Действие групп на многообразиях.

17 ноября 2014 г.

Литература:

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.
2. Левичев А.В. Однородные пространства и хронометрия Сигала. Санкт-Петербург, 2005.
3. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. Москва: МЦНМО, 2005.
4. Борисович Ю.Г. и др. Введение в топологию, Москва, 1995

1. Элементы теории групп Ли.

§ 1.1. Воспоминания из алгебры.

Пусть G – непустое множество произвольной природы, $*$ – отображение вида $G \times G \to G$, удовлетворяющее трем условиям

(1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);

(2) существует элемент $e \in G$, такой что $a * e = e * a = a$ (существование нейтрального элемента);

(3) для любого $a \in G$ существует элемент $a' \in G$, такой что $a * a' = a' * a = e$ (существование симметричного элемента).

Тогда пара $(G, *)$ называется *группой* (если операция $*$ понятна из контекста, то группу также обозначают одной буквой G). Отображение $*$ называется *групповой операцией*. Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если для любых элементов $a, b \in G$ имеет место равенство $a * b = b * a$.

В дальнейшем будем называть операцию в группе сложением или умножением. Соответственно нейтральный будем называть нулем или единицей.

Пример 1.1. 1. Прямая $\mathbb{R}$ с обычной операцией сложения является коммутативной группой.
2. Рассмотрим окружность S^1 как подмножество комплексных чисел, модуль которых равен 1, то есть $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Операция – умножение комплексных чисел. Это также пример коммутативной группы.
3. Пусть G – множество матриц $n \times n$ с отличным от нуля определителем. Операция – умножение матриц. Это пример не коммутативной группы. Самостоятельно приведите пример двух не коммутирующих матриц.

Пример 1.2. Приведем менее тривиальный пример группы. Пусть G – множество упорядоченных троек чисел. Операцию умножения введем следующим образом:

$$x \cdot y = (x_1 + y_1 e^{x_3}, x_2 + y_2 e^{x_3}, x_3 + y_3),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – произвольные элементы из G.

Проверьте самостоятельно ассоциативность умножения в G, докажите, что единица $1 = (0, 0, 0)$ и обратный задается формулой $x^{-1} = (-x_1 e^{-x_3}, -x_2 e^{-x_3}, -x_3)$.

Таким образом, мы получили, что G является группой. Будем называть ее *основной аффинной группой*.

Пример 1.3. Рассмотрим множество матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} e^{x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим множество таких матриц через $\tilde{G}$. В качестве операции возьмем обычное матричное умножение. Покажите самостоятельно, что $\tilde{G}$ является группой.

Напомним, что две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f : G \to H$, такая что $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ для любых элементов $a, b \in G$.

Задача 1.1. Докажите, что группы G и $\tilde{G}$ из примеров 1.2 и 1.3 изоморфны.

Так как в алгебре изоморфные группы не отличимы друг от друга, мы будем называть группу $\tilde{G}$ *основной аффинной группой.*

§ 1.2. Группы Ли.

Группой Ли называется гладкое многообразие G, множество точек которого наделено структурой (абстрактной) группы, причем групповая операция и операция взятия симметричного элемента являются гладкими.

Замечание 1.1. Нетрудно проверить, что условие гладкости групповых операций равносильно гладкости отображения $\varphi : G \times G \to G$, заданного формулой

$$\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}.$$

Это замечание позволит нам при работе с конкретными примерами групп Ли проверять гладкость не двух, а одного отображения.

Пример 1.4. Простейшим примером группы Ли может служить арифметическое векторное пространство

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}.$$

На $\mathbb{R}^n$ мы уже построили структуру гладкого многообразия (см. курс Анализ на многообразиях). Из алгебры хорошо известно, что $\mathbb{R}^n$ является (абстрактной) группой относительно операции сложения. Взятие симметричного элемента в данном случае называется взятием противоположного элемента.

Гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$ покрывается одной картой $(\mathbb{R}^n, id)$ и в ней отображение φ (см. замечание 1.1) задается следующим образом

$$z^i = x^i - y^i,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $z = \varphi(x, y) = x - y$. Очевидно, что функции, задающие отображение φ являются гладкими, следовательно, гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$, на котором операция $+$ определяет структуру абстрактной группы, является группой Ли.

Пример 1.5. Пусть $M_{n,n}$ – полная матричная алгебра. Рассмотрим множество $n \times n$- матриц с ненулевым определителем и обозначим это множество так.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{(g_{ij}) \in M_{n,n},\, det(g_{ij}) \neq 0\}.$$

Операция умножения матриц вводит в это множество структуру абстрактной группы. Взятие симметричного элемента называется здесь взятием обратного.

Так как полная матричная алгебра $M_{n,n}$ может быть отождествлена с арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^{n^2}$, то она имеет структуру гладкого многообразия. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n^2}$, а значит, имеет индуцированную гладкую структуру из $M_{n,n}$. Итак, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие, а именно, открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Для доказательства того, что $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли, нам осталось проверить гладкость групповой операции и гладкость взятия обратного. Для этого нужна локальная карта на $GL(n, \mathbb{R})$. Так как гладкая структура $GL(n, \mathbb{R})$ индуцирована $\mathbb{R}^{n^2}$, то все многообразие покрывается одной локальной картой $(GL(n, \mathbb{R}), id)$. Напомним, что для построения локальных карт индуцированной гладкой структуры нужно взять локальную карту $\mathbb{R}^{n^2}$ и пересечь ее область с множеством $GL(n, \mathbb{R})$. Картирующее отображение получается из картирующего отображения карты на $\mathbb{R}^{n^2}$ сужением на множество $GL(n, \mathbb{R})$ (см. курс Анализ на многообразиях).

Запишем в локальной карте операцию умножения матриц. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – произвольные матрицы из $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда по правилу умножения матриц получим

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

где $(c_i j) = C = A \cdot B$. Очевидно, что полученные функции бесконечно дифференцируемы как по a_{ik}, так и по b_{kj}, а значит, операция умножения является гладкой.

По правилу вычисления элементов h_{ij} обратной матрицы A^{-1} для матрицы $A = (a_{ij})$, известного из алгебры, получим

$$h_{ij} = \frac{1}{detA} A_{ji},$$

где A_{ji} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Так как определитель $detA$ и алгебраические дополнения A_{ji} являются многочленами элементов матрицы A, полученные функции являются бесконечно дифференцируемыми по a_{ij}, следовательно, отображение взятия обратного элемента является гладким.

Итак, мы показали, что множество $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли. Она называется *полной линейной группой порядка* n.

Пример 1.6. Рассмотрим множество

$$O(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}),\ g \cdot g^T = I_n\},$$

где g^T – транспонированная матрица (строки матрицы g являются столбцами матрицы g^T), $I_n = (\delta^i_j)$ – единичная матрица порядка n. Это множество также является группой Ли и называется *ортогональной группой порядка* n.

Группа Ли

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{g \in O(n, \mathbb{R}),\ detg = 1\}$$

называется *специальной ортогональной группой порядка* n.

Пример 1.7. Пусть дано n-мерное векторное пространство V. Рассмотрим множество всех $\mathbb{R}$-линейных отображений $L : V \to V$. Это множество обозначается $End\,V$ и называется *алгеброй эндоморфизмов* векторного пространства V (структуру ассоциативной алгебры с единицей в этом множестве задают стандартные операции сложения отображений, умножения отображения на вещественное число и операция композиции). В этом множестве выделяется подмножество обратимых линейных отображений. Оно обозначается $Aut\,V$ и называется *группой автоморфизмов* векторного пространства V. Структура абстрактной группы задается операцией композиции.

Оказывается, что на множестве $Aut\,V$ существует и структура группы Ли. Так как $Aut\,V$ является векторным пространством, то на нем определена стандартная гладкая структура векторного пространства, а значит, $Aut\,V$ – гладкое многообразие. Если фиксировать в V базис, то операция композиции и взятия обратного элемента сведется к умножению матриц и взятию обратной матрицы, соответственно. Эти операции гладкие, а значит, $Aut\,V$ является группой Ли.

Задача 1.2. Докажите, что абстрактные группы G и $\tilde{G}$ из примеров 1.2 и 1.3являются группами Ли.

Пример 1.8. Пусть дано множество $M^{\mathbb{C}}_{n,n}$ $n \times n$-матриц, элементы которых являются комплексными числами. Обозначим через $GL(n, \mathbb{C})$ его подмножество, состоящее из матриц с ненулевым определителем. Как известно из курса алгебры, такое подмножество является абстрактной группой. Наша задача – ввести в этом множестве структуру группы Ли.

Матрицы из множества $GL(n, \mathbb{C})$ имеют комплексные элементы. Это не удобно для построения структуры гладкого многообразия на этом множестве. Как мы помним, для этого нам нужно каждой матрице поставить в соответствие набор из вещественных чисел. Чтобы избежать этой трудности, построим группу, которая состоит из вещественных матриц и изоморфна (как абстрактная группа) группе $GL(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим множество

$$GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} = \{g \in GL(2n, \mathbb{R}) : gJ = Jg\},$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ – оператор стандартной комплексной структуры на $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$.

Лемма 1.1. *Во введенных обозначениях*

$$g \in GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},\ det\,g \neq 0,$$

где A, B *– вещественные матрицы порядка* n.

Доказательство. Пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ принадлежит множеству $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$. Матрица C записана в блочном виде. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – это вещественные $n \times n$-матрицы. Тогда условие $g \circ J = J \circ g$ равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C_2 & -C_1 \\ C_4 & -C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3 & -C_4 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем, что $C_3 = -C_2$, $C_1 = C_4$, то есть матрица из $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ имеет нужный вид.

Проверьте самостоятельно, что матрица вида $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ коммутирует с оператором стандартной комплексной структуры. □

Нетрудно видеть, что множество $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ является абстрактной группой. Она называется *вещественной реализацией полной комплексной линейной группы порядка n.*

Теорема 1.1. *Группа $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ изоморфна полной комплексной линейной группе $GL(n,\mathbb{C})$.*

Доказательство. Построим отображение

$$\tau : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$$

следующим образом. Пусть $Z = (z_{ab}) \in GL(n,\mathbb{C})$, где $z_{ab} = a_{ab} + ib_{ab}$, $a, b = 1, \ldots, n$. Положим $A = (a_{ab})$, $B = (b_{ab})$. Тогда положим

$$\tau(Z) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что τ является биекцией и сохраняет операцию, а значит, является изоморфизмом групп. Проведите рассуждения самостоятельно. □

На вещественной реализации полной комплексной линейной группы порядка n стандартным образом строится структура гладкого многообразия. Атлас состоит из одной карты $(GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \varphi)$, а картирующее отображение φ ставит в соответствие матрице $g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ последовательность элементов матриц A и B, выписанных в одну строчку. Количество элементов матриц A и B равно $n^2+n^2 = 2n^2$, следовательно, размерность многообразия $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ равна $2n^2$. Далее, на $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ строится структура группы Ли точно так же как для вещественной полной линейной группы. Таким образом, вещественная реализация полной комплексной линейной группы наделяется структурой группы Ли. Так как полная комплексная линейная группа изоморфна своей вещественной реализации (а значит, с точки зрения геометров это одно и то же), то говорят, что полная комплексная линейная группа имеет структуру группы Ли.

Пример 1.9. Множество

$$U(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{C})\, g \cdot \bar{g}^T = I_n\}$$

является группой Ли (доказывается аналогично предыдущему примеру). Она называется *унитарной группой порядка n.* Множество

$$SU(n) = \{g \in U(n)\, det\, g = 1\}$$

унитарной унимодулярной группой порядка n.

§ 1.3. Алгебры Ли.

(Вещественной) *алгеброй Ли* называется (вещественное) векторное пространство $\mathfrak{g}$, в котором фиксирована бинарная билинейная операция

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикоммутативность);

2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби),

где $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Пример 1.10. Модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ гладкого многообразия M относительно скобки Ли является алгеброй Ли.

Пример 1.11. Всякое вещественное векторное пространство V является алгеброй Ли относительно коммутатора, заданного формулой $[X, Y] = 0$, $X, Y \in V$. Такая алгебра Ли называется *абелевой алгеброй Ли.*

Пример 1.12. Полная матричная алгебра $M_{n,n}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \tag{1.1}$$

где $A, B \in M_{n,n}$, точка обозначает обычное матричное умножение. Эта алгебра Ли называется *полной матричной алгеброй Ли.*

Пример 1.13. Рассмотрим множество $End\,V$ всех линейных отображений вещественного векторного пространства V. Это вещественное векторное пространство относительно сложения отображений и умножения на вещественное число. В этом множестве также может быть введена операция коммутирования по формуле

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

где $f, g \in End\,V$, $\circ$ – композиция отображений. Эта операция превращает векторное пространство $End\,V$ в алгебру Ли.

Пусть G – группа Ли. Будем групповую операцию G как абстрактной группы обозначать либо точкой, либо писать две буквы рядом. При этом будем называть эту операцию умножением.

Фиксируем произвольный элемент $g \in G$. Операция умножения в группе G определяет два отображения

$$L_g : G \to G; \quad R_g : G \to G$$

по формулам

$$L_g(h) = gh; \quad R_g(h) = hg,\, h \in G$$

соответственно. Так как операция умножения гладкая, то введенные отображения также являются гладкими. Они называются *отображением левого сдвига* и *отображением правого сдвига на элемент* g, соответственно.

Теорема 1.2. *Отображения L_g и R_g обладают следующими свойствами:*

1) $L_g \circ L_h = L_{gh}$;
2) $R_g \circ R_h = R_{hg}$;
3) L_g, R_g *являются диффеоморфизмами,*

где $g, h \in G$ – произвольные элементы.

Доказательство. Докажем первое тождество (второе докажите самостоятельно). Для любого элемента $p \in G$ по определению отображения левого сдвига получим

$$L_g \circ L_h(p) = L_g(hp) = g(hp) = (gh)p = L_{gh}(p).$$

Здесь мы также воспользовались ассоциативностью операции умножения в группе G.

Докажем, что L_g является диффеоморфизмом. Для этого достаточно доказать, что $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Существование обратного показывает, что L_g биекция, а то, что обратное отображение само является левым сдвигом показывает, что оно является гладким. Имеем

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}(gh) = h.$$

Это верно для любого элемента $h \in G$, следовательно, $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Аналогично доказывается, что $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$. Таким образом, получим $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. □

Задача 1.3. Найдите вид отображений левого и правого сдвига для группы $\tilde{G}$ из примера 1.3.

Решение. Напомним, что $\tilde{G}$ состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} e^{x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а умножением в этой группе является обычное матричное умножение. Тогда для произвольной фиксированной матрицы

$$G = \begin{pmatrix} e^{g_3} & 0 & g_1 \\ 0 & e^{g_3} & g_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$L_G(X) = GX = \begin{pmatrix} e^{g_3} & 0 & g_1 \\ 0 & e^{g_3} & g_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_3+g_3} & 0 & x_1 e^{g_3} + g_1 \\ 0 & e^{x_3+g_3} & x_2 e^{g_3} + g_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Для правого сдвига получим

$$R_G(X) = XG = \begin{pmatrix} e^{x_3+g_3} & 0 & g_1 e^{x_3} + x_1 \\ 0 & e^{x_3+g_3} & g_2 e^{x_3} + x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Напомним, что в курсе Анализ на многообразиях мы ввели понятие дифференциала гладкого отображения. А именно, если $\phi : M \to N$ – гладкое отображение многообразий, то для любой точки $p \in M$ определяется $\mathbb{R}$-линейное отображение $(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ по формуле $(\phi_*)_p(\xi)(f) = \xi(f \circ \phi)$, где f – произвольная гладкая функция на многообразии N и вектор $\xi \in T_p(M)$ рассматривается как инфинитазимальное дифференцирование. В локальных картах дифференциал гладкого отображения задается по следующей формуле

$$(\phi_*)_p\xi = \xi^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}. \tag{1.3}$$

Задача 1.4**.** Найдите выражения для дифференциала в произвольной точке отображения левого и правого сдвига для группы $\tilde{G}$ (см. задачу 1.3).

Доказательство. Рассмотрим отображение левого сдвига $L_G : \tilde{G} \to \tilde{G}$ и фиксируем точку $H \in \tilde{G}$. Зададим дифференциал левого сдвига на элемент G в точке H, то есть $((L_G)_*)_H$.

Группа Ли $\tilde{G}$ как гладкое многообразие покрывается одной картой $(\tilde{G}, \varphi)$, где $\varphi(X) = (x_1, x_2, x_3)$ (см. задачу 1.2). Точки G и H – фиксированные. Обозначим их координаты (g_1, g_2, g_3) и (h_1, h_2, h_3) соответственно. Тогда из формулы (1.2) следует, что отображение левого сдвига в таких картах задается уравнениями $y_1 = x_1e^{g_3} + g_1$; $y_2 = x_2e^{g_3} + g_2$; $y_3 = x_3 + g_3$. Здесь (g_1, g_2, g_3) – координаты фиксированной точки, а значит, константы, (x_1, x_2, x_3) – переменные (аргументы), (y_1, y_2, y_3) – функции. Чтобы задать дифференциал отображения, нам нужно вычислить матрицу Якоби (см. формулу (1.3)) $\left(\left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)$. Вычисляем.

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{(h_1,h_2,h_3)} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1e^{g_3}) = e^{g_3}$$

и так далее находим частные производные и вычисляем их значения в точке H. Запишем результат в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{g_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{g_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица Якоби полностью определяет дифференциал отображения в данной точке, задача (для левого сдвига) решена. Проводя аналогичные вычисления, получим для правого сдвига функции $y_1 = g_1e^{x_3} + x_1$; $y_2 = g_2e^{x_3} + x_2$; $y_3 = x_3 + g_3$ и матрицу Якоби вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1e^{h_3} \\ 0 & 1 & g_2e^{h_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Так как L_g является диффеоморфизмом, для любого векторного поля X на G существует L_g-связанное с ним векторное поле $(L_g)_*X \in \mathfrak{X}(G)$.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если оно совпадает с L_g-связанным с ним векторным полем для любого элемента $g \in G$, то есть

$$(L_g)_*X = X, \forall g \in G.$$

Если заменить левый сдвиг на правый в этом определении, то получим правоинвариантные векторные поля.

Задача 1.5**.** Докажите, что для группы Ли $\tilde{G}$ (см. задачу 1.3) векторные поля $\ell_1 = e^{x_3}\partial_1$, $\ell_2 = e^{x_3}\partial_2$, $\ell_3 = \partial_3$ являются левоинвариантными. Здесь $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ обозначает натуральный базис векторных полей $\mathfrak{X}(\tilde{G})$ группы Ли $\tilde{G}$. Докажите, что векторные поля $r_1 = \partial_1$, $r_2 = \partial_2$, $r_3 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ являются правоинвариантными.

Решение. Напомним критерий для ϕ-связанных векторных полей, доказанный в курсе Анализ на многообразиях: $(\phi_*)_pX_p = (\phi_*X)_{\phi(p)}$ для любой точки $p \in M$. Применим этот критерий для левоинвариантного векторного поля: $((L_G)_*)_HX_H = X_{L_G(H)}$ для любой точки (матрицы) $H \in \tilde{G}$.

Берем первое векторное поле $\ell_1 = e^{x_3}\partial_1$. Нам потребуется от него значения в точках $H(h_1, h_2, h_3)$ и $L_G(H) = GH(h_1e^{g_3} + g_1, h_2e^{g_3} + g_2, h_3 + g_3)$. Здесь мы сразу записали координаты этих точек, используя матрицу (1.2). Тогда

$$(\ell_1)_H = e^{h_3}(\partial_1)_H; \quad (\ell_1)_{GH} = e^{h_3+g_3}(\partial_1)_{GH}.$$

Теперь вычисляем левую часть равенства из критерия, используя вычисленную выше матрицу Якоби для дифференциала отображения левого сдвига и формулу (1.3). Обратите внимание, что так как у нас одно и то же многообразие в гладком отображении L_G, натуральный базис в обеих частях формулы (1.3) один и тот же.

$$((L_G)_*)_H(\ell_1)_H = e^{h_3}(e^{g_3}(\partial_1)_{GH}).$$

С другой стороны, $(\ell_1)_{GH} = e^{h_3+g_3}(\partial_1)_{GH}$. Получаем верное равенство, а значит, векторное поле ℓ_1 является левоинвариантным.

Остальные векторные поля проверяются аналогичным образом. Проведите вычисления самостоятельно. □

Теорема 1.3. *Совокупность $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует вещественное векторное пространство, канонически изоморфное касательному пространству $T_e(G)$ к группе Ли G в единице e этой группы. В частности, $dim\, \mathfrak{g} = dim\, G$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{g}$ является подмножеством вещественного векторного пространства $\mathfrak{X}(G)$ гладких векторных полей группы Ли G, то нам достаточно доказать, что $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно операций сложения своих элементов и умножения на вещественное число. Это легко следует из $\mathbb{R}$-линейности отображения увлечения векторных полей.

Построим изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ вещественных векторных пространств. Зададим отображение β формулой

$$\beta(X) = X_e,\ X \in \mathfrak{g},$$

то есть каждому левоинвариантному векторному полю X (оно рассматривается как гладкое сечение касательного расслоения) поставим его значение в единице e группы G. Из определения суммы и произведения на число гладких сечений (см. курс Анализ на многообразиях) легко видеть, что β является гомоморфизмом:

$$\beta(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)_e = (\lambda X + \mu Y)(e) = \lambda X_e + \mu Y_e = \lambda\beta(X) + \mu\beta(Y),$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Инъективность β следует из того, что ядро гомоморфизма β нулевое. В самом деле, пусть $X \in ker\, \beta$. Тогда $\beta(X) = X_e = 0$. Так как X – левоинвариантное (L_g-связано с самим собой), то согласно критерию ϕ-связанных векторных полей получим

$$((L_g)_*)_e X_e = X_{L_g(e)} = X_g.$$

С другой стороны, так как дифференциал $((L_g)_*)_e$ отображения является $\mathbb{R}$-линейным, получим

$$((L_g)_*)_e X_e = ((L_g)_*)_e(0) = 0.$$

Итак, значение векторного поля X в любой точке $g \in G$ равно нулю, то есть $X_g = 0$ для любой точки $g \in G$. Следовательно, равно нулю само векторное поле X. Следовательно, мы показали, что ядро отображения β нулевое.

Покажем, что отображение β сюръективно. Пусть $\xi \in T_e(G)$ – произвольный касательный вектор. Построим семейство векторов

$$X = \{X_g \in T_g(G),\ X_g = ((L_g)_*)_e\xi\}. \tag{1.4}$$

В результате мы получим отображение $X : G \to TG$, где TG – тотальное пространство касательного расслоения. Чтобы доказать, что X является (гладким) векторным полем на многообразии G, нам нужно проверить, что в паре соответствующих карт это отображение задается гладкими функциями. Напомним, что первые n функций гладки тривиальным образом ($y^i = x^i$), $i = 1, \ldots, n$, а вторые n функций $y^{j+n} = X^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$ суть координаты касательных векторов X_g. Для них и нужно доказать гладкую зависимость от координат $(x^1, \ldots, x^n)$ точки g.

Фиксируем локальную карту (U, φ) в окрестности единицы e группы Ли G, причем пусть e имеет в этой карте координаты $(0, \ldots, 0)$. Предположим, что элемент g принадлежит области U. Пусть операция умножения в карте (U, φ) задается функциями

$$z^i = \mu^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где $i = 1, \ldots, n$. Здесь $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ – координаты первого сомножителя, $(x^1, \ldots, x^n)$ – координаты второго сомножителя, через $(z^1, \ldots, z^n)$ обозначены координаты произведения. Так как операция умножения является гладкой, функции z^i имеют частные производные любого порядка по переменным $\tilde{x}^1, \ldots, x^n$.

Обозначим координаты точки g в данной карте через $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Так как точка g у нас зафиксирована, это набор из n вещественных чисел. Тогда отображение левого сдвига L_g будет задаваться функциями

$$z^i = \mu^i(x_0^1, \ldots, x_0^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где переменными будут являться только $x^1, \dots, x^n$. Тогда дифференциал отображения $((L_g)_*)_e$ будет задаваться матрицей Якоби
$$\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)\Big|_e = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0).$$
Следовательно, если вектор ξ имеет в локальной карте (U, φ) координаты $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ (это вещественные числа), то координаты $(X_g)^i(x_0^1, \dots, x_0^n)$ вектора X_g будут выражаться по формуле
$$(X_g)^i(x_0^1, \dots, x_0^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0)\xi^j.$$
Теперь отпустим точку g. Тогда ее координаты будут меняться. В связи с этим сотрем нули в обозначении ее координат. Тогда получим функции
$$X^i(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)\xi^j.$$
Эти функции являются гладкими.

Напомним, что мы предполагали, что точка g принадлежит окрестности единицы. Пусть теперь точка h принадлежит некоторой карте (V, ψ), не содержащей единицу. Из определения системы векторов X имеем
$$X_h = ((L_h)_*)_e\xi = ((L_h)_*)_e((L_{g^{-1}})_*)_g X_g = ((L_{hg^{-1}})_*)_g X_g.$$
Тогда если в фиксированной точке $g(g^1, \dots, g^n) \in V$ вектор X_g уже построен, то в произвольной точке $h \in V$ аналогично предыдущему получим
$$X^i(h) = (X_h)^i(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \dots, x^n, g^1, \dots, g^n)(X_g)^j.$$
Они являются гладкими функциями.

Итак, мы показали, что координаты векторов X_g семейства (1.4) гладко зависят от координат точки g, а значит, X является (гладким) векторным полем. Нам осталось показать, что оно является левоинвариантным. Фиксируем произвольную точку $g \in G$. Тогда для произвольной точки $h \in G$ имеем
$$((L_g)_*)_h X_h = ((L_g)_*)_h((L_h)_*)_e\xi = ((L_g \circ L_h)_*)_e\xi = ((L_{gh})_*)_e\xi = X_{gh} = X_{L_g(h)}.$$
Здесь мы воспользовались формулой для композиции дифференциалов. Тогда по критерию ϕ-связанных векторных полей получим $(L_g)_*X = X$, то есть векторное поле X является левоинвариантным. □

Замечание 1.2. Обратите внимание, что модуль всех гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$ в общем случае не имеет глобального базиса (даже если брать коэффициенты разложения из алгебры гладких функций), а векторное пространство левоинвариантных векторных полей имеет глобальный базис (коэффициенты разложения по такому базису – вещественные числа). Примером такого базиса может служить, например, прообраз натурального базиса касательного пространства $T_e(G)$.

Теорема 1.4. *Векторное пространство $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей является алгеброй Ли.*

Доказательство. Так как левоинвариантные векторные поля принадлежат модулю гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$, то для них определена скобка Ли (см. курс Анализ на многообразиях). Она удовлетворяет условиям $\mathbb{R}$-билинейности, антикоммутативности и тождеству Якоби. Следовательно, нам осталось проверить, что множество $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно скобки Ли. Имеем с учетом свойства отображения увлечения
$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$
Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторных полей X и Y. □

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных полей группы Ли G называется *присоединенной алгеброй Ли* или *алгеброй Ли группы Ли G*.

Замечание 1.3. Структуру алгебры Ли можно ввести и в касательном пространстве $T_e(G)$ в единице группы. Для этого используем построенный в теореме 1.3 изоморфизм β векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$. Для того чтобы $T_e(G)$ было алгеброй Ли, там не хватает коммутатора для касательных векторов этого пространства, то есть билинейного отображения
$$[\cdot, \cdot] : T_e(G) \times T_e(G) \to T_e(G),$$

удовлетворяющего свойству антикоммутативности и тождеству Якоби. Определим это отображение так. Для любых касательных векторов $\xi, \eta \in T_e(G)$ положим

$$[\xi, \eta] = \beta[\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

При этом отображение β^{-1} будет изоморфизмом алгебр Ли $T_e(G)$ и $\mathfrak{g}$, так как

$$\beta^{-1}[\xi, \eta] = [\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

Итак, мы видим, что алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$ изоморфны, а значит, могут быть отождествлены.ждения касательного пространства к группе в ее единице.

Пусть дана группа Ли G размерности n и ее присоединенная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что размерность $\mathfrak{g}$ совпадает с размерностью G (теорема 1.3), а значит, равна n. Рассмотрим произвольный базис $(E_1, \ldots, E_n)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. По определению алгебры Ли (замкнутость относительно операции коммутирования) левоинвариантное векторное поле $[E_i, E_j]$ должно принадлежать $\mathfrak{g}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$, а значит, его можно разложить по базису $(E_1, \ldots, E_n)$, причем коэффициентами будут служить вещественные числа:

$$[E_i, E_j] = C^k_{ij} E_k. \tag{1.5}$$

Коэффициенты $\{C^k_{ij}\}$ называются *структурными константами группы Ли* $\mathfrak{g}$, а соотношения (1.5) называются *контравариантными структурными уравнениями группы Ли.*

Задача 1.6. Найдем закон преобразования структурных констант $\{C^k_{ij}\}$ при переходе от одного базиса $(E_1, \ldots, E_n)$ к другому базису $(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$.

Решение. Отступая от многолетних традиций, обозначим матрицу перехода от базиса $(E_1, \ldots, E_n)$ к базису $(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$ через $A = (A^i_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, то есть

$$\tilde{E}_i = A^j_i E_j. \tag{1.6}$$

Так как мы работаем с векторным пространством, элементами матрицы A служат вещественные числа.

По определению структурных констант имеем

$$[\tilde{E}_i, \tilde{E}_j] = \tilde{C}^k_{ij} \tilde{E}_k.$$

Подставим в это равенство (1.6):

$$[A^k_i E_k, A^t_j E_t] = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k E_p.$$

Так как коммутатор является $\mathbb{R}$-линейным отображением по каждому аргументу, учитывая (1.5), получим

$$A^k_i A^t_j C^p_{kt} E_p = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k E_p.$$

В силу линейной независимости E_p получим

$$A^k_i A^t_j C^p_{kt} = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k$$

или

$$\tilde{C}^s_{ij} = A^k_i A^t_j (A^{-1})^s_p C^p_{kt}.$$

Это тензорный закон преобразования. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры, система чисел $\{C^k_{ij}\}$ задает тензор типа (2,1) на векторном пространстве $\mathfrak{g}$. Итак, структурные константы оказались не совсем константами (они все-таки меняются при переходе от одного базиса к другому), а задали тензор типа (2,1). $\square$

Задача 1.7. Найдите структурные константы группы основной аффинной группы (см. пример 1.3 и задачу 1.5).

Ответ: $[\ell_1, \ell_2] = 0$, $[\ell_2, \ell_3] = -\ell_2$, $[\ell_1, \ell_3] = -\ell_1$.

Задача 1.8. Замените левоинвариантный базис на правоинвариантный (см. задачу 1.5) и вычислите структурные константы для него.

Задача 1.9. Докажите, что все структурные константы C^k_{ij} тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда алгебра Ли абелева (то есть ее коммутатор задается формулой $[X, Y] = 0$).

Рассмотрим на группе Ли G 1-формы ω, удовлетворяющие условию

$$(L_g)^*\omega = \omega,\ \forall g \in G,$$

где $(L_g)^*$ – антиувлечение форм. Такие формы называются *левоинвариантными.*

Как мы помним, если 1-форму рассматривать как $C^\infty(M)$-отображение, то при действии формы на векторное поле получается гладкая функция. Для левоинвариантных форм мы получаем, что при их действии на левоинвариантные векторные поля результатом будет константа (постоянная функция). Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 1.2. *Пусть ω – левоинвариантная 1-форма, X – левоинвариантное векторное поле. Тогда $\omega(X) = const$.*

Доказательство. По определению левоинвариантной 1-формы и отображения антиувлечения для любого $g \in G$ имеем

$$\omega(X) = (L_g)^*(\omega)(X) = \omega((L_g)_*X) \circ L_g = \omega(X) \circ L_g.$$

Сравнивая крайние части цепочки равенств, получаем

$$\omega(X) = \omega(X) \circ L_g\, \forall g \in G.$$

Обе части этого равенства – это функции на многообразии G. Вычислим их значение в точке e:

$$\omega(X)(e) = \omega(X)(g),$$

то есть во всех точках $g \in G$ значение функции $\omega(X)$ одно и то же (оно равно $\omega(X)(e)$), то есть эта функция является константой. □

Из доказанной леммы следует, что на левоинвариантные 1-формы мы можем смотреть как на $\mathbb{R}$-линейные отображения вида $\omega : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, то есть как на ковекторы, определенные на векторном пространстве $\mathfrak{g}$. Другими словами, множество всех левоинвариантных форм образует векторное пространство $\mathfrak{g}^*$, дуальное векторному пространству $\mathfrak{g}$ (мы забываем про не левоинвариантные векторные поля и про функции, отличные от констант на многообразии G).

Замечание 1.4. Аналогичным образом среди всех тензорных полей $\mathfrak{T}^r_s(G)$ типа (r, s) на многообразии G можно выделить *левоинвариантные* и доказать, что они образуют векторное пространство тензоров типа (r, s), определенное векторными пространствами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Напомним, что на произвольном гладком многообразии определен оператор внешнего дифференцирования d по формуле

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{r+1})+ \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}).$$

Если мы будем рассматривать только левоинвариантные формы и действовать ими только на левоинвариантные векторные поля, то в силу леммы 1.2 эта формула примет более простой вид: первая группа слагаемых обнулится, так как действие векторного поля на постоянной функции равно нулю. Тогда получим

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}).$$

Здесь все векторные поля левоинвариантные.

В частности, для форм Маурера-Картана эта формула примет вид

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]),\ X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.7}$$

Рассмотрим базис $(E_1, \dots, E_n)$ векторного пространства левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$. Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ – дуальный базис для базиса $(E_1, \dots, E_n)$. По формулам (1.7), (1.5) получим

$$d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\omega^k(C^m_{ij}E_m) = -C^m_{ij}\omega^k(E_m) = -C^m_{ij}\delta^k_m = -C^k_{ij}.$$

Итак, мы получили, что компоненты 2-формы $d\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ равны $-C_{ij}^k$. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры в векторном пространстве $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ существует канонический базис $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$. Он хорош тем, что коэффициенты разложения тензоров из $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ по этому базису совпадают с их компонентами, то есть

$$d\omega^k = -C_{ij}^k \omega^i \otimes \omega^j.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор альтернации Alt. Тогда согласно определению операции внешнего умножения и оператора альтернации получим

$$d\omega^k = -C_{ij}^k Alt(\omega^i \otimes \omega^j) = -\frac{1!1!}{2!} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Следовательно,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \tag{1.8}$$

Эти уравнения называются *ковариантными структурными уравнениями Маурера-Картана* или, просто, *уравнениями Маурера-Картана группы Ли G*.

§ 1.4. Полная линейная группа.

4.1. Вид присоединенной алгебры Ли и уравнения Маурера-Картана.

В качестве примера общих понятий, изложенных в § 1.3., рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{R})$. Мы найдем ее алгебру Ли и вычислим уравнения Маурера-Картана.

Мы уже знаем, что группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности n^2. Ее атлас состоит из одной локальной карты $(GL(n, \mathbb{R}), \varphi)$, где картирующее отображение $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ ставит в соответствие каждой матрице $A = (a_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ в соответствие набор ее элементов, выписанных в строку (например, берем строки матрицы A и записываем их в одну строку). Так как координат в этой карте n^2, их удобнее обозначать через (g_j^i), где $i, j = 1, \dots, n$, верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца в матрице. Тогда координатные функции, которые ставят в соответствие матрице ее (i, j)-й элемент будем обозначать теми же символами

$$g_j^i : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ g_j^i(A) = a_j^i.$$

Обозначим алгебру Ли группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и докажем, что она изоморфна полной матричной алгебре Ли $M_{n,n}$. Для этого нам нужно построить изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Зададим отображение

$$\varkappa : T_e(GL(n, \mathbb{R})) = T_e(M_{n,n}) \to M_{n,n}$$

по формуле

$$\varkappa(\xi) = A,\ A = (a_j^i) = (\xi(g_j^i)) \equiv ((dg_j^i)_e(\xi)), \tag{1.9}$$

где $\xi \in T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ – произвольный элемент, a_j^i – элементы матрицы $A = \varkappa(\xi)$, $e = I_n$ – единичная матрица. Это отображение линейно, так как

$$\varkappa(\lambda\xi + \mu\eta) = ((\lambda\xi + \mu\eta)(g_j^i)) = \lambda(\xi(g_j^i)) + \mu(\eta(g_j^i)) = \lambda\varkappa(\xi) + \mu\varkappa(\eta),$$

где $\xi, \eta \in T_e(M_{n,n})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то есть $\varkappa$ является гомоморфизмом.

Докажем биективность отображения $\varkappa$. Пусть $\xi \in ker\, \varkappa$ – произвольный элемент из ядра отображения $\varkappa$. Тогда ему соответствует нулевая матрица

$$0 = \varkappa(\xi) = (\xi(g_j^i)),$$

то есть $\xi(g_j^i) = (dg_j^i)_e(\xi) = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, n$. Так как $(dg_j^i)_e$ – ковекторы натурального базиса, мы получаем, что все координаты вектора ξ равны нулю, то есть $\xi = 0$. Таким образом, отображение $\varkappa$ является инъективным.

Сюръективность отображения $\varkappa$ следует из того, что размерности векторных пространств $T_e(M_{n,n})$ и $M_{n,n}$ равны.

Итак, мы показали, что построенное отображение $\varkappa$ будет изоморфизмом векторных пространств. Тогда отображение

$$\gamma = \varkappa \circ \beta : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to M_{n,n}$$

будет изоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Нам осталось показать, что отображение γ будет изоморфизмом алгебр Ли, то есть будет сохранять коммутатор, то есть

$$\gamma[X, Y] = [\gamma(X), \gamma(Y)],\ X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Для этого нам потребуются вспомогательные формулы.

Лемма 1.3. *Пусть $g, h \in GL(n,\mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Тогда в принятых обозначениях*

$$1)\, g^i_j \circ L_g = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j; \quad 2)\, Y(g^i_j) = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j).$$

Доказательство. Так как $g, h \in GL(n,\mathbb{R})$, они являются матрицами. Применим правило умножения матриц

$$(g^i_j \circ L_g)(h) = g^i_j(gh) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j(h).$$

В силу произвола в выборе элемента h получим первую формулу. Тогда, учитывая ее, получим

$$(Y(g^i_j))(g) = Y_g(g^i_j) = (((L_g)_*)_e)(Y_e))(g^i_j) = Y_e(g^i_j \circ L_g) = Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) Y_e(g^k_j).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразиях), левоинвариантностью векторного поля Y и определением дифференциала отображения. Так как это равенство верно для любого элемента $g \in G$, то получим требуемое соотношение. □

Теорема 1.5. *Отображение $\gamma : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to M_{n,n}$ является изоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Заметим, что $\gamma(X)$ – это матрица. Обозначим ее элементы через $\gamma(X)^i_j$. Напомним, что верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца. Тогда из определения отображения γ получим

$$\gamma(X)^i_j = (\varkappa(X_e))^i_j = X_e(g^i_j).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
\gamma([X,Y])^i_j &= [X,Y]_e(g^i_j) = ([X,Y](g^i_j))(e) = ((X \circ Y - Y \circ X)(g^i_j))(e) = \\
&= (X(Y(g^i_j)) - Y(X(g^i_j)))(e) = X_e(Y(g^i_j)) - Y_e(X(g^i_j)) = X_e(\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j)) - Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k X_e(g^k_j)) = \\
&= \sum_{k=1}^n \left(X_e(g^i_k) Y_e(g^k_j) - Y_e(g^i_k) X_e(g^k_j)\right) = \sum_{k=1}^n \gamma(X)^i_k \gamma(Y)^k_j - \sum_{k=1}^n \gamma(Y)^i_k \gamma(X)^k_j = \\
&= ((\gamma(X) \cdot \gamma(Y)) - \gamma(Y)\gamma(X))^i_j = [\gamma(X), \gamma(Y)]^i_j,
\end{aligned}$$

Итак, отображение γ сохраняет коммутатор, следовательно, является изоморфизмом алгебр Ли. □

Пример 1.14. Обозначим $\{e^i_j\}$ стандартный базис матричной алгебры $M_{n,n}$. В матрице e^i_j на пересечении i-го столбца и j-ой строки стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Коротко это можно записать так

$$(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j.$$

Напомним, что атлас на гладком многообразии $GL(n,\mathbb{R})$ состоит из одной карты с координатами (g^i_j). Картирующее отображение это карты каждой матрице ставит в соответствие совокупность элементов этой матрицы, выписанных в одну строчку. Тогда натуральный базис этой карты будет $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right\}$. Найдем образы векторов $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right\}$ при отображении $\varkappa$.

Используем формулу (1.9):

$$\varkappa\left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right)^k_\ell = (dg^k_\ell)_e \left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right) = \delta^i_\ell \delta^k_j = (e^i_j)^k_\ell,$$

то есть $\varkappa\left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right) = e^i_j$.

Задача 1.10. Выясните, будут ли векторы натурального базиса $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right\}$ левоинвариантными. Найдите какой-нибудь левоинвариантный базис для алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (задайте из разложения по натуральному базису). За решение задачи +3 балла.

Задача 1.11**.** Сформулируйте алгоритм нахождения какого-либо базиса левоинвариантных векторных полей, если известен конкретный вид операции умножения в группе $z^i = \mu^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. Докажите истинность этого алгоритма. (+5 баллов)

Вычислим уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Фиксируем в полной матричной алгебре $M_{n,n}$ стандартный базис $\{e^i_j\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, состоящий из матриц e^i_j, у которых на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит 1, а все остальные компоненты нулевые. Еще раз запишем это в виде равенства

$$(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j.$$

Здесь индекс k обозначает номер строки, а индекс ℓ – номер столбца.

Этот базис порождает базис $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Обозначим дуальный базис через $\{\omega^i_j\}$. Он характеризуется тем, что

$$\omega^k_\ell(E^i_j) = \delta^i_\ell \delta^k_j.$$

Другими словами, действие форм ω^i_ℓ будет давать единицу при действии на левоинвариантные векторные поля E^i_j только когда пары (i, j) и (ℓ, k) совпадают.

Запишем уравнения Маурера-Картана в нашем случае. Вспомним их общий вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c,$$

где $a, b, c = 1, \ldots, n = dimG$. В этих уравнениях есть один свободный индекс a, который нумерует уравнения, а также есть два индекса суммирования b, c, которые говорят о принадлежности коэффициента C^a_{bc} соответствующему произведению $\omega^b \wedge \omega^c$. В нашем случае каждая форма нумеруется двумя индексами. Тогда свободными будут два индекса, нумерующие уравнения. Они будут стоять у форм дэ омега и у коэффициентов C. Также нам потребуются индексы для суммирования по две штуки на каждую омегу. Эти индексы должны также присутствовать в коэффициенте C и показывать, что по ним происходит суммирование. В результате получим

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2} C^{i\ell t}_{jkr} \omega^k_\ell \wedge \omega^r_t. \tag{1.10}$$

Структурные константы $C^{i\ell t}_{jkr}$ определяются уравнениями

$$[E^\ell_k, E^t_r] = C^{p\ell t}_{qkr} E^q_p.$$

Подействуем на обе части этого уравнения изоморфизмом γ^{-1}. Так как γ^{-1} – изоморфизм алгебр Ли, получим

$$[e^\ell_k, e^t_r] = C^{p\ell t}_{qkr} e^q_p \tag{1.11}$$

(см. формулу (1.5)). Найдем из этих уравнений структурные константы. Для этого вычислим компоненты матриц, стоящих в левой и правой частях этого равенства. Расписываем левую часть равенства (1.11).

$$[e^\ell_k, e^t_r]^i_j = (e^\ell_k)^i_p (e^t_r)^p_j - (e^t_r)^i_p (e^\ell_k)^p_j = \delta^\ell_p \delta^i_k \delta^t_j \delta^p_r - \delta^t_p \delta^i_r \delta^\ell_j \delta^p_k = \delta^\ell_r \delta^i_k \delta^t_j - \delta^t_k \delta^i_r \delta^\ell_j.$$

Расписываем правую часть равенства (1.11).

$$\left(C^{p\ell t}_{qkr} e^q_p \right)^i_j = C^{p\ell t}_{qkr} \delta^q_j \delta^i_p = C^{i\ell t}_{jkr}.$$

Итак, мы получили

$$C^{i\ell t}_{jkr} = \delta^\ell_r \delta^i_k \delta^t_j - \delta^t_k \delta^i_r \delta^\ell_j.$$

Наконец, подставим полученный результат в (1.10):

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2} (\delta^\ell_r \delta^i_k \delta^t_j - \delta^t_k \delta^i_r \delta^\ell_j) \omega^k_\ell \wedge \omega^r_t = -\frac{1}{2} (\omega^i_r \wedge \omega^r_j - \omega^t_j \wedge \omega^i_t) = -\omega^i_r \wedge \omega^r_j.$$

Мы заменили индекс суммирования t во втором слагаемом на индекс r и привели подобные. Итак, уравнения Маурера-Картана для полной линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ в стандартном базисе $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ имеют вид

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

4.2. Присоединенные алгебры Ли подгрупп полной линейной группы.

Итак, мы выяснили, что присоединенную алгебру Ли (а также касательное пространство в единице этой группы можно представлять себе как алгебру Ли всех матриц размера $n \times n$ (операции, включая коммутатор, будут одинаковыми). Выясним, какого вида матрицы будут в присоединенных алгебрах Ли некоторых подгрупп полной линейной группы.

Задача 1.12. Множество 2×2 с вещественными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix}.$$

и с определителем 1 образуют трехмерное гладкое многообразие (постройте какой-нибудь атлас этого многообразия самостоятельно). Обычное умножение матриц превращает его в группу Ли. Она называется *специальной линейной группой порядка 2* и обозначается $SL(2, \mathbb{R})$. Аналогичным образом определяется специальная линейная группа порядка n – это $n \times n$ матрицы с вещественными элементами, определитель которых равен n.

Покажите, что касательное пространство $T_{p_0}(SL(2, \mathbb{R}))$ в точке $p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ может быть отождествлено с множеством всех 2×2 матриц с нулевым следом (они называются *бесследными матрицами*), то есть

$$T_{p_0}(SL(2)) = \left\{ \left(p_0; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right), \, a + d = 0 \right\}.$$

Решение. Напомним, что касательное пространство к гладкому многообразию в точке p получается как множество касательных векторов в точке p всех параметризованных кривых этой поверхности, проходящих через точку p.

Рассмотрим произвольную параметризованную кривую $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) & x^2(t) \\ x^3(t) & x^4(t) \end{pmatrix}$ в $SL(2, \mathbb{R})$, проходящую через точку p_0. Тогда ее касательный вектор в точке p_0 (соответствующее этой точке значение параметра мы обозначим t_0) определяется следующим образом

$$\dot{\alpha}(t_0) = \left(p_0; \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) & \frac{dx^2}{dt}(t_0) \\ \frac{dx^3}{dt}(t_0) & \frac{dx^4}{dt}(t_0) \end{pmatrix} \right)$$

Так как матрицы из $SL(2)$ удовлетворяют условию $x^1x^4 - x^2x^3 = 1$, дифференцируя это равенство, мы получим в точке p_0

$$\frac{dx^1}{dt}(t_0)x^4(t_0) + x^1(t_0)\frac{dx^4}{dt}(t_0) - \frac{dx^2}{dt}(t_0)x^3(t_0) - x^2(t_0)\frac{dx^3}{dt}(t_0) = 0. \tag{1.12}$$

Так как $\alpha(t_0) = p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, получим $x^1(t_0) = 1$, $x^2(t_0) = 0$, $x^3(t_0) = 0$, $x^4(t_0) = 1$. Тогда равенство (1.12) примет вид

$$\frac{dx^1}{dt}(t_0) + \frac{dx^4}{dt}(t_0) = 0.$$

Таким образом, касательное пространство к $SL(2)$ в точке p_0 состоит из бесследных матриц. Оно содержит все бесследные 2×2 матрицы, так как и касательное пространство и множество бесследных матриц являются векторными пространствами одинаковой размерности 3 (Покажите, что размерность векторного пространства бесследных матриц равна 3, то есть предъявите какой-либо базис векторного пространства бесследных матриц). □

Задача 1.13. Опишите касательное пространство к поверхности $SL(2, \mathbb{R})$ в точке $p = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. Множество всех матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых $2d + a - b - c = 0$.

Задача 1.14. Покажите, что множество $SL(3, \mathbb{R})$ всех 3×3 матриц с вещественными коэффициентами и определителем 1 является 8-мерным гладким многообразием (с операцией умножения – группой Ли). Опишите касательное пространство к $SL(3)$ в точке $p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $T_{p_0}(SL(3, \mathbb{R}))$ состоит из всех бесследных матриц порядка 3.

Задача 1.15. Докажите, что для $SL(n;\mathbb{R})$ присоединенная алгебра Ли состоит из бесследных матриц.

Задача 1.16. Докажите, что касательное пространство в единице (а значит, и присоединенная алгебра Ли) к ортогональной группе $O(n,\mathbb{R})$ состоит из кососимметрических матриц.

Решение. Касательный вектор в точке I_n будет иметь вид

$$\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^i_j(t) \right) \equiv (\gamma^i_j)$$

Ортогональная матрица удовлетворяет условию $gg^T = I_n$. В координатах g^i_j это условие запишется в виде $\sum_{k=1}^n g^i_k g^j_k = \delta^i_j$. Продифференцируем это равенство (чтобы найти условия, которым удовлетворяют координаты матрицы – касательного вектора) и найдем его значение в точке $\gamma(0) = I_n$.

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^i_k \right) g^j_k(0) + g^i_k(0) \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^j_k \right) = 0$$

или, проводя суммирования с дельтами, получим

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^i_j + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^j_i = 0,$$

то есть элементы матрицы $\dot{\gamma}$ удовлетворяют условию $\gamma^i_j + \gamma^j_i = 0$. Это условие определяет кососимметрические матрицы. □

Задача 1.17. Докажите, что присоединенная алгебра Ли унитарной группы $U(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц, то есть из матриц $C \in M^{\mathbb{C}}_{n,n}$, таких что $\bar{C} + C^T = 0$.

Указания. Перейдите к вещественной реализации полной комплексной линейной группы и запишите в ее терминах условие унитарности матрицы ($A + A^T = 0$, $B + B^T = 0$). Проверьте выполнение условия $\bar{C} + C^T = 0$ в терминах вещественной реализации.

Замечание 1.5. Нетрудно показать, что алгебра эндоморфизмов $End\, V$ векторного пространства V является алгеброй Ли группы Ли автоморфизмов $Aut\, V$ этого векторного пространства относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1,\ L_1, L_2 \in End\, V.$$

Для этого нужно фиксировать базис в V. Тогда элементы из группы $Aut\, V$ могут быть отождествлены с матрицами группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$, а элементы из $End\, V$ с матрицами полной матричной алгебры $M_{n,n}$. Откуда следует, что алгебра эндоморфизмов является присоединенной алгеброй Ли группы Ли $Aut\, V$.

§ 1.5. Гомоморфизмы групп Ли и алгебр Ли.

Отображение $\varphi : G \to H$ групп Ли называется *гомоморфизмом групп Ли*, если

(1) отображение φ является гладким;

(2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in G$.

В частности, если группа H является группой Ли автоморфизмов $Aut\, M$ некоторого гладкого многообразия M, то гомоморфизм групп Ли называется *представлением группы Ли G*. Если в качестве M берется векторное пространство (с канонической гладкой структурой), то представление группы Ли G называется *линейным представлением.* Гомоморфизм групп Ли, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли.* Изоморфизм группы Ли на себя называется *автоморфизмом группы Ли.*

Задача 1.18. Докажите, что группы Ли G и $\tilde{G}$ из примеров 1.2 и 1.3 являются изоморфными.

Отображение $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Ли называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если

(1) отображение ϕ является линейным;

(2) $\phi[X,Y] = [\phi X, \phi Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Гомоморфизм алгебр Ли, являющийся биекцией, называется *изоморфизмом алгебр Ли.*

Если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является алгеброй эндоморфизмов $End\, V$ некоторого векторного пространства V, то гомоморфизм алгебр Ли ϕ называется *линейным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\varphi(e) = \tilde{e},$$

где e – единица группы Ли G, $\tilde{e}$ – единица группы Ли H. Этот результат мы можем взять из алгебры (свойство гомоморфизма абстрактных групп). Тогда дифференциал $(\varphi_*)_e$ отображения φ является линейным отображением касательных пространств $T_e(G)$ и $T_{\tilde{e}}(H)$. Это отображение задает $\mathbb{R}$-линейное отображение присоединенных алгебр Ли

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

по формуле

$$\phi = (\tilde{\beta})^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta, \tag{1.13}$$

где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$, $\tilde{\beta} : \mathfrak{h} \to T_{\tilde{e}}(H)$ – изоморфизмы векторных пространств, построенные в теореме 1.3.

Записав формулу (1.13) в виде

$$\tilde{\beta} \circ \phi = (\varphi_*)_e \circ \beta,$$

получим, что отображение ϕ однозначно задается формулой

$$(\phi(X))_{\tilde{e}} = (\varphi_*)_e(X_e),\ X \in \mathfrak{g}. \tag{1.14}$$

Теорема 1.6. *Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда*

(1) для любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{g}$ векторные поля X и $\phi(X)$ являются φ-связанными;

(2) $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Из определения гомоморфизма групп Ли получим, что для любых элементов $g, h \in G$ имеет место равенство

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

Откуда получим, что

$$\varphi(L_g(h)) = L_{\varphi(g)}(\varphi(h)).$$

Так как это верно для любого $h \in G$, получим

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi,\ \forall g \in G. \tag{1.15}$$

Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Нам нужно доказать, что векторные поля X и $\tilde{X} \equiv \phi(X)$ будут φ -связанными. Согласно критерию связанных векторных полей нам нужно доказать для этого, что

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\varphi(g)} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} \tilde{X}_{\tilde{e}} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} (\varphi_*)_e X_e = ((L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*)_e(X_e) = \\ = ((\varphi \circ L_g)_*)_e(X_e) = (\varphi_*)_g \circ ((L_g)_*)_e(X_e) = (\varphi_*)_g(X_g)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторного поля $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$, формулой (1.14), свойством композиции дифференциалов, формулой (1.15) и левоинвариантностью векторного поля $X \in \mathfrak{g}$. Итак, мы показали, что векторные поля $X \in \mathfrak{g}$ и $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ являются φ-связанными.

Далее, нам нужно показать, что линейное отображение ϕ присоединенных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ будет гомоморфизмом алгебр Ли. Здесь осталось доказать, что ϕ сохраняет коммутатор, то есть

$$\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Как мы доказали, векторные поля X и ϕX являются φ-связанными, то есть $\phi X = \varphi_* X$. Аналогично для векторного поля Y. Тогда $[\phi X, \phi Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$. С другой стороны, по тем же соображениям $\phi[X, Y] = \varphi_*[X, Y]$. Правые части этих равенств совпадают по свойству φ-связанности. Следовательно, совпадают и левые части. $\square$

§ 1.6. Подгруппы Ли. Однопараметрические подгруппы Ли и экспоненциальное отображение.

6.1. Подгруппы Ли.

Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G, если она является подмногообразием гладкого многообразия G, то есть отображение φ является регулярным и инъективным.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Векторное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно замкнуто относительно коммутатора, то есть для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Пример 1.15. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G. Докажем, что отображение

$$\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

их присоединенных алгебр Ли является изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{h}$ и $\phi(\mathfrak{h})$. Так как отображение φ регулярно (то есть его дифференциал в каждой точке инъективен), отображение ϕ, связанное с отображением φ_* по формуле (1.14), также будет инъективным, следовательно, будет являться биекцией на образ. Кроме того, в теореме 1.6 мы доказали, что оно будет гомоморфизмом алгебр Ли. Итак, отображение ϕ является изоморфизмом алгебр Ли.

6.2. Однопараметрические подгруппы и левоинвариантные векторные поля.

Однопараметрической подгруппой группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $g : \mathbb{R} \to G$, где $(\mathbb{R}, +)$ – аддитивная группа Ли, построенная в примере 1.4.

Другими словами, гладкое отображение $g : \mathbb{R} \to G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G, если для любых вещественных чисел t_1, t_2 имеем

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2).$$

Замечание 1.6. Так как однопараметрическая подгруппа $g(t)$ является, в частности, гомоморфизмом абстрактных групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(G, \cdot)$, то она переводит нейтральный элемент в нейтральный, то есть $g(0) = e$.

Лемма 1.4. *Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – ненулевое левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Тогда порожденный им локальный поток Φ_X на гладком многообразии G обладает следующими свойствами*

(1) $\Phi_X(\Phi_X(a, t_1), t_2) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;

(2) $\Phi_{\lambda X}(a, t) = \Phi_X(a, \lambda t)$;

(3) $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$,

где $a, b \in G$, $\lambda, t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первые два свойства суть общие свойства локальных потоков, которые были доказаны в курсе Анализ на многообразиях.

Докажем третье свойство. Принцип доказательства тот же, что и в теореме о локальных потоках на произвольных многообразиях. Фиксируем произвольные элементы $a, b \in G$ и обозначим левую часть равенства через $\alpha(t)$, а правую часть равенства $\beta(t)$. Это некоторые кривые. Нам нужно доказать, что это интегральные кривые одного и того же векторного поля, проходящие через одну начальную точку. Имеем

$$\alpha(0) = \Phi_X(b \cdot a, 0) = b \cdot a; \quad \beta(0) = b \cdot \Phi_X(a, 0) = b \cdot a,$$

то есть начальные точки этих кривых совпадают. Далее, вычисляем по теореме о локальном потоке (см. курс Анализ на многообразиях)

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{dt}\Phi_X(b \cdot a, t) = X_{\Phi_X(b \cdot a, t)} = X_{\alpha(t)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \frac{d}{dt} b \cdot \Phi_X(a, t) = \frac{d}{dt} L_b(\Phi_X(a, t)) =$$

Так как точки a и b фиксированы, отображение $L_b : G \to G$ – диффеоморфизм, а $\Phi_X(a, t)$ – кривая на многообразии G. Тогда по доказанному в курсе Анализ на многообразиях получим

$$= ((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)} \frac{d}{dt}\Phi_X(a, t) = ((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)} X_{\Phi_X(a,t)} =$$

Так как X левоинвариантное тензорное поле, $(L_b)_*X = X$. Вычисляем значение обеих частей в точке $\beta(t) \equiv L_b(\Phi_X(a,t))$: $((L_b)_*X)_{L_b(\Phi_X(a,t))} = X_{L_b(\Phi_X(a,t))}$ и пользуемся в левой части критерием ϕ-связанных векторных полей $((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)} X_{\Phi_X(a,t)} = X_{L_b(\Phi_X(a,t))}$. Возвращаясь к цепочке равенств, получим

$$= X_{L_b(\Phi_X(a,t))} = X_{\beta(t)}.$$

Итак, кривые $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются интегральными кривыми одного и того же векторного поля X с началом в точке $b \cdot a$, следовательно, они совпадают. □

Теорема 1.7. *Всякое левоинвариантное векторное поле на группе Ли полно. При этом его интегральная кривая с началом в единице группы является однопараметрической подгруппой.*

Доказательство. Пусть дано левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G. Нам нужно доказать, что локальный поток Φ_X, определяемый этим векторным полем определен на всем многообразии $G \times \mathbb{R}$. Для этого мы сначала определим локальный поток в некоторой окрестности единицы и для некоторого интервала для t, а затем, определим его для всех t и левыми сдвигами разнесем по всей группе G.

Пусть определен локальный поток $\Phi(e,t)$ для точек некоторой окрестности e и для значений t в некотором интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Покажем, что этот поток можно определить для любого t из этого интервала и любого элемента $a \in G$. Действительно, по третьему свойству из леммы 1.4 получим

$$\Phi_X(a,t) = a \cdot \Phi_X(e,t).$$

Так как определена правая часть равенства, определена и левая часть равенства.

Покажем теперь, что локальный поток можно определить для любого вещественного числа t. Опять воспользуемся леммой 1.4. Очевидно, что для любого t существует такое натуральное число n, что число $\frac{t}{n}$ будет принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а значит, для $\frac{t}{n}$ локальный поток будет определен. Тогда

$$\Phi_X(a,t) = \Phi_X(a, n \cdot \frac{t}{n}) = \Phi_X(e, \underbrace{\frac{t}{n} + \ldots + \frac{t}{n}}_{n\,\text{раз}}) = \Phi_X(\ldots(\Phi_X(a, \frac{t}{n}), \frac{t}{n})\ldots).$$

Каждый локальный поток в скобках правой части равенства определен, следовательно, определен и локальный поток в левой части равенства.

Итак, отображение Φ_X определено на многообразии $G \times \mathbb{R}$,а значит, векторное поле X полно.

Обозначим $g(t) = \Phi_X(e,t)$ – это интегральная кривая векторного поля X с началом в точке e. Нам нужно доказать, что она является однопараметрической подгруппой группы Ли G. Во-первых, заметим, что это отображение вида $g : \mathbb{R} \to G$, определенное на всей числовой прямой. Во-вторых, имеем

$$g(t_1 + t_2) = \Phi_X(e, t_1 + t_2) = \Phi_X(\Phi_X(e, t_1), t_2) = \Phi_X(e, t_1) \cdot \Phi_X(e, t_2) = g(t_1) \cdot g(t_2).$$

Здесь мы воспользовались свойствами (1) и (3) леммы 1.4, то есть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G по определению. □

Теорема 1.8. *Всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля на этой группе Ли с началом в единице группы.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G. По сути это гладкая кривая, а значит, имеет смысл говорить о касательных векторах к этой кривой в ее точках. Пусть

$$\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t)$$

касательный вектор к $g(t)$ в точке $g(0) = e$ (см. замечание 1.6). На касательный вектор ξ в единице группы G мы можем подействовать изоморфизмом β^{-1} (см. теорему 1.3) и получить левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, то есть $X = \beta^{-1}(\xi)$. Докажем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X. Имеем для произвольного фиксированного вещественного числа t_1

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} g(t) = \left.\frac{d}{d(t-t_1)}\right|_{t-t_1=0} g((t-t_1)+t_1) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(\tau + t_1) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(t_1) \cdot g(\tau) =$$

$$= ((L_{g(t_1)})_*)_e \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(\tau) = ((L_{g(t_1)})_*)_e \xi = X_{g(t_1)}.$$

Здесь мы воспользовались определением однопараметрической подгруппы и левоинвариантностью векторного поля X (то есть тем, что $X_g = ((L_g)_*)_e\xi$).

Итак, кривая $g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}g(t) = X_{g(t)}; \\ g(0) = e, \end{cases}$$

следовательно, она будет интегральной кривой построенного левоинвариантного векторного поля X с началом в единице группы e. □

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на группе Ли G и множеством однопараметрических подгрупп группы Ли G. Оно сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическую подгруппу $g(t)$, являющуюся интегральной кривой этого векторного поля с началом в единице группы. Эта однопараметрическая подгруппа однозначно определена условиями

$$1)\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = X_e; \quad 2)\, g(0) = e. \tag{1.16}$$

Элемент X присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, порождающий однопараметрическую подгруппу указанным образом, называется *генератором* этой однопараметрической подгруппы.

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. *Экспоненциальным отображением* называется отображение

$$exp : \mathfrak{g} \to G,$$

определяемое соотношением

$$exp\, X = \Phi_X(e, 1).$$

Теорема 1.9. *Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы Ли G с генератором $X \in \mathfrak{g}$ допускает представление*

$$g(t) = exp(tX).$$

Доказательство. Учитывая свойство (2) леммы 1.4, получим

$$g(t) = \Phi_X(e, t) = \Phi_{tX}(e, 1) = exp(tX).$$

□

Следующую теорему мы примем без доказательства.

Теорема 1.10. *Отображение $exp : \mathfrak{g} \to G$ является гладким отображением относительно канонической гладкой структуры векторного пространства на $\mathfrak{g}$. Более того, существует окрестность $U_0(\mathfrak{g})$ нуля в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и окрестность $U_e(G)$ единицы в группе Ли G, такие что экспоненциальное отображение exp будет диффеоморфизмом этих окрестностей.*

Окрестности $U_0(\mathfrak{g})$ и $U_e(G)$ из теоремы 1.10 называются *нормальными окрестностями.*

Нам потребуется еще одна теорема из теории групп Ли, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1.11. *Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G, \end{array}$$

где $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли групп Ли G и H соответственно.

В частности, если $\varphi : G \to G$ – гомоморфизм группы Ли G на себя, то коммутативную диаграмму можно записать в виде

$$\varphi \circ exp = exp \circ \phi.$$

2. Однородные пространства.

§ 2.1. Действие группы на многообразии.

1.1. Действие абстрактной группы на множестве.

Говорят, что группа (абстрактная) G *действует на множестве M слева*, если задан гомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h),\ g, h \in G.$$

Аналогичным образом, говорят, что группа G *действует на множестве M справа*, если задан антигомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(h) \circ \varphi(g),\ g, h \in G.$$

Представления одной и той же группы бывают очень разными. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.1. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $G = GL(2, \mathbb{R})$, $G_M = G_{\mathbb{R}^2}$ – группа преобразований плоскости. Напомним, что аффинное преобразование плоскости, имеющее инвариантную точку, называется *центроаффинным*. Без ограничения общности можно считать, что инвариантной точкой будет точка $(0, 0)$. Тогда центроаффинное преобразование задается формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где c_{ij} – вещественные числа, такие что $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$.

Зададим представление φ_1 следующим образом: каждой матрице $c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ центроаффинное преобразование, заданное формулами (2.1). Проверим, что это будет левое действие. Рассмотрим произвольные матрицы $g = (g_{ij})$ и $h = (h_{ij})$. Тогда матрица gh имеет вид

$$gh = \begin{pmatrix} g_{11}h_{11} + g_{12}h_{21} & g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22} \\ g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21} & g_{21}h_{12} + g_{22}h_{22} \end{pmatrix}.$$

Этой матрице представление φ_1 поставит в соответствие центроаффинное преобразование, заданное формулами

$$\begin{aligned} x' &= (g_{11}h_{11} + g_{12}h_{21})x + (g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22})y \\ y' &= (g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21})x + (g_{21}h_{12} + g_{22}h_{22})y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вычислим теперь $\varphi_1(g)$, $\varphi_1(h)$ и их композиции $\varphi_1(g) \circ \varphi_1(h)$, $\varphi_1(h) \circ \varphi_1(g)$.

$$\varphi_1(g) : \begin{array}{l} x' = g_{11}x + g_{12}y \\ y' = g_{21}x + g_{22}y \end{array}; \quad \varphi_1(h) : \begin{array}{l} x' = h_{11}x + h_{12}y \\ y' = h_{21}x + h_{22}y \end{array}.$$

Находим композиции отображений

$$\varphi_1(g) \circ \varphi_1(h) : \begin{array}{l} x' = g_{11}(h_{11}x + h_{12}y) + g_{12}(h_{21}x + h_{22}y) \\ y' = g_{21}(h_{11}x + h_{12}y) + g_{22}(h_{21}x + h_{22}y) \end{array}$$

$$\varphi_1(h) \circ \varphi_1(g) : \begin{array}{l} x' = h_{11}(g_{11}x + g_{12}y) + h_{12}(g_{21}x + g_{22}y) \\ y' = h_{21}(g_{11}x + g_{12}y) + h_{22}(g_{21}x + g_{22}y) \end{array}.$$

Сравнивая получившиеся результаты с (2.2), мы видим, что

$$\varphi_1(gh) = \varphi_1(g) \circ \varphi_1(h); \quad \varphi_1(gh) \neq \varphi_1(h) \circ \varphi_1(g).$$

Другими словами, действие φ_1 является левым и не является правым.

Зададим отображение $\varphi_2 : GL(2, \mathbb{R}) \to G_{\mathbb{R}^2}$ следующим образом: если определитель матрицы g меньше нуля, то $\varphi_2(g) = id$; если определитель матрицы g меньше нуля, то $\varphi_2(g) = S_\ell$, где S_ℓ – осевая симметрия с некоторой фиксированной осью ℓ. Покажем, что такое действие является и левым и правым. Пусть даны матрицы g и h. Здесь нужно рассмотреть четыре случая (четыре возможности для знаков определителей матриц g и h). Мы посмотрим один случай (остальные рассматриваются аналогично). Пусть $det\, g > 0$ и $det\, h < 0$, следовательно, $det\,(gh) = det\, g \cdot det\, h < 0$. Тогда $\varphi_2(g) = id$, $\varphi_2(h) = S_\ell$, $\varphi_2(gh) = S_\ell$. С другой стороны,

$$\varphi_2(g) \circ \varphi_2(h) = \varphi_2(h) \circ \varphi_2(g) = id \circ S_\ell = S_\ell \circ id = S_\ell = \varphi_2(gh).$$

Остальные случаи дадут аналогичные результаты. Следовательно, мы получим, что представление φ_2 будет и левым и правым.

Предложение 2.1 **.** *Задание гомоморфизма φ равносильно заданию отображения $\Phi : G \times M \to M$, обладающего свойствами*

1) $\Phi(e, m) = m$;
2*a*) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$ *для левого действия*;
2*b*) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m)$ *для правого действия*;

Доказательство. Рассмотрим случай левого действия (правое действие рассматривается аналогичным образом). Пусть дано левое действие группы G на множестве M, то есть задан гомоморфизм φ. Зададим отображение Φ формулой

$$\Phi(g, m) = \varphi_g(m),\ g \in G, m \in M.$$

Здесь для краткости мы обозначили $\varphi(g) = \varphi_g$.

Докажем, что отображение Φ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\Phi(e, m) = \varphi_e(m)$. По свойству гомоморфизма групп имеем $\varphi_e = id$, а значит, $\Phi(e, m) = m$ и первое свойство доказано. Во-вторых, имеем

$$\Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) = \varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m).$$

Здесь мы воспользовались определением левого действия. Итак, отображение Φ обладает обладает обоими свойствами.

Обратно, пусть задано отображение Φ, удовлетворяющее указанным свойствам. Тогда определим отображение $\varphi : G \to G_M$ по формуле

$$\varphi(g)(m) \equiv \varphi_g(m) = \Phi(g, m),$$

то есть по той же самой формуле, но прочитанной справа налево. Проверим, что отображение φ является гомоморфизмом (абстрактных) групп. Имеем

$$\varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m) = \Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m).$$

Здесь мы воспользовались вторым свойством отображения Φ. □

Отображение Φ называется *действием группы G на множестве M*, а гомоморфизм φ называется *представлением группы G на множестве M*.

Если представление φ инъективно, то оно называется *точным*, а соответствующее действие называется *эффективным*.

Пример 2.2. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Это группа относительно операции умножения комплексных чисел. Множество G можно изобразить как окружность с центром в некоторой фиксированной точке O, которая принята за начало системы координат. Обозначим плоскость, в которой лежит эта окружность, через σ.

Рассмотрим множество поворотов плоскости σ на всевозможные направленные углы вокруг точки O. Это группа. Обозначим ее G^R_σ. Очевидно, что группа поворотов G^R_σ является подгруппой группы G_σ преобразований плоскости σ.

Построим отображение $\varphi : G \to G_\sigma$ следующим образом. Пусть $z \in G$ – произвольное комплексное число. Его можно представить в виде $z = e^{i\psi}$, где $-\pi < \psi \le \pi$. Тогда комплексному числу $z = e^{i\psi}$ поставим в соответствие поворот R^ψ_O вокруг точки O на угол ψ. Докажем, что отображение φ задает левое (одновременно являющееся и правым) действие группы G на множестве точек плоскости σ. Для комплексных чисел $z_1 = e^{i\psi_1}, z_2 = e^{i\psi_2} \in G$ имеем

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(e^{i(\psi_1+\psi_2)}) = R^{\psi_1+\psi_2}_O = R^{\psi_1}_O \circ R^{\psi_2}_O$$

(все вычисления проводятся по модулю 2π). Итак, отображение φ является гомоморфизмом, следовательно, задает левое действие. Почему действие будет также и правым?

Проверим, будет ли это действие эффективным. Для этого нам нужно проверить, будет ли гомоморфизм φ инъективным. Пусть $z = e^{i\psi} \in Ker\, \varphi$, то есть $\varphi(z) = id \equiv R^0_O$. Тогда $\psi = 0$ и $z = 1$. Итак, отображение φ является инъективным, а действие группы G эффективным.

Замечание 2.1. В случае эффективного действия группы G элемент $g \in G$ можно отождествлять с его образом φ_g. Тогда можно записать, что $(gh)m = g(hm)$ для левого действия и $(gh)m = h(gm)$ для правого действия. Здесь $g, h \in G$, $m \in M$. Отметим, что для правого действия удобнее принять запись $\varphi_g(m) = mg$. Тогда условие антигомоморфности отображение φ будет записано в виде $m(gh) = (mg)h$. Чем и обусловлено название „правое действие“.

Задача 2.1. Пусть на множестве M задано произвольное левое (правое) действие группы G. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ имеем $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

Доказательство. Так как φ_g – это элемент группы преобразований множества M, он является биекцией, а значит, обратим. Докажем, что $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id$. Равенство $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id$ докажите самостоятельно. Имеем для любой точки $m \in M$ (используя определение левого действия)

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(m) = \varphi_{g^{-1}g}(m) = \varphi_e(m) = id(m) = m.$$

□

Замечание 2.2. Если действие группы G на множестве M не является эффективным, то от него можно перейти к эффективному действию группы $G^* = G/Ker\,\varphi$ на M по формуле

$$\tilde{\varphi}_{gH}(m) = \varphi_g(m),\ H = Ker\,\varphi.$$

Множество $Ker\,\varphi$ называется *ядром неэффективности.*

Покажем, что такое определение действия группы G^* корректно. Пусть $\tilde{g} \in gH$ – другой представитель класса gH. Тогда $\tilde{g} = gh$, где $h \in H$ – некоторый элемент из H. Пусть для определенности действие группы G на M является левым. Тогда

$$\varphi_{\tilde{g}}(m) = \varphi_{gh}(m) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) =$$

Так как $h \in Ker\,\varphi$, получаем, что $\varphi_h(m) = id(m) = m$. Тогда

$$= \varphi_g \circ id(m) = \varphi_g(m).$$

Докажите самостоятельно, что действие группы G^* является эффективным.

Пример 2.3. Приведем пример не эффективного действия группы. Рассмотрим в качестве M множество всех прямых плоскости, проходящих через фиксированную точку O. Такое множество прямых называется пучком прямых с центром в точке O. В качестве G возьмем подгруппу группы аффинных преобразований плоскости, которая оставляет точку O инвариантной. Эта группа изоморфна группе $GL(2, \mathbb{R})$. Так как движение переводит прямую в прямую, $GL(2, \mathbb{R})$ будет действовать на пучке прямых (элемент этого множества – прямая).

Такая группа действует на множестве M не эффективно, так как в тождественное преобразование отображаются все гомотетии. Другими словами, не только тождественное преобразование переводит множество M в себя, но еще и произвольная гомотетия. Следовательно, ядром гомоморфизма $\varphi : GL(2, \mathbb{R}) \to G_M$ будет множество матриц вида λI_2, где λ – произвольное вещественное число, отличное от нуля.

Построим группу $G^* = GL(2, \mathbb{R})/Ker\,\varphi$. Согласно предыдущему замечанию такая группа будет действовать уже эффективно. Прикинем, что это будет за группа. Вспомним 1 курс: формулы аффинного преобразования, которое оставляет инвариантной точку (без ограничения общности мы можем считать, что это начало координат) имеют вид

$$x' = c_{11}x + c_{12}y$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y,$$

где (x, y) – координаты исходной точки M, (x', y') – координаты точки M', в которую переходит точка M. Матрица $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2$ – это как раз матрица из $GL(2, \mathbb{R})$. В группе G^* элементом является класс матриц. Он имеет вид $C \cdot (\lambda I_2) = \lambda C$, $\lambda \neq 0$. Тогда формулы полученного преобразования будут иметь вид

$$\rho x' = c_{11}x + c_{12}y$$
$$\rho y' = c_{21}x + c_{22}y.$$

Здесь мы разделили обе части на λ и обозначили $\frac{1}{\lambda} = \rho$. Это формулы проективного преобразования проективной прямой, а пучок прямых – одна из моделей проективной прямой. Значит, G^* изоморфна группе проективных преобразований проективной прямой.

Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g(x) = y$.

Пример 2.4. Действие группы G из примера 2.2 не является транзитивным. Действительно, рассмотрим две точки плоскости σ, принадлежащие различным концентрическим окружностям с центром в точке O. Тогда не существует поворота, переводящего одну точку во вторую.

Пример 2.5. Возьмем в качестве G группу $\mathbb{R}^2$ с операцией сложения. В качестве множества M возьмем множество точек плоскости σ и фиксируем на ней аффинную систему координат. Тогда отображение φ, ставящее в соответствие каждой паре чисел (a, b) параллельный перенос на вектор с координатами (a, b) в базисе фиксированной системы координат будет задавать левое (и одновременно правое действие) группы $\mathbb{R}^2$ на множестве точек плоскости σ (докажите самостоятельно). Это действие будет транзитивным, так как для любых двух точек x, y плоскости существует параллельный перенос, переводящий одну точку во вторую. Возьмем координаты вектора этого параллельного переноса. Это будет элемент g группы $\mathbb{R}^2$, для которого $\varphi_g(x) = y$. Таким образом, группа $\mathbb{R}^2$ действует на плоскости транзитивно.

Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если из того, что для элемента $g \in G$ существует точка $m \in M$, такая что $\varphi_g(m) = m$, следует $g = e$. Как всегда e – единица группы.

Замечание 2.3. Определение эффективного действия мы можем сформулировать в другом виде: действие называется эффективным, если для любого элемента $g \in G$ имеем, что для любого элемента $m \in M$ равенство $\varphi_g(m) = m$ влечет $g = e$.

Действительно, пусть φ инъективно. Возьмем произвольное $g \in G$ и пусть для произвольной точки $m \in M$ имеем $\varphi_g(m) = m$, то есть $\varphi_g = id$. В других обозначениях $\varphi(g) = id$. Так как $\varphi(e) = id$ и φ инъективно, получаем, что $g = e$. Обратно, пусть выполняется альтернативное определение эффективного действия. Нам нужно доказать инъективность φ. Для этого докажем, что ядро φ состоит только из единицы e. Пусть $g \in Ker\varphi$ – произвольный элемент. Тогда $\varphi(g) = id$ или для любого $m \in M$ имеем $\varphi_g(m) = m$. Тогда по альтернативному определению эффективного действия получим $g = e$. Что и требовалось доказать. Итак, для эффективного действия группы на множестве мы получили два эквивалентных определения.

Сравнивая альтернативное определение эффективного действия и определение свободного действия, получаем, что любое свободное действие эффективно.

Обратное, вообще говоря, не верно. Действие из примера 2.2 является эффективным, но не свободным, так как точка O является неподвижной точкой не только тождественного преобразования.

Пусть группа G действует на множестве M. Тогда любая точка $m \in M$ порождает отображение

$$\sigma_m : G \to M,$$

сопоставляя каждому элементу $g \in G$ точку

$$\sigma_m(g) = \varphi_g(m).$$

Образ отображения σ_m называется *орбитой* точки m относительно действия группы G и обозначается $Orb(m)$.

Пример 2.6. В примере 2.2 орбитами группы G будут концентрические окружности с центром в точке O.

Задача 2.2. Докажите, что $Orb(m) = M$ тогда и только тогда, когда действие транзитивно.

Лемма 2.1. *Если действие свободно, то отображение $\sigma_m : G \to M$ является биекцией на соответствующую орбиту.*

Доказательство. Нам нужно доказать инъективность отображения σ_m. Пусть для некоторых точек $g_1, g_2 \in G$ имеем $\sigma_m(g_1) = \sigma_m(g_2)$. Тогда согласно определению отображения σ_m получим

$$\varphi_{g_1}(m) = \varphi_{g_2}(m). \tag{2.3}$$

Так как отображение φ_{g_2} является преобразованием множества M, оно обратимо. Умножим обе части равенства 2.3 слева на $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. Так как $\varphi_{g_2}^{-1} = \varphi_{g_2^{-1}}$, получим $\varphi_{g_2^{-1}} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. По определению левого действия это равносильно $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(m) = m$. Так как действие свободно, $g_2^{-1}g_1 = e$, то есть $g_1 = g_2$.

Итак, мы показали, что для свободного действия отображение $\sigma_m : G \to Orb(m)$ является биекцией. □

Из леммы непосредственно следует

Теорема 2.1. *Если группа G действует на множестве M свободно, то M распадается в дизъюнктивное объединение орбит, находящихся в биективном соответствии с группой G.*

Пример 2.7. Рассмотрим группу G из примера 2.2 и множество точек плоскости σ без точки O. Тогда на множестве $\sigma \setminus \{O\}$ группа G действует свободно и это множество распадается в дизъюнктивное объединение концентрических окружностей с центром в точке O. Каждая такая окружность является орбитой действия группы G.

1.2. Действие группы Ли на многообразии.

Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Говорят, что G *гладко действует на многообразии* M, если действие $\Phi : G \times M \to M$ является гладким отображением и его представление $\varphi : G \to Diff\,M$ является отображением в группу диффеоморфизмов многообразия M (если M – группа Ли, то в группу автоморфизмов M, то есть диффеоморфизмов, сохраняющих операцию).

Пример 2.8**.** Пусть G – r-мерная группа Ли, $\varphi : G \to Aut\,V$ – ее представление, то есть гомоморфизм групп Ли в группу Ли $Aut\,V$ некоторого n-мерного линейного пространства V.

Фиксируем локальную карту (U, ψ) на группе Ли G с координатами $(x^1, \ldots, x^r)$, а также глобальную карту на V, порожденную базисом $b = (e_1, \ldots, e_n)$. Этот базис порождает базис, а значит и глобальную карту в векторном пространстве $\mathfrak{T}^1_1(V)$ тензоров типа (1,1), а именно, базис $(e^i_j = e^i \otimes e_j)$. Здесь как всегда $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис для b. Координатами тензора t типа (1,1) в этой карте будут его координаты $\{t^i_j\}$ относительно базиса (e^i_j).

В этой паре карт гомоморфизм φ задается гладкими функциями (по определению гомоморфизма групп Ли § 1.5.)

$$t^i_j = t^i_j(x^1, \ldots, x^r);\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда действие $\Phi : G \times V \to V$ группы G на векторном пространстве V задается в этих картах уравнениями

$$\tilde{X}^i = t^i_j(x^1, \ldots, x^n) X^j,$$

где $(X^1, \ldots, X^n)$ – координаты вектора $X \in V$ в базисе b. Следовательно, отображение Φ является гладким, так как существуют непрерывные частные производные по переменным $x^1, \ldots, x^r$ и $X^1, \ldots, X^n$.

Вывод: всякое линейное представление группы Ли порождает ее гладкое действие в соответствующем линейном пространстве.

Особенно важным частным случаем линейного представления группы Ли является так называемое *присоединенное представление*. Здесь в качестве векторного пространства берется ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 2.9**.** Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, то есть множество левоинвариантных векторных полей на группе G. Группа Ли G действует на себя слева посредством так называемых *внутренних автоморфизмов*. Именно, любой элемент $a \in G$ порождает отображение $A_a : G \to G$ по формуле

$$A_a(x) = axa^{-1},\ x \in G.$$

Это отображение является гомоморфизмом, так как

$$A_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = A_a(x)A_a(y),\ x, y \in G.$$

Более того, $A_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, где L_a – это левый сдвиг на элемент a, $R_{a^{-1}}$ – правый сдвиг на элемент a^{-1}. Тогда отображение A_a будет диффеоморфизмом как композиция таковых (см. теорему 1.2). Следовательно, отображение A_a является изоморфизмом группы Ли G на себя, то есть автоморфизмом.

Далее, имеем для любых $a, b \in G$

$$A_a \circ A_b(x) = A_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = A_{ab}(x),\ x \in G.$$

Тогда отображение $A : G \to Aut(G) \subset G_G$, определенное формулой

$$A(g) = A_g$$

является гомоморфизмом групп. Так как групповые операции гладки, отображение A будет гладким, следовательно, отображение A является представлением группы Ли G на себе. Само действие $\Phi : G \times G \to G$ задается формулой

$$\Phi(g, x) = A_g(x) = gxg^{-1}.$$

Пусть $g \in G$ – фиксированный элемент и $A_g : G \to G$ – внутренний автоморфизм. Его дифференциал $((A_g)_*)_e : T_e(G) \to T_e(G)$ в единице e группы будет изоморфизмом касательного пространства. Тогда отображение

$$Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$$

будет автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ – канонический изоморфизм (см. теорему 1.3). Определим отображение

$$Ad : G \to Aut\,\mathfrak{g}$$

по формуле $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$. Это отображение будет гомоморфизмом групп Ли. Действительно,

$$Ad(gh) = \beta^{-1} \circ ((A_{gh})_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g \circ A_h)_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ ((A_h)_*)_e \circ \beta = \\ = Ad(g) \circ Ad(h).$$

Таким образом, отображение Ad является линейным представлением группы G на ее алгебре Ли. Это представление называется *присоединенным представлением* группы Ли.

Рассмотрим дифференциал отображения Ad в единице e группы G:

$$(Ad_*)_e : T_e(G) \to T_{id}(Aut\, \mathfrak{g}).$$

Касательное пространство $T_{id}(Aut\, \mathfrak{g})$ изоморфно алгебре Ли группы Ли $Aut\, \mathfrak{g}$. Канонический изоморфизм обозначим $\tilde{\beta}$. Как мы знаем (см. замечание 1.5), алгебра Ли группы Ли $Aut\, \mathfrak{g}$ – это алгебра эндоморфизмов $End\, \mathfrak{g}$. Таким образом, определено отображение

$$ad = \tilde{\beta}^{-1} \circ (Ad_*)_e \circ \beta : \mathfrak{g} \to End\, \mathfrak{g}.$$

Можно показать, что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли, а значит, линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себе. Это представление также называется *присоединенным представлением.*

Кроме того, имеет место формула

$$ad_X Y = [X, Y],$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad_X = ad(X) \in End\, \mathfrak{g}$, квадратные скобки обозначают коммутатор левоинвариантных векторных полей в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 2.10**.** Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Обозначим через $\mathscr{B}$ множество всех базисов V. На этом множестве определено действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Именно, пусть $b = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathscr{B}$ – произвольный базис. Положим для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\varphi_g(b) = \Phi(g, b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n}) \equiv (g_j^i e_i),\ i, j = 1, \ldots, n.$$

В силу невырожденности матрицы g, векторы $\varepsilon_i = g_i^j e_j$ будут линейно независимы, а значит, будут образовывать базис в V. Следовательно, $\varphi_g(b) \in \mathscr{B}$. Очевидно, что отображение φ_g – биекция, то есть преобразование множества $\mathscr{B}$, то есть $\varphi_g \in G_{\mathscr{B}}$.

Выясним, какое это действие: правое или левое. Пусть $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ – произвольные элементы. Тогда

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = \varphi_h(\varphi_g(e_1, \ldots, e_n)) = \varphi_h(g_j^i e_i) = (h_k^j (g_j^i e_i)) = ((h_k^j g_j^i) e_i). \tag{2.4}$$

По правилу записи матрицы перехода от одного базиса к другому (именно ею является матрица g) верхний индекс обозначает номер координаты вектора нового базиса. Эти координаты записываются в столбец матрицы перехода, следовательно, верхний индекс нумерует строки матрицы g. Тогда нижний индекс нумерует столбцы. Вернемся к последнему базису в (2.4). По правилу умножения матриц (строка на столбец) в первом сомножителе должны меняться номера столбцов, то есть нижние индексы. В нашем случае первой матрицей является матрица g, а вторым сомножителем является матрица h. Возвращаясь к цепочке равенств (2.4), получим

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = ((gh)_k^i e_i) = \varphi_{gh}(b).$$

Итак, $\varphi_h \circ \varphi_g = \varphi_{gh}$, то есть действие правое.

Так как для любых двух базисов всегда существует матрица перехода от одного к другому, то действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ является транзитивным. Кроме того, оно свободно, так как только единичная матрица не меняет любой базис.

Действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ позволяет ввести на множестве $\mathscr{B}$ базисов векторного пространства V структуру гладкого многообразия и превратить действие Φ в гладкое действие на гладком многообразии $\mathscr{B}$.

Чтобы построить гладкую структуру на $\mathscr{B}$ нам потребуется внести туда топологию и построить атлас. Начнем с карт атласа. Фиксируем базис $b_0 \in \mathscr{B}$. Тогда возникает отображение

$$\sigma_{b_0} : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathscr{B},$$

определенное формулой $\sigma_{b_0}(g) = \varphi_g(b_0)$, то есть каждой матрице g оно ставит в соответствие базис, в которых переходит b_0 под действием этой матрицы. Очевидно, что это биекция, следовательно, существует обратное отображение $\psi = \sigma_{b_0}^{-1}$, которое сопоставляет каждому базису $b \in \mathscr{B}$ матрицу перехода $C(b_0, b)$ от базиса b_0 к базису b. Внесем во множество $\mathscr{B}$ топологию, потребовав, чтобы отображение ψ было гомеоморфизмом, то есть открытыми множествами в $\mathscr{B}$ назовем полные прообразы открытых множеств в $GL(n,\mathbb{R})$ при отображении ψ. Можно показать, что эта топология не зависит от выбора базиса b_0, то есть если выбрать другой фиксированный базис β_0, то множество множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{b_0}^{-1}$, будет совпадать с множеством множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{\beta_0}^{-1}$.

Тогда пара $(\mathscr{B},\psi)$ будет глобальной картой на топологическом пространстве $\mathscr{B}$. Эта карта каждому базису ставит в соответствие матрицу перехода от базиса b_0 к нему. Это n^2 вещественных чисел, следовательно, размерность многообразия $\mathscr{B}$ будет n^2.

Покажем, что относительно построенной гладкой структуры действие группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ будет гладким. Фиксируем глобальную карту $(\mathscr{B},\psi)$, порожденную базисом b_0. Нам нужно убедиться, что функции, задающие отображение

$$\Phi : GL(n,\mathbb{R})\times\mathscr{B}\to\mathscr{B}$$

в картах $(GL(n,\mathbb{R})\times\mathscr{B}, id\times\psi)$ и $(\mathscr{B},\psi)$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем аргументам. Рассмотрим произвольный базис $b\in\mathscr{B}$. Пусть в карте $(\mathscr{B},\psi)$ он имеет координаты $(x^i_j)=X$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису b. Для любого элемента $g\in GL(n,\mathbb{R})$ обозначим координаты базиса $\Phi(g,b)\equiv bg$ в карте $(\mathscr{B},\psi)$ через $(\tilde{x}^i_j)=\tilde{X}$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису bg. Тогда

$$\tilde{X}=\psi(bg)=C(b_0,bg)=C(b_0,b)g=Xg.$$

Переходя к элементам матриц, получим

$$\tilde{x}^i_j=x^i_k g^k_j.$$

В этих формулах переменными являются как x^i_k, так и g^k_j. Очевидно, что правые части формул имеют частные производные любого порядка, следовательно, отображение Φ гладко.

Итак, группа Ли $GL(n,\mathbb{R})$ гладко, свободно и транзитивно действует на n^2-мерном гладком многообразии $\mathscr{B}$.

разделение курсов

Пример 2.11. Пусть G – основная аффинная группа (см. пример 1.2). Определим ее действие на плоскости $\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & 0 & a_1\\ 0 & e^t & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ 1\end{pmatrix},$$

где элемент $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$ мы отождествляем со столбцом $\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ 1\end{pmatrix}$. Это действие мы можем записать в виде формул

$$\begin{aligned} y^1&=e^t x^1+a_1\\ y^2&=e^t x^2+a_2\end{aligned}$$

Мы видим, что это формулы гомотетий с положительным коэффициентом e^t и параллельных переносов на плоскости. Это подгруппа группы всех аффинных преобразований. Этим объясняется название основная аффинная группа.

Проверьте самостоятельно, что основная аффинная группа действует на плоскости эффективно, транзитивно, но не свободно.

Пусть G – абстрактная группа (существование гладкой структуры на ней требовать не будем). Очевидно, что тогда о гладком действии на многообразии M такой группы речь идти не может, так как для отображения $\Phi : M\times G\to G$ второй сомножитель не обладает гладкой структурой, то есть на нем нет атласа, то есть у его элементов нет координат, а значит, не возникают переменные по которым мы могли бы дифференцировать. Но мы можем потребовать, чтобы гомоморфизм φ действовал из абстрактной группы G в группу $Diff\,M$, то есть в группу диффеоморфизмов многообразия M. Тогда для любого элемента $g\in G$ его образ φ_g будет диффеоморфизмом $\varphi_g : M\to M$ (биекция и дифференцируем сколько хотим и его и обратное отображение). В случае, когда мы работаем с группой Ли M дополнительно будем требовать от диффеоморфизма φ_g, чтобы он сохранял групповую операцию. Ближайшие построения будут использовать именно такую ослабленную конструкцию. Будем говорить при этом, что *группа G гладко действует на многообразии M*.

Напомним, что действие группы G на любом множестве, в частности, на многообразии M порождает на нем отношение эквивалентности: точки $x,y\in M$ находятся в этом отношении тогда и только тогда, когда существует элемент $g\in G$, такой что $y=\varphi_g(x)$. Понятно, что классами эквивалентности по этому отношению будут орбиты действия группы G. Множество орбит будем обозначать $Orb_G M$. Зададимся вопросом: какие структуры возникают на этом множестве? Заметим, во-первых, что так как M, в частности, является топологическим пространством, на множестве $Orb_G M$ возникает структура топологического пространства с фактортопологией. Однако, гладкой структуры на нем, вообще говоря, не индуцируется. В качестве примера посмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ на котором действует группа $SO(3, \mathbb{R})$ (превращаясь во всевозможные вращения вокруг нуля). Орбитами действия этой группы будут концентрические двумерные сферы с центром в нуле и точка нуль. Ставя в соответствие каждой сфере ее радиус, мы можем построить биекцию между множеством орбит и множеством неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Можно показать, что пространство орбит гомеоморфно пространству $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ с топологией, индуцированной евклидовой топологией прямой. С другой стороны, топологическое пространство $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ не является гладким многообразием (это гладкое многообразие с краем), так как у точки нуль нет окрестности гомеоморфной открытому множеству в $\mathbb{R}$.

Итак, в общем случае пространство орбит может быть устроено достаточно сложно, и мы только можем утверждать следующее.

Теорема 2.2. *Пусть группа G гладко действует на многообразии M. Тогда отображение $\pi : M \to Orb_G M$, ставящее в соответствие каждой точке $m \in M$ ее орбиту, является непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Напомним определения из топологии, которые потребуются в этом доказательстве.

Пусть дано топологическое пространство X и некоторое отношение эквивалентности R на нем. Определим отображение $\phi : X \to X/R$, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие класс $[x] \in X/R$, которому принадлежит этот элемент. Будем называть открытыми множествами в X/R такие множества V, для которых полный прообраз $\phi^{-1}(V)$ открыт в X. Построенное семейство множеств является топологией на X/R и называется фактортопологией.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств X и Y называется непрерывным, если для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств X и Y называется открытым, если для любого открытого множества $U \subset X$ его образ $f(U)$ открыт в Y.

Приступим к доказательству. Сравнивая определение фактор топологии и непрерывного отображения, мы видим, что отображение π является непрерывным.

Докажем, что оно открыто. Пусть $U \subset M$ – произвольное открытое множество. Надо доказать, что $\pi(U)$ открыто в $Orb_G M$. По определению фактор топологии это означает, что нужно доказать, что $\pi^{-1}(\pi(U))$ открыто в M. Выясним, что из себя представляет множество $\pi^{-1}(\pi(U))$. Сначала всем точкам $m \in U \subset M$ ставятся в соответствие их орбиты (там кроме точек m появляются и другие точки), а затем объединяем все точки этих орбит, то есть объединяем все точки, которые получаются из $m \in U$ действием всевозможных элементов $g \in G$.

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{m \in U} Orb_G m = \cup_{g \in G} \varphi_g(U).$$

Так как U – открытое множество, φ_g – диффеоморфизм (и, в частности, гомеоморфизм), множества $\varphi_g(U)$ будут открытыми (гомеоморфизм переводит открытые в открытые). По определению топологии объединение любого семейства открытых множеств будет открытым множеством. □

Мы сказали, что топологическое пространство $Orb_G M$ в общем случае не имеет индуцированной гладкой структуры. Но есть частный случай, в котором такая структура индуцируется. Рассмотрим его подробнее.

1.3. Дискретное действие.

Гладкое действие группы G на многообразии M называется *дискретным*, если для любой точки $m \in M$ существует окрестность U_m, такая что для любого элемента $g \in G$, $g \neq e$ имеем $U_m \cap \varphi_g(U_m) = \emptyset$.

Пример 2.12. Пусть $M = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$. На $\mathbb{R}$ атлас состоит из одной карты $(\mathbb{R}, id)$ и действие группы целых чисел на $\mathbb{R}$ в этой карте задается так: $x' = x + t$. Здесь $t \in \mathbb{Z}$ – произвольное фиксированное число, x – переменная, x' – функция. Это отображение $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Очевидно, что это биекция, бесконечно дифференцируемая в обе стороны. Пусть $a \in \mathbb{R}$ – произвольная точка. В качестве окрестности возьмем $U_a = \{x \in \mathbb{R} : a - \frac{1}{4} < x < a + \frac{1}{4}\}$. Это интервалы с серединой в точке a и длиной $\frac{1}{2}$. Если сдвинуть любой такой интервал на любое целое число, то получаем новый интервал не пересекающийся с исходным. Следовательно, действие группы целых чисел на вещественной прямой является дискретным.

Пусть $M = \mathbb{R}^2$ – плоскость, $G = \mathbb{R}^2$. Действие зададим так: $x' = x + a$; $y' = y + b$, где (x, y) – координаты на многообразии M, (a, b) – произвольная фиксированная пара чисел. Другими словами, $\varphi_{(a,b)} = T_{(a,b)}$ – параллельный перенос на вектор с координатами (a, b). Очевидно, что это гладкое действие группы на многообразии. Это действие не будет дискретным, так как для любой точки плоскости какой бы маленький открытый круг мы не взяли, всегда найдется параллельный перенос на вектор, длина которого меньше радиуса этого круга. В результате мы получим пересекающиеся окрестности.

Задача 2.3. Пусть группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ (рассматриваем как группу Ли). Покажите, что для любого представления $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut\,\mathbb{R}^2$ это действие не будет дискретным.

Пусть X, Y – топологические пространства. Непрерывное сюръективное отображение $\pi : Y \to X$ называется *накрывающим отображением или накрытием*, если для любой точки $p \in X$ существует окрестность U_p, такая что $\pi^{-1}(U_p) = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U_p$ является гомеоморфизмом, а также для различных α и β имеем $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Если π – накрывающее отображение, то окрестность U_p называется *хорошо накрытой*.

Пример 2.13. Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ прямой на окружность, заданное формулой $\phi(t) = e^{2\pi i t}$. Это отображение можно представить следующим образом: прямая накручивается на окружность. Подробно мы изучали его в курсе Топология. Это накрытие.

Теорема 2.3. *Если группа G дискретно действует на многообразии M, то естественная проекция $\pi : M \to Orb_G M$ будет накрывающим отображением.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что π является накрывающим отображением, то есть надо для каждой точки $p \in Orb_G M$ построить хорошо накрытую окрестность. Возьмем произвольную точку $a \in \pi^{-1}(p)$. Так как группа G действует на многообразии M дискретно, у точки a существует окрестность U_a, такая что для любого $g \in G$, $g \neq e$ получаем $\varphi_g U_a \cap U_a = \emptyset$. Обозначим $U_p = \pi(U_a)$ и возьмем полный прообраз этой окрестности $V = \pi^{-1}(U_p)$. Это открытое множество, так как π непрерывно. Как мы видели в доказательстве теоремы 2.2,

$$V = \cup_{g \in G} \varphi_g(U_a).$$

Множества $\varphi_g(U_a)$ открыты, так как φ_g диффеоморфизмы, и для различных g такие множества не пересекаются из-за дискретности действия.

Нам осталось доказать, что для любого $g \in G$ отображение $\pi|_{\varphi_g U_a} : \varphi_g U_a \to U_p$ является гомеоморфизмом. Начнем с отображения $\pi|_{U_a} U_a \to U_p$. Пусть $x, y \in U_a$, которые отображаются в один и тот же элемент из U_p, то есть отображаются в одну и ту же орбиту. Тогда существует элемент $h \in G$, такой что $x = \varphi_h(y)$, то есть $x \in \varphi_h U_a$, то есть U_a и $\varphi_h U_a$ имеют общий элемент, что противоречит дискретному действию группы. Следовательно, отображение $\pi|_{U_a}$ инъективно, а в силу определения окрестности U_p ($U_p = \pi(U_a)$) еще и сюръективно, то есть биективно. В силу теоремы 2.2 отображение π, а значит , и его сужение на открытое множество будет непрерывным и открытым (то есть непрерывным будет обратное отображение). Следовательно, $\pi|_{U_a}$ – гомеоморфизм.

Заметим, что $\pi|_{\varphi_g U_a} = \pi|_{U_a} \circ \varphi_{g^{-1}}$ будет гомеоморфизмом как композиция таковых. □

Следствие 2.1. Если группа G гладко и дискретно действует на многообразии M, то на множестве орбит $Orb_G M$ существует естественная гладкая структура, относительно которой отображение π является гладким накрывающим отображением.

Доказательство. Пусть $p \in Orb_G M$ – произвольная точка. В теореме 2.3 мы построили для нее хорошо накрытую окрестность U_p и гомеоморфизм $\pi|_{U_a} U_a \to U_p$, где $\pi^{-1}(U_p) = \cup_{g \in G} \varphi_g U_a$. При необходимости уменьшая U_p, можно добиться того, чтобы множество U_a содержалось в некоторой локальной карте (U, ψ) на многообразии M. Тогда пара $(U_p, \psi \circ \pi|_{U_a}^{-1})$ будет локальной картой на топологическом пространстве $Orb_G M$. Любые две такие карты гладко связаны, так как

$$(\psi \circ \pi|_{U_a}^{-1}) \circ (\tilde{\psi} \circ \pi|_{U_a}^{-1})^{-1} = \psi \circ \tilde{\psi}^{-1}.$$

Дополняя полученный атлас до гладкой структуры, получаем структуру гладкого многообразия на $Orb_G M$.

Отображение π в построенной паре соответствующих карт (U_a, ψ) и $(U_p, \psi \circ \pi|_{U_a}^{-1})$ будет задаваться равенствами $y^i = x^i$. Очевидно, что это гладкие функции. □

Пример 2.14. Пусть группа $\mathbb{Z}$ целых чисел действует на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Мы уже видели, что это гладкое дискретное действие (см. пример 2.12). Тогда по доказанной теореме на множестве орбит $Orb_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ индуцируется гладкая структура, то есть $Orb_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ становится гладким многообразием. Это многообразие диффеоморфно окружности S^1. Действительно, зададим отображение $f : Orb_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} \to S^1$ по формуле $f(Orb_{\mathbb{Z}} x) = e^{2\pi i x}$. Так как $e^{2\pi i (x+k)} = e^{2\pi i x}$, $k \in \mathbb{Z}$, это отображение не зависит от выбора точки из орбиты. Это и будет искомый диффеоморфизм.

Этот пример можно обобщить. Пусть группа $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ действует на многообразии $\mathbb{R}^n$. Тогда $Orb_{\mathbb{Z}^n}\mathbb{R}^n$ будет n-мерным тором $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

Пример 2.15. Пусть S^1 – окружность (для простоты пусть это единичная окружность с центром в нуле). Это гладкое многообразие. Рассмотрим на ней действие группы $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Представление этой группы задается следующим образом: $\varphi_1 = id$, $\varphi_{-1} = S_0$ – центральная симметрия с центром в нуле (центре окружности). Каждая орбита действия группы $\mathbb{Z}_2$ на S^1 – это пара диаметрально противоположных точек окружности S^1. Многообразие $S^1/\mathbb{Z}_2$ диффеоморфно проективной прямой. Действительно, поставим в соответствие каждому элементу из $S^1/\mathbb{Z}_2$ (это пара диаметрально противоположных точек) прямую, которая проходит через эти точки. В результате получим пучок прямых с центром в центре окружности S^1. Как мы знаем, пучок прямых – это одна из моделей (вещественной) проективной прямой. Построенное соответствие является биекцией. Кроме того, можно доказать, что это диффеоморфизм. Таким образом, мы получаем, что $S^1/\mathbb{Z}_2$ – это проективная прямая.

Рассмотренный пример можно обобщить. Возьмем $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1} и рассмотрим на ней действие группы $\mathbb{Z}_2$. Тогда $S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ будет $(n-2)$-мерным (вещественным) проективным пространством.

§ 2.2. Примеры однородных пространств.

2.1. Определение.

Однородным пространством M называется гладкое многообразие, на котором фиксировано гладкое транзитивное действие группы Ли G. Группа Ли G называется *фундаментальной группой* преобразований этого однородного пространства.

Пример 2.16. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ – плоскость (предполагается фиксированной прямоугольная декартова система координат), $G = \mathbb{R}^2$, $\varphi_{(a,b)} = T_{(a,b)}$ – группа G действует на плоскости в виде параллельных переносов. Это действие транзитивное (для любых двух точек найдется параллельных перенос, переводящий одну точку в другую) и гладкое, так как в локальных картах задается формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$ (дифференцируются по всем четырем буквам: a, b, x, y). Следовательно, плоскость – однородное пространство, а $\mathbb{R}^2$ – фундаментальная группа.

Пример 2.17. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ – плоскость (предполагается фиксированной прямоугольная декартова система координат), $G = GL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ с операцией

$$(\tilde{g}, (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0))(g, (x_0, y_0)) = (\tilde{g}g, \tilde{g}(x_0, y_0) + (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)). \tag{2.5}$$

Выражение $\tilde{g}(x_0, y_0)$ означает умножение матрицы $\tilde{g}$ на столбец (x_0, y_0).

Каждому элементу группы G представление φ ставит в соответствие аффинное преобразование плоскости. Задаваемое действие гладкое и транзитивное. Следовательно, $\mathbb{R}^2$ опять однородное пространство, но уже с другой фундаментальной группой.

Пусть M – однородное пространство, G – его фундаментальная группа, будем предполагать действие левым, а многообразие M – связным. Фиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим подмножество

$$H_p = \{g \in G \mid \varphi_g(p) = p\},$$

то есть множество элементов группы G, которым соответствуют диффеоморфизмы M, оставляющие точку p инвариантной. Множество H_p является подгруппой в группе G. Также можно доказать, что она является группой Ли. Эта группа Ли называется *группой изотропии* многообразия M в точке p.

Пусть $q \in M$ – другая точка. Тогда в силу транзитивности действия существует элемент $g \in G$, такой что $q = \varphi_g(p)$. Рассмотрим внутренний автоморфизм $A_g : G \to G$, задаваемый формулой $A_g(h) = ghg^{-1}$. Докажем, что $A_g(H_p) = H_q$.

В самом деле, пусть $h \in H_p$ – произвольный элемент. Тогда по определению группы изотропии получим $\varphi_h(p) = p$. Нам нужно проверить, что $A_g(h)$ сохраняет точку q. Имеем по определению левого действия

$$\varphi_{A_g(h)}(q) = \varphi_{ghg^{-1}}(q) = \varphi_g \circ \varphi_h \circ \varphi_{g^{-1}}(q) = \varphi_g \circ \varphi_h \circ (\varphi_g)^{-1}(q) = \varphi_g \circ \varphi_h(p) = \varphi_g(p) = q.$$

Таким образом, мы показали, что $A_g(H_p) \subset H_q$. Так как точка q переводится в точку p при помощь элемента g^{-1}, получим $A_{g^{-1}}(H_q) \subset H_p$. Действуя на обе части этого включения отображением A_g и учитывая, что $(A_g)^{-1} = A_{g^{-1}}$, получим $H_q \subset A_g(H_p)$. Тем самым требуемое равенство доказано. Так как A_g является автоморфизмом группы G (изоморфизм группы G на себя), его сужение на подгруппу H_p будет изоморфизмом групп H_p и H_q. Эти подгруппы называются *сопряженными* посредством элемента g.

Пример 2.18. Рассмотрим плоскость $M = \mathbb{R}^2$ и группу $G = GL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ из примера 2.17. Мы помним, что представление φ превращает эту группу в группу аффинных преобразований плоскости. Рассмотрим точку $(0,1)$ и найдем в ней группу изотропии. Это все аффинные преобразования, которые оставляют инвариантной точку $(0,1)$ (они называются *центроаффинными*). Их формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}(y-1) \\ y'-1 &= c_{21}x + c_{22}(y-1). \end{aligned}$$

Другими словами, каждое такое преобразование можно отождествить с невырожденной 2×2 -матрицей (непосредственно проверяется, что операция при этом сохраняется), то есть $H_{(0,1)} = GL(2,\mathbb{R})$. В точке $(1,1)$ группа изотропии также состоит из центроаффинных преобразований, но их формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x'-1 &= c_{11}(x-1) + c_{12}(y-1) \\ y'-1 &= c_{21}(x-1) + c_{22}(y-1). \end{aligned}$$

Каждое такое преобразование также можно отождествить с матрицей (c_{ij}) из $GL(2,\mathbb{R})$, то есть группа изотропии $H_{(1,1)} = GL(2,\mathbb{R})$. Как мы и ожидали в разных точках группы изотропии должны быть изоморфны.

Из точки $(0,1)$ в точку $(1,1)$ можно попасть с помощью разных аффинных преобразований. Возьмем, например, параллельный перенос на вектор $(1,0)$. В группе G параллельному переносу соответствует элемент $g_1 = (I_2,(1,0))$, где I_2 – единичная матрица порядка 2. Еще из точки $(0,1)$ в точку $(1,1)$ можно попасть с помощью сдвига с осью $y=0$. Выясним, какому элементу группы G соответствует этот сдвиг. Для этого нам потребуется написать формулы этого сдвига. Вспоминаем первый курс. Любое аффинное преобразование задается формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0. \end{aligned}$$

Как мы знаем, сдвиг имеет прямую инвариантных точек. Инвариантные точки по формулам аффинного преобразования ищутся следующим образом: вместо x' подставляем x, а вместо y' подставляем y и решаем полученную систему уравнений. Так как в случае сдвига мы имеем прямую инвариантных точек, полученные уравнения должны быть пропорциональны и задавать эту прямую. Если уравнение прямой инвариантных точек записать в виде $Ax+By+C=0$, то получим соотношения (λ и μ – вводимые нами обозначения)

$$\tfrac{c_{11}-1}{A} = \tfrac{c_{12}}{B} = \tfrac{x_0}{C} = \lambda; \quad \tfrac{c_{21}}{A} = \tfrac{c_{22}-1}{B} = \tfrac{y_0}{C} = \mu.$$

Выражая c_{ij} и подставляя их в формулы аффинного преобразования, получим формулы сдвига с осью $Ax+By+C=0$

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda(Ax+By+C) \\ y' &= y + \mu(Ax+By+C) \end{aligned}$$

Найдем формулы сдвига в нашем случае. Ось имеет уравнение $y=0$ и точка $(0,1)$ переходит в точку $(1,1)$. Тогда подставляя это в общие уравнения получим, что $\lambda = 1$ и $\mu = 0$. Тогда формулы имеют вид $x' = x+y$, $y' = y$. Этому преобразованию соответствует элемент

$$g_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0,0) \right)$$

Зададимся вопросом: одинаковый ли изоморфизм A_g получится из элементов g_1 и g_2 (параллельного переноса и сдвига)? Для этого возьмем какое-нибудь аффинное преобразование из группы изотропиии точки $(0,1)$ и посмотрим, какие преобразования будет соответствовать ему при изоморфизмах A_{g_1} и A_{g_2}. Для этого нам потребуются элементы g_1^{-1} и g_2^{-1}. Проще всего найти их через соответствующие аффинные преобразования. Для параллельного переноса обратным будет параллельный перенос на противоположный вектор, следовательно, $g_1^{-1} = (I_2,(-1,0))$. Чтобы найти обратное преобразование для сдвига, выразим x и y через x' и y' (это будут формулы обратного преобразования)

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= y'. \end{aligned}$$

Тогда

$$g_2^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0,0) \right).$$

Рассмотрим поворот на 90^0 вокруг точки $(0,1)$. Его формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= -(y-1) \\ y'-1 &= x. \end{aligned}$$

Тогда соответствующий элемент h будет иметь вид

$$h = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1,1) \right).$$

Вычисляем $A_{g_1}(h) = g_1 h g_1^{-1}$ и $A_{g_2}(h) = g_2 h g_2^{-1}$, используя закон умножения (2.5).

$$g_1 h g_1^{-1} = (I_2, (1,0)) \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1,1) \right) (I_2, (-1,0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (2,0) \right).$$

Аналогично получаем, что

$$g_2 h g_2^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (2,1) \right)$$

В первом случае мы получили поворот на угол 90^0 вокруг точки $(1,1)$, а во втором случае мы получили центроаффинное преобразование, отличное от поворота.

Из приведенного примера мы можем сделать следующий вывод: хотя группы изотропии в различных точках однородного пространства изоморфны, но этот изоморфизм не канонический, он зависит от выбора элемента g, „соединяющего“ точки p и q.

Задача 2.4. В условиях предыдущего примера возьмите в качестве элемента g элемент, соответствующий какому-нибудь повороту, и элемент, соответствующий какой-нибудь гомотетии (естественно так, чтобы точка $(0,1)$ переходила в точку $(1,1)$). Постройте изоморфизм с помощью этих элементов и посмотрите, в какое аффинное преобразование будет соответствовать повороту на 90^0 вокруг точки $(0,1)$.

2.2. Каноническая модель однородного пространства.

Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – ее замкнутая подгруппа (замкнутость рассматривается в смысле топологии). Рассмотрим множество левых смежных классов группы G по подгруппе H, то есть фактормножество G/H. Напомним, что отношение эквивалентности в данном случае задается так: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $a^{-1}b \in H$. В общем случае на фактормножестве G/H не индуцируется никакой групповой структуры. Из курса алгебры известно, что групповая структура будет индуцироваться тогда и только тогда, когда H является нормальным делителем. Напомним, что подгруппа H называется нормальным делителем группы G, если множество левых смежных классов по этой подгруппе совпадает с множеством правых смежных классов, то есть $\{gH\} = \{Hg\}$. Это равенство множеств мы можем переписать в таком виде: $gHg^{-1} \subset H$ для любого $g \in G$. Вспоминая определение внутреннего автоморфизма группы Ли, мы можем сказать, что подгруппа H будет нормальным делителем в группе Ли G тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно всех внутренних автоморфизмов.

Итак, если H – нормальный делитель в группе Ли G, то множество G/H обладает структурой группы, операция в этой группе задается по формуле

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

Задача 2.5. Докажите, что операция определена корректно, то есть не зависит от выбора представителя из смежного класса.

Если H не является нормальным делителем, то G/H не является группой, а тем более группой Ли. Но если H – замкнутая подгруппа Ли в G, то на множестве смежных классов G/H индуцируется структура гладкого многообразия. А именно, верна следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 2.4. *Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа Ли в ней и пусть G/H – множество левых смежных классов по подгруппе H и $\pi : G \to G/H$ естественная проекция $\pi(g) = gH$. Тогда на G/H существует единственная гладкая структура, такая что*
1) $\pi : G \to G/H$ – гладкое отображение;
2) существуют локальные гладкие сечения проекции, то есть для любого элемента $gH \in G/H$ существует окрестность U_{gH} и существует гладкое отображение $s : U_{gH} \to G$, такое что $\pi \circ s = id$.
Эта гладкая структура называется канонической.

Теорема 2.5. *Пусть N – гладкое многообразие. В обозначениях предыдущей теоремы отображение $f : G/H \to N$ будет гладким тогда и только тогда, когда $F = f \circ \pi : G \to N$ – гладкое.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Отображение $f \circ \pi$ будет гладким как композиция таковых.

$\Leftarrow$). Пусть отображение F является гладким. Фиксируем произвольную точку $gH \in G/H$ и рассмотрим локальное сечение $s : U \to G$ над соответствующей окрестностью точки gH (такая окрестность существует по предыдущей теореме). Тогда

$$f = f \circ id = f \circ (\pi \circ s) = (f \circ \pi) \circ s = F \circ s$$

является гладким как композиция таковых. □

Пусть группа Ли G гладко и транзитивно действует на гладком многообразии M. Фиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим группу изотропии H_p в этой точке. Определим отображение $\beta : G/H \to M$ следующим образом
$$\beta(gH) = \varphi_g(p).$$
Это отображение определено корректно в смысле независимости выбора элемента g из класса gH. Действительно, если $\tilde{g} \in gH$ – другой элемент, то $g^{-1}\tilde{g} = h \in H$ или $\tilde{g} = gh$. Тогда
$$\varphi_{\tilde{g}}(p) = \varphi_{gh}(p) = \varphi_g \circ \varphi_h(p) = \varphi_g(p).$$
Отображение β сюръективно. В самом деле, если $q \in M$ – произвольная точка, то в силу транзитивности действия, найдется элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g(p) = q$. Элемент g определяет класс gH. При этом
$$\beta(gH) = \varphi_g(p) = q.$$

Наконец, отображение β инъективно. В самом деле, если $\beta(g_1H) = \beta(g_2H)$, то $\varphi_{g_1}(p) = \varphi_{g_2}(p)$. Так как φ_{g_2} – диффеоморфизм, получим $(\varphi_{g_2})^{-1}\varphi_{g_1}(p) = p$ или $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(p) = p$, то есть $g_2^{-1}g_1 \in H$, то есть $g_1H = g_2H$.

Итак, отображение β является биекцией. Кроме того, оно является гладким отображением. В самом деле, фиксируя точку $p \in M$ получим
$$\beta \circ \pi(g) = \beta(gH) = \varphi_g(p) = \Phi(p, g) = \Phi \circ i_p(g),$$
где $i_p : G \to M \times G$ – отображение вложения (оно гладко), Φ – действие группы Ли на многообразии M (оно также гладко). Тогда $\beta \circ \pi$ – гладкое отображение и по теореме 2.5 гладким будет отображение β. Можно показать, что и обратное отображение будет гладким, а значит, β является диффеоморфизмом. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.6. *Пусть M – однородное пространство, G – его фундаментальная группа преобразований, H – подгруппа изотропии. Тогда M диффеоморфно многообразию G/H, снабженному канонической гладкой структурой.*

Пример 2.19. Гладкое многообразие G/H является однородным пространством с фундаментальной группой G и группой изотропии H.

В самом деле, действие $\varphi_a : G/H \to G/H$ группы G на многообразии G/H определяется так:
$$\varphi_a(gH) = (ag)H.$$
Убедитесь самостоятельно, что это определение корректно, то есть отображение не зависит от выбора представителя класса gH.

Это действие транзитивно, так как для любых двух точек g_1H и g_2H первую во вторую переводит элемент $g_2g_1^{-1}$.

Это левое действие, так как
$$\varphi_a \circ \varphi_b(gH) = \varphi_a((bg)H) = (a(bg))H = ((ab)g)H = \varphi_{ab}(gH).$$
Это гладкое действие. Чтобы убедиться в этом, нам нужно показать, что φ_a будет диффеоморфизмом для любого $a \in G$. Фиксируем локальное сечение $s : U \subset G/H \to G$. Тогда отображение φ_a можно представить в виде
$$\varphi_a(gH) = \pi \circ L_a \circ s(gH).$$
Так как все три отображения гладкие, φ_a также будет гладким отображением. Так как $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$, отображение φ_a является биекцией и обратное также гладко, то есть φ_a является диффеоморфизмом.

Итак, группа G гладко действует на многообразии G/H. Вычислим группу изотропии. Так как группы изотропии в различных точках изоморфны, нам достаточно вычислить ее в одной точке. Возьмем точку H. Тогда группа изотропии – это множество элементов $a \in G$, таких что $\varphi_a(H) = H$, то есть $aH = H$, то есть $a \in H$. Итак, группа изотропии есть H.

Однородное пространство G/H называется *канонической моделью* однородного пространства с фундаментальной группой G и группой изотропии H. Как мы видели, любое однородное пространство с этими же данными ему диффеоморфно.

2.3. Примеры однородных пространств.

Пример 2.20. Группа Ли $G = \mathbb{R}$ действует на гладком многообразии $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,|z| = 1\}$ по формуле $\varphi_t(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(x+t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Вычислим группу изотропии H. Так как все группы изотропии изоморфны, можно вычислить ее в удобной точке. Пусть это будет $1 \in S^1$. Элемент $t \in H$ тогда и только тогда, когда $\varphi_t(e^{2\pi i 0}) = e^{2\pi i 0}$, то есть $e^{2\pi i(0+t)} = e^{2\pi i 0}$, то есть $t \in \mathbb{Z}$. Таким образом, S^1 – однородное пространство и каноническая модель окружности как однородного пространства имеет вид $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Пример 2.21. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ – плоскость, $G = GL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ с операцией из примера 2.17. Эта группа гладко и транзитивно действует на плоскости, следовательно, плоскость является однородным пространством с фундаментальной группой G. Мы видели, что группой изотропии является группа $GL(2,\mathbb{R})$. Тогда каноническая модель плоскости будет иметь вид $(GL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2)/GL(2,\mathbb{R})$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ мы рассматривали еще и действие группы $\mathbb{R}^2$, которая с помощью отображения φ превращалась в группу параллельных переносов. Это также гладкое транзитивное действие. Теперь плоскость однородное пространство с фундаментальной группой $\mathbb{R}^2$. Ее каноническая модель $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Из этого примера мы видим, что одно и то же гладкое многообразие можно рассматривать как разные однородные пространства. Они будут отличаться фундаментальными группами. Также заметим, что у одного и того же гладкого многообразия будут существовать различные каноническим модели.

Пример 2.22. Рассмотрим арифметическое векторное пространство $M = \mathbb{R}^n$ и группу Ли $G = GL(n,\mathbb{R})$. Действие $GL(n,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ задается следующим образом:

$$y^i = A^i_j x^j, \tag{2.6}$$

где $x = (x^1,\dots,x^n)$, $y = (y^1,\dots,y^n) \in \mathbb{R}^n$, $A = (A^i_j) \in GL(n,\mathbb{R})$. Если элементы из $\mathbb{R}^n$ записывать в виде столбцов, то действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ можно записать в матричном виде: $y = Ax$. Очевидно, что это гладкое транзитивное действие (так как $\varphi = id$ и формулы (2.6) линейны).

На $\mathbb{R}^n$ определяется стандартное скалярное произведение по формуле

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i = (x^1,\dots,x^n)\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = x^T y,$$

где x^T означает транспонированный столбец, то есть строку.

Теорема 2.7. *Группа Ли $O(n,\mathbb{R})$ является группой автоморфизмов стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, для элемента $A \in GL(n,\mathbb{R})$ имеем $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ тогда и только тогда, когда $A \in O(n,\mathbb{R})$.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Покажем, что $A \in O(n,\mathbb{R})$, то есть $A^T A = I_n$. Заметим, что по определению скалярного произведения

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T(Ay) = x^T(A^T A)y.$$

Пусть (ε_i) – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (у n-ки ε_i на i-м месте стоит 1, а остальные – нули). Подставим в предыдущую формулу $x = \varepsilon_i$, $y = \varepsilon_j$. Тогда в силу условия

$$\delta_{ij} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle A\varepsilon_i, A\varepsilon_j\rangle = (\varepsilon_i)^T(A^T A)\varepsilon_j = ((A^T A)^i_1, (A^T A)^i_2, \dots, (A^T A)^i_n)\varepsilon_j = (A^T A)^i_j.$$

Мы получаем, что $A^T A = I_n$.

$\Leftarrow$). Пусть $A^T A = I_n$. Тогда

$$\langle Ax, Ay\rangle = x^T(A^T A)y = x^T y = \langle x, y\rangle.$$

□

Напомним, что гиперсферой S^{n-1} в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$S^{n-1} = \{x = (x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = R^2\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n\ \langle x, x\rangle = R^2\}.$$

Следствие 2.2. Группа $O(n,\mathbb{R})$ переводит гиперсферу S^{n-1} в себя.

Доказательство. Пусть $x \in S^{n-1}$ – произвольная точка. Тогда $\langle x, x\rangle = R^2$. Имеем для любого элемента $A \in O(n, \mathbb{R})$
$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = R^2,$$
то есть точка Ax также принадлежит гиперсфере S^{n-1}. □

Тогда действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ можно сузить до действия подгруппы $O(n, \mathbb{R})$ на гиперсфере S^{n-1}. Это действие также будет гладким. Покажем, что оно будет и транзитивным. Пусть $x, y \in S^{n-1}$ – две произвольные точки гиперсферы единичного радиуса. Тогда на них можно смотреть как на два вектора из $\mathbb{R}^n$ единичной длины. Дополним каждый из них до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Так как для любой пары ортонормированных базисов существует единственная матрица $A \in O(n, \mathbb{R})$ (она превращается в движение пространства $\mathbb{R}^n$, которое переводит первый базис во второй), то $y = Ax$. Таким образом, действие группы ортогональных матриц на гиперсфере единичного радиуса транзитивно. Так как гиперсфера произвольного радиуса диффеоморфна гиперсфере единичного радиуса, транзитивным будет действие $O(n, \mathbb{R})$ на любой гиперсфере.

Итак, мы показали, что гиперсфера S^{n-1} является однородным пространством с фундаментальной группой $O(n, \mathbb{R})$. Вычислим ее группу изотропии и построим каноническую модель.

Рассмотрим гиперсферу единичного радиуса. В качестве точки, в которой будем вычислять группу изотропии возьмем $p = \varepsilon_n$ – n-й вектор стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что эта точка принадлежит гиперсфере. По определению группы изотропии имеем: матрица $A \in O(n, \mathbb{R})$ принадлежит группе изотропии тогда и только тогда, когда $A\varepsilon_n = \varepsilon_n$, то есть
$$(A^1_n, \ldots, A^{n-1}_n, A^n_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$
то есть $A^i_n = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $A^n_n = 1$. Кроме того, так как $AA^T = I_n$ получаем
$$1 = (AA^T)^n_n = \sum_{i=1}^{n} A^n_i (A^T)^i_n = \sum_{i=1}^{n-1} A^n_i A^n_i + 1,$$
то есть $\sum_{i=1}^{n-1}(A^n_i)^2 = 0$, то есть $A^n_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, матрица A из группы изотропии должна иметь такой вид
$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Выясним, какие условия должны налагаться на матрицу $\tilde{A} \in M_{n-1,n-1}$. Опять расписываем условие ортогональности матрицы A:
$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = AA^T = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{A}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}\tilde{A}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
то есть $\tilde{A}\tilde{A}^T = I_{n-1}$, то есть $\tilde{A} \in O(n-1, \mathbb{R})$.

Итак, если $A \in H_p$, то $A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\tilde{A} \in O(n-1, \mathbb{R})$.

Обратно, если матрица A имеет полученный вид, то $A\varepsilon_n = \varepsilon_n$, то есть принадлежит группе изотропии H_p.

Построим отображение $\varkappa : O(n-1, \mathbb{R}) \to H_p$ по формуле
$$\varkappa(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Очевидно, что это биекция. Кроме того, непосредственно проводя умножение, убеждаемся, что $\varkappa(\tilde{A}\tilde{B}) = \varkappa(\tilde{A})\varkappa(\tilde{B})$, то есть отображение $\varkappa$ является изоморфизмом групп. Наконец, само это отображение и обратное ему являются гладкими. Следовательно, $\varkappa$ – изоморфизм групп Ли. Следовательно, группы H_p и $O(n-1, \mathbb{R})$ могут быть отождествлены. Итак, мы получили, что группа изотропии гиперсферы – это ортогональная группа порядка $n-1$, то есть $H_p = O(n-1, \mathbb{R})$. Тогда каноническая модель гиперсферы S^{n-1} имеет вид $O(n, \mathbb{R})/O(n-1, \mathbb{R})$.

В частности, для окружности $S^1 = O(2, \mathbb{R})/O(1, \mathbb{R})$. Выясним, как выглядит группа $O(1, \mathbb{R})$. Это матрица размера 1×1, то есть вещественное число. Кроме того, должно выполняться условие $AA^T = I_1$, то есть $A^2 = 1$. Следовательно, $O(1, \mathbb{R}) = \{1, -1\}$, то есть это пара чисел: 1 и -1. Итак, мы получили еще одну каноническую модель окружности: $S^1 = O(2, \mathbb{R})/\{1, -1\}$.

Задача 2.6. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, докажите, что гиперсферу можно еще получить и так:

$$S^{n-1} = SO(n,\mathbb{R})/SO(n-1,\mathbb{R}).$$

В частности, для окружности $S^1 = SO(2,\mathbb{R})/\{1\} = SO(2,\mathbb{R})$. Из этого следует, что окружность диффеоморфна группе Ли $SO(2,\mathbb{R})$.

Пример 2.23. (комплексная версия предыдущего примера)

Группа Ли $GL(n,\mathbb{C})$ действует на арифметическом комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ посредством матричного умножения $\Phi : GL(n,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ по формуле $w = Cz$, где $z, w \in \mathbb{C}^n$, $C \in GL(n,\mathbb{C})$. Здесь также как и в вещественном случае элементы из $\mathbb{C}^n$ записываются в столбец. В индексной форме это действие запишется в виде $w^i = C^i_j z^j$.

В $\mathbb{C}^n$ определено стандартное эрмитово скалярное произведение по формуле

$$\langle\langle z, w\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}^i w^i = \bar{z}^T w.$$

Теорема 2.8. *Группа Ли $U(n)$ совпадает с группой автоморфизмов стандартного эрмитова скалярного произведения. Другими словами, для элемента $C \in GL(n,\mathbb{C})$ имеем $\langle\langle Cz, Cw\rangle\rangle = \langle\langle z, w\rangle\rangle$ тогда и только тогда, когда $C \in U(n)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть выполняется $\langle\langle Cz, Cw\rangle\rangle = \langle\langle z, w\rangle\rangle$. Рассмотрим стандартный базис (ε_i) пространства $\mathbb{C}^n$. Он такой же как у пространства $\mathbb{R}^n$, то есть вектор ε_i имеет 1 на i-м месте и нули на остальных местах.

$$\delta_{ij} = \langle\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle\rangle = \langle\langle C\varepsilon_i, C\varepsilon_j\rangle\rangle = \overline{(C\varepsilon_i)}^T C\varepsilon_j = \varepsilon_i^T \bar{C}^T C\varepsilon_j = (\bar{C}^T C)^i_j,$$

то есть $\bar{C}^T C = I_n$, то есть матрица C унитарная.

$\Leftarrow$). Если матрица C унитарная, то

$$\langle\langle Cz, Cw\rangle\rangle = \overline{(Cz)}^T (Cw) = \bar{z}^T \bar{C}^T C w = \bar{z}^T w = \langle\langle z, w\rangle\rangle.$$

□

Следствие 2.3. Действие группы $U(n)$ на $\mathbb{C}^n$ сохраняет подмножество

$$S^{2n-1}_R = \{z \in \mathbb{C}^n \ \langle\langle z, z\rangle\rangle = R^2\}.$$

Чтобы говорить о гладкости действия группы $GL(n,\mathbb{C})$ на пространстве $\mathbb{C}^n$, нужно перейти к овеществлению группы $GL(n,\mathbb{C})$ (только так она превращается в гладкое многообразие, а значит, и в группу Ли) и к овеществлению $\mathbb{C}^n$. Напомним, что овеществление полной комплексной линейной группы состоит из матриц вида

$$GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.7}$$

Овеществление комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$ является $\mathbb{R}^{2n}$. Здесь мы представляем $z = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n$ в виде $(z^i = x^i + iy^i)$ и отождествляем $z = (z^1, \ldots, z^n)$ с набором $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. В блочной записи это будет обозначаться так: $z = (x, y)$. Если мы аналогичным образом обозначим $w = (u, v)$, то действие овеществления комплексной линейной группы на овеществлении комплексного линейного пространства будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{pmatrix},$$

которое, очевидно, будет гладким.

Выясним, что из себя представляет множество S^{2n-1}_R. В силу отождествления z с (x, y), мы получим

$$R^2 = \langle\langle z, z\rangle\rangle = \bar{z}^T z = \sum_{i=1}^{n} (x^i + iy^i)(x^i - iy^i) = \sum_{i=1}^{n} ((x^i)^2 + (y^i)^2).$$

Это уравнение гиперсферы S^{2n-1}_R в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 2.7. Докажите, что овеществление унитарной группы $U(n)$ состоит из матриц вида (2.7) с условиями $AA^T + BB^T = I_n$, $AB^T = BA^T$.

Таким образом, мы получаем, что комплексные матрицы из унитарной группы, превращаясь в матрицы своего овеществления, действуют на гиперсфере S_R^{2n-1}, переводя ее в себя. Это действие гладко и транзитивно (доказательство полностью аналогично вещественному случаю). Следовательно, на нечетномерную сферу можно смотреть как на однородное пространство с фундаментальной группой $U(n)$.

Вычислим группу изотропии, чтобы построить каноническую модель. Возьмем точку $p = \varepsilon_n$ (рассматриваем гиперсферу единичного радиуса). По определению группы изотропии имеем: матрица $C \in U(n)$ принадлежит группе изотропии тогда и только тогда, когда $C\varepsilon_n = \varepsilon_n$, то есть

$$(C_n^1, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n) = (0, 0, \dots, 0, 1),$$

то есть $C_n^i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $C_n^n = 1$. Кроме того, так как $C\bar{C}^T = I_n$ получаем

$$1 = (C\bar{C}^T)_n^n = \sum_{i=1}^{n} C_i^n (\bar{C}^T)_n^i = \sum_{i=1}^{n-1} |C_i^n|^2 + 1,$$

то есть $\sum_{i=1}^{n-1} |C_i^n|^2 = 0$, то есть $C_i^n = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Таким образом, матрица C из группы изотропии должна иметь такой вид

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выясним, какие условия должны налагаться на матрицу $\tilde{C} \in M_{n-1,n-1}$. Опять расписываем условие ортогональности матрицы C:

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = C\bar{C}^T = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tilde{C}}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}\bar{\tilde{C}}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть $\tilde{C}\bar{\tilde{C}}^T = I_{n-1}$, то есть $\tilde{C} \in U(n-1)$.

Итак, если $C \in H_p$, то $C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\tilde{C} \in U(n-1)$.

Обратно, если матрица C имеет полученный вид, то $C\varepsilon_n = \varepsilon_n$, то есть принадлежит группе изотропии H_p.

Итак, мы получаем $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$.

Проводя аналогичные рассуждения для ориентированного пространства $\mathbb{C}^n$ получаем, что $S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1)$.

Замечание 2.4. Пусть, в частности, $n = 2$. Тогда $SU(1) = \{1\}$ и $S^3 = SU(2)/\{1\} = SU(2)$. Таким образом, группа Ли $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере.

Сферы S^1 и S^3 допускают структуры групп Ли $SO(2) \equiv U(1)$ и $SU(2)$ соответственно.

Адамс доказал (используя аппарат алгебраической топологии), что сфера допускает структуру группы Ли только в размерностях 1 и 3.

Пример 2.24. Пусть V – вещественное векторное пространство. Напомним, что группой автоморфизмов векторного пространства V называется множество

$$Aut\,V = \{g \in End\,V, Ker\,g = \{0\}\},$$

где $End\,V$ – множество всех линейных преобразований $g : V \to V$. Мы доказывали, что $Aut\,V$ является группой Ли. Действие этой группы на векторном пространстве V задается по формуле $\Phi(g, X) = g(X) \equiv gX$, то есть отображение g действует на элемент X. Тогда очевидно, что представление этой группы $\varphi : Aut\,V \to Aut\,V$ есть тождественное преобразование, то есть $\varphi(g) = g$. Это левое, эффективное и транзитивное действие.

Действие группы Ли $Aut\,V$ на векторном пространстве V порождает действие этой группы на множестве всех его одномерных подпространств, то есть на проективном пространстве $P(V)$. Если $X \in V$ – произвольный вектор, $[X]$ – соответствующее ему одномерное подпространство, то есть точка из $P(V)$, $g \in Aut\,V$ – произвольное невырожденное линейное преобразование векторного пространства V. Определим отображение $\Phi : Aut(V) \times P(V) \to P(V)$ по формуле

$$\Phi(g, [X]) = [gX].$$

Покажем, что отображение Φ определено корректно в смысле независимости от выбора представителя класса $[X]$. Пусть $Y \in [X]$ – другой вектор. Тогда $Y = \lambda X$, где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Так как $g \in Aut\,V$, это линейное отображение и $gY = g(\lambda X) = \lambda(gX)$, следовательно, $Y \in [gX]$. Таким образом, определение корректно.

Это действие является левым. Действительно, если обозначить его представление через φ, то получим

$$\varphi_g \circ \varphi_h([X]) = [g \circ hX] = [(g \circ h)X] = \varphi_{gh}[X].$$

Но в отличие от других примеров, это действие не является эффективным. Действительно, пусть $g \in Ker\,\varphi$, то есть $\varphi_g([X]) = [X]$, то есть $[gX] = [X]$, то есть существует $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такое что $gX = \lambda X$, то есть $g = \lambda id$. Таким образом, мы получили, что элемент g принадлежит группе гомотетий $Ht(V)$ пространства V, то есть ядро неэффективности $Ker\,\varphi = Ht(V)$. Следовательно, группа $Aut\,V/Ht(V)$ уже эффективно действует на проективном пространстве $P(V)$. Эта группа называется *группой проективных преобразований* проективного пространства $P(V)$ и обозначается $GP(V)$.

Теорема 2.9. *Группа Ли $GP(V)$ гладко, эффективно и транзитивно действует на проективном пространстве $P(V)$.*

Доказательство. Эффективность действия уже проверена. Обозначим $Ht(V) = N$. Тогда действие

$$\Psi : GP(V) \times P(V) \to P(V)$$

задается формулой

$$\Psi(gN, [X]) = \Phi(g, [X]) = [gX].$$

Проверьте самостоятельно, что действие Ψ определено корректно в смысле независимости от выбора элемента g в классе gN. Обозначим через ψ представление этого действия. Тогда $\psi(gN) = \varphi(g)$ или в других обозначениях $\psi_{gN} = \varphi_g$.

Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве V (и менять его не будем). Он индуцирует канонический атлас $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1,\ldots,n}$ на $P(V)$, где $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^{n-1}$ сопоставляет точке $x = [X]$ набор вещественных чисел

$$x^i = \frac{X^i}{X^k} | i = 1, \ldots, n,\ i \neq k,$$

X^i – координаты вектора X в данном базисе. Под действием преобразования gN точка x, попадающая в некоторую карту U_k, переходит в точку $\tilde{x} = [gX]$. Она имеет координаты $\tilde{x}^i = \frac{\tilde{X}^i}{\tilde{X}^k}$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k$. Здесь $\tilde{X}^i$ – координаты вектора gX в том же фиксированном базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

$$\tilde{x}^i = \frac{\tilde{X}^i}{\tilde{X}^k} = \frac{g^i_j X^j}{g^k_t X^t} = \frac{g^i_s X^s + g^i_k X^k}{g^k_m X^m + g^k_k X^k} = \frac{g^i_s \frac{X^s}{X^k} + g^i_k}{g^k_m \frac{X^m}{X^k} + g^k_k} = \frac{g^i_s x^s + g^i_k}{g^k_m x^m + g^k_k}.$$

Здесь индексы $j, t = 1, \ldots, n$, $s, m = 1, \ldots, n$, $s, m \neq k$. Полученные функции дробно-линейные, а значит, гладкие. Следовательно, действие гладкое.

Докажем, что действие транзитивно. Пусть $x = [X]$, $y = [Y]$ – пара точек из проективного пространства $P(V)$. Дополним векторы X и Y до базисов векторного пространства V. Тогда в группе $Aut\,V$ существует преобразование g, которое переводит первый базис во второй (известно из курса Линейная алгебра). Это преобразование переведет X в Y, а преобразование $\psi_{gN} = \varphi_g$, действующее на $P(V)$, переведет точку x в точку y. Следовательно, действие проективной группы является транзитивным. $\square$

Построим каноническую модель проективного пространства. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, $Aut\,V = GL(n, \mathbb{R})$, $P(V) = \mathbb{R}P^{n-1}$. На проективном пространстве $\mathbb{R}P^{n-1}$ (как частном случае проективного пространства $P(V)$) действуют группы $GL(n, \mathbb{R})$ и $G\mathbb{R}P^n = GL(n, \mathbb{R})/Ht(\mathbb{R}^n)$ – группа проективных преобразований. Обе они действуют гладко и транзитивно (но первая не эффективно). Следовательно, проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ будет однородным с соответствующими фундаментальными группами. Мы могли бы строить каноническую модель, отталкиваясь от этих групп (находить для них группы изотропии). Но обычно для построения модели берут более узкую фундаментальную группу, а именно ортогональную группу $O(n, \mathbb{R})$. Ее действие будет по-прежнему гладким. Нужно убедиться только в том, что оно транзитивно. В самом деле, если рассмотреть две произвольные точки $x = [X]$ и $y = [Y]$ из проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, то в каждой из этих точек найдется единичный вектор (относительно стандартного скалярного произведения). Тогда дополним каждый из векторов до ортонормированного базиса. Из курса алгебры известно, что существует ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, переводящее первый базис во второй, а значит, первый вектор во второй. Так же как в случае группы $Aut\,V = GL(n, \mathbb{R})$ этот элемент ортогональной группы превратится в преобразование проективного пространства и переведет точку x в точку y, следовательно. действие ортогональной группы на проективном пространстве будет транзитивным. Итак, ортогональная группа является фундаментальной группой проективного пространства.

Вычислим группу изотропии для этого действия. В качестве точки для вычисления группы изотропии возьмем точку $[\varepsilon_n] = [(0, \ldots, 0, 1)] \in \mathbb{R}P^n$. Пусть $A \in H_{[\varepsilon_n]}$. Тогда имеем $[A\varepsilon_n] = [\varepsilon_n]$. Так как $A \in O(n, \mathbb{R})$, она сохраняет длину вектора и, следовательно, $A\varepsilon_n = \pm\varepsilon_n$, то есть $A^i_n = 0$, $i < n$ и $A^n_n = \pm 1$. С другой стороны, из условия $AA^T = I_n$ получаем, что $A^n_i = 0$, $i < n$. Таким образом,

$$A \in H_{[\varepsilon_n]} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Так же как в случае гиперсферы (см. пример 2.22) проверяется, что матрица $\tilde{A} \in O(n-1, \mathbb{R})$. В результате мы получаем, что группа изотропии изоморфна группе $O(n-1,\mathbb{R}) \times O(1,\mathbb{R}) \equiv O(n-1,\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$. Таким образом, каноническая модель вещественного проективного пространства имеет вид

$$O(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R}) \times O(1,\mathbb{R}).$$

Замечание 2.5. На вещественном проективном пространстве также действует группа $SO(n,\mathbb{R})$. Это действие транзитивно, эффективно в случае нечетных n и неэффективно в случае четных n. Поэтому вещественное проективное пространство можно рассматривать как однородное с фундаментальной группой $SO(n,\mathbb{R})$. Вычислим в этом случае группу изотропии. Опять берем точку $[\varepsilon_n]$. Проводя дословно рассуждения предыдущего примера, получаем, что матрица A, принадлежащая группе изотропии, должна иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A} \in O(n-1,\mathbb{R})$. Но в отличие от предыдущего примера, матрица A должна иметь определитель, равный 1, то есть $(det\,\tilde{A})(\pm 1) = 1$, то есть определитель матрицы $\tilde{A}$ должен быть равен 1, если элемент $A^n_n = 1$ и -1, если $det\,\tilde{A} = -1$. Иначе говоря, здесь уже не будет всевозможных пар $(\tilde{A}, \pm 1)$, следовательно, множество таких матриц нельзя отождествить с декартовым произведением $O(n-1,\mathbb{R})$ и $O(1,\mathbb{R})$ как в предыдущем примере. Заметим, что из-за взаимосвязи определителя матрицы $\tilde{A}$ и ± 1, матрицу A можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & det\,\tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Проверьте самостоятельно, что отображение $\tilde{A} \to A$ будет изоморфизмом групп. Другими словами, матрицу A можно отождествить с ортогональной матрицей $\tilde{A}$, следовательно, группа изотропии изоморфна группе $O(n-1,\mathbb{R})$. Итак, каноническая модель проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$ имеет вид

$$SO(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R}).$$

Задача 2.8. Рассмотрим комплексный аналог примера 2.24. Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$. Оно представляет из себя множество (комплексных) одномерных подпространств арифметического пространства $\mathbb{C}^n$. На пространстве $\mathbb{C}^n$ действует полная комплексная линейная группа $GL(n,\mathbb{C})$ по формуле $w = Cz$. Чтобы говорить о гладкости этого действия, мы переходили от пространства $\mathbb{C}^n$ к его овеществлению $\mathbb{R}^{2n}$, а для группы $GL(n,\mathbb{C})$ – к группе

$$GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}} = \left\{ C^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда действие $w = Cz$ превращается в действие вида $(u,v)^T = C^{\mathbb{R}}(x,y)^T$. Это действие порождает действие группы $GL(n,\mathbb{C})$ на проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$ по формуле $\varphi_C([z]) = [Cz]$. Выясните, будет ли это действие транзитивным и эффективным. В случае неэффективного действия найдите ядро неэффективности. Докажите, что сужение этого действия на группы $U(n)$ и $SU(n)$ является транзитивным. Следовательно, комплексное проективное пространство является однородным пространством с фундаментальными группами $GL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$. Докажите, что канонические модели комплексного проективного пространства имеют вид

$$U(n)/U(n-1) \times U(1) \quad SU(n)/U(n-1).$$

Указания. Берем матрицу $A \in U(n)$. Она принадлежит группе изотропии тогда и только тогда, когда $[A\varepsilon_n] = [\varepsilon_n]$, то есть $A\varepsilon_n = \rho\varepsilon_n$, где ρ – комплексное число, модуль которого равен 1. Тогда $A^i_n = 0$, $i < n$ и $A^n_n = \rho$. Следовательно, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}$ – унитарная матрица. Следовательно, группа изотропии изоморфна группе $U(n-1) \times U(1)$. Напомним, что $U(1)$ – это множество комплексных чисел таких что $z\bar{z}^T = 1$, то есть $z\bar{z} = 1$, то есть $|z|^2 = 1$, то есть это комплексные числа, модуль которых равен 1. Первую модель получили.

Вторая модель получается, если учесть, что $det\,A = 1$. Следовательно, $1 = det\,A = det\,\tilde{A}\cdot\rho$. Тогда матрица A представим в виде

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{det\,\tilde{A}} \end{pmatrix}$$

и она может быть отождествлена с матрицей $\tilde{A}$. Получаем вторую модель.

Пример 2.25. *Многообразие Штифеля* $V_{n,k}$ образовано всеми ортонормированными наборами $f = (f_1,\dots,f_k)$ из k векторов в $\mathbb{R}^n$ (каждый вектор f_i, $i = 1,\dots,k$ – это набор из n вещественных чисел). Ортонормированность относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$.

Сначала построим гладкую структуру на $V_{n,k}$, то есть убедимся в том, что это действительно гладкое многообразие. Фиксируем в $\mathbb{R}^n$ базис $(e_1,\dots,e_n)$ (например, стандартный). Тогда для любого элемента $(f_1,\dots,f_k)\in V_{n,k}$ будет определяться набор чисел – координат векторов $f_1,\dots,f_k$ в этом базисе. Обозначим их $(x_{11},\dots,x_{n1},x_{12},\dots,x_{n2},\dots,x_{nk})$ (индекс, стоящий ближе к букве x обозначает номер координаты, а второй индекс номер вектора f_i). В результате мы получаем nk чисел. Но это пока не координаты – их слишком много. Вспомним, что набор $(f_1,\dots,f_k)$ ортонормированный. Это условие можно записать в виде системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{i\ell} - \delta_{j\ell} = 0,\ j,\ell = 1,\dots,k,\ j\le\ell.$$

Другими словами, множество точек $V_{n,k}$ выделяется в пространстве $\mathbb{R}^{nk}$ с помощью этих уравнений. Их количество $\frac{k^2-k}{2}+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (количество уравнений равно количеству пар j,ℓ, где $j\le\ell$. Всего пар j,ℓ без дополнительного условия – k^2 штук, вычитаем пары $j=\ell$ – их k штук, остаток делим пополам и добавляем обратно пары $j=\ell$). Из этой системы можно выразить $\frac{k(k+1)}{2}$ переменных (для этого нужно проверить, что матрица составленная из частных производных левых частей этих уравнений имеет максимальный ранг). Такие множества называются регулярными поверхностями. Размерность такой поверхности вычисляется как размерность объемлющего пространства минус количество уравнений системы. Известно, что регулярные поверхности являются гладкими многообразиями. Из этого мы получаем, что $V_{n,k}$ является гладким многообразием размерности $nk-\frac{k(k+1)}{2}$ (количество координат в каждой локальной карте).

Зададим на многообразии $V_{n,k}$ действие ортогональной группы $O(n,\mathbb{R})$ следующим образом:

$$(f_1,\dots,f_k)\to(Af_1,\dots,Af_k),\ A\in O(n,\mathbb{R}).$$

(Запишем n-ку f_i справа от матрицы A и проведем обычное умножение матриц. В результате получим столбец из n чисел. Его обозначим Af_i.) Как мы знаем, группа ортогональных матриц сохраняет стандартное скалярное произведение, следовательно, полученный набор $(Af_1,\dots,Af_k)$ снова будет ортонормированным, то есть будет принадлежать $V_{n,k}$.

Как известно из курса Многомерная аффинная и евклидова геометрия, для любых двух ортонормированных наборов $(f_1,\dots,f_k)$ и $(g_1,\dots,g_k)$ существует ортогональная матрица, переводящая один набор в другой. Следовательно, действие ортогональной группы на многообразии Штифеля транзитивно, то есть многообразие Штифеля является однородным пространством с фундаментальной группой $O(n,\mathbb{R})$.

Задача 2.9. Убедитесь, что $V_{n,n} = O(n,\mathbb{R})$, $V_{n,1} = S^{n-1}$.

Вычислим стационарную подгруппу в точке $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$, состоящую из векторов стандартного базиса. Пусть A – ортогональная матрица, принадлежащая стационарной группе. Тогда $A\varepsilon_b = \varepsilon_b$, $b = 1,\dots,k$. Тогда $A^i_j(\varepsilon_b)^j = (\varepsilon_b)^i$, $i,j = 1,\dots,n$ или $A^i_b = \delta^i_b$. Таким образом, матрица A имеет следующий блочный вид

$$A = \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A ортогональна, то есть $AA^T = I_n$, получим

$$AA^T = \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ C^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k + CC^T & CB^T \\ BC^T & BB^T \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем, что $CC^T = 0$, $CB^T = BC^T = 0$, $BB^T = I_{n-k}$. Следовательно, $C = 0$ и B – ортогональная. Тогда матрицу A можем отождествить с матрицей $B\in O(n-k,\mathbb{R})$. Откуда получаем каноническую модель многообразия Штифеля в виде $O(n,\mathbb{R})/O(n-k,\mathbb{R})$.

Замечание 2.6. Из курса Многомерные аффинные и евклидовы пространства мы знаем, что ортонормированная система векторов произвольного евклидова пространства (в частности, $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением) является линейно независимой (проведите доказательство самостоятельно, оно не сложное. Можно даже доказать больше, что любая ортогональная система векторов, то есть попарно перпендикулярных векторов, является линейно независимой). Из этого следует, что в многообразии Штифеля всегда $k \le n$. Пусть выполняется строгое неравенство, то есть $k < n$. Определим действие группы $SO(n, \mathbb{R})$ на многообразии Штифеля $V_{n,k}$ в этом случае. Фиксируем одну из двух ориентаций в $\mathbb{R}^n$ и назовем ее положительной. Пусть $f = (f_1, \dots, f_k)$ – произвольный элемент многообразия Штифеля. Мы можем дополнить его до правого ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$. В самом деле, существует единичный вектор f_{k+1} ортогональный всем векторам $f_1, \dots, f_k$ и образующий с ними правую систему векторов (это векторное произведение векторов $f_1, \dots, f_k$). Продолжаем этот процесс, пока не получим правый базис в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, каждый элемент многообразия Штефеля мы можем дополнить (не единственным образом) до правого ортонормированного базиса. Пусть теперь даны два элемента $f = (f_1, \dots, f_k)$ и $g = (g_1, \dots, g_k)$ многообразия Штифеля. Дополняя их до правых ортонормированных базисов, мы получим, что существует матрица из $SO(n, \mathbb{R})$, переводящая первый во второй (она задает движение первого рода пространства $\mathbb{R}^n$). Таким образом, мы получили, что группа специальных ортогональных матриц транзитивно действует на многообразии Штифеля. Аналогично предыдущему показывается, что в этом случае каноническая модель будет иметь вид

$$V_{n,k} = SO(n, \mathbb{R})/SO(n-k, \mathbb{R}).$$

Пример 2.26. *Многообразие Грассмана* (или, как еще говорят, *грассманиан*) задается как множество всех k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Оно обозначается $G_{n,k}$. На этом множестве транзитивно действует ортогональная группа $O(n, \mathbb{R})$ (берем в каждом из двух подпространств по ортонормированному базису, дополняем их до ортонормированных базисов $\mathbb{R}^n$, тогда будет существовать ортогональная матрица, переводящая один базис в другой). На множестве $G_{n,k}$ можно задать топологию и гладкую структуру (см. [4]). Размерность многообразия Грассмана равна $nk - k^2$. Таким образом, многообразие Грассмана является однородным пространством с фундаментальной группой $O(n, \mathbb{R})$.

Найдем группу изотропии в точке $x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$ (это k-мерное линейное подпространство). Его можно охарактеризовать по-другому: это множество точек из $\mathbb{R}^n$ вида $(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. Ортогональные матрицы, которые оставляют это подпространство неизменным должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A – матрица $k \times k$, а B – матрица $(n-k) \times (n-k)$. Так как вся матрица должна быть ортогональной, матрицы A и B также являются ортогональными. Итак, каноническая модель многообразия Грассмана имеет вид

$$G_{n,k} = O(n)/(O(k) \times O(n-k)).$$

Так как каждому k-мерному подпространству в $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствует его ортогональное дополнение, получаем, что многообразия Грассмана $G_{n,k}$ и $G_{n,n-k}$ диффеоморфны.

При $k = 1$ мы очевидно, получаем $G_{n,1} = \mathbb{R}P^{n-1}$ – проективное пространство. Откуда мы видим, что многообразие Грассмана есть обобщение многомерных проективных пространств.