Геометрия симплексов в многомерном пространстве.

3 сентября 2018 г.

Содержание

Литература.

1. Кириченко В.Ф. и др. Геометрия в 2-х томах Т1., Москва, Академия, 2012.

2. С.А. Франгулов и др. Сборник задач по геометрии. Москва, Просвещение, 2002.

3. Н.И.Гусева, Н.С.Денисова, О.Ю.Тесля Сборник задач по геометрии Часть 1, Москва, Кнорус, 2012.

4. Н.С.Денисова Геометрия треугольника, тетраэдра, симплекса, Москва, МПГУ, 2016.

5. Н.С. Попова Медианы и бимедианы некоторых видов симплициальных комплексов. Магистерская диссертация, МПГУ, 2018.

6. Л.А. Игнаточкина, Н.С. Попова О свойствах ℓ-медиан k-симплексов и k-призм. // Тематический сборник научных трудов «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», БФУ им. Канта, Калининград, 2018.

Введение

Из школьного курса геометрии хорошо известна теорема о точке пересечения медиан треугольника: медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Треугольник – фигура плоскости, то есть двумерного пространства. Обобщением треугольника на трехмерное пространство является тетраэдр. Для него тоже можно определить медианы и для них справедлива аналогичная теорема: медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $3:1$. Увеличивая размерность пространства еще на единицу, мы попадаем в четырехмерное пространство. Его мы уже не можем воспринимать с помощью органов чувств, но можем изучать его свойства с помощью математического аппарата. В нем мы можем построить обобщение треугольника и тетраэдра. Это будет 4-симплекс. Для него тоже определяются медианы и доказывается аналогичная теорема. Как вы уже догадались медианы 4-симплекса будут пересекаться в одной точке и делится ей в отношении $4:1$. Для пространства размерности n мы получим пересечение медиан n-симплекса и отношение $n:1$.

Высоты треугольника и тетраэдра ведут себя по-разному. В треугольнике высоты (а точнее прямые, содержащие высоты) всегда пересекаются в одной точке, а в тетраэдре – уже нет. Другими словами, перейдя к более высокой размерности пространства мы теряем свойство. В нашем курсе мы выясним, в чем причина исчезновения этого свойства и убедимся, что в больших размерностях оно снова не возникнет. Напомним, что тетраэдр, у которого высоты пересекаются в одной точке, называется ортоцентрическим и он обладает рядом интересных свойств.

Начнем мы курс с воспоминаний о построении многомерного пространства. Над этим вопросом задумывались еще древние греки. Они рассуждали так: величина a может быть изображена отрезком длины a. Величина a^2 может быть изображена квадратом площади a^2. Величина a^3 может быть изображена кубом объема a^3. Как изобразить величину a^4? Они так не до чего и не додумались и бросили эту проблему.

Вновь проблема многомерных пространств возникла после возникновения аналитической геометрии, после создания декартовой системы координат. Благодаря системе координат рассуждения с точками плоскости можно заменить рассуждениями с упорядоченными парами чисел. Точно также рассуждения с точками пространства заменяются рассуждениями с упорядоченными тройками чисел. Кто мешает работать с упорядоченными четверками чисел? Все то же самое. Только базис в системе координат состоит уже из четырех элементов, то есть пространство четырехмерно. Никто не говорил, что это пространство существует в действительности и представить его себе не пытались. Но это был удобный аппарат для исследований. Например, физики изучали движение частицы в нашем обычном пространстве. Чтобы иметь о ней полную информацию нужно в каждый момент времени знать ее положение (три координаты относительно некоторой фиксированной системы координат) и ее скорость (три координаты вектора скорости). Другими словами, в каждый момент времени требуется знание упорядоченной шестерки чисел. Это кривая в шестимерном пространстве. Значит, чтобы изучать движение частицы, нужно развивать аппарат дифференциальной геометрии в шестимерном пространстве.

В прошлом веке уже стали задумываться, какую размерность имеет наше реальное пространство. Пусть мы можем воспринимать только четыре его измерения (три пространственных и одно временное), но это не означает, что само существующее пространство должно ограничиваться этими измерениями. Сейчас существуют гипотезы, что наше пространство 10, 11 или 26 мерно. Как догадаться, какое все-таки пространство на самом деле? Строить абстрактные модели (теории) и смотреть их сечения нашим четырехмерным миром. Чем больше будет совпадений с нашей реальностью, тем выше шанс, что мы угадали.

В этом курсе мы посмотрим самые простые многомерные пространства – евклидовы и самые простые фигуры в них – симплексы. Но ведь и классическая геометрия начиналась с плоскости и треугольника...

1. Векторные пространства.

Элементы многомерной геометрии были в основном курсе геометрии. В нашем курсе мы вспомним из них, то, что потребуется для введения понятия симплекса. Начнем с векторного пространства.

1.1. Геометрическое векторное пространство.

В начале первого курса мы ввели понятие вектора. Напомним как он был построен. Находясь в обычном пространстве, мы рассматриваем всевозможные отрезки. Указывая начало и конец отрезка, мы получаем направленный отрезок (конец направленного отрезка мы обозначаем стрелкой). У направленного отрезка есть две основные характеристики: длина и направление. Используя эти две характеристики, все направленные отрезки мы можем разбить на группы (математики говорят – классы эквивалентности): каждая группа содержит все направленные отрезки одинаковой длины и направления. Каждая группа (класс эквивалентности) мы назвали вектором. Другими словами, вектор – это множество всех направленных отрезков, любые два из которых имеют одинаковую длину и направление.

Для векторов изначально были введены две операции: сложение двух векторов (правило треугольника) и умножение вектора на число. По сути это два алгоритма, которые позволяют в первом случае по двум векторам однозначно построить третий вектор (сумму), а во втором случае по числу и вектору однозначно построить еще один вектор (произведение вектора на число). Введенные операции обладают следующими восемью свойствами:

1. Коммутативность сложения
   $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Ассоциативность сложения
   $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. Существование нуль-вектора $\vec{0}$ (его представители – это нулевые направленные отрезки, то есть точки). Этот вектор обладает следующим свойством:
   $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

4. Существование противоположного вектора для любого вектора $\vec{a}$. Напомним, что противоположный вектор для вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ получался так: $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. Противоположный вектор для вектора $\vec{a}$ обладает свойством $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

5. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, λ,μ – произвольные вещественные числа.

6. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$, λ,μ – произвольные вещественные числа.

7. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, λ – произвольное вещественное число.

8. $1\vec{a}=\vec{a}$.

Оказывается, что не только для построенных выше векторов – классов эквивалентности направленных отрезков – можно ввести операции сложения и умножения на вещественное число, удовлетворяющие перечисленным восьми свойствам. Например, аналогичные построения можно провести для матриц, функций, многочленов и других объектов. Чтобы в каждом из этих случаев не проводить доказательства, поступают так: рассматривают множество объектов (не интересуясь, что это за объекты), говорят, что на этом множестве задано две операции – сложение двух объектов и умножение объекта на вещественное число – (опять-таки не вдаваясь в подробности в то, как эти операции действуют). Другими словами, упомянутые операции произвольны, но должны удовлетворять восьми условиям, которые перечислены выше. Эти условия называются *аксиомами.* Далее, с помощью законов логики из аксиом выводятся следствия и строится теория. Такой подход к построению теории называется *аксиоматическим.* Объекты множества называются *векторами*, а само множество с введенными операциями – *векторным пространством.* Если мы будем брать конкретные объекты в множестве (например, матрицы или классы эквивалентности направленных отрезков), то будем говорить, что мы рассматриваем пример векторного пространства (или, как еще говорят, модель).

Перейдем к строгим определениям.

1.2. Понятие векторного пространства, примеры, простейшие свойства.

Пусть V – непустое множество произвольной природы. Будем называть множество V *векторным (или линейным) пространством*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ставит в соответствие элемент $\vec{z} \in V$, называемый *суммой векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ и обозначаемый $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $\vec{x} \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $\vec{y} \in V$, называемый *произведением вектора* $\vec{x}$ *на число* λ и обозначаемый $\vec{y} = \lambda\vec{x}$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность);

2^0. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $\vec{0} \in V$, такой что для любого элемента $\vec{x} \in V$ выполняется $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (элемент $\vec{0}$ называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $\vec{x} \in V$ существует элемент $-\vec{x} \in V$, такой что

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

(элемент $-\vec{x}$ называется *противоположным* элементу $\vec{x}$);

5^0. $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$;

6^0. $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$;

7^0. $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$;

8^0. $1\vec{x} = \vec{x}$,

где $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства.* Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на вещественное число.*

Замечание 1.1. Договоримся обозначать векторы малыми латинскими буквами со стрелкой сверху, если речь идет об абстрактном векторном пространстве. В конкретных примерах векторных пространств мы будем следовать традициям обозначений элементов этих множеств, если это не приводит к недоразумениям.

Первым свойством векторного пространства (оно наверняка известно еще и из курса алгебры) является единственность нуль-вектора в векторном пространстве.

Доказательство. Пусть $\vec{0}$ и $\vec{0}_1$ – нуль-векторы. Тогда так как $\vec{0}$ – нуль-вектор, то

$$\vec{0}_1 + \vec{0} = \vec{0}_1.$$

Так как $\vec{0}_1$ – нуль-вектор, то

$$\vec{0} + \vec{0}_1 = \vec{0}.$$

В силу коммутативности сложения в левых частях последних двух выражений стоят одинаковые векторы. Значит, $\vec{0} = \vec{0}_1$. □

Пример 1.1. Естественно, что первый пример векторного пространства – это множество классов эквивалентности направленных отрезков, которое было построено в начале первого курса. Мы будем называть это векторное пространство *геометрическим векторным пространством* и обозначать V^3.

Пример 1.2. Обозначим через $M_{2,2}$ множество $2\times 2-$ матриц. Докажем, что это множество является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число, введенных в курсе алгебры.

Напомним, что сумма двух матриц и произведение матрицы на число определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}; \ \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Докажем, что выполняется аксиома 1^0 векторного пространства. Остальные аксиомы доказываются аналогично.

Пусть даны две матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. По определению суммы матриц и свойству сложения вещественных чисел получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что нуль-вектором будет нулевая матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, так как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Какой вид будет иметь противоположный элемент для матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$?

Итак, множество всех $2 \times 2-$ матриц образует векторное пространство относительно операций (1.1).

Разностью векторов $\vec{x} \in V$ и $\vec{y} \in V$ называется вектор $\vec{z} = \vec{x} + (-1)\vec{y}$. Обозначение $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$.

Напомним простейшие свойства векторного пространства.

1^0. Для любого вектора $\vec{a} \in V$ имеем $0\vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in V$ – произвольный вектор. Тогда по аксиомам векторного пространства получим

$$\vec{a} + 0\vec{a} = (1+0)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a}.$$

Таким образом, получим $0\vec{a} + \vec{a} = \vec{a}$. Прибавим к обеим частям этого равенства вектор $(-1)\vec{a}$.

$$0\vec{a} + \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} + (-\vec{a}).$$

В силу аксиомы 4^0 и аксиомы 3^0, получим нужное равенство. □

2^0. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то равенство верно по свойству 1^0.

Если $\alpha \neq 0$, то рассмотрим произвольный вектор $\vec{b} \in V$. Тогда существует вектор

$$\vec{a} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}.$$

По аксиомам векторного пространства получим

$$\vec{b}+\alpha\vec{0}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{0}=\alpha(\vec{a}+\vec{0})=\alpha\vec{a}=\vec{b}.$$

По аксиоме 3^0 векторного пространства получим, что $\alpha\vec{0}=\vec{0}$. □

3^0. Для любого вектора $\vec{a}\in V$ имеем $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Доказательство. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то $(-1)\vec{a}=\vec{0}$ по свойству 2^0. С другой стороны, $-\vec{0}=\vec{0}$, так как

$$\vec{0}+\vec{0}=(1+1)\vec{0}=2\vec{0}=\vec{0}.$$

Итак, в этом случае доказываемое равенство верно.

Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то

$$\vec{a}+(-1)\vec{a}=(1-1)\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}.$$

Тогда по аксиоме 4^0 векторного пространства $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$. □

4^0. Если $\alpha\vec{a}=\vec{0}$, то $\alpha=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$.

Доказательство. Если $\alpha=0$, то все доказано. Если $\alpha\neq 0$, то умножим обе части равенства $\alpha\vec{a}=\vec{0}$ на число $\frac{1}{\alpha}$. Тогда по аксиомам векторного пространства и свойству 2^0 получим $\vec{a}=\vec{0}$. □

Суммой k векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\in V$ называется вектор $\vec{b}=(\ldots(\vec{a}_1+\vec{a}_2)+\vec{a}_3)+\ldots+\vec{a}_k)$. В силу аксиомы 2^0 векторного пространства скобки в сумме k векторов можем не писать и обозначать

$$\vec{b}=\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_k.$$

Задачи.

1. Обозначим через $M_{m,n}$ множество $m\times n-$ матриц. Докажите, что это множество является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число, введенных в курсе алгебры.

2. Пусть V – множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Определим операции сложения и умножения на вещественное число следующим образом:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x);\;\;(\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$

где $f,g\in V$ – произвольные функции на $[a,b]$, $x\in[a,b]$. Докажите, что V является векторным пространством.

3. Пусть V – множество направленных отрезков плоскости, имеющих общее начало. Сложение элементов из V определим по правилу параллелограмма, а умножение так: длина направленного отрезка изменяется в $|\lambda|$ раз, направление сохраняется, если $\lambda \geq 0$ и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$. Будет ли множество V векторным пространством?

4. Пусть $\angle AOB$ – произвольный угол на плоскости. Пусть V – множество направленных отрезков с началом в точке O и концами во внутренних точках угла $\angle AOB$. Сложение и умножение на вещественное число определяется так же как и в предыдущей задаче. Будет ли такое множество векторным пространством?

2. Линейная зависимость и независимость векторов.

2.1. Опять воспоминания первого курса.

Вернемся к векторам геометрического векторного пространства. Если в геометрическом векторном пространстве фиксировать тройку некомпланарных векторов, то каждому вектору этого пространства взаимно однозначно ставилась в соответствие упорядоченная тройка вещественных чисел – координат этого вектора. Операции с векторами сводились к операциям с тройками этих чисел, что существенно упрощало решение задач. Чтобы ввести координаты вектора, нужно было выбрать базис и разложить вектор по нему. Получающиеся коэффициенты – это и есть координаты вектора. Что такое базис? Это минимальная система векторов, по которой раскладывается любой вектор геометрического векторного пространства. В данном случае это три некомпланарных вектора. Если бы мы взяли компланарные векторы (то есть векторы параллельные одной плоскости), то не смогли бы разложить вектора, не параллельные этой плоскости. Можно было бы взять больше, чем три вектора, но, во-первых, зачем усложнять себе жизнь (чем больше объектов, тем сложнее с ними работать), и, во-вторых, координаты вектора относительно базиса тогда были бы определены не однозначно. Итак, базис – это минимальная по количеству система векторов, по которой можно разложить любой вектор геометрического векторного пространства. В результате этого вектор получает набор координат. Данную конструкцию мы перенесем (с необходимыми изменениями) на случай произвольного векторного пространства.

2.2. Определения и свойства линейной зависимости векторов.

Пусть V – произвольное векторное пространство. Рассмотрим векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ и числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}$. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ называется вектор

$$\vec{b} = \alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n.$$

Система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{$*$}$$

Если равенство $(*)$ выполняется только в случае, когда $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$, то система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно независимой*. Векторы линейно зависимой системы называются *линейно зависимыми*, а линейно независимой системы – *линейно независимыми*.

Напомним свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1^0. Система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор этой системы представим в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

Доказательство. 1. Пусть данные векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. Тогда по определению линейно зависимых векторов имеем

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.1}$$

причем среди чисел $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ хотя бы одно число отлично от нуля. Пусть это число α^1 (для остальных чисел доказательство аналогично). Тогда разделим обе части равенства (2.1) на α^1 и запишем его в виде

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha^2}{\alpha^1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha^n}{\alpha^1}\vec{a}_n$$

Если обозначить $-\frac{\alpha^2}{\alpha^1} = \beta^1, \dots, -\frac{\alpha^n}{\alpha^1} = \beta^{n-1}$, то последнее равенство примет вид

$$\vec{a}_1 = \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n$$

то есть вектор $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

2. Пусть вектор $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов (для других векторов доказательство аналогично), то есть $\vec{a}_1 = \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n$. Тогда это равенство можно записать в виде

$$(-1)\vec{a}_1 + \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{2.2}$$

Мы видим, что среди коэффициентов линейной комбинации, стоящей в левой части (2.2), первый коэффициент -1 отличен от нуля. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы по определению линейно зависимых векторов. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть система векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in V$ *линейно независима, а система векторов* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}) \in V$ *линейно зависима. Тогда вектор* $\vec{a}$ *является линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Доказательство. Так как система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a})$ линейно зависима, то по определению существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \alpha \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n + \alpha\vec{a} = \vec{0} \tag{2.3}$$

Если $\alpha = 0$ равно нулю, то мы получаем равенство $\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n = \vec{0}$, в котором хотя бы одно из чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ не равно нулю. Это означает, что система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ линейно зависима. Мы пришли к противоречию с условием, а значит, $\alpha \neq 0$. Тогда, как в доказательстве свойства 1^0, мы можем представить вектор $\vec{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. □

Пусть дана система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in V$. Любое непустое подмножество этой системы векторов называется *подсистемой* данной системы векторов.

2^0. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$. Если какая-либо подсистема векторов этой системы линейно зависима, то линейно зависима и вся система векторов.

Доказательство. Пусть линейно зависимы первые k векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \, (k \leq n)$ этой системы. Если это не так, то мы можем перенумеровать векторы таким образом, чтобы линейно зависимыми оказались первые k векторов. Тогда по определению линейной зависимости векторов существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, и верно равенство $\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0}$. Добавим в это равенство нулевые слагаемые. Очевидно, что при этом оно останется верным. В результате получим

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.4}$$

Итак, существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^k, 0, \ldots, 0$, не равные нулю одновременно (отлично от нуля какое-то из чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$), и верно равенство (2.4). По определению линейной зависимости векторов это означает, что система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима. □

3^0. Если система векторов содержит $\vec{0}$, то она линейно зависима.

Доказательство. Докажите самостоятельно, используя равенство $1\vec{0} + 0\vec{a}_1 + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$. □

Будем называть пару линейно зависимых векторов *коллинеарными.* Из свойства 1^0 линейно зависимых векторов следует, что векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ будут являться коллинеарными тогда и только тогда, когда существует число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Пример 2.1. Рассмотрим векторное пространство $M_{2,2}$ (см. пример 1.2). Докажем, что матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы.

Действительно, составим их линейную комбинацию с произвольными коэффициентами α^1, α^2, α^3, α^4 и приравняем ее нуль-вектору.

$$\alpha^1 E_1 + \alpha^2 E_2 + \alpha^3 E_3 + \alpha^4 E_4 = \vec{0} \tag{2.5}$$

Напомним, что в векторном пространстве $2 \times 2-$ матриц $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (см. Пример 1.2). Тогда с учетом определения операций сложения матриц и умножения на число из (2.5) получим

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению равенства матриц получим $\alpha^1 = 0$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$ и $\alpha^4 = 0$. Итак, равенство (2.5) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = 0$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$ и $\alpha^4 = 0$. По определению линейной независимости векторов это означает, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 линейно независимы.

2.3. Базис. Размерность векторного пространства.

Добавим к 8 аксиомам векторного пространства еще две аксиомы, которые называются *аксиомами размерности.*

9^0. В векторном пространстве V существует линейно независимая система из n векторов.

10^0. В векторном пространстве V любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.

Векторное пространство V, которое удовлетворяет аксиомам 9^0, 10^0, называется *$n-$ мерным векторным пространством* и обозначается V^n. Число n называется *размерностью* векторного пространства V^n.

Базисом $n-$ мерного векторного пространства V^n называется упорядоченная линейно независимая система векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из V^n, такая что любой вектор $\vec{x} \in V^n$ представим в виде линейной комбинации

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n.$$

Упорядоченная система вещественных чисел $(x^1, \dots, x^n)$ называется *координатами вектора* $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Будем говорить в этом случае, что *вектор* $\vec{x}$ *раскладывается по базису* $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Можно показать, что любое n-мерное векторное пространство V^n обладает базисами и каждый из них содержит ровно n векторов.

Из этого утверждения следует удобный способ нахождения базиса, если известна размерность пространства.

Теорема 2.1. *Любая линейно независимая система n векторов в $n-$ мерном векторном пространстве является базисом.*

Пример 2.2. Покажем, что система матриц E_1, E_2, E_3, E_4 является базисом векторного пространства $2 \times 2-$ матриц (см. пример 1.2). Мы уже доказали (см. пример 2.1), что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 являются линейно независимыми. Нам осталось доказать, что любая $2 \times 2-$ матрица представима в виде линейной комбинации E_1, E_2, E_3, E_4. Рассмотрим произвольную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По определению сложения матриц и умножения матрицы на число получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

Таким образом, по определению система матриц (E_1, E_2, E_3, E_4) является базисом векторного пространства всех $2 \times 2-$ матриц, а значит, размерность этого пространства равна 4.

Пример 2.3. Приведем пример векторного пространства, которое не является $n-$ мерным векторным пространством. Рассмотрим множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов от x с вещественными коэффициентами. Нетрудно проверить, что это множество будет векторным пространством относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на число, введенных в курсе алгебры. Но для любого $n \in \mathbb{N}$ система многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}$ будет линейно независима (докажите самостоятельно). Таким образом, аксиома 10^0 не выполняется, а значит, множество $\mathbb{R}[x]$ не является $n-$ мерным векторным пространством.

Задачи.

1. Используя следствие из свойства 1 линейно зависимых систем векторов и аксиомы n-мерного векторного пространства, докажите, что в любом n-мерном векторном пространстве базисы существуют.

2. Докажите, что в геометрическом векторном пространстве V^3 а) система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы

коллинеарны; б) система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны; в) система из четырех и более векторов всегда линейно зависима.

3. Докажите, что любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

4. В геометрическом векторном пространстве V^3 приведите примеры линейно зависимых систем векторов, которые содержат хотя бы одну линейно независимую подсистему векторов.

5. Пусть V – множество, состоящее из двух крокодилов. Докажите, что это множество нельзя превратить в векторное пространство.

3. Координаты векторов в базисе.

3.1. Координаты векторов.

Лемма 3.1. *Пусть в векторном пространстве V^n фиксирован базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Координаты любого вектора $\vec{a} \in V$ в данном базисе определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a} \in V^n$ имеет два набора координат $(a^1, \ldots, a^n)$ и $(b^1, \ldots, b^n)$ в базисе E. По определению координат вектора это означает, что

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + \ldots + a^n\vec{e}_n; \quad \vec{a} = b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n.$$

Вычтем из первого равенства второе и используем аксиомы векторного пространства

$$(a^1 - b^1)\vec{e}_1 + \ldots + (a^n - b^n)\vec{e}_n = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим $a^1 - b^1 = 0$, ..., $a^n - b^n = 0$, то есть $a^1 = b^1$, ..., $a^n = b^n$. □

Следствие 3.1. *Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.*

Теорема 3.1. *Пусть дан базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства V^n, произвольные векторы $\vec{x}(x^1, \ldots, x^n)$, $\vec{y}(y^1, \ldots, y^n) \in V^n$ и произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$(\vec{x} + \vec{y})(x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n); \quad (\lambda\vec{x})(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству такой же теоремы первого курса. Проведите рассуждения самостоятельно. □

Задачи.

1. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *кососимметрической*, если $c = -b$, $a = d = 0$. Найдите какой-либо базис векторного пространства всех кососимметрических матриц. Определите размерность этого векторного пространства.

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *симметрической*, если $c = b$. Найдите какой-либо базис векторного пространства всех симметрических матриц. Определите размерность этого векторного пространства.

3. Пусть V – это множество многочленов от одной переменной степени, не большей n. Найдите базис и определите размерность этого векторного пространства.

4. Будет ли система многочленов $(x-1, x+1, x^2+1)$ базисом векторного пространства многочленов степени, не большей 2? Если да, то найдите координаты многочлена x^2+2x+1 в этом базисе.

4. Векторные подпространства.

Пусть даны векторное пространство V и его непустое подмножество L. Будем говорить, что L называется *векторным (или линейным) подпространством векторного пространства* V, если
1) для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in L$ их сумма $\vec{x}+\vec{y} \in L$;
2) для любого вектора $\vec{x} \in L$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ произведение $\alpha\vec{x} \in L$.

Очевидно, что для векторного подпространства выполняются аксиомы 1^0 – 8^0 векторного пространства, а значит, оно является векторным пространством. Если кроме того для L выполняются аксиомы 9^0, 10^0 для некоторого числа k, то векторное подпространство L является $k-$ мерным векторным пространством. Будем говорить в этом случае, что L есть *$k-$ мерное векторное подпространство векторного пространства* V. Будем называть $k-$ мерное векторное подпространство также *конечномерным.*

Так как конечномерное векторное подпространство само является векторным пространством, мы можем для определения его размерности мы будем использовать базисы: размерность векторного подпространства равна количеству векторов в его базисе.

Пример 4.1. Легко видеть, что множества $\{\vec{0}\}$ и V^n являются векторными подпространствами в V^n. Положим по определению, что $\{\vec{0}\}$ является 0-мерным векторным пространством.

Пример 4.2. Рассмотрим множество векторов из геометрического векторного пространства V^3 (то, которое построили на 1 курсе, его векторы – это классы эквивалентности равных по длине и сонаправленных направленных отрезков), которые параллельны фиксированной плоскости. Складывая векторы и умножая на на любое вещественное число, мы получим вектор снова параллельный плоскости. Следовательно, такое множество векторов является векторным подпространством.

Как мы знаем с 1 курса, базисом пространства векторов, параллельных фиксированной плоскости, будет любая пара не коллинеарных векторов, такое подпространство имеет размерность 2.

Пример 4.3. Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ – произвольные векторы векторного пространства V. *Линейной оболочкой векторов* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ называется множество всех векторов вида

$$\vec{x} = \alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k \vec{a}_k, \tag{4.1}$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Обозначение $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$.

Проверим, что линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ является векторным подпространством. Действительно, пусть $\vec{x}, \vec{y} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ – произвольные векторы. Тогда

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k \vec{a}_k) + (\beta^1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta^k \vec{a}_k) = (\alpha^1 + \beta^1)\vec{a}_1 + \ldots + (\alpha^k + \beta^k)\vec{a}_k,$$

то есть вектор $\vec{x} + \vec{y}$ имеет вид (4.1), а значит, принадлежит линейной оболочке.

Аналогично проверяется второе условие из определения векторного подпространства. В результате получаем, что линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ является векторным подпространством.

В дальнейшем мы будем использовать линейную оболочку линейно независимой системы векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$. Естественно, что она будет векторным подпространством. Кроме того, ее размерность будет равна k. Действительно, базисом этого пространства будет сама система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$: она линейно независима по условию и любой вектор из $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ представим в виде линейной комбинации векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ по определению линейной оболочки.

Пусть L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства векторного пространства V. Обозначим $L \cap \tilde{L}$ их пересечение.

Теорема 4.1. *Пересечение векторных подпространств является векторным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in L \cap \tilde{L}$ – произвольные векторы. Тогда $\vec{x} + \vec{y} \in L$, $\vec{x} + \vec{y} \in \tilde{L}$, так как L и $\tilde{L}$ являются векторными подпространствами. Тогда $\vec{x} + \vec{y} \in L \cap \tilde{L}$.

Второе условие из определения векторного подпространства проверяется аналогично.

Таким образом, пересечение двух векторных подпространств является векторным подпространством. $\square$

Пусть L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства векторного пространства V. Обозначим множество всех векторов $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} \in L$, $\vec{y} \in \tilde{L}$ через $L + \tilde{L}$ и назовем *суммой векторных подпространств* L и $\tilde{L}$.

Теорема 4.2. *Сумма векторных подпространств является векторным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in L+\tilde{L}$ – произвольные векторы. Тогда $\vec{z}_1 = \vec{x}_1+\vec{y}_1$, $\vec{z}_2 = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \tilde{L}$. Складывая последние два равенства, получим $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2)$, где $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L$, $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in \tilde{L}$, так как L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства. Таким образом, $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in L + \tilde{L}$.

Второе условие из определения векторного подпространства проверяется аналогично.

Итак, $L + \tilde{L}$ является векторным подпространством по определению. $\square$

Замечание 4.1. Заметим, что объединение векторных подпространств не является векторным подпространством. Приведите контрпример самостоятельно.

Задачи.

1. Пусть L_1, L_2 – произвольные векторные подпространства векторного пространства V. Докажите, что их объединение не является векторным подпространством.

2. Выясните, будет ли векторным подпространством следующие множества: а) один вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ геометрического векторного пространства V^3; б) множество всех векторов геометрического векторного пространства, параллельных фиксированной прямой; в) все 2×2 матрицы $A = (a_{ij})$, у которых $a_{11} = 1$; г) все 2×2 матрицы $A = (a_{ij})$, у которых $a_{11} = 0$.

5. Билинейные формы.

Билинейная форма – это обобщение скалярного произведения геометрического векторного пространства. Она позволит в векторном пространстве произвольной размерности вычислять длины векторов и углы между ними.

Замечание 5.1. Для работы с билинейными формами нам потребуется договоренность об обозначении суммирования.

Будем обозначать сумму следующим образом:

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i\vec{a}_i$$

Чтобы еще сократить запись, договоримся, что по одинаковым верхнему и нижнему индексам производится суммирование от 1 до этого числа:

$$\alpha^i\vec{a}_i = \alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n.$$

Индекс, обозначающий суммирование, называется *индексом суммирования.* Индекс суммирования можно обозначать любой буквой. Например, $\alpha^i\vec{a}_i \equiv \alpha^j\vec{a}_j \equiv \alpha^k\vec{a}_k = \ldots$. Введенная договоренность об обозначении суммирования называется *правилом суммирования Эйнштейна.*

Пример 5.1. Запишем в развернутом виде такую сумму

$$t_{ij}X^iY^j,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Мы видим в этой сумме два индекса суммирования i и j. Сначала расписываем индекс i, а j не трогаем

$$t_{ij}X^iY^j = t_{1j}X^1Y^j + \ldots + t_{nj}X^nY^j =$$

Каждое слагаемое в этой сумме представляет из себя сумму. Запишем каждую такую сумму в развернутом виде

$$= (t_{11}X^1Y^1 + t_{12}X^1Y^2 + \ldots + t_{1n}X^1Y^n) + \ldots + (t_{n1}X^nY^1 + t_{n2}X^nY^2 + \ldots + t_{nn}X^nY^n).$$

Пусть V^n – $n-$ мерное векторное пространство. *Билинейной формой* называется отображение $g : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, то есть

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z});\ \ g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z}),$$

для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Число $g(\vec{x}, \vec{y})$ будем называть *значением билинейной формы g на векторах $\vec{x}, \vec{y}$* или *скалярным произведением векторов.* Оно также обозначается $\vec{x}\vec{y}$.

Билинейная форма g называется *симметрической*, если $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V^n$.

Пример 5.2. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Тогда скалярное произведение векторов определяет симметрическую билинейную форму $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ по формуле $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$. Действительно, вспомним свойства скалярного произведения векторов:

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c};\ (\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b}),$$

аналогичные равенства верны и для второго множителя. Это как раз условия линейности из определения билинейной формы.

Так как скалярное произведение векторов в V^3 коммутативно, мы получаем пример симметрической билинейной формы.

Приведем пример отображения, которое не является билинейной формой. Рассмотрим векторное пространство 2×2 матриц. Обозначим его V. Пусть отображение $g : V \times V \to \mathbb{R}$ задается формулой

$$g(A, B) = det\, A det\, B,$$

где A и B – произвольные 2×2 матрицы, а det обозначает определитель матрицы. Проверим выполнение второго условия из определения билинейной формы. Для этого заметим, что

$$det(\alpha A) = det\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha^2(ad - bc) = \alpha^2 det\, A.$$

Тогда, проверяя второе условие, получим

$$g(\alpha A, B) = det\,(\alpha A) det\, B = \alpha^2 det\, A det\, B = \alpha^2 g(A, B).$$

Должна была вынестись за знак g только α, а у нас получилась α^2. Значит, второе условие билинейной формы не выполняется, то есть заданное отображение не является билинейной формой.

Пусть $E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – произвольный базис V^n, g – произвольная билинейная форма. Обозначим значения билинейной формы g на векторах $\vec{e}_i, \vec{e}_j$, $i, j = 1, \dots, n$ базиса E через g_{ij}, то есть $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Составим из этих чисел матрицу G: первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца. Матрица G называется *матрицей билинейной формы* g. Ранг матрицы G называется *рангом* билинейной формы g. Можно показать, что ранг билинейной формы определен корректно, то есть он не зависит от выбора базиса.

Пример 5.3. Рассмотрим геометрическое векторное пространство V^3 и скалярное произведение в нем, то есть $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$. Как мы доказали выше, оно является симметрической билинейной формой. Найдем матрицу этой билинейной формы в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. По определению матрицы билинейной формы мы должны вычислить девять попарных скалярных произведений векторов базиса:

$$g_{11} = g(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}||\vec{i}| \cos \angle(\vec{i}, \vec{i}) = 1;$$
$$g_{12} = g(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}||\vec{j}| \cos \angle(\vec{i}, \vec{j}) = 0; \tag{5.1}$$

и так далее. Теперь записываем все девять чисел в матрицу

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это искомая матрица. Ранг этой матрицы равен 3 (напомним, что для вычисления ранга матрицы, нужно привести ее к ступенчатому виду и посчитать количество ненулевых строк).

Посмотрим, как вычислять значение билинейной формы, если задана ее матрица относительно фиксированного базиса и координаты векторов относительно этого же базиса.

Теорема 5.1. *Пусть дан произвольный базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ в V^n и матрица $G = (g_{ij})$ билинейной формы g. Тогда*

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j, \tag{5.2}$$

где $\vec{x}(x^1, \ldots, x^n)$, $\vec{y}(y^1, \ldots, y^n)$ – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе.

Доказательство. По определению координат вектора имеем $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$. В силу свойства линейности g по обоим аргументам получим

$$g(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j) = x^i y^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} x^i y^j.$$

□

Чтобы лучше увидеть суммы в выведенной формуле, запишем доказательство предыдущей теоремы в развернутом виде для 2-мерного векторного пространства V^2, то есть $i, j = 1, 2$. В этом случае разложение векторов по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ будут выглядеть так:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2; \ \vec{y} = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2.$$

Вычисляем $g(\vec{x}, \vec{y})$, используя определение линейности (суммы разбиваются, числа выносятся за g; по сути происходит все так же как при раскрытие скобок $(a+b)(c+d)$, только на сомножители еще навешивается g)

$$\begin{aligned}
g(\vec{x}, \vec{y}) &= g(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2, y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2) = \\
&= g(x^1\vec{e}_1, y^1\vec{e}_1) + g(x^1\vec{e}_1, y^2\vec{e}_2) + g(x^2\vec{e}_2, y^1\vec{e}_1) + g(x^2\vec{e}_2, y^2\vec{e}_2) = \\
&= x^1y^1g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x^1y^2g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + x^2y^1g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x^2y^2g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \\
&= x^1y^1g_{11} + x^1y^2g_{12} + x^2y^1g_{21} + x^2y^2g_{22} = (x^1g_{11} + x^2g_{21})y^1 + (x^1g_{12} + x^2g_{22})y^2 = \\
&= x^ig_{i1}y^1 + x^ig_{i2}y^2 = x^ig_{ij}y^j = g_{ij}x^iy^j.
\end{aligned}$$

С использованием этой формулы посчитаем, чему равно значение произвольной билинейной формы, если один из ее аргументов есть $\vec{0}$.

Пример 5.4. Пусть g – произвольная билинейная форма. Фиксируем произвольный базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства V^n. Из очевидного равенства

$$\vec{0} = 0\vec{e}_1 + \ldots + 0\vec{e}_n$$

следует, что $\vec{0}(0, \ldots, 0)$. Возьмем произвольный вектор $\vec{y}$ и вычислим $g(\vec{0}, \vec{y})$ по формуле (5.2):

$$g(\vec{0}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} \cdot 0 \cdot y^j = 0.$$

Если еще не воспринимаете формулу (5.2) в сокращенном виде, то посмотрите, как эти же выкладки выглядят в развернутом виде в случае двумерного пространства:

$$g(\vec{0}, \vec{y}) = g_{11}0 \cdot y^1 + g_{12}0 \cdot y^2 + g_{21}0 \cdot y^1 + g_{22}0 \cdot y^2 = 0.$$

Пусть дано $n-$ мерное векторное пространство V^n. Симметрическая билинейная форма g называется *положительно определенной*, если для любого вектора $\vec{x} \in V^n$ имеем $g(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$. При этом $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Пример 5.5. Скалярное произведение в геометрическом векторном пространстве V^3 задает положительно определенную билинейную форму (см. пример 5.2).

Пара (V^n, g), где g – положительно определенная билинейная форма, V^n – $n-$ мерное векторное пространство, называется *$n-$ мерным евклидовым векторным пространством* (или, короче, *евклидовым векторным пространством*). Билинейная форма g называется *евклидовой метрикой (или евклидовой структурой)* на V^n.

В дальнейшем мы будем работать только с евклидовыми векторными пространствами. Договоримся обозначать значение билинейной формы евклидова пространства на паре векторов следующим образом

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}\vec{y}.$$

При таком обозначении проще работать с линейными комбинациями векторов. Например, равенство

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z})$$

будет записываться в более привычной форме

$$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})\vec{z} = \alpha(\vec{x}\vec{z}) + \beta(\vec{y}\vec{z}).$$

Пусть (V^n, g) – евклидово векторное пространство. Вещественное число

$$|\vec{x}| = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})} \tag{5.3}$$

называется *длиной вектора* $\vec{x} \in V^n$.

Заметим, что длина нуль-вектора равна 0 (см. пример 5.4).

Число $\angle(\vec{x}, \vec{y})$, задаваемое формулой

$$\cos\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} \tag{5.4}$$

называется *углом между ненулевыми векторами* $\vec{x} \in V^n$ и $\vec{y} \in V^n$.

Лемма 5.1. *Число* $\frac{g(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ *принадлежит отрезку* $[-1, 1]$, *а значит корректно определяет угол между векторами.*

Доказательство. В силу положительной определенности метрики g получим

$$g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq 0.$$

По свойствам линейности и симметричности g получим

$$\frac{g(\vec{x}, \vec{x})}{|\vec{x}|^2} \pm 2g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) + \frac{g(\vec{y}, \vec{y})}{|\vec{y}|^2} \geq 0.$$

Тогда по формуле (5.3) имеем

$$2 \pm 2g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq 0,$$

то есть
$$g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \leq 1$$
и
$$g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq -1.$$
□

Будем называть два ненулевых вектора $\vec{a}, \vec{b} \in V^n$ *ортогональными*, если угол между ними $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Положим по определению, что нуль-вектор ортогонален любому вектору.

Базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется *ортонормированным*, если все векторы базиса E попарно ортогональны и их длины равны 1. Если вектора базиса E только попарно ортогональны, то базис называется *ортогональным*.

Можно показать, что в любом евклидовом векторном пространстве (V^n, g) существуют ортонормированные базисы.

Задачи.

1. Пусть g – билинейная форма. Докажите, что $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}, \vec{w}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{w}) + \beta g(\vec{y}, \vec{w}) + \gamma g(\vec{z}, \vec{w})$ для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in V$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. Докажите, что билинейная форма является симметрической тогда и только тогда, когда ее матрица симметрическая.

3. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Обозначим через g скалярное произведение векторов в V^3. Найдите матрицу билинейной формы g в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $|\vec{e}_1| = a$, $|\vec{e}_2| = b$, $|\vec{e}_3| = c$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \gamma$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \alpha$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \beta$.

4. Докажите, что в евклидовом векторном пространстве V^n относительно ортонормированного базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ имеют место формулы
$$g(\vec{a}, \vec{b}) = a^1b^1 + \ldots + a^nb^n;\ |\vec{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^n)^2},$$
где $\vec{a}(a^1, \ldots, a^n)$, $\vec{b}(b^1, \ldots, b^n)$.

5. $*$ (необязательная) Пусть в n-мерном евклидовом векторном пространстве (V, g) дана попарно ортогональная система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$. Докажите, что эта система векторов линейно независима.

6. Аффинное пространство.

Построим многомерное обобщение нашего окружающего трехмерного пространства.

6.1. Определение аффинного пространства и примеры

Пусть дано $n-$ мерное векторное пространство V^n и непустое множество $\mathscr{A}$ произвольной природы. Зададим отображение

$$\sigma : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to V^n$$

удовлетворяющее двум условиям:
1) для любого элемента $X \in \mathscr{A}$ и любого вектора $\vec{p} \in V^n$ существует единственный элемент $Y \in \mathscr{A}$, такой что $\sigma(X, Y) = \vec{p}$;
2) для любых элементов $X, Y, Z \in \mathscr{A}$

$$\sigma(X, Y) + \sigma(Y, Z) = \sigma(X, Z).$$

В этом случае будем называть множество $\mathscr{A}$ *$n-$ мерным аффинным пространством*, его элементы – *точками*, а условия, которым удовлетворяет отображение σ, – *аксиомами аффинного пространства.* Векторное пространство V^n называется *пространством трансляций* аффинного пространства $\mathscr{A}$.

Замечание 6.1. 1. Договоримся обозначать $\sigma(X, Y) = \overrightarrow{XY}$.
2. Договоримся обозначать точки большими латинскими буквами, если речь идет об абстрактном аффинном пространстве. В конкретных примерах аффинных пространств мы будем следовать традициям обозначений элементов этих множеств, если это не приводит к недоразумениям.

Пример 6.1. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Обозначим через E^3 точечное пространство, рассмотренное в главе 1. Отображение σ определяется следующим образом: любой паре точек $X, Y \in E^3$ ставится в соответствие направленный отрезок $\overline{XY}$, который однозначно определяет вектор $\overrightarrow{XY} \in V^3$. Тогда первая аксиома аффинного пространства для ненулевого вектора $\vec{p}$ выполняется в силу леммы **??** (Глава 1), а для нуль-вектора она очевидна. Вторая аксиома является правилом треугольника, а значит, выполняется в V^3. Таким образом, множество E^3, с введенным отображением σ, является аффинным пространством.

Теорема 6.1. *Любое $n-$ мерное векторное пространство V^n является $n-$ мерным аффинным пространством с пространством трансляций V^n.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные точки из V^n. Зададим отображение $\sigma : V^n \times V^n \to V^n$ по формуле $\sigma(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{x}$.

Проверим, что для отображения σ выполняются обе аксиомы аффинного пространства.

Рассмотрим произвольную точку $\vec{x} \in V^n$ и произвольный вектор $\vec{p} \in V^n$. Пусть $\vec{y} = \vec{x} + \vec{p}$. Тогда
$$\sigma(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{x} = \vec{x} + \vec{p} - \vec{x} = \vec{p}.$$
Если существует еще одна точка $\vec{y}_1 \in V^n$, такая что $\sigma(\vec{x}, \vec{y}_1) = \vec{p}$, то $\vec{y}_1 - \vec{x} = \vec{p}$. Так как $\vec{y} - \vec{x} = \vec{p}$, то, вычитая из первого равенства второе получим $\vec{y}_1 = \vec{y}$. Таким образом, точка $\vec{y} \in V^n$ единственна, а значит, первая аксиома аффинного пространства выполняется.

Пусть $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^n$ – произвольные точки. Тогда с учетом аксиом векторного пространства получим $\sigma(\vec{x}, \vec{y}) + \sigma(\vec{y}, \vec{z}) = \vec{y} - \vec{x} + \vec{z} - \vec{y} = \vec{z} - \vec{y} = \sigma(\vec{y}, \vec{z})$. □

Свойства аффинных пространств.

1^0. Для любой точки $A \in \mathscr{A}$ имеем $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Доказательство. Во второй аксиоме аффинного пространства положим $X = Y = A$. Тогда получим $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AZ}$. По аксиоме 3^0 векторного пространства (§ **??**) получим, что $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. □

2^0. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, то $A = B$.

Доказательство. Так как по свойству 1^0 $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, по первой аксиоме аффинного пространства получим $B = A$. □

Следствие 6.1. *Если для некоторой точки $A \in \mathscr{A}$ имеем $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY}$, то $X = Y$.*

3^0. Для любых точек $A, B \in \mathscr{A}$ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Доказательство. Во второй аксиоме аффинного пространства положим $X = Z = A$, $Y = B$. Тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Так как по свойству 1^0 аффинных пространств $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, по аксиоме 4^0 векторного пространства получим, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Будем называть *фигурой* любое множество точек из аффинного пространства $\mathscr{A}$. Рассмотрим несколько примеров фигур в аффинном пространстве.

Пусть даны две различные точки $A, B \in \mathscr{A}$. *Отрезком* называется множество всех точек $X \in \mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, $0 \le t \le 1$. Обозначение $[AB]$. Точки A и B называются *концами отрезка* $[AB]$, а остальные точки отрезка называются *внутренними точками отрезка* $[AB]$.

Простым отношением трех точек A, B, C, принадлежащих аффинному пространству $\mathscr{A}$ называется число λ, такое что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Обозначение (AB, C).

Серединой отрезка $[AB]$ называется точка C, такая что простое отношение $(AB, C) = 1$.

Пусть дана точка $A \in \mathscr{A}$ и вектор $\vec{a} \in V$. *Лучом с началом в точке A и направляющем вектором $\vec{a}$* называется множество всех точек $X \in \mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX} = t\vec{a}$ для любого числа $t \geq 0$. Точка A называется *началом луча.* Обозначение h или $[AB)$, где B – точка принадлежащая лучу.

Углом называется пара различных лучей $[AB)$ и $[AC)$ с общим началом A. Обозначение $\angle BAC$.

6.2. Аффинная система координат

Пусть дана произвольная точка $O \in \mathscr{A}$ и произвольный базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ в пространстве трансляций V^n. Множество $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется *аффинной системой координат* в аффинном пространстве $\mathscr{A}$. Точка O называется *началом* аффинной системы координат I.

Рассмотрим произвольную точку $M \in \mathscr{A}$. Назовем вектор $\overrightarrow{OM}$ *радиус-вектором* точки M. Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называются *координатами* точки M в аффинной системе координат $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Обозначение $M(x^1, \ldots, x^n)$, где $\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n$.

Теорема 6.2. *Пусть даны $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – произвольная аффинная система координат, $A, B \in \mathscr{A}$ – произвольные точки. Обозначим их координаты $A(a^1, \ldots, a^n)$, $B(b^1, \ldots, b^n)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(b^1 - a^1, \ldots, b^n - a^n)$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.*

Доказательство. По определению координат точки имеем

$$\overrightarrow{OA} = a^1\vec{e}_1 + \ldots + a^n\vec{e}_n,$$
$$\overrightarrow{OB} = b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n.$$

Тогда по второй аксиоме аффинного пространства

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -a^1\vec{e}_1 - \ldots - a^n\vec{e}_n + b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n = \\ = (b^1 - a^1)\vec{e}_1 + \ldots + (b^n - a^n)\vec{e}_n.$$

По определению координат вектора это означает, что $\overrightarrow{AB}(b^1 - a^1, \ldots, b^n - a^n)$. □

6.3. k-плоскости

Посмотрим еще один пример фигуры в аффинном пространстве.

Пусть $\mathscr{A}$ – $n-$ мерное аффинное пространство, V^n – его пространство трансляций. Фиксируем векторное подпространство L^k в векторном пространстве V^n

$(k \geq 1)$ и точку $A \in \mathscr{A}$. $k-$ *плоскостью* (или *многомерной плоскостью*), проходящей через точку A и имеющей направляющее подпространство L^k, называется множество всех точек X аффинного пространства $\mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX} \in L^k$. Обозначение $\sigma = [A, L^k]$. Число k будем называть *размерностью $k-$ плоскости.*

Замечание 6.2. Легко показать (докажите самостоятельно), что определение $k-$ плоскости корректно, то есть не зависит от выбора точки A, принадлежащей этой плоскости.

1-плоскость называется *прямой.* Из определения $k-$ плоскости следует, что направляющее подпространство прямой одномерно, а значит, однозначно определяется любым своим ненулевым вектором. Любой ненулевой вектор направляющего подпространства прямой называется *направляющим вектором прямой.* Таким образом, любая прямая однозначно задается любой своей точкой и направляющим вектором.

$(n-1)-$ плоскость называется *гиперплоскостью.*

Покажем, что k-плоскость аффинного пространства $\mathscr{A}$ является k-мерным аффинным пространством. Рассмотрим k-плоскость α и обозначим ее направляющее подпространство L, а точку, которая определяет плоскость обозначим A. Чтобы доказать, что плоскость α является аффинным пространством (см. определение аффинного пространства), нужно построить отображение, которое любым двум точкам плоскости ставит в соответствие вектор некоторого векторного пространства. В качестве этого пространства возьмем направляющее подпространство плоскости и зададим отображение

$$\sigma_\alpha : \alpha \times \alpha \to L$$

по формуле $\sigma_\alpha(M, N) = \sigma(M, N)$, где σ – отображение, которое задает структуру аффинного пространства в $\mathscr{A}$. Покажем, сначала, что это отображение корректно определено, то есть, что $\sigma_\alpha(M, N) \in L$ для любых точек M, N плоскости α. Действительно, так как $M, N \in \alpha$, по определению многомерной плоскости получаем, что

$$\overrightarrow{AM} \in L, \overrightarrow{AN} \in L.$$

Тогда по определению векторного подпространства

$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \in L.$$

Корректность определения отображения σ_α доказана. Выполнения аксиом проверьте самостоятельно.

Замечание 6.3. k-плоскость π можно задать с помощью $k+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$, которые удовлетворяют требованию

$$\text{система } (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}) - \text{линейно назависима.}$$

Действительно, если взять такие точки, то плоскость задастся с помощью точки A_0 и направляющего подпространства L, являющегося линейной оболочкой системы векторов $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k})$, то есть плоскость π будет множеством точек аффинного пространства, которые задаются так:

$$\pi = \{X \in \mathscr{A}\ \overrightarrow{A_0X} = t^1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots + t^k\overrightarrow{A_0A_k}, t^i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k\}. \tag{6.1}$$

В этом случае говорят, что плоскость определяется точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$, и обозначают эту плоскость $A_0A_1 \ldots A_k$.

Задачи.

1. Докажите, что координаты точки относительно аффинной системы координат определены однозначно.

2. Докажите, что отрезки $[AB]$ и $[BA]$ совпадают.

3. Докажите, что луч и отрезок являются частями прямой.

4. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны две точки A, B и дано вещественное число λ, отличное от -1. Докажите, что существует единственная точка C, такая что простое отношение $(AB, C) = \lambda$.

5. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и три точки $A(a^1, \ldots, a^n)$, $B(b^1, \ldots, b^n)$, $C(c^1, \ldots, c^n)$, такие что их простое отношение $(AB, C) = \lambda$. Докажите, что

$$c^1 = \tfrac{a^1+\lambda b^1}{1+\lambda}; \ \ \ldots \ \ c^n = \tfrac{a^n+\lambda b^n}{1+\lambda}.$$

6. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и две точки $A(a^1, \ldots, a^n)$, $B(b^1, \ldots, b^n)$. Докажите, что координаты $(c^1, \ldots, c^n)$ середины C отрезка $[AB]$ вычисляются по формулам

$$c^1 = \tfrac{a^1+b^1}{2}; \ \ \ldots \ \ c^n = \tfrac{a^n+b^n}{2}$$

7. Евклидово (точечное) пространство.

Если в пространстве трансляций V^n аффинного пространства $\mathscr{A}$ ввести (симметрическую) положительно определенную билинейную форму, то есть превратить его в евклидово векторное пространство, то в пространстве $\mathscr{A}$ мы сможем вычислять расстояния между точками и величины углов. Другими словами, мы превратим аффинное пространство в евклидово. Дадим теперь строгое определение.

Аффинное пространство $\mathscr{A}$ называется *$n-$ мерным евклидовым пространством* (или, короче, *евклидовым пространством*), если его пространство трансляций является евклидовым векторным пространством.

Пусть $\mathscr{A}$ – евклидово пространство. Рассмотрим $A, B \in \mathscr{A}$ – произвольные точки. *Расстоянием* между точками A и B называется число

$$AB = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}.$$

Длиной отрезка $[AB]$ называется расстояние между его концами. Обозначение AB.

Пусть $\angle AOB$ – произвольный угол в $\mathscr{A}$. *Величиной угла* $\angle AOB$ называется число $\widehat{AOB}$, такое что

$$\cos \widehat{AOB} = \cos \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Докажите самостоятельно, что определение величины угла не зависит от выбора направляющих векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лучей $[OA)$ и $[OB)$ соответственно.

Задачи.

1. Докажите, что в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{A}$ для любых трех точек A, B, C выполняется $AB^2+BC^2 = AC^2$ тогда и только тогда, когда угол ABC – прямой.

2. Докажите, что в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{A}$ для любого треугольника ABC верна теорема косинусов.

3. Выясните, верна ли в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{A}$ теорема синусов.

8. Симплексы и их грани

Пусть в евклидовом n-мерном пространстве $\mathscr{A}$ фиксирована точка A_0, а в его пространстве трансляций V^n фиксирована линейно независимая система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$.

k-симплексом в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{A}$ называется множество точек X этого пространства, таких, что

$$A_0A_1 \ldots A_k = \{X \in \mathscr{A}\ \overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + \ldots + t^k\vec{a}_k,\ t^i \geq 0, \sum t^i \leq 1\}.$$

Точки X симплекса $A_0A_1\dots A_k$, которые определяются условиями $\overrightarrow{A_0X} = \vec{a}_i$ обозначаются A_i и называются *вершинами* симплекса. Отрезки, попарно соединяющие вершины симплекса, называются его *ребрами*.

Введем еще одно обозначение: $\vec{a}_0 = \overrightarrow{A_0A_0}$. Тогда мы получим $\vec{a}_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Кроме того, легко получить очень полезную формулу.

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0A_j} = \vec{a}_j - \vec{a}_i.$$

Теорема 8.1. *Пусть дан k-симплекс $A_0A_1\dots A_k$. Он лежит в k-плоскости определяемой точками $A_0, A_1, \dots, A_k$.*

Доказательство. Сравним задание плоскости с помощью точек (6.1) и определение k-симплекса. Они различаются только наличием ограничений на параметры $t^1, \dots, t^k$ у симплекса. А значит, если точка принадлежит симплексу, то она тем более принадлежит k-плоскости, определяемой вершинами этого симплекса. $\square$

Так как любая k-плоскость является аффинным k-мерным пространством и любой k-симплекс лежит в k-плоскости, определяемой его вершинами, мы можем рассматривать только n-симплексы в n-мерных аффинных пространствах (размерность пространства и размерность симплекса совпадают).

В случае $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ для нашего привычного пространства понятие симплекса совпадает с понятиями отрезка, треугольника (с внутренними точками), тетраэдра (с внутренними точками) соответственно. Действительно, запишем определение 1-симплекса:

$$A_0A_1 = \{X \in \mathscr{A}\ \overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 = t^1\overrightarrow{A_0A_1},\ t^1 \geqslant 0,\ t^1 \leqslant 1\}.$$

Мы получаем в точности определение отрезка. Аналогичным образом мы можем записать определения 2-симплекса и 3-симплекса

$$A_0A_1A_2 = \{X \in \mathscr{A}\ \overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 = t^1\overrightarrow{A_0A_1} + t^2\overrightarrow{A_0A_2},\ t^1, t^2 \geqslant 0,\ t^1 + t^2 \leqslant 1\}.$$

$$A_0A_1A_2A_3 = \{X \in \mathscr{A}\ \overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + t^3\vec{a}_3 = t^1\overrightarrow{A_0A_1} + t^2\overrightarrow{A_0A_2} + t^3\overrightarrow{A_0A_3},\\ t^1, t^2, t^3 \geqslant 0,\ t^1 + t^2 + t^3 \leqslant 1\}.$$

Это треугольник $A_0A_1A_2$ с внутренними точками и тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$ тоже с внутренними точками.

Пусть дан k-симплекс $A_0A_1\dots A_k$. Рассмотрим подмножество его вершин $A_{i_0}, \dots, A_{i_m}$. Докажем, что система векторов

$$\left(\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_1}}, \dots, \overrightarrow{A_{i_0}A_{i_m}}\right)$$

линейно независима. Заметим, что

$$\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_1}} = -\vec{a}_{i_0} + \vec{a}_{i_1}.$$

Тогда составив линейную комбинацию

$$\alpha^1\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_1}} + \ldots + \alpha^m\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_m}} = \vec{0}$$

получаем

$$(-\alpha^1 - \ldots - \alpha^m)\vec{a}_{i_0} + \alpha^1\alpha a_{i_1} + \ldots + \alpha^m\vec{a}_{i_m} = \vec{0}.$$

Так как по определению симплекса, векторы $a_{i_0}, \ldots, a_{i_m}$ линейно независимы, все коэффициенты равны нулю, следовательно, и исходная система линейно независима.

Эта система векторов задает m-симплекс с вершинами $A_{i_0}, \ldots, A_{i_m}$. Он называется *m-мерной гранью* симплекса $A_0A_1\ldots A_k$ (или, короче, *m-гранью*). $k-1$-грани k-симплекса называются *гипергранями*, 1-грани – *ребрами*, а 0-грани – *вершинами*.

Количество m-мерных граней симплекса равно C_{k+1}^{m+1}.

Пример 8.1. Рассмотрим 4-симплекс $A_0A_1A_2A_3A_4$. У него 5 вершин, 10 ребер, 10 2-граней, 5 гиперграней. Напомним, что формула для вычисления сочетаний из n по k имеет вид

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

9. Правильные симплексы

Назовем треугольник *правильным*, если все его стороны равны. Правильный k-симплекс определим по индукции. Будем называть k-симплекс *правильным*, если все его m-грани являются правильными m-симплексами.

Докажем свойство правильного треугольника.

Задача 9.1. Углы правильного треугольника равны 60^0.

Решение. Дан $A_0A_1A_2$. Докажем это утверждение, непосредственно вычислив угол. Тогда

$$\vec{a}_1\vec{a}_1 = \vec{a}_2\vec{a}_2 = (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)(\vec{a}_1 - \vec{a}_2).$$

Следовательно,

$$2\vec{a}_1\vec{a}_1 - 2\vec{a}_1\vec{a}_2 = \vec{a}_1\vec{a}_1,\ \vec{a}_1\vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_1\vec{a}_1$$

Нам нужно вычислить

$$\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{\sqrt{\vec{a}_1\vec{a}_1}\sqrt{\vec{a}_2\vec{a}_2}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, угол равен 60^0. Остальные углы вычисляются аналогично. $\square$

Задача 9.2. Докажите, что если все углы треугольника равны между собой, то треугольник равносторонний.

Задача 9.3. Докажите, что противоположные ребра правильного 3-симплекса перпендикулярны.

Решение. Обозначаем 3-симплекс стандартным образом $A_0A_1A_2A_3$. Найдем угол между ребром A_0A_1 и ребром A_2A_3. Остальные пары ребер будут равноправны с этой парой и угол между ними будет такой же.

Имеем

$$\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{a}_1,\ \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_2A_0} + \overrightarrow{A_0A_3} = -\vec{a}_2 + \vec{a}_3.$$

Тогда косинус угла между ребрами равен модулю косинуса угла между векторами:

$$\overrightarrow{A_0A_1}\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_1(\vec{a}_3 - \vec{a}_2) = |\vec{a}_1||\vec{a}_3|\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_3) - |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0.$$

Итак, действительно, угол между противоположными ребрами 3-симплекса равен 90^0. $\square$

Рассмотрим правильный 4-симплекс. Найдем угол между ребром A_0A_1 и ребром A_iA_j. Если i или j равны 0 или 1, то ребра A_0A_1 и A_iA_j являются сторонами одной 2-грани симплекса и угол между ними равен 60^0. Пусть i и j отличны от нуля и единицы. Тогда

$$\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{a}_1,\ \overrightarrow{A_iA_j} = \vec{a}_j - \vec{a}_i.$$

Тогда

$$\vec{a}_1(\vec{a}_j - \vec{a}_i) = |\vec{a}_1||\vec{a}_j|\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_j) - |\vec{a}_1||\vec{a}_i|\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_i) = 0$$

Мы нигде здесь не использовали, что это именно 4-симплекс. Значит, верно для любого правильного k-симплекса.

Тот же принцип для ребер $\overrightarrow{A_iA_j}$ и $\overrightarrow{A_pA_q}$:

$$\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_pA_q} = (\vec{a}_j - \vec{a}_i)(\vec{a}_q - \vec{a}_p) = 0.$$

Задача 9.4. Пусть дан правильный 4-симплекс. Найдите расстояния между серединами не пересекающихся ребер симплекса. Решите эту же задачу для k-симплекса.

Решение. Пусть точка M – середина ребра $[A_iA_j]$, точка N – середина ребра $[A_pA_q]$. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iA_p} + \overrightarrow{A_pN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_jA_i} + \overrightarrow{A_iA_p} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_pA_q} =$$

используем точку A_0 и переходим к векторам $\vec{a}_t$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_jA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}\right) + \overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0A_p} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_pA_0} + \overrightarrow{A_0A_q}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(-\vec{a}_j + \vec{a}_i) + (-\vec{a}_i + \vec{a}_p) + \frac{1}{2}(-\vec{a}_p + \vec{a}_q).$$

Теперь, используя формулу для вычисления расстояния получаем

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\vec{a}_i - -\frac{1}{2}\vec{a}_j + \frac{1}{2}\vec{a}_p + \frac{1}{2}\vec{a}_q)(-\frac{1}{2}\vec{a}_i - \frac{1}{2}\vec{a}_j + \frac{1}{2}\vec{a}_p + \frac{1}{2}\vec{a}_q)} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 8a^2\frac{1}{2} + 4a^2\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

□

10. Медианы и бимедианы симплексов

10.1. Медианы треугольника

Начнем с 2-симплекса – треугольника. На некоторое время уйдем в элементарную геометрию.

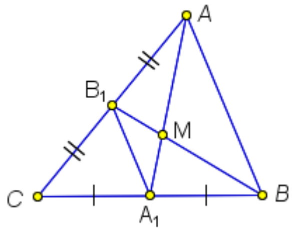
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Очевидно, что у треугольника три медианы. Из школьного курса хорошо известна теорема.

Теорема 10.1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении* $2:1$, *считая от вершины.*

Сначала вспомним доказательство, которое приведено в школьных учебниках.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Рассмотрим две его медианы AA_1 и BB_1.



Обозначим через M точку их пересечения. A_1B_1 будет средней линией треугольника ABC. Следовательно, она параллельна стороне AB и равна ее половине. Тогда треугольники MB_1A_1 и MBA подобны с коэффициентом подобия $1/2$. Следовательно, $AM : MA_1 = BM : MB_1 = 2 : 1$.

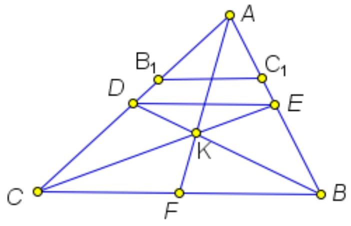
Теперь берем пару медиан AA_1 и CC_1. Если обозначить их точку пересечения M_1 и провести такие же рассуждения, то получим, что точка M_1 делит медиану AA_1 в таком же отношении $2:1$, считая от A, что и точка M. Следовательно, точки M и M_1 совпадают, то есть все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $2:1$. $\square$

Обратная теорема уже менее известна, но также доказывается методами элементарного геометрии.

Теорема 10.2. *Пусть в треугольнике ABC даны три отрезка, соединяющие вершины с точками противоположных сторон треугольника. Если эти отрезки пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $2:1$, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами треугольника ABC.*

Вспомним элементарное доказательство этой теоремы.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и три отрезка AF, BD, CE, удовлетворяющие условию теоремы.



Треугольники DEK и BCK будут подобны по двум сторонам и углу между ними (стороны относятся $2:1$, углы равны как вертикальные). Тогда углы DEK и KCB равны. Тогда прямые DE и CB параллельны по признаку. Пусть B_1 и C_1 – основания медиан этого треугольника, проведенных из вершин B и C, соответственно.

Возможны случаи: 1) $B_1 = D$, $C_1 = E$. Тогда все доказано.

2) $B_1 = D$, $C_1 \neq E$. Так как B_1C_1 – средняя линия треугольника ABC, она параллельна CB. Получаем, что через точку $B_1 = D$ проходит две прямые, параллельные прямой CB. Это противоречит аксиоме о параллельной.

3) $B_1 \neq D$, $C_1 \neq E$. Получаем, что DB_1C_1E – параллелограмм. Но DB_1 пересекает C_1E в точке A. Опять получаем противоречие.

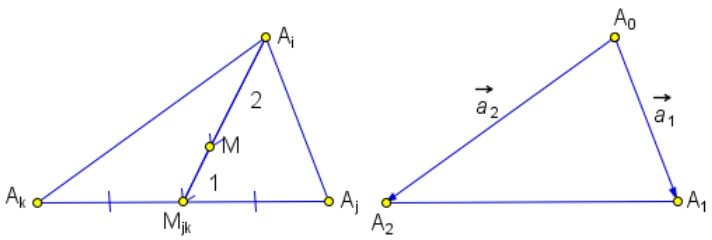
Итак, возможен только случай, когда $B_1 = D$, $C_1 = E$, то есть BD и CE – медианы треугольника. Рассуждая аналогично для отрезков CE и AF, получаем, что AF также является медианой. $\square$

Задача 10.1. Пусть в треугольнике ABC проведены три отрезка AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины с внутренними точками противоположных сторон. Пусть эти три отрезка пересекаются в точке O и делятся этой точкой в отношении $\lambda : \mu$, считая от вершины. Докажите, что эти отрезки должны быть медианами, а значит, $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Другими словами, если три отрезка пересекаются в одной точке и делятся ей в одном и том же отношении, то оно не может быть отличным от 2:1, а отрезки – отличными от медиан. Медианы – единственные отрезки, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней в одном и том же отношении.

Докажем последние две теоремы с помощью векторов. Эти доказательства мы сможем с легкостью обобщить на симплексы более высоких размерностей. Кроме изменения метода доказательства мы еще изменим и обозначения. Будем обозначать треугольник через $A_0A_1A_2$. Тогда вершины будут обозначаться A_i, $i = 0, 1, 2$. Стороны треугольника будут обозначаться A_iA_j, $i, j = 0, 1, 2$. Середину его стороны A_iA_j обозначим M_{ij}. Так как A_iA_j и A_jA_i – это один и тот же отрезок, последовательность индексов в обозначении его середины значения не имеет, то есть $M_{ij} = M_{ji}$, но важно, что индексы i, j не могут быть равны. Это два разных индекса, принимающих значения от нуля до двух.

Теорема 10.3. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* $2 : 1$, *считая от вершины.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $A_0A_1A_2$ и его произвольную медиану A_iM_{jk}.



Возьмем на этой медиане (она у нас одна, хотя и произвольная) точку M, которая делит ее в отношении $2 : 1$, считая от A_i. Найдем координаты точки M в системе координат $I = (A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Для радиус вектора точки M имеем:

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM} = \vec{a}_i + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_iM_{jk}} \tag{10.1}$$

Вычислим вектор $\overrightarrow{A_iM_{jk}}$. Для треугольника он вычисляется легко по рисунку. Но мы помним, что нам нужно будет применять этот метод для более высоких размерностей, где рисунки уже не помогают. Поэтому посмотрим формальный прием вычисления.

Выписываем в столбик вектор $\overrightarrow{A_iM_{jk}}$ столько раз, сколько индексов у M_{jk} (в нашем случае их два). В правой части равенства применяем вторую аксиому аффинного пространства, вставляя по очереди вершины A симплекса с индексами, которые есть у M_{jk}. Получаем

$$\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jM_{jk}},$$
$$\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_kM_{jk}}.$$

Сложим полученные равенства и учтем, что M_{jk} – середина отрезка A_jA_k, следовательно, $\overrightarrow{A_jM_{jk}} + \overrightarrow{A_kM_{jk}} = \vec{0}$:

$$2\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_iA_k} = \vec{a}_j - \vec{a}_i + \vec{a}_k - \vec{a}_i = \vec{a}_j + \vec{a}_k - 2\vec{a}_i.$$

Откуда получаем

$$\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \frac{1}{2}(\vec{a}_j + \vec{a}_k - 2\vec{a}_i). \tag{10.2}$$

Подставим полученное выражение в формулу (10.1):

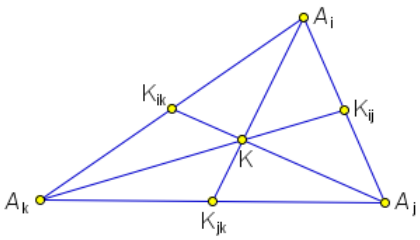
$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{1}{3}\vec{a}_i + \frac{1}{3}\vec{a}_j + \frac{1}{3}\vec{a}_k.$$

Так как i, j, k принимают различные значения от нуля до двух, то один из векторов $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k$ будет $\vec{a}_0 = \vec{0}$, а два остальных будут $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – базисные векторы системы координат I. Тогда в системе координат I точка $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Так как мы рассматривали произвольную медиану A_iM_{jk}, то точки M делящие каждую из трех медиан, имеют одни и те же координаты в I. Значит, все три точки M совпадают и теорема доказана. □

Как мы сказали выше, обратная теорема известна в элементарной геометрии, но мы сейчас сможем доказать более общую теорему. Мы не будем требовать от отрезков, чтобы они соединяли вершины треугольника с точками именно стороны. Мы дадим им больший простор: эти точки будут находится на прямых, содержащих противоположную сторону треугольника. И все равно мы докажем, что это должны быть медианы.

Теорема 10.4. *Если три отрезка соединяющие вершины треугольника с точками прямых, содержащих противоположные стороны, пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении* $2:1$*, считая от вершины, то эти отрезки будут медианами треугольника.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $A_iA_jA_k$. Рассмотри три отрезка A_kK_{ij}, где K_{ij} точка прямой A_iA_j.



Эти отрезки по условию теоремы пересекаются в одной точке обозначим ее K, а так как K делит отрезок $K_{ij}A_k$ в отношении $2:1$, то получаем:

$$\overrightarrow{A_kK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_kK_{ij}}. \tag{10.3}$$

Обозначим

$$\vec{x}_k = \overrightarrow{A_iK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK_{ij}}.$$

Чтобы доказать, что K – точка пересечения медиан, нужно показать, что K_{ij} – середины A_iA_j. Для этого нужно получить, что $\vec{x}_k = \vec{0}$.

Используя правила треугольника и (10.3), получим:

$$\vec{x}_k = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_jA_k} + 2\overrightarrow{A_kK_{ij}} = 2\vec{a}_k - \vec{a}_i - \vec{a}_j + 2\overrightarrow{A_kK_{ij}} = 2\vec{a}_k - \vec{a}_i - \vec{a}_j + 3\overrightarrow{A_kK}.$$

Таким образом,

$$\vec{x}_k = 2\vec{a}_k - \vec{a}_i - \vec{a}_j + 3\overrightarrow{A_kK}$$

В последнем равенстве проведем замену индексов $i \leftrightarrow k$:

$$\vec{x}_i = 2\vec{a}_i - \vec{a}_k - \vec{a}_j + 3\overrightarrow{A_iK}.$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$\vec{x}_k - \vec{x}_i = 3\vec{a}_k - 3\vec{a}_i + 3\overrightarrow{A_kA_i} = \vec{0}.$$

Мы показали, что все векторы $\vec{x}_k$, $k = 0, 1, 2$ равны между собой, но каждый вектор $\vec{x}_k$, $k = 0, 1, 2$ параллелен своей стороне треугольника это возможно только в том случаем, когда все векторы $\vec{x}_k = \vec{0}$. Значит, $\overrightarrow{A_iK_{ij}} = -\overrightarrow{A_jK_{ij}}$, то есть точка $K_{ij} = M_{ij}$ – середина отрезка A_iA_j. Таким образом отрезок A_kK_{ij} является медианой для всех различных i, j, k $(i, j, k = 0, 1, 2)$ □

Докажем этим методом еще две теоремы, хорошо известные из курса аналитической геометрии.

Теорема 10.5. *Пусть M – точка пересечения медиан треугольника $A_0A_1A_2$. Тогда,*

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} = \vec{0}.$$

Доказательство. Обозначим через M_{ij} середины сторон A_iA_j данного треугольника. Так как M – точка пересечения медиан, то из доказательства теоремы 10.3 имеем:

$$\overrightarrow{A_iM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \frac{1}{2}(\vec{a}_j + \vec{a}_k - 2\vec{a}_i). \tag{10.4}$$

Вычислим с учетом формулы (10.2)

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} = \sum_{i=0}^{2}\overrightarrow{A_iM} = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{2}\overrightarrow{A_iM_{jk}} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}(\vec{a}_j + \vec{a}_k + 2\vec{a}_i)$$

Полученная сумма содержит три скобки. Так как индексы i, j, k принимают различные между собой значения, каждый из векторов $\vec{a}_t$ $(t = 0, 1, 2)$ входит в две скобки с коэффициентом $+1$ и в одну скобку с коэффициентом -2 следовательно вся сумма равна $\vec{0}$. □

Докажем обратную теорему.

Теорема 10.6. *Пусть дан треугольник $A_0A_1A_2$. Если для точки K, принадлежащей плоскости треугольника, выполняется равенство:*

$$\overrightarrow{A_0K} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{A_2K} = \vec{0}, \tag{10.5}$$

то K является точкой пересечения медиан треугольника $A_0A_1A_2$.

Доказательство. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника $A_0A_1A_2$. По теореме 10.13

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} = \vec{0}.$$

Вычтем из этого равенства равенство (**??**), тогда используя правило треугольника получим: $3\overrightarrow{KM} = \vec{0}$. Следовательно, точки K и M совпадают, то есть точка K является точкой пересечения медиан. □

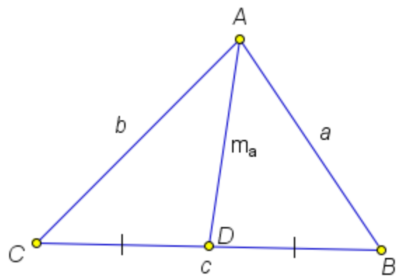
Длины медиан треугольника можно вычислить через длины сторон треугольника. При доказательстве этой теоремы вернемся к стандартным обозначениям.

Теорема 10.7. *Пусть дан треугольник ABC. Обозначим длины его сторон $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Длины медиан обозначим так: m_a – длина медианы, проведенной к стороне длины a, то есть к BC. Аналогично обозначаются длины двух других медиан. Тогда*

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2);\ m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2);\ m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Два остальных доказываются аналогично.

Сначала вспомним элементарное доказательство.



Применим два раза теорему косинусов: сначала для треугольника ADC, а затем для треугольника ABC.

$$(m_a)^2 = b^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - 2b\frac{1}{2}a\cos\angle C;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Выражаем из второго $\cos C$ и подставляем в первое.

После приведения подобных получим требуемое равенство.

Теперь посмотрим, как доказать эту теорему с помощью векторов, помня, что нам нужно будет обобщать эти теоремы на многомерный случай.

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Напомним, что квадрат длины вектора равен скалярному квадрату этого вектора. Тогда

$$|\overrightarrow{AA_1}|^2 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{4}(\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2).$$

Скалярный квадрат вектора – это квадрат его длины. Значит, $\vec{b}^2 = b^2$ и $\vec{c}^2 = c$. Нам осталось найти $\vec{b}\vec{c}$. Используем равенство $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Возведем его в скалярный квадрат:

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2.$$

Откуда находим

$$2\vec{b}\vec{c} = b^2 + c^2 - a^2.$$

Наконец, находим

$$m_a^2 = |\overrightarrow{AA_1}|^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b^2 + c^2 - a^2 + c^2).$$

Осталось только привести подобные. □

Задачи.

1. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна трем четвертым суммы квадратов его сторон.

2. Докажите, что треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда две его медианы равны.

3. Докажите, что треугольник является правильным тогда и только тогда, когда все три его медианы равны.

4. Докажите, что если AA_1 и BB_1 – медианы треугольника ABC, то AA_1 больше BB_1 тогда и только тогда, когда BC меньше AC.

5. Докажите, что если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

10.2. Медианы тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр.

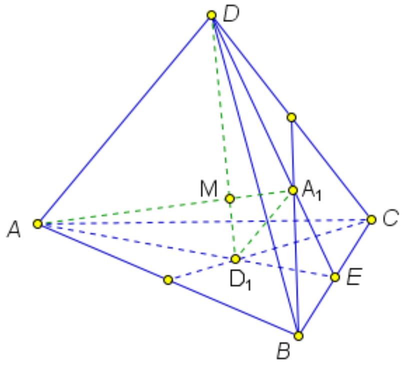
Грань тетраэдра называется *противоположной* вершине, если она не содержит эту вершину.

Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани.

В курсе элементарной геометрии доказывается

Теорема 10.8. *Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении* $3:1$*, считая от вершины.*

Доказательство. Сначала посмотрим элементарное доказательство.



Рассмотрим медианы DD_1 и AA_1 тетраэдра $ABCD$. Они лежат в плоскости ADE и пересекаются. Обозначим точку их пересечения через M. Выясним, в каком отношении точка M делит каждую из медиан AA_1 и DD_1.

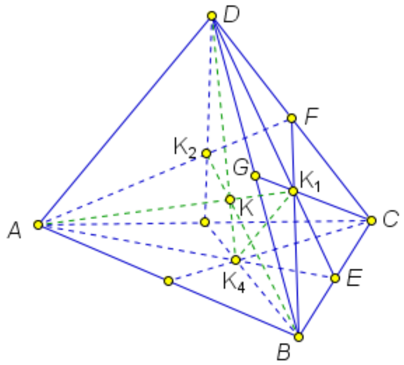
Точка A_1 является точкой пересечения медиан треугольника BDC, следовательно, $EA_1 : A_1D = 1 : 2$. Аналогично для точки D_1 получаем $ED_1 : D_1A = 1 : 2$. Значит, треугольники A_1ED_1 и DEA подобны с коэффициентом подобия $1 : 3$.

Тогда $D_1A_1 : AD = 1 : 3$. Рассматриваем треугольники A_1MD_1 и AMD. Они подобны (по двум углам) и коэффициент подобия $1 : 3$. Тогда $A_1M : MA = D_1M : MD = 1 : 3$. Итак, точка M делит каждую из двух медиан в отношении $1 : 3$. Берем медианы AA_1 и BB_1. Рассуждая аналогично, получаем, что они пересекаются в точке, которая делит каждую из них в отношении $1 : 3$/ Так как точка, которая делит отрезок в данном отношении определена однозначно, получим, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3 : 1$, считая от вершины. □

Верна и обратная теорема

Теорема 10.9. *Пусть дан тетраэдр* $ABCD$ *и четыре отрезка* AK_1*,* BK_2*,* CK_3*,* DK_4*, соединяющие вершины этого тетраэдра с внутренними точками противоположных граней. Если эти отрезки пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении* $3 : 1$*, считая от вершины, то это медианы тетраэдра.*

Доказательство. Посмотрим элементарное доказательство этой теоремы.



Обозначим точку пересечения всех четырех отрезков через K и рассмотрим два отрезка AK_1 и DK_4. По условию они пересекаются, следовательно лежат в одной плоскости. Построим сечение тетраэдра этой плоскостью. Получим на ребре BC точку E.

Рассмотрим треугольники AKD и K_1KK_4. Они подобны по углу и отношению сторон. Коэффициент подобия $3 : 1$.Тогда $K_1K_4 \| AD$ и их отношение $1 : 3$. Получаем подобие треугольников K_1EK_4 и DEA по двум углам. Коэффициент подобия $1 : 2$.

Рассматривая аналогичным образом пару отрезков AK_1 и BK_2, получим, что

$BK_1 : K_1F = 2 : 1$. Точно так же получаем, что $CK_1 : K_1G = 2 : 1$. Итак, мы получили в треугольнике BCD три отрезка, которые соединяют вершины треугольника с точками противоположных сторон, они пересекаются в одной точке K_1 и делятся ей в отношении $2 : 1$, считая от вершины. По доказанной выше теореме это будут медианы треугольника. Следовательно, отрезок AK_1 является медианой тетраэдра.

Остальные отрезки рассматриваются аналогичным образом. □

Посмотрим, каким образом эти теоремы могут быть доказаны с помощью векторов. Возвращаемся к первой теореме. Тетраэдр от 3-симплекса отличается только наличием в себе внутренних точек. Поэтому картинку будем рисовать такой же и, допуская некоторую вольность речи, будем называть 3-симплекс тоже тетраэдром. Формулируем первую теорему. Ее формулировка ничем не будет отличаться от формулировки, приведенной выше.

Теорема 10.10. *Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении* $3 : 1$*, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть $A_0A_1A_2A_3$ – тетраэдр. Договоримся, что индексы i, j, k, ℓ пробегают значения $0, 1, 2, 3$. Тогда будем обозначать тетраэдр так же $A_iA_jA_kA_\ell$, где i, j, k, ℓ принимают различные значения от нуля до трех. Будем обозначать середину стороны A_jA_k через M_{jk}. Тогда медиана треугольника будет обозначаться A_kM_{jk}. Точка пересечения медиан грани $A_iA_jA_k$ будет обозначаться M_{ijk}.

Рассмотрим медиану $A_iM_{jk\ell}$ тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. Пусть M – точка, которая делит эту медиану в отношении 3:1 считая от A_i.

Найдем координаты точки M в системе координат $I = (A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_2)$. Для этого нам нужен радиус-вектор точки M:

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM} = \vec{a}_i + \frac{3}{4}\overrightarrow{A_iM_{jkl}} \qquad (10.6)$$

Вычислим вектор $\overrightarrow{A_iM_{jk\ell}}$. Имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_iM_{jk\ell}} &= \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jM_{jk\ell}}, \\ \overrightarrow{A_iM_{jk\ell}} &= \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_kM_{jk\ell}}, \\ \overrightarrow{A_iM_{jk\ell}} &= \overrightarrow{A_iA_\ell} + \overrightarrow{A_lM_{jk\ell}}, \end{aligned}$$

Сложим полученные равенства и учтем, что M_{jkl} – точка пересечения медиан треугольника, а значит, сумма векторов, соединяющих ее с вершинами этого треугольника, будет нулевой.

$$3\overrightarrow{A_iM_{jk\ell}} = \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell} = \vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l - 3\vec{a}_i.$$

Откуда получаем

$$\overrightarrow{A_iM_{jk\ell}} = \frac{1}{3}(\vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l - 3\vec{a}_i). \tag{10.7}$$

Подставим полученное выражение в формулу (10.6):

$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{1}{4}\vec{a}_i + \frac{1}{4}\vec{a}_j + \frac{1}{4}\vec{a}_k + \frac{1}{4}\vec{a}_\ell.$$

Так как i, j, k, ℓ принимают различные значения от нуля до двух, то один из векторов $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k, \vec{a}_\ell$ будет $\vec{a}_0 = \vec{0}$, а остальные будут $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$. Тогда в системе координат I точка $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Так как мы рассматривали произвольную медиану $\overrightarrow{A_iM_{jk\ell}}$, то точки M делящие каждую из четырех медиан тетраэдра в отношении $3:1$, имеют одни и те же координаты в системе координат I. Значит, все четыре точки M совпадают и теорема доказана. □

Обратную теорему мы сможем обобщить: четыре отрезка будут соединять вершину тетраэдра с точкой, лежащей в плоскости противоположной грани, то есть ареал ее возможного пребывания существенно расширится.

Теорема 10.11. *Пусть даны четыре отрезка $A_iK_{jk\ell}$ соединяют вершину A_i тетраэдра с точкой $K_{jk\ell}$, лежащей в плоскости противоположной грани $A_jA_kA_\ell$. Если они пересекаются в одной точке K и точкой пересечения делятся в отношении $3:1$, считая от вершины, то они являются медианами тетраэдра.*

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $A_iA_jA_kA_\ell$. Обозначим

$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_jK_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_kK_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_lK_{jk\ell}}.$$

Тогда используя правило треугольника, получим:

$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_jA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_kA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_\ell A_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell}} = 3\vec{a}_i - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell + 3\overrightarrow{A_iK_{jk\ell}} =$$
$$= 3\vec{a}_i - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell + 4\overrightarrow{A_iK}.$$

Таким образом,

$$\vec{x}_i = 3\vec{a}_i - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell + 4\overrightarrow{A_iK}$$

В последнем равенстве проведем замену индексов $i \leftrightarrow j$:

$$\vec{x}_j = 3\vec{a}_j - \vec{a}_i - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell + 3\overrightarrow{A_jK}.$$

Тогда

$$\vec{x}_i - \vec{x}_j = 4\vec{a}_i - 4\vec{a}_j + 4\overrightarrow{A_iK} + 4\overrightarrow{KA_j} = 4\vec{a}_i - 4\vec{a}_j + \overrightarrow{A_iA_j} = \vec{0}.$$

Мы показали, что все векторы $\vec{x}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ равны между собой, но каждый вектор $\vec{x}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ параллелен одной грани тетраэдра это возможно только в том случаем, когда все векторы $\vec{x}_i = \vec{0}$. Значит,

$$\overrightarrow{A_j K_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_k K_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_l K_{jk\ell}} = \vec{0},$$

то есть $K_{jk\ell}$ – точка пересечения медиан треугольника $A_j A_k A_\ell$ по доказанной выше теореме. Получаем, что $A_i K_{jk\ell}$ – медиана тетраэдра. □

Для тетраэдра имеют место теоремы, аналогичные теоремам для треугольника.

Теорема 10.12. *Точка M – точка пересечения медиан тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. Тогда*

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{A_3M} = \vec{0}.$$

Доказательство. Пусть M – точка пересечения медиан тетраэдра. Мы знаем, что точка M делит все медианы в отношении $3 : 1$. Тогда:

$$\sum_{i=0}^{3} \overrightarrow{A_iM} = \frac{3}{4} \sum_{i=0}^{3} \overrightarrow{A_i M_{jk\ell}} = \frac{3}{4}\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{3} (\vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l - 3\vec{a}_i) =$$
$$= \frac{1}{4}((\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3-3\vec{a}_0)+(\vec{a}_0+\vec{a}_2+\vec{a}_3-3\vec{a}_1)+(\vec{a}_0+\vec{a}_1+\vec{a}_3-3\vec{a}_2)+(\vec{a}_0+\vec{a}_1+\vec{a}_2-3\vec{a}_3)) = \vec{0}.$$

□

Докажем обратную теорему.

Теорема 10.13. *Пусть для некоторой точки K выполняется равенство*

$$\overrightarrow{A_0K} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{A_2K} + \overrightarrow{A_3K} = \vec{0},$$

Тогда K– точка пресечения медиан тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$.

Доказательство. Обозначим через точку пересечения медиан тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. По доказанной выше теореме имеем

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{A_3M} = \vec{0}.$$

Используем правило треугольника в каждом слагаемом этой суммы.

$$\overrightarrow{A_0K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_2K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_3K} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}.$$

Применяем равенство из условия и получаем $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$. Тогда $K = M$ и точка K является точкой пересечения медиан тетраэдра. □

Теперь обобщаем формулу для длины медианы.

Задача 10.2. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, длины его ребер равны a, b, c, d, e, f. Докажите, что длина медианы тетраэдра, проведенная к грани с длинами сторон d, e, f равна

$$m^2 = \frac{1}{9}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - f^2 - e^2 - d^2).$$

10.3. Медианы 4-симплекса

Медианой 4-симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$ называется отрезок, соединяющий вершину симплекса с точкой пересечения медиан противоположной 3-грани (то есть 3-грани, не содержащей этой вершины).

Теорема 10.14. *Медианы 4-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 4:1, считая от вершины.*

Доказательство. Рассмотрим медиану $A_iM_{jk\ell p}$ 4-симплекса, где точка $M_{jk\ell p}$ – точка пересечения медиан 3-грани $A_iA_kA_\ell A_p$. Пусть M-точка медианы $A_iM_{jk\ell p}$, которая делит ее в отношении 4:1, считая от A_i. Найдем координаты точки M в системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4)$.

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM} = \vec{a}_i + \frac{4}{5}\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}}. \tag{10.8}$$

Используя правило треугольника, находим вектор $\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}}$:

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jM_{jk\ell p}} \\
\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_kM_{jk\ell p}} \\
\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \overrightarrow{A_iA_\ell} + \overrightarrow{A_\ell M_{jk\ell p}} \\
\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \overrightarrow{A_iA_p} + \overrightarrow{A_pM_{jk\ell p}}.
\end{gathered}$$

Сложим последние 4 равенства и учтем теорему 10.13, получим

$$\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell} + \overrightarrow{A_iA_p}\right). \tag{10.9}$$

или

$$4\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = -4\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_l + \vec{a}_p + \vec{a}_k.$$

Подставляя полученный результат в формулу (10.8)

$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{1}{5}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l + \vec{a}_p)$$

Среди векторов $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k, \vec{a}_\ell, \vec{a}_p$, есть нулевой вектор, его отбрасываем. Тогда, координаты точки M будут $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$ для каждой медианы $A_iM_{jk\ell p}$. Следовательно все эти точки совпадают и медианы 4 -симплекса пересекаются в одной точке M. $\square$

Докажем обратную теорему.

Теорема 10.15. *Пусть 5 отрезков, соединяющих вершины 4-симплекса с точками 3-плоскостей противоположных 3-граней, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 4:1, считая от вершины. Тогда эти отрезки являются медианами 4-симплекса.*

Доказательство. Пусть дан 4-симплекс $A_iA_jA_kA_\ell A_p$. Рассмотрим отрезки $A_iK_{jk\ell p}$, где $K_{jk\ell p}$ - точка 3-плоскости $A_jA_kA_\ell A_p$. Обозначим точку пересечения данных отрезков, через K.

Обозначим
$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_jK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_kK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_\ell K_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_pK_{jk\ell p}}.$$
Вычислим вектор $\vec{x}_i$.

$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_jA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_kA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_lA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_pA_i} + \overrightarrow{A_iK_{jk\ell p}} =$$
$$= 4\vec{a}_i - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell - \vec{a}_p + 5\overrightarrow{A_iK} \quad (10.10)$$

Поменяем местами индексы i и p

$$\vec{x}_p = 4\vec{a}_p - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_l - \vec{a}_i + 5\overrightarrow{A_pK}$$

Вычитаем

$$\vec{x}_i - \vec{x}_p = 4\vec{a}_i - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell - \vec{a}_p + 5\overrightarrow{A_iK} - 4\vec{a}_p - \vec{a}_j - \vec{a}_k - \vec{a}_\ell - \vec{a}_i + 5\overrightarrow{A_pK} = \vec{0}$$

Так как это верно для любых значений индексов $i, p = 0, \dots, 4$, то мы получаем, что пять векторов, которые параллельны соответственно пяти 3-граням 4-симплекса, равны между собой. Это возможно тогда и только тогда, когда все эти векторы нулевые, то есть

$$\overrightarrow{A_jK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_kK_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_\ell K_{jk\ell p}} + \overrightarrow{A_pK_{jk\ell p}} = \vec{0}.$$

Следовательно, мы получаем по теореме 10.13, что точки $K_{jk\ell p}$ являются точками пересечения медиан 3-граней $A_jA_kA_\ell A_p$, то есть отрезки $A_iK_{jk\ell p}$ являются медианами 4-симплекса. $\square$

Теорема 10.16. *Пусть M – точка пересечения медиан 4-симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$. Тогда*

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{A_3M} + \overrightarrow{A_4M} = \vec{0}.$$

Доказательство. По теореме 10.14 точка M делит все медианы тетраэдра в отношении 4:1 считая от вершины. Тогда:

$$\sum_{i=0}^{4} \overrightarrow{A_iM} = \frac{4}{5}\sum_{i=0}^{4} \overrightarrow{A_iM_{jklp}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{4}(\vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l + \vec{a}_p - 4\vec{a}_i) =$$
$$= \frac{1}{5}((\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 - 4\vec{a}_0) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 - 4\vec{a}_1) +$$
$$+ (\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 - 4\vec{a}_2) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_4 - 4\vec{a}_3)) + (\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 - 4\vec{a}_4)) = \vec{0}$$

□

Докажем обратную теорему

Теорема 10.17. *Пусть для точки K выполняется равенство*

$$\overrightarrow{A_0K} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{A_2K} + \overrightarrow{A_3K} + \overrightarrow{A_4K} = \vec{0},$$

тогда K– точка пресечения медиан 4-симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Доказательство. Обозначим через M точку пересечения медиан 4-симплекса $A_0A_1A_2A_3$. Тогда по теореме 10.14

$$\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{A_3M} + \overrightarrow{A_4M} = \vec{0}$$

По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{A_0K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_2K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_3K} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{A_4K} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}.$$

Получим $5\overrightarrow{KM} = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$ и $M = K$. □

Задача 10.3. Докажите, что длина медианы 4-симплекса $A_iM_{jk\ell p}$ вычисляется по формуле

$$|A_iM_{jk\ell p}|^2 = \frac{1}{4^2}\left(4a_{ij}^2 + 4a_{ik}^2 + 4a_{i\ell}^2 + 4a_{ip}^2 - a_{jk}^2 - a_{j\ell}^2 - a_{jp}^2 - a_{k\ell}^2 - a_{kp}^2 - a_{\ell p}^2\right).$$

где a_{ij} – длина ребра A_iA_j.

Решение. Согласно 10.9 имеем

$$\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_l} + \overrightarrow{A_iA_p}\right).$$

Длина медианы $A_iM_{jk\ell p}$ – это длина вектора $\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}}$. Находим квадрат длины вектора

$$|\overrightarrow{A_iM_{jk\ell p}}|^2 = \frac{1}{4^2}\left(\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell} + \overrightarrow{A_iA_p}\right)^2 =$$

раскрываем скобки и используем формулу $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$= \frac{1}{4^2}\Big(a_{ij}^2 + a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{ip}^2 + 2\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_iA_k} + 2\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_iA_\ell} +$$
$$+ 2\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_iA_p} + 2\overrightarrow{A_iA_k}\overrightarrow{A_iA_\ell} + 2\overrightarrow{A_iA_k}\overrightarrow{A_iA_p} + 2\overrightarrow{A_iA_\ell}\overrightarrow{A_iA_p}\Big) =$$

нам нужно выразить попарные скалярные произведения через длины ребер. Для этого возьмем равенство

$$\overrightarrow{A_iA_k} - \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_jA_k}$$

и возведем его в скалярный квадрат. Раскрыв скобки и воспользовавшись формулой $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, получим

$$2\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_iA_k} = a_{ik}^2 + a_{ij}^2 - a_{jk}^2.$$

Подставляем в прерванную цепочку равенств и получаем

$$= \frac{1}{4^2}\left(4a_{ij}^2 + 4a_{ik}^2 + 4a_{i\ell}^2 + 4a_{ip}^2 - a_{jk}^2 - a_{j\ell}^2 - a_{jp}^2 - a_{k\ell}^2 - a_{kp}^2 - a_{\ell p}^2\right).$$

□

10.4. Медианы k-симплекса

Пусть дан k-симплекс $A_0 \ldots A_k$. Вершина A_i называется противоположной для $(k-1)$-грани $A_0 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_k$, то есть для однозначно определенной $(k-1)$-грани, которой она не принадлежит.

Медианой k-симплекса в n-мерном аффинном пространстве называется отрезок, соединяющий вершину симплекса с точкой пересечения медиан противоположной $(k-1)$-грани.

Очевидно, что k-симплекс имеет $k+1$ медиану. Для медиан k-симплекса справедливы теоремы аналогичные доказанным выше для медиан треугольника и тетраэдра.

Теорема 10.18. *Медианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $k:1$, считая от вершины.*

Доказательство. Применим индукцию. Пусть теорема для $(k-1)$-симплекса верна. Докажем для k-симплекса.

Пусть M – точка медианы $A_iM_{0\ldots(i-1)(i+1)\ldots k}$, которая делит ее в отношении $k:1$. Вспоминаем, что k-симплекс лежит в k-плоскости, которая является k-мерным аффинным пространством. Уходим в это пространство и фиксируем в нем аффинную систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$. Найдем координаты точки и увидим, что они не зависят от того, на какой медиане эта точка лежит, а значит, она одна и та же для всех медиан и является их общей точкой.

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0A_p} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} =$$

Так как $_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}$ – точка пересечения медиан $(k-1)$-грани (то есть $(k-1)$-симплекса), то теорема верна и верны все теоремы о свойствах медиан. Тогда сумма векторов от этой точки до вершин $(k-1)$-симплекса будет нулем. С учетом этого

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \overrightarrow{A_pA_0} + \overrightarrow{A_0M_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} \\
\ldots \\
\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \overrightarrow{A_pA_{j_{i-1}}} + \overrightarrow{A_{ji-1}M_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} \\
\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \overrightarrow{A_pA_{j_{p+1}}} + \overrightarrow{A_{j_{p+1}}M_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} \ldots \\
\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \overrightarrow{A_pA_{j_k}} + \overrightarrow{A_{j_k}M_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}}
\end{gathered} \tag{10.11}$$

Складываем их

$$\begin{aligned}
k\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \overrightarrow{A_pA_0} + \ldots + \overrightarrow{A_pA_{j_{p-1}}} + \overrightarrow{A_pA_{j_{p+1}}} + \ldots + \overrightarrow{A_pA_{j_k}} = \\
= \vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_{p-1}} + \vec{a}_{j_{i+1}} + \ldots + \vec{a}_{j_k} - k\vec{a}_p.
\end{aligned}$$

Продолжаем прерванную цепочку равенств

$$= \vec{a}_p + \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}(\vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_{p-1}} + \vec{a}_{j_{p+1}} + \ldots + \vec{a}_{j_k} - k\vec{a}_p) = \frac{1}{k+1}(\vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_k}).$$

Итак, координаты точки $M(\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1})$. Они одни и те же для каждой медианы. Следовательно, все точки совпадают и являются общей точкой для всех медиан.

$\square$

Теорема 10.19. *Пусть дан k-симплекс и $k+1$ отрезок, соединяющий вершины k-симплекса с точками $(k-1)$-плоскостей противоположных $(k-1)$-граней. Если эти отрезки пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $k:1$, считая от вершины, то это медианы k-симплекса.*

Доказательство. Пусть нам даны отрезки $A_pK_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}$. Они все пересекаются в точке K и делятся ей в отношении $k:1$. Обозначим

$$\vec{x}_p = \overrightarrow{A_{j_0}K_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_k}K_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}}.$$

Используя правило треугольника, в каждое слагаемое вставим точку A_p и перейдем к $\vec{a}_i$.

$$\vec{x}_p = k\vec{a}_p - \vec{a}_{j_0} - \ldots - \vec{a}_{j_{p-1}} - \vec{a}_{j_{p+1}} - \ldots - \vec{a}_{j_k} + k\overrightarrow{A_pK_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \\ = k\vec{a}_p - \vec{a}_{j_0} - \ldots - \vec{a}_{j_{p-1}} - \vec{a}_{j_{p+1}} - \ldots - \vec{a}_{j_k} + k\frac{k+1}{k}\overrightarrow{A_pK}$$

Меняем p и j_0 местами

$$\vec{x}_{j_0} = k\vec{a}_{j_0} - \vec{a}_p - \ldots - \vec{a}_{j_{p-1}} - \vec{a}_{j_{p+1}} - \ldots - \vec{a}_{j_k} + k\frac{k+1}{k}\overrightarrow{A_{j_0}K}$$

и вычитаем

$$\vec{x}_p - \vec{x}_{j_0} = (k+1)\vec{a}_p - (k+1)\vec{a}_{j_0} + \overrightarrow{A_pK} - (k+1)\overrightarrow{A_{j_0}K} = (k+1)\vec{a}_p - (k+1)\vec{a}_{j_0} + \overrightarrow{A_pA_{j_0}} = \vec{0}.$$

Таким образом, мы получаем, что $\vec{x}_p$ равны между собой для любого $p = 0, \ldots, k$. Каждый из этих векторов параллелен своей $(k-1)$-грани. Нам осталось доказать, что это возможно только в случае, когда $\vec{x}_p = \vec{0}$. Тогда для точки $K_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}$ будет выполняться условие, характеризующее точку пересечения медиан $(k-1)$-грани, и мы получим, что отрезок $A_pK_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}$ является медианой симплекса.

Итак, приступаем к оставшемуся доказательству. Фиксируем индекс $p = 0, \ldots k$ и рассмотрим произвольный индекс $q \neq p$ (тоже принимающий значения от 0 до k). Так как $\vec{x}_p$ параллелен грани $A_{j_0} \ldots A_{j_{p-1}} A_{j_{p+1}} \ldots A_{j_k}$, он раскладывается следующим образом

$$\vec{x}_p = \alpha^0\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_1}} + \ldots + \alpha^{p-1}\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_{p-1}}} + \alpha^{p+1}\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_{p+1}}} + \ldots + \alpha^k\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_k}}.$$

Аналогичным образом получаем

$$\vec{x}_q = \alpha^0\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_1}} + \ldots + \alpha^{q-1}\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_{q-1}}} + \alpha^{q+1}\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_{q+1}}} + \ldots + \alpha^k\overrightarrow{A_{j_0}A_{j_k}}.$$

Так как векторы равны, то правые части тоже равны. Переходим к $\vec{a}_i$ и собираем при них коэффициенты. Коэффициенты будут двух типов

$$(\alpha^0 - \beta^0)\vec{a}_{j_1} + \ldots + \beta^p\vec{a}_{j_p} + \alpha^q\vec{a}_{j_q} + \ldots + (\alpha^k - \beta^k)\vec{a}_{j_k} + (\beta^p - \alpha^q)\vec{a}_{j_0} = \vec{0}.$$

Один из векторов $\vec{a}_i$ в этой линейной комбинации нулевой. Пусть это любой из векторов, кроме $\vec{a}_{j_q}$ и $\vec{a}_{j_p}$. Тогда остальные линейно независимы и коэффициенты будут нулями. Тогда, в частности, $\alpha^q = 0$. Получаем, что в разложении $\vec{x}_p$ будет нулевым коэффициент перед $\vec{a}_{j_q}$ и $\vec{a}_{j_p}$. Перебирая все значения q, мы получим в разложении $\vec{x}_p$ нулевые коэффициенты перед всеми векторами, а значит, он будет нулевым.

Пусть теперь $\vec{a}_{j_p} = \vec{0}$. Тогда $\alpha^q = 0$ (по линейной независимости). Далее все как в предыдущем случае.

Пусть $\vec{a}_{j_q} = \vec{0}$. Тогда по линейной независимости получаем $\beta^p = 0$, $\beta^p - \alpha^q = 0$. Откуда получаем $\alpha^q = 0$. И опять все сводится к первому случаю.

Таким образом, мы показали, что $\vec{x}_p = \vec{0}$ для любых $p = 0, \ldots, k$. □

Теперь докажем еще две теоремы, аналогичные теоремам тетраэдра.

Теорема 10.20. *Пусть точка M является точкой пересечения медиан k-симплекса $A_0 \ldots A_k$. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}.$$

Доказательство. Так как точка M – точка пересечения медиан симплекса, она делит каждую медиану в отношении $k : 1$. Учитывая это, получаем

$$\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{MA_i} = -\sum_{i=0}^{k} \frac{k}{k+1}\overrightarrow{A_iM_{0\ldots(i-1)(i+1)\ldots k}} = -((\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}(\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{i-1} + \vec{a}_{i+1} + \ldots + \vec{a}_k - k\vec{a}_i)) = \vec{0}.$$

□

Обратная теорема.

Теорема 10.21. *Дан k-симплекс $A_0 \ldots A_k$. Пусть точка K, принадлежащая k-плоскости симплекса, удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{A_iK} = \vec{0}.$$

Тогда K – точка пересечения медиан k-симплекса.

Доказательство. Обозначим M – точку пересечения медиан симплекса. Нам нужно показать, что она совпадает с точкой K. По доказанной теореме для точки пересечения медиан имеем
$$\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}.$$
По правилу треугольника вставляем в каждое слагаемое точку K и пользуемся условием. Тогда
$$(k+1)\overrightarrow{KM} = \vec{0}.$$
Откуда получаем, что $M = K$. □

Вычислим длину медианы k-симплекса, если известны длины его ребер. Обозначим их a_{ij} (это длина ребра A_iA_j).

Рассмотрим медиану $A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}$. Как мы видели выше
$$\overrightarrow{A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k}} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{A_{j_0}A_p} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_{p-1}}A_p} + \overrightarrow{A_{j_{p+1}}A_p} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_k}A_p}).$$
Вычисляем длину (а точнее ее квадрат)
$$(A_pM_{j_0\ldots j_{p-1}j_{p+1}\ldots j_k})^2 = \frac{1}{k^2}(\overrightarrow{A_{j_0}A_p} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_{p-1}}A_p} + \overrightarrow{A_{j_{p+1}}A_p} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_k}A_p})^2 =$$
$$= \frac{1}{k^2}(a_{j_0p}^2 + \ldots + a_{j_{p-1}p}^2 + a_{j_{p+1}p}^2 + \ldots + a_{j_kp}^2 + 2(\overrightarrow{A_{j_0}A_p}\overrightarrow{A_{j_1}A_p} + \ldots)) =$$
Теперь находим скалярные произведения
$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_iA_p} - \overrightarrow{A_jA_p}$$
Возводим в квадрат
$$a_{ij}^2 = a_{ip}^2 + a_{jp}^2 - 2\overrightarrow{A_iA_p}\overrightarrow{A_jA_p}.$$
Откуда
$$2\overrightarrow{A_iA_p}\overrightarrow{A_jA_p} = a_{ip}^2 + a_{jp}^2 - a_{ij}^2.$$
Подставляем в прерванную цепочку равенств
$$= \frac{1}{k^2}(ka_{j_0p}^2 + \ldots + ka_{j_{p-1}p}^2 + ka_{j_{p+1}p}^2 + \ldots + ka_{j_kp}^2 - a_{j_0j_1}^2 - \ldots - a_{j_{k-1}j_k}^2)$$
(в отрицательных слагаемых нет индекса p.

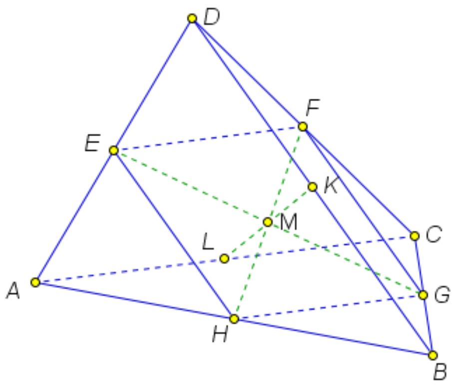
10.5. Бимедианы тетраэдра

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер тетраэдра. У тетраэдра три пары противоположных ребер (то есть ребер, которые не имеют общих точек). Значит, бимедиан тоже три. Оказывается они обладают свойствами аналогичными свойствам медиан.

Опять начинаем с элементарных доказательств.

Теорема 10.22. *Бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.*

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$.

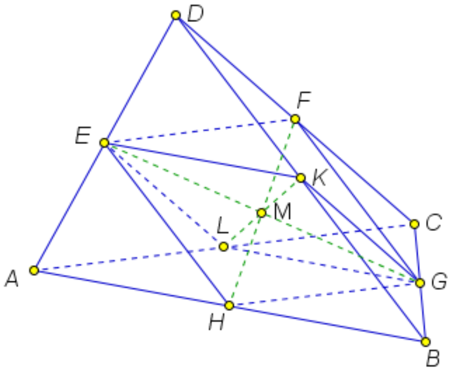


Рассмотрим две бимедианы EG и HF. Отрезок EH является средней линией в треугольнике ADB, следовательно параллелен DB. Аналогично отрезок FG является средней линией в треугольнике DCB, следовательно параллелен DB. Тогда $EH \| FG$. Точно также получаем, что $EF \| HG$. Тогда четырехугольник $EFGH$ является параллелограммом, а отрезки EG и FH являются его диагоналями, следовательно пересекаются и делятся точкой пересечения M пополам. Рассматривая бимедианы FH и KL, мы получим, что они пересекаются в своих серединах. Так как середина отрезка определена однозначно, мы получим, что это та же точка M. Итак, мы показали, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей пополам. □

Посмотрим на элементарное доказательство обратной теоремы.

Теорема 10.23. *Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и три отрезка, которые соединяют внутренние точки противоположных ребер этого тетраэдра. Если эти отрезки пересекаются в одной точке и делятся ей пополам, то это бимедианы тетраэдра.*

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$.



Нам даны отрезки EG, FH, KL. Они пересекаются в точке M и делятся ей пополам. Тогда четырехугольник $EFGH$ является параллелограммом по признаку (диагонали делятся пополам). Прямая EF параллельна плоскости DBC, в которой лежит (параллельная ей) прямая FG. Следовательно, прямая EH не пересекает прямую BD. Так как она лежит с ней в одной плоскости (в плоскости ADB) эти прямые параллельны. Аналогичным образом доказываются параллельности для остальных отрезков.

Так как $EH \| BD$ и $KH \| AD$, четырехугольник $EDKH$ – параллелограмм, следовательно, $EH = DK$. Аналогичным образом, $EKBH$ – параллелограмм, следовательно, $EH = KB$. Тогда $DK = KB$, то есть K – середина DB. Остальные точки рассматриваются аналогично и мы получаем, что все три отрезка KL, EG, HF являются бимедианами. $\square$

Докажем эти же теоремы для 3-симплекса. Опять вводим стандартные для нас обозначения: середина ребра A_iA_j обозначается M_{ij}.

Первая теорема формулируется точно также.

Теорема 10.24. *Бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.*

Доказательство. Пусть даны три бимедианы тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. Докажем, что они пересекаются в одной точке M и делятся в ней пополам. Обозначим бимедиану для противоположных ребер A_iA_j и A_kA_ℓ через $M_{ij}M_{k\ell}$.

Пусть M - середина бимедианы $M_{ij}M_{k\ell}$ (индексы i, j, k, ℓ принимают значения от нуля до трех и все различны). Найдем координаты середины M отрезка $M_{ij}M_{k\ell}$ и убедимся, что они не зависят от значения индексов i, j, k, l. Тогда середины всех бимедиан совпадают, то есть бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

Берем систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и находим в ней координаты точки M. Для этого нам нужен радиус-вектор этой точки

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0M_{ij}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{M_{ij}M_{k\ell}} = \overrightarrow{A_0M_{ij}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{M_{ij}A_0} + \overrightarrow{A_0M_{k\ell}}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0M_{ij}} + \overrightarrow{A_0M_{k\ell}}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0A_i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_0A_k} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_kA_l}) = \frac{1}{4}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k + \vec{a}_l).$$

Один из векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$, $\vec{a}_k$, $\vec{a}_\ell$ будет $\vec{a}_0 = \vec{0}$, а остальные будут векторами базиса из выбранной системы координат. Тогда координаты точки $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Итак, мы получили, что бимедианы пересекаются в одной точке. Кроме этого, если внимательно посмотреть на координаты точки M, то мы увидим, что точно такие же координаты имеет точка пересечения медиан тетраэдра. Таким образом, мы смогли доказать больше, чем сформулировали в теореме. Сформулируем этот результат в виде следствия. $\square$

Следствие 10.1. *Точка пересечения бимедиан тетраэдра совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра.*

Теперь докажем обратную теорему. Ее мы также как и в случае медиан тетраэдра можем обобщить.

Теорема 10.25. *Пусть дан тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. Если три отрезка, соединяющие точки прямых, содержащий противоположные ребра тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ей пополам, то это бимедианы тетраэдра.*

Доказательство. Обозначим точку, принадлежащую прямой A_iA_j через K_{ij}. Опять обозначаем i, j, k, ℓ – индексы от 0 до 3, все различные. Дано, что все три отрезка $K_{ij}K_{k\ell}$ пересекаются в одной точке K и делятся ей пополам. Нам нужно доказать, что отрезки $K_{ij}K_{k\ell}$ являются бимедианами тетраэдра.

У нас сейчас есть $\overrightarrow{KK_{ij}} + \overrightarrow{KK_{k\ell}} = \vec{0}$. Обозначим

$$\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK_{ij}}.$$

Тогда по тому же принципу

$$\vec{x}_{k\ell} = \overrightarrow{A_kK_{k\ell}} + \overrightarrow{A_j\ell K_{k\ell}}.$$

Тогда

$$\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iK} + \overrightarrow{KK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK} + \overrightarrow{KK_{ij}}.$$

Аналогично

$$\vec{x}_{k\ell} = \overrightarrow{A_kK} + \overrightarrow{KK_{k\ell}} + \overrightarrow{A_kK} + \overrightarrow{KK_{k\ell}}.$$

Складываем последние два равенства

$$\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{k\ell} = \vec{x},\ \vec{x} = \overrightarrow{A_iK} + \overrightarrow{A_jK} + \overrightarrow{A_kK} + \overrightarrow{A_\ell K}.$$

Так как это равенство верно для любых индексов i, j, k, ℓ, поменяем индексы i и k местами в этом равенстве. Тогда получим

$$\vec{x}_{kj} + \vec{x}_{i\ell} = \vec{x}.$$

Вычтем из предпоследнего равенства последнее

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj} = \vec{x}_{i\ell} - \vec{x}_{k\ell}.$$

Левая часть этого равенства параллельна грани $A_iA_jA_k$, а правая часть – грани $A_iA_kA_\ell$. Так как это один и тот же вектор, то он будет параллелен ребру A_iA_k, то есть

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj} = \lambda\vec{x}_{ik}.$$

Циклируем индексы $i \to j \to k \to i$.

$$\vec{x}_{jk} - \vec{x}_{ik} = \mu\vec{x}_{ji}.$$

Коэффициент λ мы заменили на μ, так как, вообще говоря, число может поменяться. Складываем последние два равенства (так как $\vec{x}_{jk} = \vec{x}_{kj}$ и т.д. получим)

$$(1-\mu)\vec{x}_{ij} = (1+\lambda)\vec{x}_{ik}.$$

Получаем, что один и тот же вектор параллелен и ребру A_iA_j и ребру A_iA_k. Это возможно только в случае, когда этот вектор нулевой. Получаем, что $\lambda = -1$, $\mu = 1$. Тогда

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj} + \vec{x}_{ik} = \vec{0}.$$

Опять циклируем индексы $i \to j \to k \to i$.

$$\vec{x}_{jk} - \vec{x}_{ik} + \vec{x}_{ji} = \vec{0}$$

и складываем

$$2\vec{x}_{ij} = \vec{0}.$$

Получаем, что $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$, то есть $\overrightarrow{A_iK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK_{ij}} = \vec{0}$, то есть K_{ij} – середина отрезка A_iA_j. Мы получаем бимедианы. □

Вычислим длины бимедиан тетраэдра.

Теорема 10.26. *Пусть дан тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$, длины его ребер равны a_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Докажите, что длина k бимедианы тетраэдра, соединяющая противоположные ребра длин a_{ij} а и $a_{k\ell}f$, вычисляется по формуле*

$$k^2 = \frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{jk}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{ij}^2 - a_{k\ell}^2).$$

Доказательство. Рассматриваем бимедиану $M_{ij}M_{k\ell}$. По аналогии с вычислением длины медианы k-симплекса представим вектор $\overrightarrow{M_{ij}M_{k\ell}}$ в виде линейной комбинации векторов вида $\overrightarrow{A_pA_q}$, где первая буква A_p одна и та же у всех векторов, а у буквы A_q индекс меняется.

$$\overrightarrow{M_{ij}M_{k\ell}} = \overrightarrow{M_{ij}A_i} + \overrightarrow{A_iM_{k\ell}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_iA_j} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell}).$$

Находим скалярный квадрат и сразу учитываем формулу $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$|\overrightarrow{M_{ij}M_{k\ell}}|^2 = \frac{1}{4}a_{ij}^2 + \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell})^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_iA_j}(\overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_iA_\ell}) =$$

Раскрываем скобки и заменяем скалярные произведения вида $\overrightarrow{A_iA_j}(\overrightarrow{A_iA_k}$ также как мы это делали в медианах

$$= \frac{1}{4}(a_{ij}^2 + a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 - a_{k\ell}^2 - a_{ij}^2 - a_{ik}^2 + a_{jk}^2 - a_{ij}^2 - a_{i\ell}^2 + a_{j\ell}^2) =$$

приводим подобные и получаем

$$= \frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{jk}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{ij}^2 - a_{k\ell}^2).$$

□

10.6. Бимедианы 4-симплекса

Пусть дано n-мерное аффинное пространство.

Как определить бимедианы 4-симплекса. В четырехмерном случае для каждого ребра симплекса существует несколько ребер, не пересекающих его. Будем искать так. В трехмерном случае пара не пересекающихся ребер получалась следующим образом: брали название всего тетраэдра и делили его на две части, как раз получалось по две буквы, они и образовывали противоположные ребра. Теперь у нас всего пять букв в обозначении 4-симплекса. Значит, они будут делиться на две буквы и три буквы. Причем, выбрав две буквы, остальные три мы получим однозначно. Для двух букв (ребра) будем брать середину, как и в трехмерном случае. Для трех букв (треугольника) нам нужен аналоги середины отрезка. Это будет точка пересечения медиан треугольника. Объединяя эти соображения, даем определение.

Бимедианой 4-симплекса будем называть отрезок, соединяющий середину ребра с точкой пересечения медиан противоположной 2-грани.

Посмотрим как модифицируются теоремы о бимедианах тетраэдра в 4-мерном случае.

Теорема 10.27. *Бимедианы 4-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 3:2, считая от середины ребер.*

Доказательство. Пусть дан 4-симплекс $A_0 \dots A_4$. Обозначим его бимедианы так: $M_{ij}M_{pqr}$, где M_{ij} – середина ребра A_iA_j, а M_{pqr} – точка пересечения медиан грани $A_pA_qA_r$. Принцип доказательства тот же: берем на каждой бимедиане точку, которая делит ее в отношении $3:2$, вычисляем координаты и убеждаемся, что все точки имеют одни и те же координаты. Заодно посмотрим, совпадет ли эта точка с точкой пересечения медиан симплекса.

Опять уходим в четырехмерное пространство, берем систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$ и вычисляем координаты точки M, которая делит бимедиану $M_{ij}M_{pqr}$ в отношении $3:2$, считая от точки M_{ij}. Все вычисления аналогичны вычислениям для тетраэдра.

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0M_{ij}} + \overrightarrow{M_{ij}M} = \overrightarrow{A_0A_i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_iA_j} + \frac{3}{5}(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jM_{pqr}}) =$$

Так как M_{pqr} – точка пересечения медиан грани $A_pA_qA_r$

$$= \vec{a}_i + \frac{4}{5}\vec{a}_j - \frac{4}{5}\vec{a}_i + \frac{3}{5}(\overrightarrow{A_jA_p} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_pA_q} + \overrightarrow{A_pA_r})) = \frac{1}{5}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_p + \vec{a}_q + \vec{a}_r).$$

Как и выше, один из векторов $\vec{a}_0$. Из остальных достаем координаты точки $M(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Мы видим, что и в четырехмерном случае точка пересечения бимедиан совпала с точкой пересечения медиан 4-симплекса. □

Теорема 10.28. *Если десять отрезков, каждый из которых соединяет точку прямой ребра 4-симплекса с точкой 2-плоскости противоположной 2-грани пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении* 3 : 2, *считая от ребра, то это бимедианы k-симлекса.*

Доказательство. Обозначаем 4-симплекс $A_0A_1 \ldots A_4$, точки прямых, содержащих ребра A_iA_j обозначим K_{ij}, точки 2-плоскостей граней $A_pA_qA_r$ обозначим K_{pqr}. Нам дано, что

$$3\overrightarrow{KK_{ij}} + 2\overrightarrow{KK_{pqr}} = \vec{0}.$$

Нам нужно доказать, что K_{ij} является серединой ребра A_iA_j, а точка K_{pqr} является точкой пересечения медиан грани $A_pA_qA_r$. Рассмотрим два типа сумм

$$\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK_{pqr}};\ \vec{x}_{pqr} = \overrightarrow{A_pK_{pqr}} + \overrightarrow{A_qK_{pqr}} + \overrightarrow{A_rK_{pqr}}.$$

И в первую и во вторую группу сумм вводим точку K

$$\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iK} + \overrightarrow{KK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK} + \overrightarrow{KK_{ij}};$$
$$\vec{x}_{pqr} = \overrightarrow{A_pK} + \overrightarrow{KK_{pqr}} + \overrightarrow{A_qK} + \overrightarrow{KK_{pqr}} + \overrightarrow{A_rK} + \overrightarrow{KK_{pqr}}.$$

Складываем

$$\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{pqr} = \vec{x},\ \vec{x} = \sum_{a=0}^{4} \overrightarrow{A_aK}.$$

Поменяем местами индексы i и p.

$$\vec{x}_{pj} + \vec{x}_{iqr} = \vec{x}.$$

Вычтем из первого равенства второе

$$(\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{pj}) = (\vec{x}_{iqr} - \vec{x}_{pqr}).$$

Левая часть параллельна 2-плоскости $A_iA_jA_p$, а правая часть параллельна плоскости $A_iA_pA_qA_r$ (разными буквами обозначаются разные индексы). Так как это один и тот же вектор, то он параллелен ребру A_iA_p.

Действительно, пусть вектор $\vec{b}$ параллелен граням $A_iA_jA_p$ и $A_iA_qA_pA_r$. Тогда его можно представить в виде

$$\vec{b} = \alpha^1\overrightarrow{A_iA_p} + \alpha^2\overrightarrow{A_iA_j};\ \vec{b} = \beta^1\overrightarrow{A_iA_p} + \beta^2\overrightarrow{A_iA_q} + \beta^3\overrightarrow{A_iA_r}.$$

Приравниваем правые части

$$\alpha^1\overrightarrow{A_iA_p} + \alpha^2\overrightarrow{A_iA_j} = \beta^1\overrightarrow{A_iA_p} + \beta^2\overrightarrow{A_iA_q} + \beta^3\overrightarrow{A_iA_r}$$

и уходим к маленьким a.

$$\alpha^2\vec{a}_j - \beta^2\vec{a}_q - \beta^3\vec{a}_r + \vec{a}_i(-\alpha^1 - \alpha^2 + \beta^1 + \beta^2 + \beta^3) + \vec{a}_p(\alpha^1 - \beta^1) = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости векторов получаем, что $\alpha^2 = \beta^2 = \beta^3 = 0$. Если один из векторов $\vec{a}_j$, $\vec{a}_q$, $\vec{a}_r$ будет $\vec{a}_0 = \vec{0}$, то мы все равно получим нужный результат, используя информацию от двух ненулевых векторов. Итак, мы получаем, что

$$\vec{b} = \alpha^1\overrightarrow{A_iA_p}.$$

Возвращаемся к доказательству теоремы. Мы получили, что вектор $\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{pj}$ параллелен ребру A_iA_p, следовательно, мы можем записать его в виде

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{pj} = \lambda\vec{x}_{ip}.$$

Дальше поступаем также, как в случае 3-симплекса: циклируем индексы i, j, p.

$$\vec{x}_{jp} - \vec{x}_{ip} = \mu\vec{x}_{ji}.$$

Складываем два последних равенства

$$(1-\mu)\vec{x}_{ij} = (\lambda + 1)\vec{x}_{ip}.$$

Откуда получаем, что $\mu = 1$, $\lambda = -1$ и

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{pj} + \vec{x}_{ip} = \vec{0}.$$

Циклируя индексы, получим

$$\vec{x}_{jp} - \vec{x}_{ip} + \vec{x}_{ji} = \vec{0}.$$

Складываем последние два равенства и получаем, что $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$ для любых индексов i, j.

Возвращаемся к равенству $\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{pqr} = \vec{x}$. Получаем, что $\vec{x}_{pqr} = \vec{x}$ для любых значений индексов p, q, r. Значит, вектор $\vec{x}$ параллелен всем граням $A_pA_qA_r$, а это возможно только в случае, когда $\vec{x} = 0$. Тогда $\vec{x}_{pqr} = \vec{0}$ и мы получили, что отрезки $K_{ij}K_{pqr}$ – бимедианы. □

Вычислим длину бимедианы 4-симплекса. Обозначим длину ребра A_iA_j через a_{ij} и вычислим длину бимедианы $M_{ij}M_{pqr}$. Выражаем

$$\overrightarrow{M_{ij}M_{pqr}} = \overrightarrow{M_{ij}A_i} + \overrightarrow{A_iM_{pqr}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_jA_i} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_iA_p} + \overrightarrow{A_iA_q} + \overrightarrow{A_iA_r}).$$

Вычисляем длину этого вектора

$$|\overrightarrow{M_{ij}M_{pqr}}|^2 = \frac{1}{4}a_{ij}^2+\frac{1}{9}(a_{ip}^2+a_{iq}^2+a_{ir}^2)+\frac{1}{6}(a_{jp}^2-a_{ij}^2-a_{ip}^2+a_{jq}^2-a_{ij}^2-a_{iq}^2+a_{jr}^2-a_{ij}^2-a_{ir}^2)+$$
$$+\frac{1}{9}(a_{ip}^2+a_{iq}^2-a_{pq}^2+a_{ip}^2+a_{ir}^2-a_{pr}^2+a_{iq}^2+a_{ir}^2-a_{qr}^2) =$$
$$= -\frac{1}{4}a_{ij}^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(a_{ip}^2+a_{iq}^2+a_{ir}^2+a_{jp}^2+a_{jq}^2+a_{jr}^2) - \frac{1}{9}(a_{pq}^2+a_{pr}^2+a_{qr}^2). \quad (10.12)$$

10.7. Бимедианы k-симплекса

Введем понятие бимедианы для k-симплекса $A_0\dots A_k$. Все вершины k-симплекса мы можем разбить на две группы: две вершины и остальные $k-2$ вершины. В связи с этим вводим определения.

Бимедианой или *2-медианой* k-симплекса называется отрезок, соединяющий середину ребра симплекса и точку пересечения медиан противоположной $(k-2)$-грани.

Теорема 10.29. *Бимедианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $(k-1):2$, считая от ребра.*

Доказательство. Рассмотрим бимедиану $M_{ij}M_{p_0\dots p_{k-2}}$. Возьмем на ней точку M, которая делит ее в отношении $(k-1):2$. Найдем ее координаты в системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$. Для этого нужен радиус-вектор этой точки

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM_{ij}} + \overrightarrow{M_{ij}M} = \vec{a}_i + \frac{1}{2}(\vec{a}_j - \vec{a}_i) + \frac{k-1}{k+1}\left(\overrightarrow{M_{ij}A_i} + \overrightarrow{A_iM_{p_0\dots p_{k-2}}}\right) =$$

Последнее слагаемое вычисляем так:

$$\overrightarrow{A_iM_{p_0\dots p_{k-2}}} = \overrightarrow{A_iA_{p_0}} + \overrightarrow{A_{p_1}M_{p_0\dots p_{k-2}}}$$
$$\dots$$
$$\overrightarrow{A_iM_{p_0\dots p_{k-2}}} = \overrightarrow{A_iA_{p_{k-2}}} + \overrightarrow{A_{p_{k-2}}M_{p_0\dots p_{k-2}}}$$

Складываем и учитываем, что сумма последних слагаемых в этих равенствах дает нуль. Результат подставляем в прерванную цепочку равенств

$$= \frac{1}{2}\vec{a}_i+\frac{1}{2}\vec{a}_j+\frac{k-1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\vec{a}_i - \frac{1}{2}\vec{a}_j + \frac{1}{k-1}(\vec{a}_{p_0} + \dots + \vec{a}_{p_{k-2}} - (k-1)\vec{a}_i\right) = \frac{1}{k+1}(\vec{a}_i+\vec{a}_j+\vec{a}_{p_0}+$$

Итак, на любой бимедиане координаты точки M будут $\left(\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right)$. Все эти точки совпадают и кроме того, они совпадают с точкой пересечения медиан k-симплекса. $\square$

Сформулируем обратную теорему.

Теорема 10.30. *Пусть отрезки, соединяющие точки прямых ребер k-симплекса с точками плоскостей противоположных $(k-2)$ граней, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $(k-1):2$, считая от ребра. Тогда эти отрезки являются бимедианами k-симплекса.*

Доказательство. Пусть даны отрезки $K_{ij}K_{p_0\ldots p_{k-2}}$, которые пересекаются в точке K и делятся ей в отношении $(k-1):2$. Чтобы доказать, что это бимедианы, нам нужно получить, что точки K_{ij} – середины ребер A_iA_j, а точки $K_{p_0\ldots p_{k-2}}$ – точки пересечения медиан $(k-2)$ граней. Вводим векторы

$$\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iK_{ij}} + \overrightarrow{A_jK_{ij}};\ \vec{x}_{p_0\ldots p_{k-2}} = \overrightarrow{A_{p_0}K_{p_0\ldots p_{k-2}}} + \ldots + \overrightarrow{A_{p_{k-2}}K_{p_0\ldots p_{k-2}}}.$$

Нам нужно доказать, что эти векторы нулевые. Поступаем также как в случае бимедиан 4-симплекса. Вычисляем

$$\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{p_0\ldots p_{k-2}}$$

и убеждаемся, что он не зависит от индексов. Поэтому обозначаем его $\vec{x}$. Меняя индексы $i \leftrightarrow p_0$ и вычитая равенства, получаем, что

$$\vec{x}_{ip_0} - \vec{x}_{ij} = \lambda\vec{x}_{p_0j}.$$

Дословно повторяя рассуждения из теоремы о бимедианах 4-симплекса, убеждаемся, что $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$ и $\vec{x}_{p_0\ldots p_{k-2}} = \vec{0}$, то есть точки K_{ij} – середины ребер, а точки $K_{p_0\ldots p_{k-2}}$ – точки пересечения $(k-2)$-граней. В результате получаем, что $K_{ij}K_{p_0\ldots p_{k-2}}$ – бимедианы. $\square$

10.8. ℓ-медианы k-симплекса

Рассмотрим k-симплекс $A_0A_1\ldots A_k$. Разобьем его вершины на две группы: в одной группе будет ℓ вершин, а в другой – $(k+1-\ell)$ вершин. Каждая группа вершин определяет симплекс. Для них строим точку пересечения медиан и соединяем эти точки. Получившийся отрезок называется ℓ-медианой k-симплекса.

Сформулируем определение. *ℓ-медианой* k-симплекса называется отрезок, соединяющий точку пересечения медиан $(\ell-1)$-грани и противоположной $(k-\ell)$-грани.

Точно также как в случае бимедиан доказывается теорема

Теорема 10.31. *ℓ-медианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $\ell-1$-грани.*

Доказательство. Берем ℓ-медиану $M_{i_0\dots i_{\ell-1}}M_{j_0\dots j_{k-\ell}}$ и берем на ней точку M, которая делит ее в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани Опять вычисляем радиус-вектор

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0M_{i_0\dots i_{\ell-1}}} + \frac{k-\ell+1}{k+1}\overrightarrow{M_{i_0\dots i_{\ell-1}}M_{j_0\dots j_{k-\ell}}} = \overrightarrow{A_0M_{i_0\dots i_{\ell-1}}} + \frac{k-\ell+1}{k+1}\Big(\overrightarrow{M_{i_0\dots i_{\ell-1}}A_0} + \overrightarrow{A_0\dots}$$
$$= \frac{\ell}{k+1}\overrightarrow{A_0M_{i_0\dots i_{\ell-1}}} + \frac{k-\ell+1}{k+1}\overrightarrow{A_0M_{j_0\dots j_{k-\ell}}} = \frac{\ell}{k+1}\frac{1}{\ell}(\vec{a}_{i_0}+\ldots+\vec{a}_{i_{\ell-1}}) + \frac{k-\ell+1}{k+1}\frac{1}{k-\ell+1}(\vec{a}_{j_0}\dots$$

Таким образом, на любой ℓ-медиане получаем, что точка M имеет координаты $\left(\frac{1}{k+1},\dots,\frac{1}{k+1}\right)$. Значит, это одна и та же точка для всех ℓ-медиан. Кроме того, мы видим, что она совпадает с точкой пересечения медиан k-симплекса. $\square$

Имеет место и обратная теорема. Сформулируйте ее самостоятельно.

Замечание 10.1. Мы можем назвать медиану k-симплекса 1-медианой. Тогда полученные результаты можно сформулировать так: все ℓ-медианы k-симплекса пересекаются в одной точке, причем делятся этой точкой в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от ℓ-грани.

11. k-призмы.

11.1. 2-призма.

Рассмотрим треугольник $A_0A_1A_2$ и треугольник $B_0B_1B_2$, который получается из треугольника $A_0A_1A_2$ параллельным переносом на $\vec{p}$ не параллельный плоскости $A_0A_1A_2$. При этом точки B_0, B_1, B_2 получаются соответственно из точек $A_0A_1A_2$ при данном параллельном переносе. Будем называть вершины A_0 и B_0, A_1 и B_1, A_2 и B_2, *соответствующими.* Соединим соответствующие вершины этих треугольников отрезками. Множество, состоящее из треугольников $A_0A_1A_2$, и $B_0B_1B_2$ их сторон и вершин, а также отрезков A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 назовем *2-призмой* и обозначать $A_0A_1A_2B_0B_1B_2$. Треугольники $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$ будем называть *основаниями* 2-призмы. От привычной треугольной призмы 2-призма отличается только отсутствием боковых граней.

Обозначим M_{01} середину отрезка A_0A_1, M_{02} середину отрезка A_0A_2, M_{02} середину отрезка A_1A_2. Отрезки B_0M_{12}, B_1M_{02}, B_2M_{01} будем называть их *медианами* 2-призмы. Пусть индексы i, j, k принимают значения от 0 до 2 и все попарно различны, тогда медианы 2-призмы можно обозначить B_iM_{jk}.

Теорема 11.1. *Медианы 2-призмы пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1, считая от вершины. (эта теорема хорошо известна из курса элементарной геометрии)*

Доказательство. Пусть дана 2-призма $A_0A_1A_2B_0B_1B_2$. Рассмотрим аффинную систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$, где $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_0A_2}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_0B_0}$. Обозначим M_{ij} - середину отрезка A_iA_j (i, j, k принимают значения от 0 до 2 и различны). Рассмотрим медиану B_kM_{ij} и точку M, которая делит эту медиану в отношении 2:1 считая от точки B_k. Найдем координаты точки M в выбранной системе координат.

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0M_{ij}} + \overrightarrow{M_{ij}M} = \frac{1}{2}(\vec{a}_i + \vec{a}_j) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{M_{ij}A_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0B_k}) =$$

(Вычислим вектор $\overrightarrow{A_0M_{ij}}$

$$\overrightarrow{A_0M_{ij}} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM_{ij}}, \quad \overrightarrow{A_0M_{ij}} = \overrightarrow{A_0A_j} + \overrightarrow{A_jM_{ij}}$$

Сложим два этих равенства и получим $\overrightarrow{A_0M_{ij}} = \frac{1}{2}(\vec{a}_i + \vec{a}_j)$)

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}_i+\vec{a}_j) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}_i+\vec{a}_j) + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}_k = \frac{1}{3}(\vec{a}_i+\vec{a}_j) + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}_k = \frac{1}{3}(\vec{a}_i+\vec{a}_j+\vec{a}_k) + \frac{1}{3}\vec{b}$$

Так как индексы i, j, k все различны и принимают значения от 0 до 2, среди них есть $\vec{a}_0 = 0$ остальные векторы это $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Получаем, что точка M будет иметь координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Из этого следует, что точки M взятые на всех трех медианах совпадут и будут точкой пересечения всех медиан. □

Следствие 11.1. *Так как точка пересечения медиан M_{012} 2-симплекса $A_0A_1A_2$ имеет координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ в системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, следовательно, $M_{012}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$ в системе координат $(A, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$. Так как точка N_{012} - пересечения медиан 2 - симплекса $B_0B_1B_2$ имеет координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ в системе координат $(B_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, то $N(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$ в системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$, следовательно, $\overrightarrow{MM_{012}}$ $(0; 0; -\frac{1}{3})$, и $\overrightarrow{MN_{012}}$ $(0; 0; \frac{2}{3})$, значит эти векторы коллиниарны, то есть точки M, M_{012}, N_{012} лежат на одной прямой.*

Докажем обратную теорему

Теорема 11.2. *Пусть отрезки, соединяющие вершины B_k с точками K_{ij} прямых A_iA_j 2- призмы $A_0A_1A_2B_0B_1B_2$, пересекаются в одной точке K и делятся ей в отношении 2:1, считая от вершины. Тогда эти отрезки являются медианами 2-призмы.*

Доказательство. Пусть M–точка пересечения медиан, M_{ij} - середина A_iA_j. По теореме 11.1 точка M делит все медианы 2-призмы в отношении 2:1. Тогда

$$\overrightarrow{B_kM} + 2\overrightarrow{M_{ij}M} = \vec{0}.$$

Воспользуемся правилом треугольника

$$\overrightarrow{B_kM} + \overrightarrow{KM} + 2(\overrightarrow{M_{ij}K} + \overrightarrow{KM}) = \vec{0}.$$

Применив еще раз правило треугольника получим

$$3\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{B_kK} + 2\overrightarrow{M_{ij}K_{ij}} + 2\overrightarrow{K_{ij}K} = \vec{0}.$$

Так как по условию теоремы $\overrightarrow{B_kK} + 2\overrightarrow{K_{ij}K} = \vec{0}$, то из последнего равенства получим $\overrightarrow{KM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{M_{ij}K_{ij}}$, для любых $i, j = 0, 1, 2$, то есть $\overrightarrow{KM}$ параллелен каждому из трех не коллиниарных векторов $\overrightarrow{M_{ij}K_{ij}}$. Следовательно $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$, получаем $K = M$. Тогда $\overrightarrow{M_{ij}K_{ij}} = \vec{0}$ $K_{ij} = M_{ij}$, следовательно B_kK_{ij} медианы 2 - призмы и K - точка пересечения медиан. □

11.2. 3-призма.

Рассмотрим тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$ и тетраэдр $B_0B_1B_2B_3$, который получается из тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ параллельным переносом на $\vec{p}$ не параллельный 3-плоскости тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. При этом точки B_0, B_1, B_2, B_3 получаются соответственно из точек A_0, A_1, A_2, A_3 при данном параллельном переносе. Будем называть вершины A_0 и B_0, A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3 *соответствующими.* Соединим соответствующие вершины этих тетраэдров отрезками. Множество, состоящее из тетраэдров, $A_0A_1A_2A_3$ и $B_0B_1B_2B_3$ их граней, сторон и вершин, а также отрезков A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2,A_3B_3 будем называть *3-призмой* и обозначать $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$. Тетраэдры $A_0A_1A_2A_3$ и $B_0B_1B_2B_3$ будем называть *основаниями* 3-призмы.

Обозначим через M_{ijk} точку пересечения медиан треугольника $A_iA_jA_k$, где $i, j, k = 0, ..., 3$ и все попарно различны. Отрезки B_lM_{ijk} будем называть *медианами* 3 - призмы ($l = 0, ..., 3$ и i, j, k, l все попарно различны).

Теорема 11.3. *Медианы 3-призмы $A_0A_1...B_3$ пересекаются в одной точке M и делятся ей в отношении 3:1, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть дана 3-призма $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$. Рассмотрим аффинную систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b})$, где $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_0A_2}$, $\vec{a}_3 = \overrightarrow{A_0A_3}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

Рассмотрим медиану B_kM_{ijp} и точку M, которая делит эту медиану в отношении 3:1, считая от точки B_k.

Найдем координаты точки M в аффинной системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b})$
$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0B_k} + \overrightarrow{B_kM} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_k} + \frac{3}{4}\overrightarrow{B_kM_{ijp}} =$

(Вычислим вектор $\overrightarrow{A_0M_{ijp}}$

$$\overrightarrow{A_0M_{ijp}} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iM_{ijp}}$$

$$\overrightarrow{A_0M_{ijp}} = \overrightarrow{A_0A_j} + \overrightarrow{A_jM_{ijp}}$$
$$\overrightarrow{A_0M_{ijp}} = \overrightarrow{A_0A_p} + \overrightarrow{A_pM_{ijp}}$$

Сложим последние 3 равенства, получим)

$$= \vec{b} + \vec{a}_k + \frac{3}{4}(\overrightarrow{B_kA_0} + \overrightarrow{A_0M_{ijp}}) = \vec{b} + \vec{a}_k + \frac{3}{4}(-\overrightarrow{B_0B_k}) + \frac{3}{4}(-\overrightarrow{A_0B_0}) + \frac{3}{4}\overrightarrow{A_0M_{ijp}} =$$
$$= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}_k + \frac{1}{4}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_p).$$

Тогда координаты точки M будут $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Из этого следует, что точки M взятые на всех медианах 3- призмы совпадают между собой. □

Следствие 11.2. *Пусть M_{ilkp} – точка пересечения медиан основания $A_0A_1A_2A_3$, пусть N_{ijkp} – точка пересечения медиан основания $B_0B_1B_2B_3$ 3 - призмы. Тогда $N_{ijkp}(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 1)$.*

$$\overrightarrow{MM_{ijkp}}(0; 0; 0; -\frac{1}{4})$$

$$\overrightarrow{MN_{ijkp}}(0; 0; 0; \frac{3}{4})$$

Следовательно векторы $\overrightarrow{MM_{ijkp}}$, $\overrightarrow{MN_{ijkp}}$ коллинеарны и точки M, M_{ijkp}, N_{ijkp} лежат на одной прямой.

Докажем обратную теорему

Теорема 11.4. *Пусть отрезки, соединяющие вершины B_k с точками K_{ijp} 2-плоскостей $A_iA_jA_p$ 3 - призмы $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$, пересекаются в одной точке K и делятся ей в отношении 3:1, считая от вершины. Тогда эти отрезки являются медианами 3-призмы.*

Доказательство. Пусть M – точка пересечения медиан 3-призмы. Тогда по теореме 11.3
$$\overrightarrow{B_kM} + 3\overrightarrow{M_{ijp}M} = \vec{0}.$$
Воспользуемся правилом треугольника
$$\overrightarrow{B_kK} + \overrightarrow{KM} + 3\overrightarrow{M_{ijp}K} + 3\overrightarrow{KM} = \vec{0}$$
Применив еще раз правило треугольника получим
$$4\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{B_kK} + 3\overrightarrow{K_{ijp}K} + 3\overrightarrow{M_{ijp}K_{ijp}} = \vec{0}$$
Так как по условию теоремы $\overrightarrow{B_kK} + 3\overrightarrow{K_{ijp}K} = \vec{0}$, то из последнего равенства получим $\overrightarrow{KM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{M_{ijp}K_{ijp}}$, для любых $i, j, p = 0, 1, 2, 3$, то есть $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$, получаем $K = M$. Тогда $\overrightarrow{M_{ijp}K_{ijp}} = \vec{0}$, то есть $K_{ijp} = M_{ijp}$, следовательно B_kK_{ijp} медианы 3 - призмы и K - точка пересечения медиан. □

11.3. k-призма.

Рассмотрим симплициальный комплекс состоящий из двух k - симплексов $A_0A_1A_2...A_k$ и $B_0B_1B_2...B_k$, который получается из симплекса $A_0A_1A_2...A_k$ параллельным переносом на $\vec{p}$ не параллельный k - плоскости. содержащей симплекс $A_0A_1A_2...A_k$. При этом точки $B_0, B_1, B_2, ..., B_k$ получаются соответственно из точек $A_0, A_1, ..., A_k$ при данном параллельном переносе. Будем называть вершины A_0 и B_0, A_1 и B_1,..., A_k и B_k *соответствующими.* Соединим соответствующие вершины симплексов $A_0A_1A_2...A_k$ и $B_0B_1B_2...B_k$ отрезками. Множество, состоящее из симплексов $A_0A_1A_2...A_k$ и $B_0B_1B_2...B_k$, всех их граней, сторон и вершин, а также отрезков A_0B_0, A_1B_1,...,A_kB_k будем называть *k-призмой* и обозначать $A_0A_1...A_kB_0B_1...B_k$. Симплексы $A_0A_1...A_k$ и $B_0B_1...B_k$ будем называть *основаниями* k-призмы.

Обозначим через $M_{i_0...i_{k-1}}$ точку пресечения медиан $(k-1)$-грани. Отрезок $B_lM_{i_0...i_{k-1}}$ будем называть *медианой* k - призмы, где индексы $l, i_0, ..., i_{k-1}$ попрано различны.

Теорема 11.5. *Медианы k-призмы $A_0A_1...B_k$ пересекаются в одной точке M и делятся ей в отношении $k : 1$, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть дана k-призма $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$. Рассмотрим аффинную систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b})$, где $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$,..., $\vec{a}_k = \overrightarrow{A_0A_k}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_0B_0}$. Рассмотрим медиану $B_{i_k}M_{i_0...i_{k-1}}$ и точку M, которая делит эту медиану в отношении k:1, считая от точки B_{i_k}. Найдем координаты точки M в выбранной системе координат.

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_{i_k}} + \overrightarrow{B_{i_k}M} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_{i_k}} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{B_{i_k}M_{i_0\dots i_{k-1}}} =$$
$$= \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_{i_k}} + \frac{k}{k+1}(\overrightarrow{B_{i_k}A_{i_k}} + \overrightarrow{A_{i_k}M_{i_0\dots i_{k-1}}}) =$$

(Вычислим вектор $\overrightarrow{A_{i_k}M_{i_0\dots i_{k-1}}}$

$$\overrightarrow{A_{i_k}M_{i_0\dots i_{k-1}}} = \overrightarrow{A_{i_k}A_{i_0}} + \overrightarrow{A_{i_0}M_{i_0\dots i_{k-1}}}$$

$$\dots$$

$$\overrightarrow{A_{i_k}M_{i_0\dots i_{k-1}}} = \overrightarrow{A_{i_k}A_{i_{k-1}}} + \overrightarrow{A_{i_{k-1}}M_{i_0\dots i_{k-1}}}$$

Сложим их, и так как сумма последних слагаемых равна нулю, получаем)

$$= \vec{b} + \vec{a}_{i_k} + \frac{k}{k+1}(-\vec{b} + \frac{1}{k}(\vec{a}_{i_0} + \dots + \vec{a}_{i_{k-1}} - k\vec{a}_{i_k})) =$$
$$= (1 - \frac{k}{k+1})\vec{b} + \frac{k}{k+1}(\vec{a}_{i_0} + \dots + \vec{a}_{i_{k-1}}) + (1 + \frac{k}{k+1}) \cdot (-k))\vec{a}_{i_k} =$$
$$= \frac{1}{k+1}\vec{b} + \frac{1}{k+1}(\vec{a}_{i_0} + \dots + \vec{a}_{i_{k-1}}).$$

Тогда координаты точки M будут $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+1})$. Из этого следует, что точки M взятые на всех медианах k - призмы совпадают между собой. □

Следствие 11.3. *Пусть $N_{i_0\dots i_k}$ – точка пересечения медиан основания $B_0B_1B_2\dots B_k$ k - призмы. Тогда $N_{i_0\dots i_k}$ $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}; 1)$. Пусть $M_{i_0\dots i_k}$ – точка пересечения медиан основания $A_0A_1A_2\dots A_k$ k - призмы. Тогда $M_{i_0\dots i_k}$ $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}; 0)$*

$$\overrightarrow{MM_{i_0\dots i_k}}(0, \dots, 0; -\frac{1}{k+1})$$

$$\overrightarrow{MN_{i_0\dots i_k}}(0, \dots, 0; \frac{k}{k+1})$$

Следовательно векторы $\overrightarrow{MM_{i_0\dots i_k}}$, $\overrightarrow{MN_{i_0\dots i_k}}$ коллинеарны, а значит точки M, $M_{i_0\dots i_k}$, $N_{i_0\dots i_k}$ лежат на одной прямой.

Докажем обратную теорему.

Теорема 11.6. *Пусть отрезки, соединяющие вершины B_{i_k} с точками $K_{i_0...i_{k-1}}$ $k-1$ -плоскстей $A_{i_0}...A_{i_{k-1}}$ k - призмы $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$, пересекаются в одной точке K и делятся ей в отношении k:1, считая от вершины B_{i_k}. Тогда эти отрезки являются медианами k-призмы.*

Доказательство. Пусть M - точка пересечения медиан k-призмы. Тогда по теореме 11.5

$$\overrightarrow{MB_{i_k}} + k\overrightarrow{MM_{i_0...i_{k-1}}} = \vec{0}.$$

Воспользуемся правилом треугольника

$$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB_{i_k}} + k(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KM_{i_0...i_{k-1}}}) = \vec{0}$$

Применив еще раз правило треугольника получим

$$(k+1)\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB_{i_k}} + k\overrightarrow{KK_{i_0...i_{k-1}}} + k\overrightarrow{K_{i_0...i_{k-1}}M_{i_0...i_{k-1}}} = \vec{0}$$

Так как по условию теоремы $\overrightarrow{KB_{i_k}} + k\overrightarrow{KK_{i_0...i_{k-1}}} = \vec{0}$, то из последнего равенства получим $\overrightarrow{KM} = -\frac{k}{k+1}\overrightarrow{M_{i_0...i_{k-1}}K_{i_0...i_{k-1}}}$, для любых индексов $i, j, p, .., k = 0, 1, 2, 3, ..., k$, то есть $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$, получаем $K = M$. Тогда $\overrightarrow{M_{i_0...i_{k-1}}K_{i_0...i_{k-1}}} = \vec{0}$ $K_{i_0...i_{k-1}} = M_{i_0...i_{k-1}}$, следовательно $B_{i_k}K_{i_0...i_{k-1}}$ медианы k - призмы и K - точка пересечения медиан. □

11.4. Бимедианы 3-призмы

Рассмотрим 3-призму $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$. *Бимедианой* 3-призмы назывется отрезок $N_{ij}M_{kl}$, где N_{ij} - середина ребра B_iB_j, M_{kl} - середина ребра B_kB_l, где индексы i, j, k, l принимают значения $0, 1, 2, 3$. Выясним, будут ли бимедианы 3-призмы пересекатся в одной точке. В случае положительного ответа найдем в каком отношении они будет делиться этой точкой. Рассмотрим 3-призму $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$ и ее бимедиану $N_{ij}M_{kl}$. Возьмем на этой бимедиане точку M_2 такую, что $\overrightarrow{M_{kl}M_2} = x\overrightarrow{M_{kl}N_{ij}}$

Найдем координаты точки M_2 в аффинной системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b})$

$$\overrightarrow{A_0M_2} = \overrightarrow{A_0M_{kl}} + \overrightarrow{M_{kl}M_2} = \frac{1}{2}(\vec{a}_k + \vec{a}_l) + x\overrightarrow{M_{kl}N_{ij}} =$$

(Воспользуемся правилом треугольника

$$\frac{1}{2}(\vec{a}_k+\vec{a}_l)+x(\overrightarrow{M_{kl}A_0}+\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{B_0N_{ij}}) = \frac{1}{2}(\vec{a}_k+\vec{a}_l)+x(-\frac{1}{2}(\vec{a}_k+\vec{a}_l)+\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{a}_i+\vec{a}_j) =$$
$$= \vec{a}_k(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x) + \vec{a}_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}x\vec{a}_i + \frac{1}{2}x\vec{a}_j + x\vec{b}$$

Чтобы координаты точки M_2 не зависели от значений индексов i, j, k, l нужно потребовать, чтобы коэффициенты перед векторами $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$, $\vec{a}_k$, $\vec{a}_l$ были одинаковыми, то есть $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$, то есть $x = \frac{1}{2}$. В этом случае

$$\overrightarrow{A_0M_2} = \frac{1}{4}\vec{a}_i + \frac{1}{4}\vec{a}_j + \frac{1}{4}\vec{a}_k + \frac{1}{4}\vec{a}_l + \frac{1}{2}\vec{b},$$

то есть $M_2(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ для всех бимедиан 3-призмы. Значит, все они пересекаются в одной точке M_2, при этом $\overrightarrow{M_{kl}M_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_{kl}N_{ij}}$, то есть M_2 - середина бимедианы $M_{kl}N_{ij}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 11.7. *Бимедианы 3-призмы $A_0A_1...B_3$ пересекаются в одной точке M_2 и делятся ей пополам.*

Сравнивая коррдинаты точки M, пересечения медиан 3-призмы и кооординаты точки N_2, пересечения бимедиан 3-призмы, получаем

Следствие 11.4. *Точки пересечения медиан 3-призмы и пересечения бимедиан 3-призмы, различны.*

Докажем обратную теорему

Теорема 11.8. *Пусть дана 3-призма $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$. Возьмем точку P_{ij} на прямой A_iA_j и точку K_{kl} на прямой B_kB_l. Пусть все отрезки $P_{ij}K_{kl}$ пересекаются в одной точке и делятся ей пополам, тогда это будут бимедианы 3-призмы $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$.*

Доказательство. В 3-призме $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$ возьмем точку P_{ij} на прямой A_iA_j и точку K_{kl} на прямой B_kB_l. Пусть отрезки $P_{ij}K_{kl}$ пересекаются в одной точке P и делятся ей пополам. Обозначим $\vec{x}_{ij} = \overrightarrow{A_iP_{ij}} + \overrightarrow{A_jP_{ij}}$, обозначим $\vec{y}_{kl} = \overrightarrow{B_kK_{kl}} + \overrightarrow{B_lK_{kl}}$. Воспользуемся правилом треугольника для этих векторов и сложим их

$$\begin{aligned}\vec{x}_{ij} + \vec{y}_{kl} = \overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{PP_{ij}} + \overrightarrow{A_jP} + \overrightarrow{PP_{ij}} + \overrightarrow{B_kP} + \overrightarrow{PK_{kl}} + \overrightarrow{B_lP} + \overrightarrow{PK_{kl}} = \\ = \overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{A_jP} + \overrightarrow{B_kP} + \overrightarrow{B_lP} + 2\overrightarrow{PP_{ij}} + 2\overrightarrow{PK_{kl}} = \\ = \overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{A_jP} + \overrightarrow{B_kA_k} + \overrightarrow{A_kP} + \overrightarrow{B_lA_l} + \overrightarrow{A_lP} = \overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{A_jP} + \overrightarrow{A_kP} + \overrightarrow{A_lP} - 2\vec{b}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что P середина отрезка $P_{ij}K_{kl}$, а значит $2\overrightarrow{PP_{ij}} + 2\overrightarrow{PK_{kl}} = \vec{0}$.

Обозначим $\overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{A_jP} + \overrightarrow{A_kP} + \overrightarrow{A_lP} = \vec{x}$, так как этот вектор не зависит от значений индексов i, j, k, l (эти индексы принимают все значения от 0 до 3 и попарно различны). Получим, что

$$\vec{x}_{ij} + \vec{y}_{kl} = \vec{x} - 2\vec{b}, \tag{11.1}$$

Поменяем индексы $i \leftrightarrow k$

$$\vec{x}_{kj} + \vec{y}_{il} = \vec{x} - 2\vec{b}$$

вычтем из предпоследней суммы векторов последнюю

$$(\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj}) = (\vec{y}_{il} - \vec{y}_{kl})$$

Так как $(\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj}) \mid\mid A_iA_jA_k$, а $(\vec{y}_{il} - \vec{y}_{kl}) \mid\mid A_iA_kA_l$, то из этого следует, что эти векторы параллельны $\vec{x}_{ik}$, следовательно

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj} = \lambda\vec{x}_{ik}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$

Проциклируем в этом равенстве индексы $i \to j \to k \to l$

$$\vec{x}_{jk} - \vec{x}_{ik} = \mu\vec{x}_{ji}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Сложим эти два равентва

$$(1-\mu)\vec{x}_{ij} = (\lambda+1)\vec{x}_{ik}$$

Так как в левой части равенства стоит вектор коллиниарный ребру A_iA_j, а в правой части стоит вектор коллинеарный ребру A_iA_k, то данное равенство может выполняться только в двух случаях:

1) $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$ (для любых i, j)

2) $\mu = 1$ и $\lambda = -1$

Рассмотрим второй случай, тогда из равенства (11.2) получаем

$$\vec{x}_{ij} - \vec{x}_{kj} + \vec{x}_{ik} = \vec{0}$$

Циклируем индексы $i \to j \to k \to i$

$$\vec{x}_{jk} - \vec{x}_{ik} + \vec{x}_{ji} = \vec{0}$$

Сложим два последних равентства и получим, что $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$.

И так в обоих случаях мы получили, что $\vec{x}_{ij} = \vec{0}$ для любых i, j от 0 до 3.

Тогда из формулы (11.1) получаем, что $\vec{y}_{kl} = \vec{x} - 2\vec{b}$, следовательно $\vec{x} - 2\vec{b}$ одновременно паралеллен всем ребрам основания $B_0B_1B_2B_3$ это возможно только в случае $\vec{x} - 2\vec{b} = \vec{0}$, тогда для любых значений индексов k, l от 0 до 3 тогда $\vec{y}_{kl} = \vec{0}$. Из этого получаем, что точка P_{ij} является серединой ребра A_iA_j, а точка K_{kl} является серединой ребра B_kB_l, то есть отрезок $P_{ij}K_{kl}$ является бимединой 3-призмы $A_0A_1A_2A_3B_0B_1B_2B_3$ для любых индексов принимаюхих значения от 0 до 3. □

11.5. Бимедианы k-призмы

Рассмотрим k-призму $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$.

Бимедианой k-призмы назовем отрезок $N_{i_{k-1}i_k}M_{i_0...i_{k-2}}$, где $N_{i_{k-1}i_k}$ - середина ребра $B_{i_{k-1}}B_{i_k}$, $M_{i_0...i_{k-2}}$ - точка пересечения медиан грани $A_{i_0}A_{i_1}A_{i_1}...A_{i_{k-2}}$, где индексы $i_0, i_1, ..., i_k$ принимают значения $0, 1, 2, ..., k$ и все попарно различны. Выясним, будут ли бимедианы k-призмы пересекаться в одной точке. В случае положительного ответа найдем, в каком отношении они будут делиться этой точкой. Рассмотрим k-призму $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$ и ее бимедиану $N_{i_{k-1}i_k}M_{i_0...i_{k-2}}$. Возьмем на этой бимедиане точку M_2 такую, что

$$\overrightarrow{N_{i_{k-1}i_k}M_2} = x\overrightarrow{N_{i_{k-1}i_k}M_{i_0...i_{k-2}}}$$

Найдем координаты точки M_2 в аффинной системе координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b})$

$$\overrightarrow{A_0M_2} = \overrightarrow{A_0N_{i_{k-1}i_k}} + \overrightarrow{N_{i_{k-1}i_k}M_2} =$$

(Воспользуемся правилом треугольника

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0N_{i_{k-1}i_k}} + x\overrightarrow{N_{i_{k-1}i_k}M_{i_0...i_{k-2}}} = \\
&\qquad = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0N_{i_{k-1}i_k}} + x(-\overrightarrow{B_0N_{i_{k-1}i_k}} - \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0M_{i_0...i_{k-2}}}) = \\
&= \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a}_{i_{k-1}} + \vec{a}_{i_k}) + x(-\frac{1}{2}(\vec{a}_{i_{k-1}} + \vec{a}_{i_k}) - \vec{b} + \frac{1}{k-1}(\vec{a}_{i_0} + ... + \vec{a}_{i_{k-2}})) = \\
&\qquad\qquad = \vec{b}(1-x) + \frac{x}{k-1}(\vec{a}_{i_0} + ... + \vec{a}_{i_{k-2}}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)(\vec{a}_{i_{k-1}} + \vec{a}_{i_k})
\end{aligned}$$

Чтобы координаты точки M_2 не зависели от значений индексов $a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ нужно потребовать, чтобы коэффициенты перед векторами $\vec{i}_0$, $\vec{i}_1$,...,$\vec{i}_k$ были одинаковыми, то есть $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{x}{k-1}$, то есть $x = \frac{k-1}{k+1}$. В этом случае

$$\overrightarrow{A_0M_2} = \frac{1}{k+1}(\vec{a}_{i_0} + ... + \vec{a}_{i_{k-2}}) + \frac{1}{k+1}(\vec{a}_{i_{k-1}} + \vec{a}_{i_k}) + \frac{2}{k+1}\vec{b}$$

то есть, $M_2(\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+1}; ...; \frac{1}{k+1}; \frac{2}{k+1})$ для всех бимедиан k-призмы. Значит, все они пересекаются в одной точке M_2, при этом $\overrightarrow{N_{i_{k-1}...i_k}M_2} = \frac{k-1}{k+1}\overrightarrow{N_{i_{k-1}i_k}M_{i_0i_{k-2}}}$, то есть точка M_2 делит бимедиану в отношении $\frac{k-1}{2}$ считая от $N_{i_{k-1}i_k}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 11.9. *Бимедианы k-призмы $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$ пересекаются в одной точке M_2 и делятся ей в отношении $\frac{k-1}{2}$, считая от ребра.*

Следствие 11.5. *Пусть дана $k-$призма $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$ тогда точки пересечения медиан оснований $M_{i_0...i_k}$, $N_{j_0...j_k}$, точка пересечения медиан k-призмы M и точка пересечения медиан k -призмы M_2 лежат на одной прямой. При этом M делит отрезок $M_{i_0...i_k}N_{j_0...j_k}$ в отношении $\frac{k}{1}$ считая от точки $N_{j_0...j_k}$ и M середина отрезка $M_{i_0...i_{k-2}}M_2$.*

Доказательство. Так как в системе координат $(\vec{A}_0, \vec{a}_1, ...\vec{a}_k, \vec{b})$ имеем $M_{i_0...i_k}\left(\frac{1}{k+1}, ..., \frac{1}{k+1}, 0\right)$, $N_{j_0...j_k}\left(\frac{1}{k+1}, ..., \frac{1}{k+1}, 1\right)$, $M\left(\frac{1}{k+1}, ..., \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{k+1}, ..., \frac{1}{k+1}, \frac{2}{k+1}\right)$, то

$$\overrightarrow{MM_{i_0...i_k}}(0, ..., 0, -\frac{1}{k+1}); \ \overrightarrow{MN_{j_0...j_k}}(0, ..., 0, \frac{k}{k+1}); \ \overrightarrow{MM_2}(0, ..., 0, \frac{1}{k+1}).$$

Следовательно эти векторы коллинеарны, то есть указанные точки лежат на одной прямой.

Заметим, что точка M пересечения медиан k-призмы будет серединой отрезка $M_{i_0...i_k}M_2$, так как $\overrightarrow{MM_{i_0...i_k}} = -\overrightarrow{MM_2}$.

Кроме того точка M делит отрезок $M_{i_0...i_k}N_{j_0...j_k}$ в отношении $\frac{k}{1}$ считая от точки $N_{j_0...j_k}$.

□

Докажем обратную теорему.

Теорема 11.10. *Пусть в k-призме $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$ отрезки $P_{i_{k-1}i_k}K_{i_0i_1...i_{k-2}}$, где точка $P_{i_{k-1}i_k}$ принадлежит прямым $B_{i_{k-1}}B_{i_k}$, а точки $K_{i_0i_1...i_{k-2}}$ принадлежат плоскостям граней $A_{i_0}A_{i_1}...A_{i_{k-2}}$, пересекаются в одной точке P и делятся ей в отношении $\frac{k-1}{2}$, считая от точки $P_{i_{k-1}i_k}$. Тогда эти отрезки являются бимедианами k-призмы $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$.*

Доказательство. Обозначим

$$\vec{y}_{i_{k-1}i_k} = \overrightarrow{B_{i_{k-1}}P_{i_{k-1}i_k}} + \overrightarrow{B_{i_k}P_{i_{k-1}i_k}}$$

$$\vec{x}_{i_0i_1...i_{k-2}} = \overrightarrow{A_{i_0}K_{i_0i_1...i_{k-2}}} + ... + \overrightarrow{A_{i_{k-2}}K_{i_0i_1...i_{k-2}}}.$$

Воспользуемся правилом треугольника и сложим эти два вектора

$$\vec{y}_{i_{k-1}i_k} + \vec{x}_{i_0i_1...i_{k-2}} =$$
$$= \overrightarrow{B_{i_{k-1}}P} + \overrightarrow{B_{i_k}P} + 2\overrightarrow{PP_{i_{k-1}i_k}} + \overrightarrow{A_{i_0}P} + ... + \overrightarrow{A_{i_{k-2}}P} + (k-1)\overrightarrow{PK_{i_0i_1...i_{k-2}}} = \vec{x} - 2\vec{b},$$

Где введено обозначение $\vec{x} = \overrightarrow{A_{i_0}P} + ... + \overrightarrow{A_{i_k}P}$ и $2\overrightarrow{PP_{i_{k-1}i_k}} + (k-1)\overrightarrow{PK_{i_0i_1...i_{k-2}}} = 0$ по условию теоремы. Получаем, что

$$\vec{y}_{i_{k-1}i_k} + \vec{x}_{i_0i_1...i_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b} \tag{11.3}$$

В последнем равенстве поменяем местами индексы $i_{k-1} \leftrightarrow i_0$ и получим

$$\vec{y}_{i_0 i_k} + \vec{x}_{i_{k-1} i_1 \ldots i_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b}$$

Вычтем из предпоследнего равенства последнее

$$(\vec{y}_{i_{k-1} i_k} - \vec{y}_{i_0 i_k}) = -(\vec{x}_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2}} - \vec{x}_{i_{k-1} i_1 \ldots i_{k-2}})$$

Так как $\vec{y}_{i_{k-1} i_k} - \vec{y}_{i_0 i_k} \parallel A_{i_0} A_{i_{k-1}} A_{i_k}$, $\vec{x}_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2}} - \vec{x}_{i_{k-1} i_1 \ldots i_{k-2}} \parallel A_{i_0} \ldots A_{i_{k-2}} A_{i_{k-1}}$, то из этого следует, что вектор $\vec{y}_{i_{k-1} i_k} - \vec{y}_{i_0 i_k} \parallel \vec{y}_{i_0 i_{k-1}}$, следовательно

$$\vec{y}_{i_{k-1} i_k} - \vec{y}_{i_0 i_k} = \lambda \vec{y}_{i_0 i_{k-1}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{11.4}$$

Циклируем индексы $i_0 \to i_{k-1} \to i_k \to i_0$

$$\vec{y}_{i_k i_0} - \vec{y}_{i_{k-1} i_0} = \mu \vec{y}_{i_{k-1} i_k}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Сложим эти два равенства и получим

$$(1-\mu)\vec{y}_{i_{k-1} i_k} = (1+\lambda)\vec{y}_{i_0 i_{k-1}}$$

Так как в левой части равенства стоит вектор коллиниарный ребру $A_{i_{k-1}} A_{i_0}$, а в правой части стоит вектор коллинеарный ребру $A_{i_{k-1}} A_{i_k}$ то данное равенство может выполняться только в двух случаях:

1) $\vec{y}_{i_{k-1} i_0} = \vec{0}$ (для любых i_{k-1}, i_0)

2) $\mu = 1$ и $\lambda = -1$

Рассмотрим второй случай, тогда из равенства (11.4) получаем

$$\vec{y}_{i_{k-1} i_k} - \vec{y}_{i_0 i_k} + \vec{y}_{i_0 i_{k-1}} = \vec{0}$$

Циклируем индексы $i_0 \to i_{k-1} \to i_k \to i_0$

$$\vec{y}_{i_k i_0} - \vec{y}_{i_{k-1} i_0} + \vec{y}_{i_{k-1} i_k} = \vec{0}$$

Сложим два последних равенства получаем $\vec{y}_{i_{k-1} i_k} = \vec{0}$. Тогда из (11.3) получаем, что $\vec{x}_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b}$. Следовательно $\vec{x} - 2\vec{b} \parallel$ всем $(k-2)$- граням $A_{i_0} \ldots A_{i_{k-2}}$, а это возможно, только в случае, когда $\vec{x} - 2\vec{b} = \vec{0}$, следовательно для любых значений индексов $i_0, \ldots, i_{k-2}$, $\vec{x}_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2}} = \vec{0}$. Откуда получаем $P_{i_{k-1} i_k} K_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2}}$ является бимедианой k-призмы. $\square$

В доказательстве предыдущей теоремы мы получили, что $\vec{x} - 2\vec{b} = \vec{0}$, где $\vec{x} = \overrightarrow{A_{i_0}M_2} + ... + \overrightarrow{A_{i_k}M_2}$, $M_2 = P$, применим к последнему равенству правило треугольника и получим

$$\vec{x} = \overrightarrow{A_{i_0}B_{i_0}} + \overrightarrow{B_{i_0}M_2} + ... + \overrightarrow{A_{i_k}B_{i_k}} + \overrightarrow{B_{i_k}M_2} = (k+1)\vec{b} + \vec{y},$$

где $\vec{y} = \overrightarrow{B_{i_0}M_2} + ...\overrightarrow{B_{i_k}M_2}$. Тогда $2\vec{b} = (k+1)\vec{b} + \vec{y}$, следоательно $\vec{y} = (1-k)\vec{b}$. Получаем

$$\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{b} + (1-k)\vec{b} = (3-k)\vec{b}.$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 11.11. *Пусть дана k-призма $A_0A_1A_2...A_kB_0B_1B_2...B_k$ и M_2-точка пересечения ее бимедиан тогда*

$$\overrightarrow{A_0M_2} + ... + \overrightarrow{A_kM_2} + \overrightarrow{B_0M_2} + ... + \overrightarrow{B_kM_2} = (3-k)\overrightarrow{A_0B_0}.$$

При этом

$$\overrightarrow{A_0M_2} + ... + \overrightarrow{A_kM_2} + \overrightarrow{B_0M_2} + ... + \overrightarrow{B_kM_2} = \vec{0}$$

тогда и только тогда, когда k=3, то есть только для 3-призмы.

Пусть $A_0 \dots B_k$ – k-призма, где $k \geq 3$. Рассмотрим точку M пересечения медиан этой k-призмы. Тогда, используя правило треугольника, получим

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{A_0M} + \dots + \overrightarrow{A_kM} + \overrightarrow{B_0M} + \dots + \overrightarrow{B_kM} = \\ &\quad = \overrightarrow{A_0M_2} + \overrightarrow{M_2M} + \dots \overrightarrow{A_kM_2} + \overrightarrow{M_2M} + \overrightarrow{B_0M_2} + \overrightarrow{M_2M} + \dots + \overrightarrow{B_kM_2} + \overrightarrow{M_2M}.\end{aligned}$$

(воспользуемся теоремой 11.11 и координатами вектора $\overrightarrow{MM_2}$ из следствия 11.5)

$$= (3-k)\vec{b} - 2(k+1)\frac{1}{k+1}\vec{b} = (1-k)\vec{b}.$$

Итак, при $k \geq 3$ мы получили

$$\overrightarrow{A_0M} + \dots + \overrightarrow{A_kM} + \overrightarrow{B_0M} + \dots + \overrightarrow{B_kM} = (1-k)\overrightarrow{A_0B_0}.$$

Рассмотрим 2-призму и вычислим сумму

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{B_0M} + \overrightarrow{B_1M} + \overrightarrow{B_2M} = \\ &\quad = \overrightarrow{A_0M_{012}} + \overrightarrow{M_{012}M} + \overrightarrow{A_1M_{012}} + \overrightarrow{M_{012}M} + \overrightarrow{A_2M_{012}} + \overrightarrow{M_{012}M} + \\ &\quad + \overrightarrow{B_0N_{012}} + \overrightarrow{N_{012}M} + \overrightarrow{B_1N_{012}} + \overrightarrow{N_{012}M} + \overrightarrow{B_2N_{012}} + \overrightarrow{N_{012}M} =\end{aligned}$$

(по теореме 10.13 и следствию 11.3)

$$= 3\frac{1}{3}\vec{b} + 3\left(-\frac{2}{3}\right)\vec{b} = -\vec{b}.$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 11.12. *Пусть дана k-призма и M – точка пересечения ее медиан. Тогда*

$$\overrightarrow{A_0M} + \ldots + \overrightarrow{A_kM} + \overrightarrow{B_0M} + \ldots + \overrightarrow{B_kM} = (1-k)\overrightarrow{A_0B_0}.$$

Заметим, что в отличие от случая бимедиан, сумма в левой части равенства никогда не обращается в нуль.

11.6. ℓ-медианы k-призм

Введем понятие ℓ-медианы k-призмы, $3 \le \ell \le k-2$. Назовем *ℓ-медианой k-призмы* отрезок $N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}M_{j_0\ldots j_{k-\ell}}$, где точка $N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}$ – точка пересечения медиан $(\ell-1)$-грани основания $B_0\ldots B_k$, а точка $M_{j_0\ldots j_{k-\ell}}$ – точка пересечения медиан противоположной $(k-\ell)$-грани основания $A_0\ldots A_k$ (индексы $i_0,\ldots,i_{\ell-1},j_0,\ldots,j_{k-\ell}$ принимают все значения от 0 до k и все попарно различны. Если договориться считать середину отрезка точкой пересечения медиан 1-симплекса, а точку – точкой пересечения медиан 0-симплекса, то в данное определение ℓ-медианы можно включить определения медианы (1-медианы) и 2-медианы k-призмы.

Рассмотрим ℓ-медианы $N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}M_{j_0\ldots j_{k-\ell}}$ k-призмы для некоторого фиксированного ℓ. На каждой ℓ-медиане возьмем точку M_ℓ, такую что

$$\overrightarrow{N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}M_\ell} = x\overrightarrow{N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}M_{j_0\ldots j_{k-\ell}}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Будем искать значение x, требуя, чтобы координаты в системе координат $(A_0,\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k,\vec{b}$ точек M_ℓ были бы одинаковыми для всех ℓ-медиан. Выразим эти координаты через x.

$$\overrightarrow{A_0M_\ell} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}} + x(\overrightarrow{N_{i_0\ldots i_{\ell-1}}B_0} + \overrightarrow{B_0A_0} + \overrightarrow{A_0M_{j_0\ldots j_{k-\ell}}}) =$$
$$= (1-x)\vec{b} + \frac{1}{\ell}(1-x)(\vec{a}_{i_0} + \ldots + \vec{a}_{i_{\ell-1}}) + \frac{x}{k-\ell+1}(\vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_{k-\ell}}).$$

Требуем, чтобы $\frac{1}{\ell}(1-x) = \frac{x}{k-\ell+1}$, то есть $x = \frac{k-\ell+1}{k+1}$. В этом случае все точки M_ℓ имеют координаты

$$M_\ell\left(\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{k+1},\frac{\ell}{k+1}\right),$$

то есть совпадают между собой и все ℓ-медианы пересекаются в точке M_ℓ. При этом они делятся в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани. Итак, мы доказали

Теорема 11.13. *ℓ-медианы k-призмы пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани.*

Сравнивая координаты точек пересечения медиан оснований k-призмы (**??**) и координаты точек M_ℓ, получаем

Следствие 11.6. *Точки пересечения ℓ-медиан k-призмы, $1\le\ell\le k$ лежат на отрезке с концами в точках пересечения медиан оснований и делят его на $(k+1)$ равные части.*

12. Высоты треугольника. Высоты и бивысоты тетраэдра и симплекса.

12.1. Высоты треугольника.

Пусть дан треугольника ABC. Проведем через вершину A прямую перпендикулярную стороне BC. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой, содержащей сторону BC, через H. Отрезок AH называется *высотой* треугольника ABC. У треугольника три высоты.

Допуская вольность речи, мы будем называть высотами треугольника не только указанные отрезки, но и прямые, содержащие их.

Из школьного курса хорошо известна теорема

Теорема 12.1. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром треугольника.*

Доказательство. Самое простое доказательство этой теоремы методом элементарной геометрии. Но мы посмотрим векторный метод (он более громоздкий, но он потребуется для выхода в большое число измерений).

Обозначим треугольник $A_0A_1A_2$ и рассмотрим аффинную систему координат $(A_0,\vec{a}_1,\vec{a}_2)$. Предположим, что точка H – точка пересечения высот треугольника $A_0A_1A_2$ (если она существует). Пусть точка H имеет координаты (λ,μ) в этой системе координат. Тогда
$$\overrightarrow{A_0H}=\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2.$$

Так как H – точка пересечения высот, то мы имеем три перпендикулярности векторов
$$\overrightarrow{A_0H}\perp\vec{a}_2-\vec{a}_1;\ \overrightarrow{A_1H}\perp\vec{a}_2;\ \overrightarrow{A_2H}\perp\vec{a}_1.$$

Это означает, что скалярные произведения этих пар векторов будут нулями. Раскрывая по линейности эти скалярные произведения, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda(\vec{a}_1\vec{a}_2 - \vec{a}_1^2) + \mu(\vec{a}_2^2 - \vec{a}_1\vec{a}_2) = 0 \\ \lambda\vec{a}_1^2 + \mu\vec{a}_1\vec{a}_2 = \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \lambda\vec{a}_1\vec{a}_2 + \mu\vec{a}_2^2 = \vec{a}_1\vec{a}_2 \end{cases} \tag{12.1}$$

Это система трех линейных уравнений с двумя неизвестными λ и μ. Заметим, что первое уравнение получается, если из второго вычесть третье, следовательно, оно от них зависит и первое уравнение можно выбросить. Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Она имеет ненулевой определитель основной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_2^2 \end{vmatrix} = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|^2 \neq 0.$$

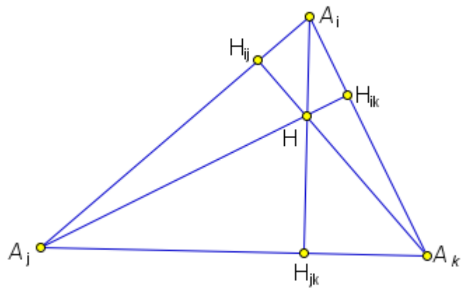
(квадрат длины векторного произведения векторов; доказывается в лоб с использованием определения векторного произведения). Следовательно, система уравнений имеет единственное решение – это будут координаты точки H.

Итак, мы показали, что точка H существует тогда и только тогда, когда имеет решение система (12.1). Так как эта система всегда имеет решение, точка H всегда существует для треугольника. □

В отличие от точки пересечения медиан точка пересечения высот не делит высоты на отрезки одного и того же отношения. Зато произведения этих отрезков будут равны. Опять-таки для треугольника элементарное доказательство этого факта достаточно просто и основано на подобии треугольников. Но мы посмотрим векторное доказательство.

Теорема 12.2. *Пусть дан треугольник $A_iA_jA_k$. Тогда скалярные произведения $\overrightarrow{A_iH}\overrightarrow{HH_{jk}}$ все равны между собой.*

Доказательство. Покажем, что $\overrightarrow{A_iH}\overrightarrow{HH_{jk}} = \overrightarrow{A_jH}\overrightarrow{HH_{ik}}$.



Перейдем от левой части равенства к правой, учитывая перпендикулярности векторов

$$\overrightarrow{A_iH}\overrightarrow{HH_{jk}} = (\overrightarrow{A_iA_j}+\overrightarrow{A_jH})(\overrightarrow{HH_{ik}}+\overrightarrow{H_{ik}A_k}+\overrightarrow{A_kH_{jk}}) =$$

Раскрываем скобки выгодным нам образом

$$= \overrightarrow{A_iA_j}(\overrightarrow{HH_{ik}} + \overrightarrow{H_{ik}A_k}) + \overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{A_kH_{jk}} + \overrightarrow{A_jH}\overrightarrow{HH_{ik}} + \overrightarrow{A_jH}\overrightarrow{H_{ik}A_k} + \overrightarrow{A_jH}\overrightarrow{A_kH_{jk}} =$$

Первое и предпоследнее слагаемые нули из-за перпендикулярности

$$= \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{HH_{ik}} + (\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jH})\overrightarrow{A_kH_{jk}} = \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{HH_{ik}}.$$

Последнее слагаемое получилось тоже нулем из-за перпендикулярности. $\square$

Оказывается, что как и в случае медиан имеет место обратная теорема. Ее элементарное доказательство состоит из трех частей (отдельно рассматриваются остроугольные, тупоугольные и прямоугольные треугольники). Векторный метод позволяет объединить все случаи вместе и, кроме того, не вводить столь жесткие ограничения на местоположение оснований рассматриваемых отрезков. Итак, формулируем теорему

Теорема 12.3. *Пусть дан треугольник $A_0A_1A_2$. На прямых, содержащих его стороны A_jA_k, взяты точки K_{jk}, такие, что отрезки A_iK_{jk} пересекаются в точке K и все произведения $\overrightarrow{A_iK}\,\overrightarrow{KK_{jk}}$ равны между собой. Тогда точка K является точкой пересечения высот треугольника $A_0A_1A_2$.*

12.2. Высоты тетраэдра и k-симплекса.

Пусть теперь дан тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$.

Высотой тетраэдра называется отрезок с концами в вершине тетраэдра и плоскости противоположной грани, перпендикулярный этой грани.

Точку пересечения высот тетраэдра обозначим H (если она есть) и обозначим H_{ijk} конец высоты в грани $A_iA_jA_k$. Аналогично случаю треугольника сведем вопрос существования точки пересечения высот тетраэдра к решению системы уравнений. Для этого вводим систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2\vec{a}_3)$ и обозначаем координаты точки H через (λ, μ, ν). Тогда

$$\overrightarrow{A_0H} = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 + \nu\vec{a}_3. \tag{12.2}$$

Условий перпендикулярности здесь уже будет больше. Нам нужно записать условие перпендикулярности прямой и плоскости (высота и противоположная грань). Вспоминаем признак: достаточно перпендикулярности прямой и двух пересекающихся прямых в плоскости. На языке векторов это означает

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0H} &\perp \vec{a}_3 - \vec{a}_2;\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1;\\ \overrightarrow{A_1H} &\perp \vec{a}_2;\ \vec{a}_3;\\ \overrightarrow{A_2H} &\perp \vec{a}_1;\ \vec{a}_3;\\ \overrightarrow{A_3H} &\perp \vec{a}_1;\ \vec{a}_2; \end{aligned}$$

Значит скалярные произведения будут нулями и мы получаем систему таких уравнений

$$\lambda\vec{a}_1(\vec{a}_3-\vec{a}_2)+\mu\vec{a}_2(\vec{a}_3-\vec{a}_2)+\nu\vec{a}_3(\vec{a}_3-\vec{a}_2)=0$$
$$\lambda\vec{a}_1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\mu\vec{a}_2(\vec{a}_3-\vec{a}_1)+\nu\vec{a}_3(\vec{a}_3-\vec{a}_1)=0$$

$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_2+\mu\vec{a}_2\vec{a}_2+\nu\vec{a}_3\vec{a}_2=\vec{a}_1\vec{a}_2$$
$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_3+\mu\vec{a}_2\vec{a}_3+\nu\vec{a}_3\vec{a}_3=\vec{a}_1\vec{a}_2$$

$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_3+\mu\vec{a}_2\vec{a}_3+\nu\vec{a}_3\vec{a}_3=\vec{a}_2\vec{a}_3$$
$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\vec{a}_1+\nu\vec{a}_3\vec{a}_1=\vec{a}_1\vec{a}_2$$

$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\vec{a}_1+\nu\vec{a}_3\vec{a}_1=\vec{a}_1\vec{a}_3$$
$$\lambda\vec{a}_1\vec{a}_2+\mu\vec{a}_2\vec{a}_2+\nu\vec{a}_3\vec{a}_2=\vec{a}_3\vec{a}_2$$

Последние шесть уравнений разбиваются на пары, левые части которых одинаковые, а правые разные. Тогда система уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1\vec{a}_2=\vec{a}_1\vec{a}_3=\vec{a}_2\vec{a}_3$, то есть попарные скалярные произведения базисных векторов равны.

Тем самым доказали теорему

Теорема 12.4. *Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда все $\vec{a}_i\vec{a}_j$, $i,j=1,\ldots,k$ равны между собой.*

Используя эту теорему, приведите пример тетраэдра, у которого высоты не пересекаются в одной точке.

Есть тетраэдры (например, правильный), у которого высоты пересекаются в одной точке.

Тетраэдр, высоты которого пересекаются в одной точке называется *ортоцентрическим.* Точка пересечения высот называется *ортоцентром.*

Задача 12.1. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда его противоположные ребра перпендикулярны.

Задача 12.2. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре суммы квадратов длин противоположных ребер равны между собой.

Решение. Рассмотрим тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. Вычислим сумму, где i,j,k,ℓ – фиксированные индексы от нуля до трех и все различные.

$$|\overrightarrow{A_iA_j}|^2+|\overrightarrow{A_kA_\ell}|^2=(\vec{a}_j-\vec{a}_i)^2+(\vec{a}_\ell-\vec{a}_k)^2=\vec{a}_i^2+\vec{a}_j^2+\vec{a}_k^2+\vec{a}_\ell^2-2\vec{a}_i\vec{a}_j-2\vec{a}_k\vec{a}_\ell.$$

Для другой пары ребер мы можем использовать те же индексы, но они будут переставлены. Например,

$$|\overrightarrow{A_kA_j}|^2 + |\overrightarrow{A_iA_\ell}|^2 = \vec{a}_i^2 + \vec{a}_j^2 + \vec{a}_k^2 + \vec{a}_\ell^2 - 2\vec{a}_k\vec{a}_j - 2\vec{a}_i\vec{a}_\ell$$

Но так как для ортоцентрического тетраэдра попарные скалярные произведения $\vec{a}_i\vec{a}_j$ равны между собой, то мы получим в правых частях этих равенств одно и то же выражение (даже с учетом, что один из индексов нулевой, а значит, выдает нуль-вектор). Итак, мы показали, что в ортоцентрическом тетраэдре суммы квадратов противоположных ребер равны. □

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Докажем, что в ортоцентрическом тетраэдре основаниями высот служат ортоцентры граней тетраэдра.

Теорема 12.5. *В ортоцентрическом тетраэдре основаниями высот служат ортоцентры граней тетраэдра.*

Доказательство. Элементарное доказательство этого факта использует теорему о трех перпендикулярах и достаточно просто, но векторный метод здесь выдает доказательство в одну строчку. Обозначаем тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. Рассмотрим отрезок $A_iH_{jk\ell}$, где $H_{jk\ell}$ – ортоцентр грани $A_jA_kA_\ell$. Покажем, что $A_iH_{jk\ell}$ перпендикулярно грани $A_jA_kA_\ell$. Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{A_iH_{jk\ell}}\overrightarrow{A_jA_k} = 0$ и $\overrightarrow{A_iH_{jk\ell}}\overrightarrow{A_jA_\ell} = 0$ (даже достаточно доказать одно и сказать, что индексы j, k, ℓ принимают все значения, отличные от значения, которое принимает i). Теперь вычисляем

$$\overrightarrow{A_iH_{jk\ell}}\overrightarrow{A_jA_k} = (\overrightarrow{A_iA_\ell} + \overrightarrow{A_\ell H_{jk\ell}})\overrightarrow{A_jA_k} = 0 \tag{12.3}$$

Раскрывая скобки, получаем два слагаемых. Первое равно нулю, так как противоположные ребра ортоцентрического тетраэдра перпендикулярны, а второе равно нулю из-за того, что $H_{jk\ell}$ ортоцентр треугольника, следовательно, отрезок $A_\ell H_{jk\ell}$ перпендикулярен стороне A_jA_k. □

Следствие 12.1. *Только в ортоцентрическом тетраэдре основания высот являются ортоцентрами граней.*

Доказательство. Действительно, равенство нулю выражения (12.3) имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{A_iA_\ell}\overrightarrow{A_jA_k} = 0$, то есть противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны. Это означает, что тетраэдр ортоцентрический. □

Для ортоцентрического тетраэдра, также как и для треугольника, произведения отрезков высот, на которые их делит ортоцентр тетраэдра, равны между собой. Доказывается это векторным методом точно также как и для треугольника.

Теорема 12.6. *В ортоцентрическом тетраэдре произведения отрезков высот, на которые их делит ортоцентр тетраэдра, равны между собой.*

Доказательство. Обозначаем тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$, ортоцентр H и основания высот (они же в ортоцентрическом тетраэдре ортоцентры граней) обозначаем $H_{jk\ell}$. Вычисляем

$$\overrightarrow{A_iH}\,\overrightarrow{HH_{jk\ell}} = (\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jH})(\overrightarrow{HH_{ik\ell}} + \overrightarrow{H_{ik\ell}A_k} + \overrightarrow{A_kH_{jk\ell}}) =$$

Раскрываем скобки также как в случае треугольника

$$= \overrightarrow{A_iA_j}(\overrightarrow{HH_{ik\ell}} + \overrightarrow{H_{ik\ell}A_k}) + \overrightarrow{A_iA_j}\,\overrightarrow{A_kH_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{HH_{ik\ell}} + \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{H_{ik\ell}A_k} + \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{A_kH_{jk\ell}} =$$

Первое слагаемое нуль, так как перемножаются ребро и кусок высоты, проведенный к грани этого ребра. Предпоследнее равно нулю, так как перемножаются вектор, параллельный грани $A_iA_kA_\ell$ и кусок высоты, проведенной к этой грани. Остальное переписываем

$$= \overrightarrow{A_iA_j}\,\overrightarrow{A_kH_{jk\ell}} + \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{HH_{ik\ell}} + \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{A_kH_{jk\ell}} = \overrightarrow{A_jH}\,\overrightarrow{HH_{ik\ell}}$$

Первое и третье складываем и получаем опять получаем кусок высоты и отрезок в противоположной грани, то есть нуль. Остается только нужное слагаемое. □

Докажем обратную теорему.

Теорема 12.7. *Пусть дан тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. В плоскостях, содержащих его грани $A_jA_kA_\ell$, взяты точки $K_{jk\ell}$, такие, что отрезки $A_iK_{jk\ell}$ пересекаются в точке K и все произведения $\overrightarrow{A_iK}\,\overrightarrow{KK_{jk\ell}}$ равны между собой. Тогда точка K является точкой пересечения высот тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$. В частности, тетраэдр является ортоцентрическим.*

Задача 12.3. С помощью методов элементарной геометрии докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда все его бимедианы равны между собой.

Указания. Для произвольного тетраэдра бимедианы являются диагоналями параллелограммов, состоящих из средних линий граней. Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны. Тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда его противоположные ребра перпендикулярны.

Докажем это же утверждение, используя векторный метод.

Доказательство. Обозначаем тетраэдр $A_iA_jA_kA_\ell$. Воспользуемся формулой для нахождения длины бимедианы

$$M_{ij}M_{k\ell} = \frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{jk}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{ij}^2 - a_{k\ell}^2).$$

Если поменяем индексы, то получим

$$M_{kj}M_{i\ell} = \frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{k\ell}^2 + a_{ij}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{jk}^2 - a_{i\ell}^2).$$

Докажем теорему в одну сторону. Пусть тетраэдр ортоцентрический. Тогда суммы квадратов противоположных ребер равны между собой, то есть $a_{ij}^2+a_{k\ell}^2 = a_{ik}^2+a_{j\ell}^2$ и т.д. Тогда сравнивая длины бимедиан, видим, что $M_{ij}M_{k\ell} = M_{kj}M_{i\ell}$.

Обратно, пусть длины бимедиан равны. Тогда

$$\frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2 + a_{jk}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{ij}^2 - a_{k\ell}^2) = \frac{1}{4}(a_{ik}^2 + a_{k\ell}^2 + a_{ij}^2 + a_{j\ell}^2 - a_{jk}^2 - a_{i\ell}^2).$$

Откуда получаем, что

$$a_{i\ell}^2 + a_{jk}^2 = a_{ij}^2 + a_{k\ell}^2,$$

то есть суммы квадратов длин противоположных ребер равны и тетраэдр является ортоцентрическим. $\square$

Понятие высоты естественным образом обобщается на произвольный k-симплекс. Отрезок, соединяющий вершину k-симплекса с точкой $(k-1)$- плоскости противоположной $(k-1)$-грани и перпендикулярный ей, называется *высотой* k-симплекса. Для произвольного k-симплекса верны теоремы аналогичные теоремам для тетраэдра.

Теорема 12.8. *Высоты k-симплекса пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда все попарные скалярные произведения векторов $(\vec{a} - 1, \dots, \vec{a}_k)$, задающих симплекс, $\vec{a}_i\vec{a}_j$ равны между собой.*

Доказательство. Обозначим через H точку пересечения высот симплекса. Покажем, что точка H существует тогда и только тогда, когда все скалярные произведения $\vec{a}_i\vec{a}_j$, $i, j = 0, \dots, k$ равны между собой.

Из определения следует, что $\overrightarrow{A_iH} \perp \overrightarrow{A_jA_\ell}$, $i, j, \ell = 0, \dots, k$. Тогда

$$\overrightarrow{A_iH} = \overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0H}.$$

и получаем

$$(-\vec{a}_i + \overrightarrow{A_0H})(\vec{a}_\ell - \vec{a}_j) = 0.$$

или
$$\overrightarrow{A_0H}(\vec{a}_\ell - \vec{a}_j) = \vec{a}_i(\vec{a}_\ell - \vec{a}_j).$$
Так как вектор $\overrightarrow{A_0H}$ должен быть перпендикулярен всем векторам $\vec{a}_\ell - \vec{a}_j$, $j, \ell = 1, \ldots, k$, то точка H существует тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i\vec{a}_\ell = \vec{a}_i\vec{a}_j$ для любых $i, j, \ell = 1, \ldots, k$ различных. □

k-симплекс, высоты которого пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим*. Точка пересечения его высот называется *ортоцентром*.

Задача 12.4. Докажите, что у ортоцентрического k-симплекса ребра A_iA_j, A_pA_q перпендикулярны.

Задача 12.5. Высота A_iH_i пересекается с высотой A_jH_j k-симплекса тогда и только тогда, когда прямая A_iA_j перпендикулярна плоскости противоположной $(k-2)$-грани.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть две высоты A_iB_i и A_jB_j пересекаются в точке O. Докажем, что прямая A_iA_j перпендикулярна плоскости противоположной $(k-2)$-грани $A_{p_0}\ldots A_{p_{k-2}}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}$, $q = 1, \ldots, k-2$. Тогда
$$\overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_j}) =$$
Так как A_iB_i – высота, она перпендикулярна $(k-1)$-плоскости противоположной $(k-1)$-грани, которая содержит $(k-2)$-грань $A_{p_0}\ldots A_{p_{k-2}}$, следовательно, этот вектор перпендикулярен всем векторам $\overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}$, $q = 1, \ldots, k-2$. Следовательно, этим же векторам перпендикулярен и вектор $\overrightarrow{A_iO}$. Аналогично, получаем, что $\overrightarrow{OA_j}$ перпендикулярен $\overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}$, $q = 1, \ldots, k-2$. Тогда, возвращаясь к прерванной цепочке равенств, получим
$$= \overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{A_{p_0}A_{p_q}}\overrightarrow{OA_j}) = 0.$$
Это означает, что ребро A_iA_j перпендикулярно противоположной $(k-2)$-грани.

$\Leftarrow$). Пусть даны высоты A_iB_i и A_jB_j и ребро A_iA_j перпендикулярно $(k-2)$-плоскости противоположной $(k-2)$-грани $A_{p_0}\ldots A_{p_{k-2}}$. Докажем, что эти высоты пересекаются в одной точке.

Напомним некоторые понятия из курса многомерной геометрии. Пусть дано векторное пространство V^n и его подпространство L^k. Тогда говорят, что вектор $\vec{x}$ перпендикулярен подпространству L^k, если он перпендикулярен любому вектору из этого подпространства. Легко видеть, что достаточно проверить перпендикулярность вектора $\vec{x}$ и всех векторов некоторого базиса из L^k, чтобы убедиться, что $\vec{x}$ и L^k перпендикулярны. Множество всех векторов, перпендикулярных векторному подпространству L^k называется его ортогональным дополнением и обозначается $L^{\perp}$. Доказывается, что векторное пространство V^n раскладывается в прямую сумму L^k и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$, то есть

$$V^n = L^k \oplus L^{\perp},$$

то есть любой вектор $\vec{x} \in V^n$ можно однозначным образом разложить в сумму векторов $\vec{y} \in L^k$ и $\vec{z} \in L^{\perp}$. Откуда получаем, что размерность ортогонального дополнения равна $n-k$.

Применим эти факты в нашей ситуации. Направляющее подпространство $(k-2)$-плоскости $(k-2)$-грани является $(k-2)$-мерным векторным подпространством k-мерного векторного пространства, которое определяют векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$. Тогда его ортогональное дополнение будет двумерным. Обозначим его $L^{\perp}$. Этому подпространству принадлежит вектор $\overrightarrow{A_iB_i}$, так как он перпендикулярен противоположной $(k-1)$-грани, а тем более он будет перпендикулярен $(k-2)$-грани, содержащейся в ней. Аналогично $L^{\perp}$ принадлежит $\overrightarrow{A_jB_j}$. Аналогично $L^{\perp}$ принадлежит $\overrightarrow{A_iA_j}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{A_iB_i}$, $\overrightarrow{A_jB_j}$, $\overrightarrow{A_iA_j}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{A_iB_i}$, $\overrightarrow{A_jB_j}$ не коллинеарны. Тогда прямые A_iB_i и A_jB_j пересекаются в одной точке. $\square$

Следствие 12.2. *k-симплекс является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда все его ребра перпендикулярны противоположным $(k-2)$-граням.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть симплекс ортоцентрический. Тогда любые два ребра с концами в четырех попарно различных вершинах будут перпендикулярны, следовательно, каждое ребро будет перпендикулярно противоположной $(k-2)$-грани.

$\Leftarrow$). Пусть каждое ребро перпендикулярно противоположной $(k-2)$-грани. Тогда по доказанной теореме любые две высоты симплекса пересекаются. Нам нужно показать, что они пересекаются в одной точке. Рассмотрим три высоты симплекса. Предположим, что они пересекаются не в одной точке. Тогда мы получаем три точки попарных пересечений. Обозначим высоты A_iH_i, A_jH_j, A_pH_p. Получаем, что все шесть точек A_i, A_j, A_p, H_i, H_j, H_p должны лежать в одной 2-плоскости. Тогда A_iH_i, A_jH_j, A_pH_p будут перпендикулярны прямым A_jA_p, A_iA_p, A_iA_j соответственно, а значит, будут высотами треугольника $A_iA_jA_p$. Следовательно, будут пересекаться в одной точке. Мы получили противоречие. Значит, предположение не верно и верно утверждение теоремы. $\square$

Теорема 12.9. *Каждая m-грань $(m \geq 2)$ ортоцентрического k-симплекса является ортоцентрическим m-симплексом.*

Доказательство. Ребра m-грани являются ребрами самого k-симплекса. Тогда они перпендикулярны всем ребрам k-симплекса, которые имеют концами вершины k-симплекса, отличные от концов этих ребер. В частности, получаем, что они перпендикулярны противоположным $(m-1)$-граням m-симплекса, то есть m-грань является ортоцентрическим m-симплексом. □

Теорема 12.10. *В ортоцентрическом k-симплексе основания высот являются ортоцентрами противоположных $(k-1)$-граней.*

Доказательство. Пусть дан ортоцентрический k-симплекс $A_0 \dots A_k$. Рассмотрим его вершину A_i и ортоцентр $H_{i_0 \dots i_{k-1}}$ противоположной $(k-1)$-грани (индексы $i_0 \dots i_{k-1}$ принимают все значения от нуля до k кроме значения i). Покажем, что прямая $A_i H_{i_0 \dots i_{k-1}}$ будет перпендикулярна плоскости $A_{i_0} \dots A_{i_{k-1}}$. Вычисляем ($q$ меняется от 1 до $k-1$)

$$\overrightarrow{A_i H_{i_0 \dots i_{k-1}}} \overrightarrow{A_{i_0} A_{i_q}} =$$

В первом векторе по правилу треугольника уйдем в вершину A_{i_p}, где $p \neq 0$, $p \neq q$. Тогда

$$= (\overrightarrow{A_i A_{i_p}} + \overrightarrow{A_{i_p} H_{i_0 \dots i_{k-1}}}) \overrightarrow{A_{i_0} A_{i_q}} = 0,$$

так как, раскрывая скобки получим, что первое слагаемое равно нулю, в силу попарной перпендикулярности ребер, соединяющих четыре разные вершины, ортоцентрического тетраэдра. Второе слагаемое будет нулевым, так как в $(k-1)$-грани отрезок $A_{i_p} H_{i_0 \dots i_{k-1}}$ будет высотой из-за выбора в начале доказательства точки $H_{i_0 \dots i_{k-1}}$. □

Теорема 12.11. *В ортоцентрическом k-симплексе произведения отрезков высот, на которые их делит ортоцентр, равны между собой.*

Доказательство. Обозначаем k-симплекс $A_0 \dots A_k$, ортоцентр H и основания высот (они же в ортоцентрическом k-симплексе ортоцентры граней) обозначаем $H_{i_0 \dots i_{k-1}}$. Вычисляем

$$\overrightarrow{A_i H} \overrightarrow{H H_{i_0 \dots i_{k-1}}} = (\overrightarrow{A_i A_{i_0}} + \overrightarrow{A_{i_0} H})(\overrightarrow{H H_{i i_1 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{H_{i i_1 \dots i_{k-1} A_{i_1}}} + \overrightarrow{A_{i_1} H_{i_0 \dots i_{k-1}}}) =$$

Раскрываем скобки также как в случае тетраэдра и ищем нулевые слагаемые

$$= \overrightarrow{A_i A_{i_0}} (\overrightarrow{H H_{i i_1 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{H_{i i_1 \dots i_{k-1} A_{i_1}}}) + \overrightarrow{A_i A_{i_0}} \overrightarrow{A_{i_1} H_{i_0 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{A_{i_0} H} \overrightarrow{H H_{i i_1 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{A_{i_0} H} \overrightarrow{H_{i i_1 \dots i_{k-1} A_{i_1}}} + \overrightarrow{A_{i_0}$$

Первое слагаемое нуль, так как перемножаются ребро и кусок высоты, проведенный к грани этого ребра. Предпоследнее равно нулю, так как перемножаются вектор, параллельный грани и кусок высоты, проведенной к этой грани. Остальное переписываем

$$= \overrightarrow{A_i A_{i_0}} \overrightarrow{A_{i_1} H_{i_0 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{A_{i_0} H} \overrightarrow{H H_{i i_1 \dots i_{k-1}}} + \overrightarrow{A_{i_0} H} \overrightarrow{A_{i_1} H_{i_0 \dots i_{k-1}}} =$$

Первое и третье складываем и получаем опять получаем кусок высоты и отрезок в противоположной грани, то есть нуль. Остается только нужное слагаемое. □

Верна и обратная теорема. Сформулируйте ее и докажите самостоятельно.

12.3. Бивысоты тетраэдра и k-симплекса.

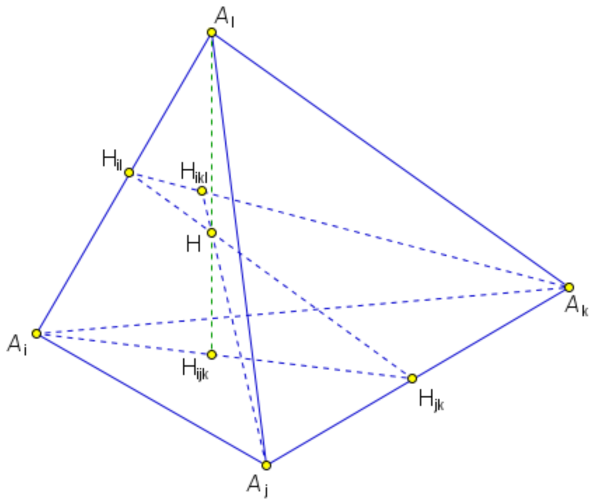
Бивысотой тетраэдра называется общий перпендикуляр прямых, содержащих противоположные ребра тетраэдра.

Теорема 12.12. *В ортоцентрическом тетраэдре бивысоты пересекаются в одной точке – его ортоцентре.*

Доказательство. Докажем сначала эту теорему методами элементарной геометрии. Пусть $ABCD$ – тетраэдр, H – точка пересечения высот тетраэдра. Построим сечение тетраэдра плоскостью ABH. Пусть оно пересекает ребро CD в точке K. Проведем прямую KH и обозначим точку пересечения с ребром AB через P. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $CD \perp KP$. Так как DH – высота тетраэдра, точка N (конец этой высоты, лежащий в плоскости грани ABC). По задаче точка N – точка пересечения высот треугольника ABC. Тогда AB будет перпендикулярна CP и CD, следовательно, перпендикулярна плоскости CPD и значит, перпендикулярна KP. Итак, мы показали, что KP является бивысотой. Для остальных аналогично. □

Докажем эту же теорему векторным методом.

Доказательство. Обозначаем тетраэдр стандартным образом $A_i A_j A_k A_\ell$. Рассмотрим ребра $A_i A_\ell$ и $A_j A_k$.



Тогда подозреваем, что бивысотой будет отрезок $H_{i\ell}H_{jk}$, точки $H_{i\ell}$ и H_{jk} – основания высот граней тетраэдра. Проверим, что эта прямая действительно перпендикулярна ребрам A_iA_ℓ и A_jA_k:

$$\overrightarrow{H_{i\ell}H_{jk}}\overrightarrow{A_jA_k} = (\overrightarrow{H_{i\ell}A_\ell} + \overrightarrow{A_\ell H_{jk}})\overrightarrow{A_jA_k} = 0,$$

так как в первом слагаемом скалярно умножаются ребро и кусок противоположного ребра (а тетраэдр ортоцентрический, следовательно они перпендикулярны), а во втором слагаемом скалярно умножаются высота и сторона треугольника. (Естественно речь идет о векторах, связанных с упомянутыми объектами). Значит, отрезок $H_{i\ell}H_{jk}$ перпендикулярен ребру A_jA_k. Аналогично доказывается, что он перпендикулярен A_iA_ℓ. Другими словами, это будет бивысота тетраэдра.

Теперь нам нужно убедиться, что этот отрезок проходит через ортоцентр тетраэдра. Предположим, что это не так. Тогда точки $H_{i\ell}$, H_{jk}, H определяют плоскость. Тогда

$$\overrightarrow{A_iA_\ell}\overrightarrow{HH_{i\ell}} = \overrightarrow{A_iA_\ell}(\overrightarrow{HA_j} + \overrightarrow{A_jH_{i\ell}}) = 0$$

Получаем, что ребро A_iA_ℓ перпендикулярно $H_{i\ell}H$ и $H_{jk}H_{i\ell}$, то есть перпендикулярно плоскости $H_{i\ell}H_{jk}H$. Аналогично получаем, что этой же плоскости перпендикулярно ребро A_jA_k. Тогда ребра A_iA_ℓ и A_jA_k параллельны, что противоречит определению тетраэдра.

Итак, мы получаем, что бимедианы ортоцентрического тетраэдра пересекаются в одной точке, причем эта точка – ортоцентр тетраэдра. □

Более того, из элементарного доказательства сразу видно, что произведение отрезков бивысот, на которые их делит ортоцентр равны между собой и равны произведениям отрезков высот, на которые те делятся тем же ортоцентром. Этот факт мы сейчас докажем векторно, чтобы обобщить его на k-симплекс.

Доказательство. Действительно,

$$\overrightarrow{H_{i\ell}H}\overrightarrow{HH_{jk}} = (\overrightarrow{H_{i\ell}H_{i\ell k}} + \overrightarrow{H_{i\ell k}H})(\overrightarrow{HA_j} + \overrightarrow{A_jH_{jk}}) =$$

Раскрываем скобки

$$= \overrightarrow{H_{i\ell}H_{i\ell k}}\overrightarrow{HA_j} + \overrightarrow{H_{i\ell}H_{i\ell k}}\overrightarrow{A_jH_{jk}} + \overrightarrow{H_{i\ell k}H}\overrightarrow{HA_j} + \overrightarrow{H_{i\ell k}H}\overrightarrow{A_jH_{jk}} =$$

Первое слагаемое нуль из-за того, что A_jH кусок высоты тетраэдра, а $H_{i\ell}H_{i\ell k}$ лежит в противоположной грани. Второе и четвертое слагаемые сгруппируем и получим

$$= \overrightarrow{H_{i\ell k}H}\overrightarrow{HA_j} + \overrightarrow{H_{i\ell}H}\overrightarrow{A_jH_{jk}} = \overrightarrow{H_{i\ell k}H}\overrightarrow{HA_j}.$$

(Мы воспользовались тем, что $H_{i\ell}H$ – это кусок бивысоты и он перпендикулярен ребру A_jA_k.

В результате получаем, что $\overrightarrow{H_{i\ell}H}\overrightarrow{HH_{jk}} = \overrightarrow{H_{i\ell k}H}\overrightarrow{HA_j}$. Здесь записаны четыре равенства. Все правые части равны между собой. Следовательно, равны и левые части. □

Чтобы перенести определение бивысоты на симплексы больших размерностей, нам нужно обобщить понятие общего перпендикуляра двух прямых на случай многомерных плоскостей.

Вернемся к многомерной геометрии и докажем следующую теорему.

Теорема 12.13. *Пусть в евклидовом n-мерном пространстве $\mathscr{A}^n$ заданы скрещивающиеся k-плоскость α и $(n-k-1)$-плоскость β. (Напомним, что две многомерные плоскости называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек (как множества точек) и их направляющие подпространства пересекаются только по нуль-вектору.) Тогда существует единственный отрезок AB, такой что $A \in \alpha$, $B \in \beta$ и этот отрезок перпендикулярен и плоскости α и плоскости β. Этот отрезок называется общим перпендикуляром скрещивающихся плоскостей α и β.*

Доказательство. Пусть плоскость α задана точкой M_1 и направляющим подпространством L^k с базисом $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$, а плоскость β задана точкой M_2 и направляющим подпространством L^{n-k-1} с базисом $\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_{n-1}$. Так как плоскости α и β являются скрещивающимися, то их направляющие подпространства пересекаются по нуль-вектору и система векторов $\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ (складываем в одну систему векторы базисов обоих направляющих подпространств) будет линейно независимой. В этой системе не хватает всего одного вектора для получения базиса векторного пространства V^n (пространства трансляций евклидова пространства $\mathscr{A}^n$). Дополним систему векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ единичным вектором $\vec{e}_n$ длины 1 и перпендикулярного всем векторам из $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ (это единичный вектор ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$).

Рассмотрим систему координат $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Обозначим радиус-векторы точек M_1, M_2, A, B в этой системе координат через $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, $\vec{a}$, $\vec{b}$. Тогда

$$\vec{a} = \vec{m}_1 + x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^k\vec{e}_k;\ \vec{b} = \vec{m}_2 + x^{k+1}\vec{e}_{k+1} + \ldots + x^{n-1}\vec{e}_{n-1}.$$

Чтобы доказать существование общего перпендикуляра AB плоскостей α и β, достаточно доказать, что существуют такие числа $(x^1, \ldots, x^{n-1})$, что вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, перпендикулярен всем векторам $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$. Записываем условия перпендикулярности в виде равенства нулю скалярного произведения векторов.

$$\overrightarrow{AB}\vec{e}_1 = (\vec{m}_2 - \vec{m}_1 + x^{k+1}\vec{e}_{k+1} + \ldots + x^{n-1}\vec{e}_{n-1} - x^1\vec{e}_1 - \ldots - x^k\vec{e}_k)\vec{e}_1 = 0.$$

Раскрывая скобки по линейности скалярного произведения, получаем

$$(\vec{m}_2 - \vec{m}_1)\vec{e}_1 - x^1(\vec{e}_1\vec{e}_1) - \ldots - x^k(\vec{e}_1\vec{e}_k) + x^{k+1}(\vec{e}_1\vec{e}_{k+1}) + \ldots + x^{n-1}(\vec{e}_1\vec{e}_{n-1}) = 0.$$

Для остальных векторов точно так же. В результате получаем систему линейных неоднородных уравнений в количестве $n-1$ штуки с $n-1$ неизвестным. Ее основная матрица является матрицей Грамма линейно независимой системы векторов, следовательно, эта матрица невырождена и система уравнений имеет единственное решение. Это решение и выдает координаты искомых точек A и B. □

Используя эту теорему, введем определение бивысоты k-симплекса.

Бивысотой k-симплекса называется прямая, перпендикулярная ребру k-симплекса и противоположной $(k-2)$-грани.

Теорема 12.14. *Основание любой бивысоты ортоцентрического k-симплекса ($k \geq 4$), принадлежащее $(k-2)$-грани, является ее ортоцентром.*

Доказательство. Проведем доказательство в случае бивысоты ребра $A_{k-1}A_k$ и $(k-2)$-грани $A_0A_1\ldots A_{k-2}$. Рассмотрим теорему 12.13 для нашего случая. Первая многомерная плоскость – это прямая $A_{k-1}A_k$ и ее направляющий вектор $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$. Это базис направляющего подпространства первой многомерной плоскости из теоремы 12.13 (то есть $\vec{e}_1$). Для нее возьмем фиксированную точку A_k (аналог точки M_1 из теоремы). Вторая многомерная плоскость будет иметь базис направляющего подпространства $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-2})$ и точка A_0. Если общую систему координат взять с началом в точке A_0, то аналог $\vec{m}_1$ для точки A_k будет вектор $\vec{a}_k$, а аналог вектора $\vec{m}_2$ из теоремы для точки A_0 будет $\vec{0}$. Тогда запишем систему уравнений из теоремы 12.13 в нашем случае

$$\begin{cases} -\vec{a}_k\overrightarrow{A_{k-1}A_k} - x^1\overrightarrow{A_{k-1}A_k}^2 + x^2\vec{a}_1\overrightarrow{A_{k-1}A_k} + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_{k-2}\overrightarrow{A_{k-1}A_k} = 0 \\ -\vec{a}_k\vec{a}_1 - x^1\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_1\vec{a}_1 + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_1\vec{a}_{k-2} = 0 \\ \ldots \\ -\vec{a}_k\vec{a}_{k-2} - x^1\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\vec{a}_{k-2} + x^2\vec{a}_1\vec{a}_{k-2} + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_{k-2}\vec{a}_{k-2} = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение в системе пропустим. Оно нас не волнует. Посмотрим на второе и далее до конца. Во втором уравнении второе слагаемое равно нулю, так как симплекс ортоцентрический и его ребра с разноименными концами перпендикулярны. То же самое будет в оставшихся уравнениях. В результате получаем систему.

$$\begin{cases} -\vec{a}_k\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_1\vec{a}_1 + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_1\vec{a}_{k-2} = 0 \\ \ldots \\ -\vec{a}_k\vec{a}_{k-2} + x^2\vec{a}_1\vec{a}_{k-2} + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_{k-2}\vec{a}_{k-2} = 0 \end{cases}$$

Так как исходный k-симплекс ортоцентрический (все попарные скалярные произведения $\vec{a}_i\vec{a}_j$ равны между собой), то первые слагаемые этих уравнений мы можем заменить на $\vec{a}_1\vec{a}_{k-2}$ и так далее, то есть на те попарные скалярные произведения, которые получаются в системе уравнений, задающей ортоцентр $(k-2)$-симплекса. Тогда мы получаем в точности систему уравнений, которая задает ортоцентр симплекса $A_0A_1\ldots A_{k-2}$. Таким образом, основание бивысоты оказалось ортоцентром грани $A_0A_1\ldots A_{k-2}$. Аналогично (только побольше посчитав) можно доказать, что для остальных бивысот тоже являются ортоцентрами соответствующих $(k-2)$-граней. □

Теорема 12.15. *Бивысоты ортоцентрического k-симплекса пересекаются в одной точке – ортоцентре k-симплекса.*

Доказательство. Рассмотрим бивысоту $H_{ij}H_{p_0\ldots p_{k-2}}$, где $H_{ij} \in A_iA_j$, $H_{p_0\ldots p_{k-2}} \in A_{p_0}\ldots A_{p_{k-2}}$.

Предположим, что точки H_{ij}, $H_{p_0\ldots p_{k-2}}$, H не лежат на одной прямой. Тогда эти три точки определяют 2-плоскость. Обозначим ее π. Тогда

$$\overrightarrow{A_iA_j}\overrightarrow{HH_{p_0\ldots p_{k-2}}} = \overrightarrow{A_iA_j}(\overrightarrow{HA_{p_0}} + \overrightarrow{A_{p_0}H_{p_0\ldots p_{k-2}}}) = 0$$

(первое слагаемое равно нулю из-за того, что кусок высоты перпендикулярен всему, что связано с противоположной $(k-1)$-гранью, а второе слагаемое равно нулю из-за того, что две высоты симплекса пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда ребро с концами в началах этих высот перпендикулярно противоположной $(k-2)$-грани. Кроме того, A_iA_j по определению бивысоты перпендикулярно этой бивысоте. Тогда получаем, что ребро A_iA_j перпендикулярно плоскости π.

Кроме того, получаем, что $(k-2)$-плоскость перпендикулярна и $\overrightarrow{H_{ij}H_{p_0\ldots p_{k-2}}}$ (определение бивысоты) и $\overrightarrow{HH_{ij}}$, так как

$$\overrightarrow{A_{p_0}A_{p_1}}\overrightarrow{HH_{ij}} = \overrightarrow{A_{p_0}A_{p_1}}(\overrightarrow{HA_i} + \overrightarrow{A_iH_{ij}}) = 0.$$

В итоге получаем, что прямая и $(k-2)$-плоскость в k-мерном пространстве перпендикулярны 2-плоскости. Тогда прямая будет параллельна (или лежать) в $(k-2)$-плоскости. Это противоречит определению симплекса. □

Повторяя практически дословно рассуждения для тетраэдра (изменяя количество индексов), получаем

Теорема 12.16. *Произведения отрезков бивысот ортоцентрического k-симплекса, на которые их делит ортоцентр равны между собой и равны произведениям отрезков высот, на которые их делит ортоцентр.*

Замечание 12.1. Если взять k-симплекс и все его вершины разделить на два не пересекающихся множества из ℓ штук и $k-\ell+1$ штук, то первое множество задаст $(\ell-1)$- плоскость, а второе $(k-\ell)$-плоскость. Согласно теореме 12.13 эти две многомерные плоскости имеют единственный общий перпендикуляр. Назовем его *ℓ-высотой* k-симплекса.

Гипотеза 1: В ортоцентрическом k-симплексе ℓ-высоты пересекаются в одной точке – ортоцентре k-симплекса.

Гипотеза 2: в ортоцентрическом k-симплексе при $\ell \geq 3$, $k-\ell+1 \geq 3$ основания ℓ-высот являются ортоцентрами соответствующих граней.

Гипотеза 3: в ортоцентрическом k-симплексе произведения отрезков ℓ-высот, на которые их делит ортоцентр, равны между собой и равны произведениям отрезков высот k-симплекса, на которые их делит ортоцентр.

Замечание 12.2. Напомним, что в треугольнике точка пересечения медиан M, точка пересечения высот H (ортоцентр) и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (прямой Эйлера) и при этом выполняется

$$\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{MO}.$$

Эта теорема обобщается на случай k-симплекса. А именно, верна теорема:

В ортоцентрическом k-симплексе точка пересечения медиан M, точка пересечения высот H (ортоцентр) и центр O описанной $(k-1)$-сферы лежат на одной прямой (прямой Эйлера), причем

$$\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{k-1}\overrightarrow{MO}.$$