.2. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Пусть дана обычная плоскость α и расширенная плоскость $\bar{\alpha}$. Напомним, что уравнения эллипса, гиперболы и параболы в прямоугольной декартовой системе координат, выбранной очень удачным образом, имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y^2 = 2px.$$

Для эллипса и гиперболы поменяем эти систему координат на аффинную, для которой формулы перехода имеют вид:

$$x = ax'; \quad y = by'.$$

Тогда уравнения эллипса и гиперболы примут вид: $(x')^2 + (y')^2 = 1$ и $(x')^2 - (y')^2 = 1$. Для параболы поменяем систему координат так: $x = \frac{x'}{2p}$, $y = y'$. Тогда уравнение параболы будет иметь вид $(y')^2 = x'$. Так как исходная прямоугольная декартова система координат нам дальше не понадобится, будем

говорить, что относительно некоторой аффинной системы координат заданы эллипс, гипербола и парабола уравнениями
$$x^2 + y^2 = 1; \quad x^2 - y^2 = 1; \quad y^2 = x.$$
Рассмотрим соответствующий проективный репер и перейдем к однородным координатам:
$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0; \quad (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0; \quad (x_2)^2 = x_1 x_3.$$
Если во втором уравнении умножить обе части на -1 и переобозначить координатные прямые, то мы получим уравнение такого же вида, как первое. В третьем уравнении чуть сложнее. Придется перейти к другому проективному реперу по формулам
$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_3' \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_1' + x_3' \end{aligned}$$
Тогда уравнение параболы примет вид $(x_1')^2 - (x_2')^2 - (x_3')^2 = 0$. Опять делаем тоже, что для гиперболы и получаем такое же уравнение, как у эллипса. Значит, на расширенной плоскости эллипс, гипербола и парабола не различимы (мы смогли уравнение гиперболы и параболы с помощью формул перехода от одного проективного репера к другому перевести в уравнение эллипса; для аффинных систем координат такое невозможно).

§ 5. Принцип двойственности на проективной плоскости

Пусть в трехмерном векторном пространстве V дано какое-нибудь векторное подпространство U (оно может быть одномерным или двумерным). Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ ортогонален подпространству U, если он ортогонален любому вектору из U.

Ортогональным дополнением подпространства U в векторном пространстве V называется множество всех векторов из V, которые ортогональны U.

Если U – одномерное векторное подпространство в V (представляем его себе как множество всех векторов, параллельных некоторой прямой ℓ), то его ортогональное дополнение будет состоять из всех векторов, параллельных плоскости, которая перпендикулярна прямой ℓ. Кратко, допуская вольность речи, можно сказать, что ортогональным дополнением прямой будет перпендикулярная плоскость.

Если U – двумерное векторное подпространство в V, то его ортогональным дополнением будет одномерное подпространство, все вектора которого ортогональны U. Представить себе U можно как плоскость, а ортогональное дополнение как прямую, перпендикулярную этой плоскости.

Вернемся к проективной геометрии. Напомним, что точки проективной плоскости порождаются одномерными подпространствами, а прямые – двумерными. Тогда принадлежность точки проективной прямой означает, что одномерное подпространство, порождающее точку, содержится в двумерном подпространстве, порождающем прямую.

Пусть у нас есть утверждение $X \in \bar{d}$ (точка лежит на расширенной прямой). Пусть точка X порождена одномерным подпространством U, а прямая $\bar{d}$ – двумерным подпространством L. Тогда $U \subset L$. Перейдем в этом включении к ортогональным дополнениям подпространств U и L. Одномерное подпространство U перейдет в двумерное подпространство $U^\perp$, а двумерное подпространство L – в одномерное $L^\perp$. При этом $U^\perp \supset L^\perp$, а значит прямая $\bar{x}$, порождаемая $U^\perp$, проходит через точку D, порождаемую $L^\perp$. Итак, из утверждения $X \in \bar{d}$ мы получили верное утверждение прямая x проходит через точку D.

Это обстоятельство позволяет сформулировать *принцип двойственности на проективной плоскости*: если на проективной плоскости справедливо предложение $\mathscr{A}$, в котором говорится о точках, прямых и их взаимной принадлежности, то справедливо и *двойственное предложение* $\mathscr{A}^*$, которое получается из предложения $\mathscr{A}$ заменой слов

точка	прямая	лежит на	проходит через
↓	↓	↓	↓
прямая	точка	проходит через	лежит на

Пример 5.1. Рассмотрим утверждение: любые две различные прямые на проективной плоскости пересекаются в одной точке.

Это утверждение мы уже доказали. Тогда принцип двойственности позволяет получить верное утверждение: через любые две различные точки проективной плоскости проходит единственная прямая. Благодаря принципу двойственности это утверждение уже не требует доказательства.

§ 6. Сложное отношение четырех точек проективной прямой

Как мы видели, при центральном проектировании отрезок может перейти в луч, а значит, в проективной геометрии простого отношения трех точек (это основной инвариант аффинной геометрии) нет. Вместо него вводится понятие сложного отношения четырех точек проективной прямой.

Пусть дана расширенная прямая $\bar{d}$ и точки A, B, C, D на ней. При этом точки A, B, C различны, а точка D не совпадает с точкой A. Тогда точки (A, B, C) образуют проективный репер на расширенной прямой $\bar{d}$. Относительно этого репера точка D имеет некоторые координаты. Обозначим их (d_1, d_2). Так как точка D не совпадает с точкой A, имеющей координаты $(1, 0)$ в своем репере, вторая координата точки D отлична от нуля, то есть $d_2 \neq 0$. Обозначение (AB, CD).

Это определение не удобно для непосредственных вычислений сложного отношения четырех точек. Поэтому выводят формулу для вычисления сложного отношения, для точек, координаты которых заданы относительно произвольного проективного репера расширенной прямой.

Пусть дана расширенная прямая $\bar{d}$, проективный репер на ней (A_1, A_2, E) и четыре точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$ на расширенной прямой $\bar{d}$. Тогда их сложное отношение вычисляется по формуле

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \equiv \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}. \tag{6.1}$$

Пусть A, B, C, D – собственные точки расширенной прямой. Тогда в качестве проективного репера возьмем репер (A_1^{∞}, A_2, E). На прямой d возникнет аффинная система координат $(A_2, \overrightarrow{A_2E})$. Обозначим в этом репере координаты точек $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Тогда по формуле (2.1) и формуле (6.1) получим

$$(AB, CD) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

Мы видим, что это отношение длин отрезков со знаками (будет плюс, если начало отрезка лежит левее его конца и со знаком минус, если правее).

Рассмотрим случай, когда одна из точек A, B, C, D – несобственная (а остальные с необходимостью собственные). Пусть это точка A^{∞} (остальные случаи рассматриваются аналогично, изучите их самостоятельно). Тогда в качестве проективного репера расширенной прямой возьмем репер (A, A_2, E). Тогда соответствующая аффинная система координат будет иметь вид $(A_2, \overrightarrow{A_2E})$. Координаты точки A в выбранном проективном репере будут $(1, 0)$. В аффинной системе у нет координаты, так как она не принадлежит обычной прямой d. Для остальных точек такие координаты есть и обозначим их как и предыдущем случае. Вычислим сложное отношение четырех точек по формуле (6.1):

$$(A^{\infty}B, CD) = \frac{c_2(b_1d_2 - d_1b_2)}{d_2(b_1c_2 - c_1b_2)} = \frac{b-d}{b-c} = -\frac{b-d}{c-b}.$$

С другой стороны, простое отношение трех точек $(DC, B) = \lambda$, определяемое как $\overrightarrow{DB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, будет вычисляться через координаты так: $b - d = \lambda(c - b)$. Сравнивая полученный результат со сложным отношением четырех точек, получим

$$(A^{\infty}B, CD) = -(DC, B).$$

Другими словами, сложное отношение четырех точек расширенной прямой, одна из которых несобственная сводится к простому отношению оставшихся трех точек.

Задача 6.1**.** Используя формулу формуле (6.1), докажите следующие свойства сложного отношения четырех точек прямой

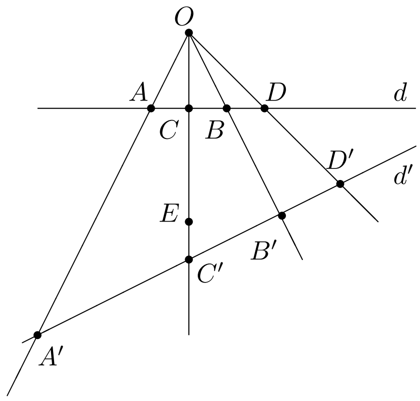
(1) $(BA, CD) = \frac{1}{(AB,CD)}$; $(AB, DC) = \frac{1}{(AB,CD)}$;

(2) $(AB, CD) = (CD, AB)$;

(3) $(AC, BD) = 1 - (AB, CD)$.

Задача 6.2**.** Покажите, что сложное отношение четырех точек проективной прямой сохраняется при центральном проектировании одной расширенной прямой на другую.

Решение. Пусть даны две расширенные прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$. Возьмем точку O, не лежащую на этих прямых, а также четыре точки A, B, C, D, такие, что первые три различны, а четвертая точка не совпадает с первой. Спроектируем их на прямую $\bar{d}'$ из точки O.



Обозначим точки пересечения как показано на Рис.6.1. Во введенных обозначениях $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

Рис.6.1

Пусть E – точка на проективной прямой (CC'), отличная от точек C, C', O. Рассмотрим два проективных репера $R = (A, B, O, E)$ и $R' = (A', B', O, E)$ на плоскости σ. Обозначим координаты точки D в репере R' через (x_1', x_2', x_3'), а координаты точки D' в репере R' – через $(y_1', y_2', 0)$. Здесь воспользовались тем, что точка D' лежит на первой координатной прямой репера R', а значит, в ее третья координата равна нулю.

Запишем условие принадлежности точки D проективной прямой (OD') в репере R', используя параметрические уравнения прямой:

$$\begin{aligned} x_1' &= \mu \cdot 0 + \lambda \cdot y_1' \\ x_2' &= \mu \cdot 0 + \lambda y_2' \\ x_3' &= \mu \cdot 1 + \lambda \cdot 0, \end{aligned}$$

где λ, μ – некоторые ненулевые вещественные числа. Из первых двух уравнений получим

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{y_1'}{y_2'}. \tag{6.2}$$

Координаты точки D' в репере (A', B', C') проективной прямой d' равны (y_1', y_2'), а значит сложное отношение четырех точек

$$(A'B', C'D') = \frac{y_1'}{y_2'}. \tag{6.3}$$

Чтобы вычислить сложное отношение четырех точек (AB, CD) нам потребуются координаты точки D в репере (A, B, C) проективной прямой d. Для этого сначала выведем формулы перехода от репера R к реперу R'. Для этих формул нам потребуются координаты точек нового репера R' относительно старого репера R. Точка A' лежит на координатной прямой AO репера R. Следовательно, ее вторая координата нулевая. Так как точка A' не совпадает ни с точкой A, ни с точкой O, остальные ее координаты не нулевые, а значит, мы можем обозначить их $A'(1, 0, a)$ (воспользовались тем, что координаты точки в проективном репере определяются с точностью до постоянного множителя. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что координаты точки B' в репере R будут $B'(0, 1, b)$. Точка O – третья точка в репере R, следовательно, ее координаты $O(0, 0, 1)$. Аналогично для точки $E(1, 1, 1)$. Рассмотрим векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{q}$, $\vec{e}$, порождающие точки A', B', O и E. Для формул перехода нам нужна согласованная система векторов, то есть $\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{q} = \vec{e}$. Глядя на координаты этих векторов, мы видим, что система не согласована. Следовательно, нам нужно изменить эти векторы так, чтобы они по-прежнему порождали свои точки, но в сумме давали $\vec{e}$. Другими словами нам нужно перейти к векторам $k_1\vec{a}'$, $k_2\vec{b}'$, $k_3\vec{q}$ и $k_1\vec{a}' + k_2\vec{b}' + k_3\vec{q} = \vec{e}$. Запишем это равенство в координатах и найдем k_1, k_2, k_3.

$$k_1 = 1;\ k_2 = 1;\ ak_1 + bk_2 + k_3 = 1.$$

Тогда формулы перехода будут иметь вид

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= x_1'; \\ \rho x_2 &= x_2'; \\ \rho x_3 &= a x_1' + b x_2' + (1 - a - b) x_3'. \end{aligned}$$

Тогда получим, что $D(x_1', x_2', ax_1' + bx_2' + (1 - a - b)x_3')_R$. Следовательно, $D(x_1', x_2')$ в репере (A, B, C), то есть сложное отношение $(AB, CD) = \frac{x_1'}{x_2'}$. Сравнивая это выражение с (6.2) и (6.3), имеем $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. $\square$

Из определения сложного отношения четырех точек легко видеть, что $(AB, CC) = 1$ и $(AB, CB) = 0$. Есть еще одно хорошее число – это -1. Она представляет особый интерес. Четверка точек, для которой сложное отношения равно -1, называется *гармонической.*

Чтобы строить гармонические четверки точек, рассматривают фигуру на проективной плоскости, которая называется *полным четырехвершинником.* Дадим его определение. Рассмотрим на проективной плоскости четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой, и шесть прямых попарно соединяющих эти точки. Фигура, состоящая из этих точек и прямых называется *полным четырехвершинником.* Точки A, B, C, D называются вершинами, а прямые, соединяющие их, сторонами. Стороны AB и CD; AC и BD; AD и BC называются противоположными. Точки пересечения противоположных сторон называются диагональными точками. Прямые, проходящие через диагональные точки, называются диагоналями полного четырехвершинника.

На каждой стороне и каждой диагонали полного четырехвершинника $ABCD$ есть гармонические четверки точек.

На стороне: вершины, диагональная точка этой стороны и точка пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.

На диагонали: две диагональные точки этой диагонали, точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку.

Докажем это. Пусть дан полный четырехвершинник $ABCD$.

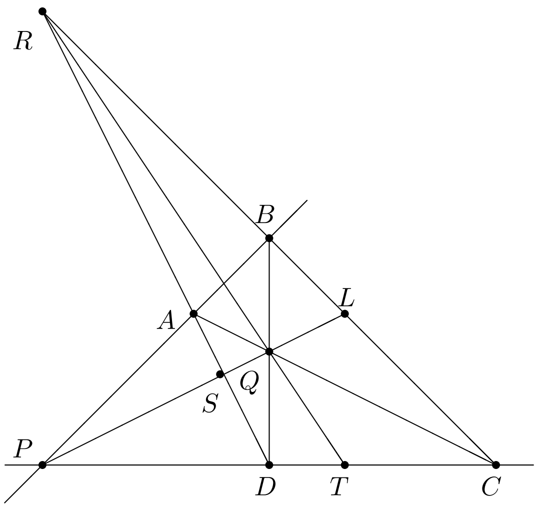


Рис.6.2

Спроектируем точки (Рис.6.2)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \text{на}\,(BC)\,\text{из}\,D & & \text{на}\,(PQ)\,\text{из}\,A & \\
P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q \\
Q & \longrightarrow & B & \longrightarrow & P \\
S & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S \\
L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L
\end{array}
$$

Так как перспективное отображение является проективным, согласно определению проективного отображения и свойству сложного отношения четырех точек получим

$$(PQ, SL) = (QP, SL) = \frac{1}{(PQ, SL)}.$$

Возможны два случая:

1) $(PQ, SL) = 1$. Тогда точки S и L совпадают, а значит, совпадают прямые (AD) и (BC). Это противоречит определению полного четырехвершинника.
2) $(PQ, SL) = -1$. При проектировании точек также получаем $(PQ, SL) = (CB, RL)$, то есть $(CB, RL) = -1$.

§ 7. Сложное отношение четырех прямых пучка.

Посмотрим на прямую как на „множество точек, лежащих на одной прямой“. Применим принцип двойственности. Тогда мы получим „множество прямых, проходящих через одну точку“. Это пучок прямых на плоскости. Для прямых этого пучка можно определить сложное отношение четырех прямых следующим образом. Пусть дан пучок прямых $P(O)$. Рассмотрим четыре прямые a, b, c, d этого пучка, такие, что первые три различны, а четвертая не совпадает с первой. Проведем произвольную прямую, не проходящую через центр пучка. Она пересечет данные прямые в точках, которые обозначим A, B, C, D. Тогда сложным отношением четырех прямых a, b, c, d пучка назовем сложное отношение четырех точек A, B, C, D. Это определение корректно, то есть не зависит от выбора прямой, которая выдает точки A, B, C, D, так как при центральном проектировании сложное отношение четырех точек сохраняется. Итак, по определению

$$(ab, cd) = (AB, CD).$$

§ 8. Проективные преобразования проективной плоскости.

Пусть дана проективная плоскость. Преобразование этой плоскости, которое любые четыре точки, лежащие на одной прямой, переводит в четыре точки, также лежащие на одной прямой, и сохраняет их сложное отношение, называется *проективным преобразованием* проективной плоскости.

Можно доказать, что проективные преобразования проективной плоскости переводят проективные прямые в проективные прямые, а проективные реперы – в проективные реперы.

Любое проективное преобразование плоскости можно задать с помощью упорядоченной пары проективных реперов. А именно верна теорема.

Теорема 8.1. *Пусть даны два проективных репера* $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ *и* $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ *на проективной плоскости. Тогда существует единственное проективное преобразование плоскости, переводящее репер* R *в репер* R'. *При этом каждой точке* M *с координатами* (x_1, x_2, x_3) *в репере* R *ставится в соответствие точка* M' *с теми же координатами в репере* R'.

Доказательство. Для ее доказательства потребуется лемма.

Лемма 8.1. *Пусть проективное преобразование* f *плоскости переводит проективный репер* $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ *в проективный репер* $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. *Тогда преобразование* f *переводит проективные реперы* R_1, R_2, R_3 *координатных прямых репера* R *соответственно в проективные реперы* R'_1, R'_2, R'_3 *координатных прямых репера* R'.

□ Докажем, что репер R_1 переходит в репер R'_1. Остальные случаи доказываются аналогично. По условию имеем $f(A_1) = A'_1$, $f(A_2) = A'_2$, $f(A_3) = A'_3$, $f(E) = E'$. Так как проективное преобразование прямые переводит в прямые, $f((A_1E)) = (A'_1E')$, $f((A_2A_3)) = (A'_2A'_3)$. Тогда

$$f(E_1) = f((A_1E) \cap (A_2A_3)) = f((A_1E)) \cap f((A_2A_3)) = (A'_1E') \cap (A'_2A'_3) = E'_1.$$

Таким образом, $f(R_1) = R'_1$. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Построим отображение f плоскости на себя следующим образом: каждой точке M плоскости с координатами (x_1, x_2, x_3) в репере R поставим в соответствие точку M' с теми же координатами в репере R'. Из задания отображения f следует, что оно является преобразованием плоскости. Нужно доказать, что преобразование f является проективным.

Пусть даны четыре произвольные точки A, B, C, D, лежащие на одной проективной прямой. Обозначим ее d. Тогда координаты этих точек, определенные относительно репера R, удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Так как образы A', B', C', D' этих точек прямой d имеют те же координаты относительно репера R', то их координаты удовлетворяют тому же самому уравнению, но записанному относительно репера R'. Это уравнение задает некоторую проективную прямую d' на плоскости. Тогда точки A', B', C', D' будут принадлежать одной прямой, а именно, прямой d'.

Рассмотрим четыре произвольные точки A, B, C, D плоскости, для которых определено сложное отношение, и их образы A', B', C', D'. Пусть $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ в репере R. Тогда $A'(a_1, a_2, a_3)$, $B'(b_1, b_2, b_3)$, $C'(c_1, c_2, c_3)$, $D'(d_1, d_2, d_3)$ в репере R'. Чтобы вычислить сложные отношения (AB, CD) и $(A'B', C'D')$, нужно спроектировать точки A, B, C, D из точки A_3 репера R на координатную прямую (A_1A_2) (если прямая (AB) совпадает с прямой (A_1A_2), то точки A, B, C, D совпадают со своими проекциями), а точки A', B', C', D' нужно спроектировать из точки A'_3 репера R' на координатную прямую $(A'_1A'_2)$. Обозначим полученные точки $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ и $\tilde{A}', \tilde{B}', \tilde{C}', \tilde{D}'$ соответственно. Тогда получим

$$\begin{array}{lllll} \tilde{A}(a_1, a_2); & \tilde{B}(b_1, b_2); & \tilde{C}(c_1, c_2); & \tilde{D}(d_1, d_2) & \text{в репере} \quad R_3 = (A_1, A_2, E_3); \\ \tilde{A}'(a_1, a_2); & \tilde{B}'(b_1, b_2); & \tilde{C}'(c_1, c_2); & \tilde{D}'(d_1, d_2) & \text{в репере} \quad R'_3 = (A'_1, A'_2, E'_3); \end{array}$$

Тогда получим

$$(AB, CD) = (\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{C}\tilde{D}) = (\tilde{A}'\tilde{B}', \tilde{C}'\tilde{D}') = (A'B', C'D').$$

Итак, преобразование f сохраняет сложное отношение четырех точек, следовательно является проективным.

Докажем единственность преобразования f. Пусть существует еще одно проективное преобразование g плоскости, которое переводит репер R в репер R'. Тогда согласно лемме 8.1 имеем

$$f(E_1) = g(E_1) = E'_1; \quad f(E_2) = g(E_2) = E'_2; \quad f(E_3) = g(E_3) = E'_3,$$

где $E_1 = (A_1E) \cap (A_2A_3)$, $E_2 = (A_2E) \cap (A_1A_3)$, $E_3 = (A_3E) \cap (A_1A_2)$ и аналогичные обозначения для точек E'_1, E'_2, E'_3.

Из этого получим, что для любой точки M, лежащей на одной из координатных прямых репера R, ее образы при отображениях f и g совпадают, то есть $f(M) = g(M)$.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости, не лежащую ни на одной из координатных прямых. Проведем через нее проективную прямую, пересекающую координатные прямые репера R в различных точках X, Y, Z. Так как точки X, Y, Z лежат на координатных прямых репера R, для них имеем

$$f(X) = g(X); \quad f(Y) = g(Y); \quad f(Z) = g(Z).$$

Наконец, получим $f(M) = g(M)$ для любой точки M плоскости. Итак, $f = g$, что противоречит предположению, следовательно, f единственно. □

Эта теорема позволяет получить формулы проективного преобразования. Пусть дано проективное преобразование f. Согласно доказанной теореме оно задается парой проективных реперов R и R'. Возьмем произвольную точку M проективной плоскости и обозначим ее координаты $M(x_1, x_2, x_3)_R$. Ее образ M' при преобразовании f имеет те же координаты $(x_1, x_2, x_3)_{R'}$. Обозначим $M'(x'_1, x'_2, x'_3)_R$. Тогда мы можем записать формулы перехода от старого репера R к новому реперу R' для точки M'. Они будут иметь вид

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $det(c_{ij}) \neq 0$. В правых частях этих формул стоят координаты точки M в репере R, а в правый – координаты точки M' в том же репере R. Таким образом, мы получили формулы преобразования, записанные относительно репера R.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 8.2. *Пусть на проективной плоскости σ фиксирован проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и пусть задано отображение f плоскости σ на себя, ставящее каждой точке M плоскости σ с координатами (x_1, x_2, x_3) точку M' с координатами (x'_1, x'_2, x'_3), вычисленными по формулам*

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{8.2}$$

где определитель матрицы (c_{ij}) отличен от нуля и ρ – произвольное вещественное число отличное от нуля. Тогда отображение f является проективным.

Доказательство. Так как определитель матрицы (c_{ij}) отличен от нуля, формулы (8.2) задают биективное отображение.

Обозначим через A'_1, A'_2, A'_3, E' образы точек A_1, A_2, A_3, E при отображении f. Найдем их координаты в репере R, используя (8.2):

$$A'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}); \quad A'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}); \quad A'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33}); \quad E'(c_{11} + c_{12} + c_{13}, c_{21} + c_{22} + c_{23}, c_{31} + c_{32} + c_{33}). \tag{8.3}$$

Так как точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой, векторы $\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{a}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33})$ являются линейно независимыми. Из (8.3) следует, что эти векторы согласованы, следовательно, задают репер R'. Согласно основной теореме пара реперов R и R' однозначно задает некоторое проективное преобразование плоскости. Его формулы имеют вид (8.1). Эти формулы совпадают с формулами (8.2), а значит, это проективное преобразование совпадает с преобразованием f. Итак, показано, что f является проективным преобразованием. □

Пример 8.1. Примером проективного преобразования плоскости является гомология. *Гомология* – это проективное преобразование проективной плоскости, имеющее по крайней мере три инвариантные точки, лежащие на одной прямой.

Обозначим инвариантные точки гомологии через A, B, C. Тогда любая точка D проективной прямой AB будет инвариантной. Действительно, точка D перейдет в точку D', лежащую на той же прямой AB и сохранится сложное отношение четырех точек, то есть $(AB, CD) = (AB, CD')$. Так как сложное отношение однозначно определяет четвертую точку, получим, что $D = D'$. Прямая инвариантных точек называется *осью гомологии.* Кроме прямой инвариантных точек, гомология имеет точку, через которую проходят все инвариантные прямые гомологии (не считая прямой инвариантных точек). Эта точка называется центром гомологии. Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то гомология называется параболической. Если центр гомологии не принадлежит оси гомологии, то гиперболической.

Гомология на проективной плоскости однозначно задается осью s, центром S и парой соответствующих точек $A \to A'$. Так как центр гомологии – точка инвариантная, точки S, A и A' должны лежать на одной прямой. Так как ось гомологии – прямая инвариантных точек, соответствующие при гомологии прямые $a \to a'$ должны пересекаться в точке, принадлежащей оси гомологии.

Задача 8.1. Пусть гомология задана осью, центром и парой соответствующих точек. Постройте образ произвольной точки при этой гомологии. Рассмотрите случаи гиперболической и параболической гомологии. Рассмотрите случаи собственного (несобственного) центра (оси). Рассмотрите различные случаи собственных (несобственных) соответствующих точек.

Задача 8.2. Параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. На данной прямой p найдите точку X, образ которой лежит на данной прямой q, где $q \neq f(p)$.

Задача 8.3. Гомология (гиперболическая, параболическая) задана центром S, парой соответствующих точек $A \to A'$ и парой соответствующих прямых $a \to a'$. Постройте образ данной точки M при данной гомологии.

Задача 8.4. Дана точка S и прямая a ($S \notin a$). Постройте прямую s так, чтобы при параболической гомологии с центром S и осью s, прямая a была образом бесконечно удаленной прямой. Найдите образ произвольной точки при этой гомологии.

Задача 8.5. Дана точка S, пара соответствующих точек $A \to A'$ и прямая a. Построить ось s так, чтобы гиперболическая гомология с центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$ переводила прямую a в бесконечно удаленную прямую.

Множество всех проективных преобразований проективной плоскости образует группу. Напомним, что группа – это множество с заданной на нем операцией, которая удовлетворяет трем свойствам: эта операция ассоциативна, существует нейтральный элемент, для любого элемента множества существует симметричный. Если группа аддитивная, то нейтральный элемент называют нулем, а симметричный – противоположным. Если группа мультипликативная, то нейтральный называется единицей, а симметричный – обратным.

Во множестве проективных преобразований операцией является композиция двух преобразований. Единицей группы является тождественное преобразование.

§ 9. Кривые второго порядка на проективной плоскости.

Пусть на проективной плоскости дан проективный репер. Множество точек этой плоскости, заданное уравнением

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \qquad (9.1)$$

называется кривой второго порядка.

Из коэффициентов a_{ij} уравнения кривой второго порядка можно составить матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (9.2)$$

Ранг этой матрицы называется рангом кривой второго порядка. Кривая ранга 3 называется невырожденной. В противном случае кривая называется вырожденной.

Задача 9.1. Невырожденная кривая второго порядка пересекается с прямой не более, чем в двух точках.

Решение. Пусть кривая γ, заданная уравнением (9.1), пересекается с некоторой прямой ℓ в трех точках M_1, M_2, M_3. Рассмотрим репер (A_1, A_2, A_3, E), в котором точки A_1 и A_2 совпадают соответственно с точками M_1 и M_2, а точка E_3 совпадает с точкой M_3. Тогда координаты точек $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$, $M_3(1,1,0)$. Так как эти точки принадлежат кривой γ, то их координаты удовлетворяют уравнению этой кривой:

$$a_{11} = 0; \quad a_{22} = 0; \quad a_{12} = 0.$$

Тогда матрица (9.2) имеет ранг меньший 3, и кривая γ является вырожденной, что противоречит условию. □

Путем перехода к другому, более удобному реперу, мы можем привести это уравнение к одному из следующих видов.

$$\begin{aligned} &(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0 \\ &(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0 \\ &(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0 \\ &(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0 \\ &(x_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Первая кривая называется нулевой (она не имеет ни одной вещественной точки), вторая кривая называется овальной линией (это как раз и есть эллипс, гипербола и парабола на расширенной плоскости), остальные уравнения задают две прямые (мнимые, вещественные различные и вещественные совпавшие). Первые две кривые невырожденные, а оставшиеся – вырожденные.

Рассмотрим более подробно овальную линию. Это невырожденная линия второго порядка, следовательно, она может иметь с прямой не более двух общих точек.

Выясним, сколько общих точек может иметь овальная линия γ и прямая ℓ. Зададим прямую двумя точками $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Тогда параметрические уравнения этой прямой будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1\lambda + b_1\mu; \\ x_2 &= a_2\lambda + b_2\mu; \\ x_3 &= a_3\lambda + b_3\mu. \end{aligned}$$

Чтобы выяснить количество общих точек прямой ℓ и овальной линии γ, нужно решить систему, состоящую из уравнений γ и прямой ℓ. Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение овальной линии γ

$$(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)\lambda^2 + 2\lambda\mu(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3) + (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2)\mu^2 = 0. \tag{9.3}$$

Если предположить, что все три коэффициента в этом квадратном уравнении равны нулю, то умножив второй коэффициент на 2 и прибавив к первому и второму, мы получим

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_3 + b_3)^2 = 0.$$

Это означает, что три различные точки (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ принадлежат овальной линии, что противоречит результату задачи 9.1. Следовательно, хотя бы один из коэффициентов в уравнении 9.3 ненулевой, то есть это уравнение квадратное, следовательно имеет два решения (вещественных, совпавших, мнимых). Таким образом, мы получаем, что овальная линия пересекается с прямой всегда в двух точках (вещественных различных, совпавших или мнимых). Если прямая пересекает овальную линию в двух совпавших точках, то такая прямая называется *касательной.*

Пусть дана точка $P(p_1, p_2, p_3)$ на проективной плоскости. Множество точек $Q(q_1, q_2, q_3)$ проективной плоскости, таких, что

$$p_1q_1 + p_2q_2 - p_3q_3 = 0,$$

называется *полярой* точки P. Обозначим координаты точки $Q(x_1, x_2, x_3)$. Тогда уравнение всего множества точек Q будет иметь вид: $p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3 = 0$. Это уравнение прямой. Следовательно, поляра точки P – это прямая. Обозначим ее p. Точка P для поляры p называется *полюсом.*

Возьмем точку $Q(q_1, q_2, q_3)$. Для нее тоже можно построить поляру q. Она будет задаваться уравнением $q_1x_1+q_2x_2-q_3x_3 = 0$. Если точка $P(p_1, p_2, p_3)$ принадлежит поляре точки Q, то есть $q_1p_1+q_2p_2-q_3p_3 = 0$, то точка Q принадлежит поляре точки P. Это утверждение называется теоремой о взаимности поляритета.

Пусть дана овальная линия γ и точка P, не лежащая на ней. Непосредственные вычисления показывают, что если брать точки Q, лежащие на поляре p и проводить прямые PQ, пересекающие γ в двух точках (обозначим их A и B), то сложное отношение $(PQ, AB) = -1$. Другими словами, четвертые гармонические точки для P и точек пересечения прямой, проходящей через P, с овальной линией лежат на поляре точки P.

Используя полный четырехвершинник легко построить поляру для точки P.

Задача 9.2**.** Дана овальная линия и точка, не принадлежащая ей (а) внутри и б) вне). Постройте поляру данной точки.

Указания. Вписываем полный четырехвершинник так, что бы данная точка была диагональной. Тогда диагональ, не проходящая через нее будет полярой, так как на ней есть две гармонические точки.

Задача 9.3**.** Решим обратную задачу: дана овальная линия и прямая. Построить полюс этой прямой.

Решение. Пусть дана прямая a. Воспользуемся взаимностью поляритета. Возьмем на прямой две различные точки B и C. Тогда их поляры b и c будут проходить через полюс прямой a, то есть дадут искомую точку. □

Задача 9.4**.** Дана овальная линия и точка на ней. Постройте поляру данной точки.

Решение. Выясним сначала, чем является поляра точки, лежащей на овальной линии. Обозначим эту точку $A(a_1, a_2, a_3)$, а поляру этой точки a. Тогда $a_1^2+a_2^2-a_3^2 = 0$, так как эта точка принадлежит овальной линии, то есть эта точка сопряжена сама себе. Предположим, что поляра a пересекает овальную линию еще в какой-то точке $B(b_1, b_2, b_3)$, отличной от A. Тогда точка B сопряжена точке A, так как лежит на ее поляре, то есть $a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0$. Так как точка B также принадлежит овальной линии, получим $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0$. Из трех последних равенств получим

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_3 + b_3)^2 = 0,$$

то есть овальной линии принадлежит и точка $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Другими словами, мы нашли три различные точки, в которых овальная линия пересекает прямую. Это противоречие. Итак, поляра a не может пересекать овальную линию в точке, отличной от A. Так как любая прямая всегда пересекает овальную линию в двух точках, то точка A – это две совпавшие точки. Следовательно, a – касательная к овальной линии.

Обратно, рассмотрим касательную a к овальной линии в точке A. По определению это означает, что a пересекает овальную линию в двух совпавших точках. Тогда уравнение (9.3) имеет два совпавших корня, то есть его дискриминант равен нулю, то есть

$$(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) = 0.$$

Так как точка A принадлежит овальной линии, получим $a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0$, то есть любая точка B, лежащая на касательной, сопряжена точке A.

Итак, мы доказали, что поляра проходит через свой полюс тогда и только тогда, когда является касательной к овальной линии.

Вернемся к вопросу о построении поляры (в данной случае это будет касательная). Обозначим данную точку, лежащую на овальной линии через A, касательную в этой точке обозначим a. Проведем произвольную прямую b через точку A. Так как $A \in b$, то $B \in a$, то есть полюс прямой b будет принадлежать искомой касательной a. Наша задача свелась к построению полюса для прямой b. А это мы уже делать умеем. $\square$

Вспомним, что на расширенной плоскости овальная линия – это собирательное название для эллипса, гиперболы и параболы. Таким образом, мы нашли способ с помощью одной линейки построить касательную к этим линиям второго порядка.

§ 10. Групповой подход в геометрии.

Геометрия – это наука, которая изучает свойства фигур, инвариантные относительно некоторой группы преобразований. Откуда их брать? Ф. Клейн предложил рассматривать подгруппы группы проективных преобразований. Тем самым проективная геометрия может служить базой для построения других геометрий.

Чтобы получить какую-либо геометрию, нужно в группе проективных преобразований выделить подгруппу, то есть подмножество, которое само является группой. Для этой цели на проективной плоскости фиксируют какую-нибудь фигуру и рассматривают все проективные преобразования, которые оставляют эту фигуру инвариантной. Эта фигура называется *абсолютом*. В геометрию, выделяемую выделенной группой сам абсолют не входит. Множеством точек, на котором строится новая геометрия являются точки проективной плоскости без точек абсолюта (поэтому он и называется абсолютом).

Простейшей фигурой на проективной плоскости является проективная прямая. С нее мы и начнем.

§ 11. Абсолют – проективная прямая.

Пусть дана плоскость σ. Фиксируем на ней проективную прямую a. Обозначим множество точек плоскости σ без точек прямой a через σ_a. Это плоскость новой геометрии.

Будем рассматривать все проективные преобразования плоскости, которые оставляют прямую a инвариантной. Другими словами, выберем a в качестве абсолюта. Обозначим эту группу P_a. Оказывается, что геометрия группы P_a – это аффинная геометрия плоскости. Чтобы в этом убедиться, докажем, что группа P_a изоморфна группе аффинных преобразований аффинной плоскости.

Выберем проективный репер (A_1, A_2, A_3, E) так, чтобы точки A_1 и A_2 лежали бы на прямой a. Тогда уравнение прямой a имеет вид $x^3 = 0$. Эта прямая должна быть инвариантна относительно любого преобразования из группы P_a. Общий вид вид формул этого преобразования следующий:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Так как прямая a инвариантна, уравнение ее образа имеет такой же вид, как у a, но переменная обозначается x_3' (так как мы работаем с образами точек): $x_3' = 0$. Таким образом, для всех точек прямой a будут выполняться равенства $x_3 = 0$ и $x_3' = 0$. Подставим эти равенства в третье уравнение из формул (11.1). Тогда равенство $c_{31}x_1 + c_{32}x_2 = 0$ должно выполняться для любых x_1, x_2, следовательно, $c_{31} = c_{32} = 0$.

Заметим, что только точки прямой a имеют третьей координатой нуль. Значит, для всех точек плоскости σ_a третья координата не нулевая. Тогда для любой точки $M(x_1, x_2, x_3)$ плоскости σ_a мы можем выбрать проективные координаты вида $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1)$. Обозначая первые две координаты через x и y, получим $M(x, y, 1)$. Последняя координата никакой информации не несет и мы можем ее отбросить. Следовательно, любая точка плоскости σ_a однозначно определяется упорядоченной парой чисел (x, y). Выясним, как эта пара чисел преобразуется при переходе от одного проективного репера к другому (первые его две точки по-прежнему лежат на прямой a).

Разделим первые два равенства из (11.1) на третье. Получим

$$\begin{aligned} \tfrac{x_1'}{x_3'} &= \tfrac{c_{11}}{c_{33}}\tfrac{x_1}{x_3} + \tfrac{c_{12}}{c_{33}}\tfrac{x_2}{x_3} + \tfrac{c_{13}}{c_{33}} \\ \tfrac{x_2'}{x_3'} &= \tfrac{c_{21}}{c_{33}}\tfrac{x_1}{x_3} + \tfrac{c_{22}}{c_{33}}\tfrac{x_2}{x_3} + \tfrac{c_{23}}{c_{33}} \end{aligned}$$

Подставляя введенные обозначения и обозначая дроби новыми буквами, получим

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + x_0 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + y_0. \end{aligned}$$

Заметим, что определитель матрицы (a_{ij}), $i,j=1,2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c_{11}}{c_{33}} & \frac{c_{12}}{c_{33}} \\ \frac{c_{21}}{c_{33}} & \frac{c_{22}}{c_{33}} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{33}^2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} c_{33} \neq 0.$$

Это формулы аффинных преобразований аффинной плоскости. Значит, группа P_a изоморфна группе аффинных преобразований. Итак, фиксируя на проективной плоскости проективную прямую a, мы получаем аффинную геометрию.

Посмотрим, как будут выглядеть различные объекты аффинной геометрии на проективной плоскости с фиксированной прямой.

Мы уже знаем, что точками аффинной плоскости σ_a будут точки проективной плоскости σ, не принадлежащие прямой a. Прямыми d_a на аффинной плоскости σ_a будут проективные прямые d без точки пересечения с прямой a. (картинка)

Выясним, какие прямые будут параллельными. Параллельные прямые на аффинной плоскости – это прямые, не имеющие общей точки. Так как аффинная прямая изображается проективной прямой, а любые две проективные прямые всегда пересекаются, они должны пересекаться на абсолюте (прямой a). Тогда у соответствующих аффинных прямых общей точки не будет. (картинка)

Аффинной системой координат будет проективный репер с первыми двумя точками на абсолюте. Именно он позволил для любой точки M плоскости σ_a определить упорядоченную пару чисел (x,y) – ее координат. Непосредственные вычисления показывают, что при переходе от одного такого репера к другому эти пары чисел преобразуются по формулам, которые имеют вид формул перехода от одной аффинной системы координат к другой.

Разберемся с простым отношением трех точек прямой. Пусть d_a – аффинная прямая. Пусть A, B, C – три точки этой прямой. Напомним, что простое отношение $\lambda = (AB, C)$ трех точек прямой можно вычислить через их координаты в аффинной системе координат (напомним, что аффинная система координат сейчас выглядит как проективный репер с двумя первыми точками на прямой a) по формулам

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda};\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},$$

где $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Тогда число λ можно вычислить так

$$\lambda = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C};\ \lambda = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}. \tag{11.2}$$

Теперь посмотрим на точки A, B, C прямой d_a, как на точки проективной прямой d. Обозначим точку пересечения прямой d с прямой a через Q. Обозначим ее координаты относительно проективного репера $Q(x_Q, y_Q, 0)$. Заметим, что обе координаты x_Q, y_Q одновременно не могут быть равны нулю. Предположим, что $y_Q \neq 0$. Тогда координаты точки Q будут еще и такими: $(\frac{x_Q}{y_Q}, 1, 0)$. Вычислим сложное отношение (AB, CQ)

$$(AB, CQ) = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B & x_Q \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_Q \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_A - x_B)x_Q}{x_Q(x_B - x_C)}.$$

Сравнивая полученный ответ с (11.2), получаем, что

$$(AB, C) = -(AB, CQ).$$

Другими словами, простое отношение трех точек определяется через сложное отношение четырех точек, где четвертая – это точка пересечения проективной прямой с абсолютом.

Как только появилось простое отношение трех точек, мы можем ввести понятие луча и отрезка, а также полуплоскости. Серединой отрезка AB будет точка C, для которой простое отношение равно 1 (знаем из аффинной геометрии). Значит, сложное отношение $(AB, CQ) = -1$. Другими словами, середина отрезка AB – это четвертая гармоническая к точкам A, B и Q.

Задача 11.1**.** Изобразите параллелограмм и докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Задача 11.2. Покажите, что эллипсом будет овальная линия, которая пересекает абсолют в мнимых точках, гиперболой – овальная линия, которая пересекает абсолют в двух вещественных точках, параболой – овальная линия, которая пересекает абсолют в двух совпавших точках.

Указания. Так как репер специальный, то мы должны брать овальную линию в общем виде линии второго порядка. Ищем точки пересечения с прямой $x_3 = 0$. Для эллипса они мнимые, следовательно, дискриминант $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Переходим в общем уравнении линии второго порядка к координатам x, y. Получаем линию эллиптического типа невырожденную с вещественными точками. Это эллипс.

Задача 11.3. Рассмотрим гомологию с осью a. Это преобразование из группы P_a. Значит, оно отождествляется с каким-то аффинным преобразованием аффинной плоскости σ_a. Выясните, с каким для различных случаев центра гомологии S (собственный, несобственный) и пары соответствующих точек $A \to A'$ (собственные, несобственные)

§ 12. Абсолют – точка.

Две самые простые фигуры на плоскости – это прямая и точка. Выберем в качестве абсолюта точку A. С ее помощью в группе проективных преобразований выделяем подгруппу – все проективные преобразования проективной плоскости σ, которые оставляют инвариантной точку A.

Эту геометрию построим, используя принцип двойственности. В аффинной геометрии был абсолют – прямая a. По принципу двойственности он перейдет в абсолют нашей новой геометрии – точку A. Обозначим множество точек проективной плоскости σ без точки A через σ_A. Это плоскость нашей новой геометрии. Она называется *центропроективной.*

По принципу двойственности перетаскиваем в нее фигуры из аффинной геометрии. Точки аффинной плоскости σ_a (точки проективной плоскости σ, не лежащие на абсолюте a) перейдут по принципу двойственности в прямые плоскости σ_A, не проходящие через абсолют A. Точки абсолюта a перейдут в прямые, проходящие через новый абсолют A. Значит, этих прямых в центропроективной геометрии не будет! Другими словами, если мы возьмем две точки M и N плоскости σ_A, то для них не будет существовать прямой, которая через них проходила бы. Эти точки аналоги параллельных прямых аффинной геометрии. Они называются *несоединимыми.* Действительно, используя принцип двойственности получим: прямые, пересекающиеся в точке на абсолюте $a \to$ точки, лежащие на прямой, проходящей через абсолют A.

Основной инвариант аффинной геометрии – простое отношение трех точек. Во что он перейдет по принципу двойственности? Три точки, лежащие на одной прямой (не на абсолюте a) $\to$ три прямые, проходящие через одну точку (не через абсолют A). Назовем это число простым отношением трех прямых пучка. Как его вычислить? Вспомним, что простое отношение трех точек (AB, C) было равно сложному отношению $-(AB, CQ)$. Следовательно, по принципу двойственности сложное отношение (AB, CQ) перейдет в сложное отношение четырех прямых a, b, c, q пучка, где a, b, c – двойственны точкам A, B, C, а прямая q – двойственна Q (то есть точке, лежащей на абсолюте a). Таким образом, прямая Q должна проходить через абсолют A и через центр пучка, которому принадлежать прямые a, b, c.

Для аффинной геометрии мы выбирали проективный репер (A_1, A_2, A_3, E), у которого первые две точки лежали на абсолюте a. В центропроективной геометрии выберем проективный репер (A_1, A_2, A_3, E), в котором третья точка A_3 совпадает с абсолютом A. Тогда точка $A_3(0, 0, 1)$ должна быть инвариантна. Подставляя ее координаты в общий вид проективного преобразования плоскости, получим $c_{13} = c_{23} = 0$, $c_{33} = \rho$. Таким образом, коэффициенты c_{13} и c_{23} определились, а коэффициент c_{33} остался произвольным. Итак, преобразования из группы центропроективной геометрии имеют вид

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned}$$

Эта геометрия для нас новая, изоморфизм устраивать не с чем, да и двух координат для одной точки не хватает.

§ 13. Абсолют – прямая и точка.

Возьмем в качестве абсолюта прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой. Полученная геометрия будет сочетать в себе свойства аффинной геометрии и центропроективной. Поэтому она называется *центроаффинной геометрией.*

Получим вид проективных преобразований, принадлежащих группе $P_{a,A}$. Эти преобразования оставляют инвариантными фигуру, состоящую из прямой a и точки A. Опять начинаем с выбора репера. Логично взять проективный репер (A_1, A_2, A_3, E), у которого первые две точки лежат на прямой a, а третья точка – совпадает с точкой A. В таком репере точка $A(0, 0, 1)$ и прямая a имеет уравнение $x_3 = 0$.

Мы уже выводили вид формул проективных преобразований, которые сохраняют прямую a:

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3\\
\rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3\\
\rho x_3' &= c_{33}x_3.
\end{aligned}$$

Добавляем условие инвариантности точки $A(0,0,1)$. Тогда $c_{13} = c_{23} = 0$.

Так же как в аффинной геометрии выбранные нами проективные реперы будут служить аффинными системами координат (то есть наделять точки центроаффинной плоскости однозначно определенной парой координат (x, y)). Так как $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, формулы проективных преобразований из $P_{a,A}$ примут вид

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y\\
y' &= a_{21}x + a_{22}y.
\end{aligned}$$

В полученной геометрии будет понятие простого отношения трех точек, параллельности прямых (от аффинной геометрии) и понятие несоединимых точек (от центропроективной геометрии).

Замечание 13.1. Для построения центроаффинной геометрии мы брали точку A, не лежащей на прямой a. Если в качестве абсолюта взять прямую a и точку A, лежащую на этой прямой, то такая геометрия называться *флаговой*. Обозначим ее группу преобразований $P_{A\in a}$.

Докажите самостоятельно, что формулы проективных преобразований, принадлежащих группе $P_{A\in a}$ имеют вид (какой проективный репер выбран?)

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3\\
\rho x_2' &= c_{22}x_2 + c_{23}x_3\\
\rho x_3' &= c_{33}x_3.
\end{aligned}$$

Эта группа изоморфна группе аффинных преобразований вида

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + x_0\\
y' &= a_{22}y + y_0.
\end{aligned}$$

По принципу двойственности фигура, состоящая из прямой и точки на ней снова переходит в прямую и точку на ней. Значит, флаговая геометрия двойственна самой себе.

§ 14. Расстояние на проективной плоскости.

14.1. Определение расстояния

Аффинная, центропроективная,центроаффинная и флаговая геометрии, в отличие от евклидовой, являются неметрическими, то есть в них нет понятия расстояния от одной точки до другой, нет понятия угла. Чтобы ввести эти понятия в те геометрии, которые мы строим на основе проективной геометрии, нужно сначала попытаться ввести понятие расстояния на проективной плоскости.

Вспомним, что такое расстояние в евклидовой геометрии. Для любых двух точек евклидовой плоскости расстояние между ними – это вещественное число. Число неотрицательное. Оно равно нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают. Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками B и A. Расстояние не меняется при движениях евклидовой плоскости (то есть относительно группы преобразований данной геометрии). Если точки A, B и C лежат на одной прямой, причем $A - B - C$, то $AC = AB + BC$.

Значит, для введения понятия расстояния на проективной плоскости нужно определить отображение d, которое каждой паре точек проективной плоскости ставило в соответствие неотрицательное вещественное число. Это число должно быть одним и тем же для точек A, B и точек B, A. Оно должно быть инвариантно относительно проективных преобразований. Как мы знаем, на проективной плоскости простейший инвариант состоит из четырех точек (сложное отношение четырех точек). Следовательно, для двух данных точек не хватает еще двух. Вспомним, что при построении аффинной геометрии на проективной плоскости для простого отношения трех точек не хватало еще одной точки, чтобы свести его к сложному отношению четырех точек. Еще одну точку брали из пересечения данной прямой и абсолюта. В нашем случае поступим аналогичным образом. Только теперь нужно две точки. Что при пересечении с данной прямой даст еще две точки? Овальная линия. Следовательно, чтобы на проективной плоскости ввести расстояние (ввести инвариант двух точек) нужно фиксировать овальную линию. Без нее расстояние ввести не получится. Заметим, что при этом нам придется ограничить себя и в группе проективных преобразований проективной плоскости: рассматривать только те проективные преобразования, которые переводят овальную линию в себя.

Фиксируем овальную линию γ. Тогда для точек A и B прямая AB пересекает γ в двух точках, но эти точки могут быть совпавшими или вообще мнимыми (картинка этих случаев). Кроме того, если точки P и

Q пересечения прямой AB и γ разделяют друг друга, то сложное отношение будет отрицательным. Чтобы избежать всех этих неприятностей, будем рассматривать только те точки проективной плоскости, которые лежат внутри овальной линии. Тогда мы будем всегда получать две вещественные точки пересечения с овальной линией и сложное отношение будет положительным. Хотелось бы положить по определению

$$d(A,B) = (AB, PQ).$$

Но если мы возьмем три точки $A-B-C$ на одной прямой, то непосредственные вычисления показывают, что

$$(AC, PQ) \neq (AB, PQ) + (BC, PQ).$$

(как должно быть при определении расстояния). Зато (опять непосредственные вычисления) показывают, что будет иметь место равенство

$$(AC, PQ) = (AB, PQ)(BC, PQ).$$

Поэтому расстояние между точками, лежащими внутри овальной линии определяют так:

$$d(A,B) = |\ln(AB, PQ)|.$$

Модуль ставят для того, чтобы расстояние между точками было положительным.

Итак, мы смогли ввести отображение, которое любой паре точек внутри овальной линии ставит в соответствие неотрицательное вещественное число, которое инвариантно относительно проективных преобразований плоскости, переводящих данную овальную линию в себя.

Решая поставленную задачу, мы попутно опять наткнулись на абсолют, который выделил нам подгруппу в группе проективных преобразований, и значит, задал еще одну геометрию. Временно отвлечемся от понятия расстояния на проективной плоскости и посмотрим, что за геометрия у нас получилась.

14.2. Абсолют – овальная линии и геометрия внутри нее

Пусть на проективной плоскости фиксирована овальная линия. Вспомним, что геометрию можно строить аксиоматически. Для этого нужно задать два множества объектов, которые назовем точками и прямыми, а также ввести отношения между ними.

В качестве точек новой геометрии возьмем все точки, которые находятся внутри овальной линии. Прямые новой геометрии – это хорды овальной линии (без концов). Вспоминаем четыре группы аксиом абсолютной геометрии: принадлежности, порядка, конгруэнтности и непрерывности. Показать, как будет выглядеть отрезок, луч, угол. Равные отрезки и углы через проективные преобразования вводится равенство отрезков и углов.

Задача 14.1**.** Перпендикулярные прямые. Дана прямая и точка. Построить перпендикулярную прямую, проходящую через эту точку.

Теперь разные виды взаимного расположения двух прямых: пересекающиеся, параллельные, расходящиеся. Это геометрия Лобачевского.

Движения плоскости Лобачевского – это проективные преобразования, переводящие овальную линию в себя. Расстояние через сложное отношение четырех точек.

14.3. Возвращаемся к расстоянию на проективной плоскости

В евклидовой геометрии расстояние между точками можно вычислить по формуле

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$

через скалярный квадрат вектора. Аналогичную формулу мы выведем и для проективной плоскости. Правда для пары точек на проективной плоскости понятия вектора у нас нет. Нужно ввести что-то еще.

Пусть на проективной плоскости относительно абсолютно произвольного проективного репера овальная линия имеет уравнение

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

или в сокращенном виде

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0,$$

где полагаем по определению $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$. Тогда квазискалярным произведением двух точек $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ назовем число

$$X * Y = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j.$$

Прямые вычисления показывают, что квазискалярное произведение не зависит от выбора проективного репера, а значит, определено корректно.

Пусть дана овальная линия γ и две точки A и B внутри нее. Нам нужно записать формулу для расстояния, используя квазискалярное произведение. Выберем проективный репер так, чтобы овальная линия задавалась уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а прямая AB задавалась бы уравнением $x_1 = 0$. Мы опускаем вопрос, почему всегда это можно сделать. Тогда точки P и Q пересечения овальной линии γ и прямой AB имеют координаты, которые находятся из системы

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $P(0, 1, 1)$, $Q(0, 1, -1)$. Координаты точек $A(0, a_2, a_3)$, $B(0, b_2, b_3)$. Тогда сложное отношение четырех точек вычисляется так:

$$(AB, PQ) = \frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{(a_2 + a_3)(b_2 - b_3)} = \frac{(a_2b_2 - a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)}{(a_2b_2 - a_3b_3) + (-a_2b_3 + a_3b_2)} = \frac{A * B + (a_2b_3 - a_3b_2)}{A * B - (a_2b_3 - a_3b_2)}.$$

Заметим, что

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \pm a_2^2b_2^2 \pm a_3^2b_3^2 = (a_2b_2 - a_3b_3)^2 - (a_2^2 - a_3^2)(b_2^2 - b_3^2).$$

Тогда

$$(AB, PQ) = \frac{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}}{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}}. \tag{14.1}$$

Итак, выражение для расстояния между точками A и B внутри абсолюта (овальной линии) будет выражаться формулой

$$d(A, B) = \ln \left| \frac{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}}{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}} \right|.$$

14.4. Геометрия за абсолютом

В предыдущих пунктах фиксация овальной линии на проективной плоскости позволило для внутренних точек овальной линии ввести понятие расстояния, то есть инварианта двух точек относительно проективных преобразований, оставляющих на месте овальную линию. Но точки есть и вне овальной линии (на овальной линии точки не берем, так как договорились выбрасывать точки абсолюта). Посмотрим, что можно сделать с расстоянием там и какая геометрия при этом получится.

Пусть дана овальная линия и две точки A и B вне нее. Могут быть три существенно различных случая. Во-первых, точки A и B могут лежать на прямой, которая пересекает овальную линию γ в двух различных точках. Тогда расстояние определяется как и выше с помощью сложного отношения четырех точек и квазискалярного произведения. Во-вторых, точки A и B могут лежать на касательной к овальной линии. Тогда расстояние между двумя точками A и B будет всегда равно нулю. Действительно, точки P и Q пересечения прямой AB с овальной линией совпадают, следовательно, $(AB, PQ) = 1$. Тогда $\ln(AB, PQ) = 0$. Если мы хотим сохранить следующее свойство расстояния: расстояние между двумя точками равно нулю тогда и только тогда, когда эти точки совпадают, то для точек A и B, лежащих на касательных к овальной линии, мы должны сказать, что расстояния между ними не существует. Если же это требование не существенно, то расстояние между такими точками будет нулевым. В-третьих, прямая AB может не пересекать овальную линию в вещественных точках. Как мы знаем, в этом случае она пересекает ее в двух мнимых точках. Рассмотрим этот случай подробнее. Пусть дана овальная линия γ и две точки A и B, такие, что прямая AB пересекает γ в двух мнимых точках. Как и выше мы можем выбрать проективный репер так, чтобы овальная линия имела уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а прямая AB имела уравнение $x_3 = 0$. Тогда точки пересечения γ и AB имеют координаты (решаем систему) $P(1, i, 0)$ и $Q(1, -i, 0)$. Чтобы определить расстояние между A и B нам опять нужно начинать строить его из сложного отношения четырех точек. Только теперь определения требует и само сложное отношение. Положим по определению, что сложное отношение четырех произвольных точек называется число, которое вычисляется по формуле (координаты могут быть мнимыми и само сложное отношение может быть мнимым)

$$(AB, CD) = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)},$$

где (AC) обозначает определитель, составленный из первых двух координат точек A и C, и так далее. В нашем случае сложное отношение

$$(AB, PQ) = \frac{(a_1 i - a_2)(b_2 + b_1 i)}{(b_1 i - b_2)(a_2 + a_1 i)}$$

Домножая на комплексно сопряженное знаменателя, получим

$$(AB, PQ) = \frac{(a_2 - a_1 i)^2 (b_2 + b_1 i)^2}{(b_1^2 + b_2^2)(a_2^2 + a_1^2)}. \tag{14.2}$$

По-прежнему получается комплексное число, а для расстояние нам нужно вещественное. Но нам в принципе нужна любая функция от сложного отношения, лишь бы она удовлетворяла свойствам расстояния. Первым шагом извлечем из обеих частей равенства (14.2):

$$\sqrt{(AB, PQ)} = \frac{(a_2 - a_1 i)(b_2 + b_1 i)}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}.$$

Преобразуем комплексное число в правой части к виду

$$\sqrt{(AB, PQ)} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}.$$

Оказывается, что (непосредственно проверяется)

$$\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} \right)^2 + \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} \right)^2 = 1.$$

Это основное тригонометрическое тождество. Значит, мы можем обозначить

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} = \cos\omega; \ \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} = \sin\omega, \tag{14.3}$$

где ω – некоторый угол от нуля до 2π, то есть вещественное число. Тогда

$$\sqrt{(AB, PQ)} = \cos\omega + i\sin\omega.$$

Теперь вспоминаем математический анализ и различные виды представления комплексных чисел

$$\cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega}.$$

Тогда

$$\sqrt{(AB, PQ)} = e^{i\omega}$$

Логарифмируя обе части равенства, получим

$$\omega = \frac{1}{2i}\ln(AB, PQ) = -\frac{i}{2}\ln(AB, PQ).$$

Итак, мы получаем проективный инвариант двух точек A и B. Это положительное вещественное число, причем выполняются свойства расстояния. Но теперь расстояние не может стремиться к бесконечности, оно находится в пределах от нуля до 2π. Учитывая формулу (14.3), расстояние ω мы можем записать еще в одном виде

$$\omega = \arccos\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}.$$

Через квазискалярное произведение эта формула запишется так:

$$\omega = \arccos\frac{A * B}{\sqrt{A * A}\sqrt{B * B}}.$$

Итак, мы научились вычислять расстояния между точками проективной плоскости, если на ней фиксирована овальная линия γ. Для точек A и B, таких, что прямая AB пересекает абсолют в двух вещественных точках, расстояние вычисляется по формуле

$$d(A, B) = |\ln(AB, PQ)| = \ln\left| \frac{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}}{A * B + \sqrt{(A * B)^2 - (A * A)(B * B)}} \right|.$$

Для точек A и B, таких, что прямая AB пересекает абсолют в двух мнимых точках, расстояние вычисляется по такой формуле

$$\omega = -\frac{i}{2}\ln(AB, PQ) = \arccos\frac{A * B}{\sqrt{A * A}\sqrt{B * B}}. \tag{14.4}$$

Если точки A и B лежат на касательной к овальной линии γ, то будем считать, что расстояние для них не определено.

§ 15. Вычисление величины угла на проективной плоскости

15.1. Прямые пересекаются внутри овальной линии

Вернемся внутрь абсолюта. Нам нужно определить величину угла между двумя прямыми как число, инвариантное относительно всех проективных преобразований, оставляющих абсолют инвариантным. В этом нам поможет принцип двойственности и расстояние между двумя точками: расстояние – проективный инвариант двух точек, лежащих на одной прямой (пусть не смущает масло масляное). Тогда по принципу двойственности получаем: двойственный объект для расстояния – проективный инвариант двух прямых, проходящих через одну точку. Это и есть величина угла между прямыми. По принципу двойственности точка переходит в прямую, а значит координаты точки переходят в координаты прямой. Что это такое. Пусть на проективной плоскости дан проективный репер. Относительно этого репера прямая может быть задана общим уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Упорядоченная система чисел (u_1, u_2, u_3) называется координатами проективной прямой относительно проективного репера. Их также называют тангенциальными координатами. Так как вместе с уравнением $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ уравнение $\lambda u_1x_1 + \lambda u_2x_2 + \lambda u_3x_3 = 0$ задает ту же прямую, координаты прямой определены однозначно с точностью до постоянного множителя.

В тангенциальных координатах можно записать уравнение овальной линии. Через каждую точку овальной линии проходит единственная касательная, то есть прямая, пересекающая овальную линию в двух совпавших точках. Запишем ее уравнение в виде $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$. Чтобы найти общие точки овальной линии и прямой, решаем систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Один из u_i не нуль. Пусть u_3. Тогда из второго выражаем x_3 и подставляем в первое. Получаем уравнение

$$(u_3^2 - u_1^2)x_1^2 + (u_3^2 - u_2^2)x_2^2 - 2u_1u_2x_1x_2 = 0.$$

Оно имеет два совпавших корня тогда и только тогда, когда

$$\frac{D}{4} = u_1^2u_2^2 - (u_3^2 - u_1^2)(u_3^2 - u_2^2) = 0,$$

то есть $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$. Это уравнение овальной линии в тангенциальных координатах. Если в точечном варианте задания овальной линии она была образована точками, то здесь она образована своими касательными. Вместо элементарного объекта точка теперь элементарный объект – прямая.

Берем две прямые на проективной плоскости, которые пересекаются в точке, которая лежит внутри овальной линии. Нам нужно найти проективный инвариант прямых, который удовлетворяет ожидаемым свойствам угла (сумма частей есть все). Когда мы решали аналогичную задачу для двух точек, мы проводили прямую и смотрели, пересекается ли она с овальной линией. Теперь вместо прямой – точка пересечения данных прямых, а вместо общих точек прямой с овальной линией – касательные, проходящие через точку пересечения данных прямых. Так как точка пересечения данных прямых лежит внутри овальной линии, то таких касательных нет. Выбираем проективный репер так, чтобы данная точка имела точечные координаты $(0, 0, 1)$. Тогда в тангенциальных координатах эта точка имеет уравнение $u_3 = 0$. Действительно, если точка $A(a_1, a_2, a_3)$ – точечные координаты точки, а прямая имеет уравнение $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$, то условие принадлежности точки прямой будет выглядеть так: $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0$. В тангенциальных координатах точка будет задаваться всеми прямыми, проходящими через эту точку, то есть ее уравнение будет $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0$, где u_1, u_2, u_3 – переменные, а a_1, a_2, a_3 – константы. Тогда точка $A(0, 0, 1)$ будет задаваться в тангенциальных координатах уравнением $u_3 = 0$. Итак, мы получаем систему уравнений в тангенциальных координатах

$$\begin{aligned} &u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0 \\ &u_3 = 0 \end{aligned}$$

Мы попадаем в случай полностью аналогичный случаю вывода расстояния между точками, когда прямая, соединяющая их не пересекает овальную линию в вещественных точках. Здесь мы точно также выберем проективный репер таким, чтобы данные прямые U и V имели проективные координаты $U(u_1, u_2, 0)$ и $V(v_1, v_2, 0)$ и проведем те же самые выкладки, которые проводили для вывода расстояния между точками. В результате мы получим формулу для вычисления угла между прямыми

$$\omega(U, V) = \arccos\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \arccos\frac{U * V}{\sqrt{U * U}\sqrt{V * V}}.$$

Свойство угла автоматически выполняется, так как выполнялось свойство длины. Величина угла меняется от нуля до π. Достаточно ожидаемая ситуация.

Итак, внутри овальной линии мы полностью построили геометрию (это геометрия Лобачевского). Мы ввели инвариант двух точек – расстояние и инвариант двух прямых – угол.

15.2. Прямые пересекаются вне овальной линии

Рассмотрим прямые, которые проходят через точки, лежащие вне абсолюта. Таких прямых имеется два сорта (прямые, касающиеся овальной линии мы не рассматриваем, так как они и есть овальная линия, то есть абсолют, если мы применяем принцип двойственности): прямые пересекающие овальную линию в двух вещественных точках и прямые, пересекающие овальную линию в двух мнимых точках. Здесь при построении геометрии можно пойти двумя путями. Первый путь: рассмотреть прямые обоих сортов вместе. Но тогда расстояние между точками на прямых разных сортов будут вычисляться по-разному, что приводит к неравноправию точек. В принципе построение такой геометрии возможно, но не удобно. Второй путь: рассматривать две различные геометрии. В первую войдут прямые, которые пересекают овальную линию, а во вторую – те, которые не пересекают.

Пусть прямыми новой геометрии считаются только те прямые, которые пересекают абсолют. Такая геометрия называется дважды гиперболической. В ней есть пересекающиеся, параллельные и расходящиеся прямые (картинка). Расстояние между точками вычисляется по формуле (14.1). Посмотрим, как вычисляется величина угла. Возьмем две пересекающиеся прямые дважды гиперболической геометрии. Их точка пересечения лежит вне овальной линии. Через эту точку проходит касательная к овальной линии. Значит, формула для вычисления величины угла выводится аналогично случаю формулы расстояния для точек таких, что их прямая пересекает овальную линию. Следовательно, угол будет вычисляться по той же формуле (14.1), но вместо координат точек будут координаты прямых. Отсюда и ее название. И расстояние и угол вычисляются как в геометрии Лобачевского (то есть в гиперболической геометрии). Прямые и точки в дважды гиперболической геометрии полностью двойственны друг другу: расходящимся прямым соответствуют несоединимые точки, то есть точки, лежащие на прямых второго вида (не пересекающих овальную линию в вещественных точках), пересекающимся прямым соответствуют точки, через которые проходит единственная прямая, параллельным прямым соответствуют точки, которые лежат на касательной к овальной линии.

Посмотрим на вторую геометрию. Она содержит прямые, не пересекающие овальную линию в вещественных точках. Эта геометрия называется когиперболической. Здесь есть всего один вид прямых – пересекающиеся прямые. Точки есть разных видов: несоединимые двух типов и соединимые. Эта геометрия двойственна геометрии Лобачевского. Расстояние между точками вычисляется по формуле (14.4). Так как арккосинус изменяется в пределах от нуля до π, то длина прямой в этой геометрии конечна. Угол вычисляется по формуле (14.1). Как мы видели, эта формула дает любое положительное число, то есть углы в когиперболической геометрии могут быть сколь угодно большими.

В заключение заметим, что дважды гиперболическая и когиперболическая геометрии пока не настолько широко развиты и находят применение как геометрия Лобачевского или аффинная геометрия, но для подхода Клейна к построению геометрии они равноправны с названными геометриями.

§ 16. Абсолют – нулевая линия

Рассмотрим в качестве абсолюта нулевую линию, то есть линию второго порядка, которая относительно подходящего проективного репера задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. На этой кривой нет ни одной вещественной точки. Так же как для овальной линии доказывается, что любая прямая пересекает нулевую линию всегда в двух точках (они всегда мнимые). Выбираем проективный репер так, чтобы для точек A и B прямая AB задавалась уравнением $x_3 = 0$. Тогда точки пересечения этой прямой с нулевой линией задаются системой

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Координаты точек пересечения $P(1, i, 0)$, $Q(1, -i, 0)$. Они в точности такие же, как в случае овальной линии и прямой, которая пересекает ее в двух мнимых точках. Тогда расстояние между точками A и B может быть задано по формуле

$$\omega(A, B) = \arccos \frac{A * B}{\sqrt{A * A}\sqrt{B * B}},$$

где $A * B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Угол между двумя пересекающимися прямыми (кстати, все прямые в этой геометрии будут пересекаться) будет вычисляться по той же формуле (у нулевой линии нет касательных, следовательно, через точку пересечения не проходит ни одной касательной и угол между прямыми вычисляется по той же формуле, что и расстояние, но вместо точек там берутся прямые и их координаты. Эта геометрия называется эллиптической или геометрией Римана.

В геометрии Римана все прямые и все точки равноправны. Все прямые пересекаются, а любые две различные точки можно соединить прямой, причем только одной. Но необычным здесь является то, что прямая имеет конечную длину.

§ 17. Абсолют – пара мнимых пересекающихся прямых

Возьмем в качестве абсолюта линию второго порядка, которая в подходящем репере задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Это уравнение можно переписать в виде $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$, то есть это уравнение равносильно совокупности линейных уравнений $x_1 + ix_2 = 0$ и $x_1 - ix_2 = 0$. Так как линейное уравнение задает прямую, эта линия называется парой пересекающихся мнимых прямых. Она имеет всего одну вещественную точку – точку $A_3(0, 0, 1)$. Тогда расстояние между двумя точками (если они не лежат на прямой, проходящей через точку A_3) вычисляется по формуле

$$\omega(A, B) = \arccos \frac{A * B}{\sqrt{A * A}\sqrt{B * B}},$$

где $A * B = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

С измерением угла дело обстоит сложнее. Никаких инвариантных соотношений двух прямых здесь нет (аналогично центропроективной геометрии). Нужно искать какой-то другой инвариант, пригодный для нашего случая. Он должен выдерживать все преобразования подгруппы, сохраняющей абсолют $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Давайте посмотрим, что это за преобразования. Так как точка $A_3(0, 0, 1)$ инвариантна, получим

$$\begin{cases} 0 = c_{13} \\ 0 = c_{23} \\ \rho = c_{33} \end{cases}$$

Откуда получаем, что формулы упростились

$$\begin{cases} \rho x_1' = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 \\ \rho x_2' = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 \\ \rho x_3' = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 \end{cases}$$

Но сейчас у нас инвариантна не только точка A_3, но вся линия второго порядка переходит в себя, то есть линии $(x_1')^2 + (x_2')^2 = 0$ и $(c_{11}x_1 + c_{12}x_2)^2 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)^2 = 0$ должны совпадать, то есть иметь одно и то же уравнение. Откуда мы получаем, что

$$\begin{array}{l} c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0. \end{array}$$

Если выполняются эти соотношения, то мы можем положить $c_{11} = \cos\alpha$ для некоторого угла α. Тогда, вспоминая основное тригонометрическое тождество, мы получим, что $c_{21} = -\sin\alpha$, $c_{12} = \sin\alpha$, $c_{22} = \cos\alpha$ (второй вариант с α противоположного знака. Пока нам это не существенно, для него рассуждения аналогичны). Итак, формулы, сохраняющие абсолют имеют вид

$$\begin{array}{l} \rho x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ \rho x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \\ \rho x_3' = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 \end{array}$$

Получим формулы для преобразования координат прямых при этих преобразованиях. Пусть была прямая $u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3' = 0$. Тогда ее прообраз при рассматриваемых преобразованиях будет иметь вид

$$u_1'(x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha) + u_2'(-x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) + u_3'(c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3) = 0.$$

Тогда

$$\begin{array}{l} \rho u_1 = u_1' \cos\alpha - u_2' \sin\alpha + u_3' c_{31} \\ \rho u_2 = u_1' \sin\alpha + u_2' \cos\alpha + u_3' c_{32} \\ \rho u_3 = c_{33} u_3' \end{array}$$

Заметим, что $c_{33} \neq 0$, так как матрица преобразования должна иметь ненулевой определитель. Если первые два уравнения разделить на третье, то получим

$$\begin{array}{l} u = \frac{1}{c_{33}}(u' \cos\alpha - v' \sin\alpha + c_{31}) \\ v = \frac{1}{c_{33}}(u' \sin\alpha + v' \cos\alpha + c_{32}) \end{array}$$

По своему виду это почти формулы движений евклидовой плоскости, но, во-первых, вместо координат точек здесь участвуют координаты прямых, во-вторых, мешается коэффициент $\frac{1}{c_{33}}$. Со второй проблемой мы поступим так: сузим рассматриваемую группу преобразований (она у нас состояла из проективных преобразований плоскости, сохраняющих нулевую линию), потребовав, чтобы c_{33} было равно 1. Такое множество преобразований замкнуто относительно взятия композиции и обратного. следовательно, является группой. Итак, мы получили геометрию, в которой группа преобразований координат прямых изоморфна группе движений евклидовой плоскости. Такую геометрию называют коевклидовой геометрией.

Непосредственная проверка показывает, что в такой геометрии величина

$$\omega(U,V)=\sqrt{(u-\tilde{u})^2+(v-\tilde{v})^2}$$

где $u=\frac{u_1}{u_3}$, $\tilde{u}=\frac{u_2}{u_3}$, (u_1,u_2,u_3) –координаты прямой U и аналогично для прямой V, инвариантна относительно выбранной группы преобразований. Значит, она может быть принята за величину угла между прямыми.

§ 18. Геометрия двойственная коевклидовой

В предыдущем параграфе у нас появилась формула очень похожая на формулу для вычисления расстояния между точками, но она вычисляла величину угла. Чтобы перейти от нее к расстоянию, нужно опять применить принцип двойственности. В коевклидовой геометрии абсолютом была пара мнимых пересекающихся прямых $x_1\pm ix_2=0$, пересекающиеся в точке $A_3(0,0,1)$. По принципу двойственности они должны перейти в точки (мнимые), лежащие на прямой (вещественной):

$$\begin{array}{ccc} A_3(0,0,1) & \to & a_3(0,0,1)\\ m_1(1,i,0) & \to & M_1(1,i,0)\\ m_2(1,-i,0) & \to & M_2(1,-i,0)\end{array}$$

Итак, мы получаем абсолют – a_3 – прямая и две мнимые точки на ней. Прямая уже была у нас абсолютом в аффинной геометрии. Сейчас к ней добавились две мнимые точки. Прямые (u,v) превращаются в точки (x,y) и формулы проективных преобразований в этой геометрии принимают вид

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+c_{31}\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+c_{32}\end{aligned}$$

(вторая часть формул с плюсом и минусом получается аналогично). Это формулы движений евклидовой плоскости (написаны движения первого рода). Расстояние между точками ожидаемо вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2}.$$

Это евклидова геометрия.

Теперь посмотрим, что будет с углом. Из коевклидовой геометрии берем формулу для вычисления расстояния между точками. По принципу двойственности она превратится в формулу для вычисления угла между прямыми U и V

$$\omega=\arccos\frac{U*V}{\sqrt{U*U}\sqrt{V*V}},$$

где $U*V=u_1v_1+u_2v_2$. Увидим в ней привычную формулу для вычисления косинуса угла между прямыми. У нас есть две прямые $U:u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ и $V:v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$. Переходим к координатам $x=\frac{x_1}{x_3}$ и $y=\frac{x_2}{x_3}$. Тогда $U:u_1x+u_2y+u_3=0$ и $V:v_1x+v_2y+v_3=0$. Если переобозначить коэффициенты в этих уравнениях прямых $u_1=A_1$, $u_2=B_1$, $u_3=C_1$ и аналогично для V, то получаем привычную формулу

$$\cos\omega=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

§ 19. Абсолют – пара пересекающихся прямых и двойственная ей геометрия

Начнем с двойственной геометрии. Эта геометрия называется геометрией Минковского или псевдоевклидовой. Абсолют в ней задается в тангенциальных координатах так:

$$u_1^2-u_2^2=0.$$

Выясним, что за множество точек он задает. Сначала заметим, что это уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $u_1=\pm u_2$. На точку смотрим как на пересечение всех прямых, проходящих через эту точку. Пусть точка с точечными координатами $A(a_1,a_2,a_3)$. Тогда прямая $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ проходит через A тогда и только тогда, когда $u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3=0$. Теперь смотрим на u_i как на переменные. Тогда в таком уравнение точечные координаты точки будут коэффициентами в этом уравнении. Итак, получаем две точки $Z_1(1,1,0)$ и $Z_2(1,-1,0)$. Это абсолют.

Найдем формулы проективных преобразований, которые оставляют этот абсолют на месте. Общий вид формул для тангенциальных координат

$$\begin{aligned} \rho u_1'&=c_{11}u_1+c_{12}u_2+c_{13}u_3\\ \rho u_2'&=c_{21}u_1+c_{22}u_2+c_{23}u_3\\ \rho u_3'&=c_{31}u_1+c_{32}u_2+c_{33}u_3\end{aligned}$$

Так как прямая $(0,0,1)$ (координаты тангенциальные) остается инвариантной, получаем, что $c_{13}=c_{23}=0$. Так как уравнение $u_1^2-u_2^2=0$ должно перейти само в себя (вычисления как в случае коевклидовой геометрии) получаем

$$\begin{aligned}&c_{11}^2-c_{21}^2=1\\&c_{12}^2-c_{22}^2=-1\\&c_{11}c_{12}-c_{21}c_{22}=0.\end{aligned}$$

Положим $c_{11}=\operatorname{ch}\alpha$, $c_{21}=-\operatorname{sh}\alpha$ (есть еще три варианта, они рассматриваются аналогично, мы посмотрим только этот). Тогда формулы будут иметь вид

$$\begin{aligned}&\rho u_1'=\operatorname{ch}\alpha u_1-\operatorname{sh}\alpha u_2\\&\rho u_2'=-\operatorname{sh}\alpha u_1+\operatorname{ch}\alpha u_2\\&\rho u_3'=c_{31}u_1+c_{32}u_2+c_{33}u_3\end{aligned}$$

Переходим к точечным координатам и сразу делим на x_3

$$\begin{aligned}&x=\operatorname{ch}\alpha x'-\operatorname{sh}\alpha y'+x_0\\&y=-\operatorname{sh}\alpha x'+\operatorname{ch}\alpha y'+y_0\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что инвариантом этих преобразований будет выражение $(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2$. Тогда выражение

$$d(A,B)=\sqrt{(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2}$$

задает расстояние в этой геометрии. Как мы видим, в этой геометрии расстояние между двумя различными точками может быть не только нулевым, но еще и мнимым.

С углами между прямыми тоже не все хорошо. Если взять две прямые u,v, то их можно дополнить до четверки прямых прямыми AZ_1 и AZ_2, где A – точка пересечения прямых u и v. Если прямые AZ_1 и AZ_2 разделяют прямые u и v, то угол можно вычислить с помощью формулы

$$\omega=|\ln(uv,(AZ_1)(AZ_2))|,$$

а если нет, то угол не определен.

Двойственная ей геометрия с абсолютом – парой пересекающихся прямых $x_1^2-x_2^2=0$ называется копсевдоевклидовой. Как мы уже привыкли, формулы для вычисления расстояния и угла меняются местами.

§ 20. Метрика во флаговой геометрии

Выше мы рассматривали флаговую геометрию, то есть на проективной плоскости фиксировали прямую и принадлежащую ей точку. Выберем проективный репер так, чтобы прямая задавалась уравнением x_3-0, а точка имела бы координаты $A_1(1,0,0)$. Напомним, что формулы проективных преобразований, сохраняющих такой абсолют, имеют вид

$$\begin{aligned}&\rho x_1'=c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3\\&\rho x_2'=c_{22}x_2+c_{23}x_3\\&\rho x_3'=c_{33}x_3\end{aligned}$$

Сузим группу преобразований, положив $c_{11}=c_{22}=c_{33}=1$

$$\begin{aligned}&\rho x_1'=x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3\\&\rho x_2'=x_2+c_{23}x_3\\&\rho x_3'=x_3\end{aligned}$$

и разделим первые два на третье

$$\begin{aligned}&x'=x+vy+a\\&y'=y+b\end{aligned}$$

Ищем инвариант двух точек, используя эти формулы. Если вторые координаты (y) разные, то получим

$$|y-\tilde{y}|=|y'+b-\tilde{y}'-b|,$$

то есть это инвариант. Его можно взять в качестве расстояния между точками. Если игреки совпадают, то получим

$$|x'-\tilde{x}'|=|x+vy+a-\tilde{x}-v\tilde{y}-a|$$

является инвариантом. Итак, мы получаем двухчастевую метрику. Так как флаговая геометрия дуальна сама себе, то угол между прямыми вычислется по этой же формуле, но вместо координат точек в ней стоят координаты прямых.