Игнаточкина Л.А.

Краткое руководство к действию по главным расслоениям и методу присоединенной G-структуры.

2014

Содержание

1. Элементы теории групп Ли.

§ 1.1. Группы Ли.

Группой Ли называется гладкое многообразие G, множество точек которого наделено структурой (абстрактной) группы, причем групповая операция и операция взятия симметричного элемента являются гладкими.

Замечание 1.1. Нетрудно проверить, что условие гладкости групповых операций равносильно гладкости отображения $\varphi : G \times G \to G$, заданного формулой

$$\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}.$$

Это замечание позволит нам при работе с конкретными примерами групп Ли проверять гладкость не двух, а одного отображения.

Пример 1.1. Простейшим примером группы Ли может служить арифметическое векторное пространство

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}.$$

На $\mathbb{R}^n$ мы уже построили структуру гладкого многообразия (см. курс Анализ на многообразиях). Из алгебры хорошо известно, что $\mathbb{R}^n$ является (абстрактной) группой относительно операции сложения. Взятие симметричного элемента в данном случае называется взятием противоположного элемента.

Гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$ покрывается одной картой $(\mathbb{R}^n, id)$ и в ней отображение φ (см. замечание 1.1) задается следующим образом

$$z^i = x^i - y^i,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $z = \varphi(x, y) = x - y$. Очевидно, что функции, задающие отображение φ являются гладкими, следовательно, гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$, на котором операция $+$ определяет структуру абстрактной группы, является группой Ли.

Пример 1.2. Этот пример будет основным для нас. Пусть $M_{n,n}$ – полная матричная алгебра. Рассмотрим множество $n \times n$- матриц с ненулевым определителем и обозначим это множество так.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{(g_{ij}) \in M_{n,n},\ det(g_{ij}) \neq 0\}.$$

Операция умножения матриц вводит в это множество структуру абстрактной группы. Взятие симметричного элемента называется здесь взятием обратного.

Так как полная матричная алгебра $M_{n,n}$ может быть отождествлена с арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^{n^2}$, то она имеет структуру гладкого многообразия. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n^2}$, а значит, имеет индуцированную гладкую структуру из $M_{n,n}$. Итак, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие, а именно, открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Для доказательства того, что $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли, нам осталось проверить гладкость групповой операции и гладкость взятия обратного. Для этого нужна локальная карта на $GL(n, \mathbb{R})$. Так как гладкая структура $GL(n, \mathbb{R})$ индуцирована $\mathbb{R}^{n^2}$, то все многообразие покрывается одной локальной картой $(GL(n, \mathbb{R}), id)$. Напомним, что для построения локальных карт индуцированной гладкой структуры нужно взять локальную карту $\mathbb{R}^{n^2}$ и пересечь ее область с множеством $GL(n, \mathbb{R})$. Картирующее отображение получается из картирующего отображения карты на $\mathbb{R}^{n^2}$ сужением на множество $GL(n, \mathbb{R})$ (см. курс Анализ на многообразиях).

Запишем в локальной карте операцию умножения матриц. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – произвольные матрицы из $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда по правилу умножения матриц получим

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

где $(c_i j) = C = A \cdot B$. Очевидно, что полученные функции бесконечно дифференцируемы как по a_{ik}, так и по b_{kj}, а значит, операция умножения является гладкой.

По правилу вычисления элементов h_{ij} обратной матрицы A^{-1} для матрицы $A = (a_{ij})$, известного из алгебры, получим

$$h_{ij} = \frac{1}{detA} A_{ji},$$

где A_{ji} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Так как определитель $detA$ и алгебраические дополнения A_{ji} являются многочленами элементов матрицы A, полученные функции являются бесконечно дифференцируемыми по a_{ij}, следовательно, отображение взятия обратного элемента является гладким.

Итак, мы показали, что множество $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли. Она называется *полной линейной группой порядка n.*

Пример 1.3. Рассмотрим множество

$$O(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}),\, g \cdot g^T = I_n\},$$

где g^T – транспонированная матрица (строки матрицы g являются столбцами матрицы g^T), $I_n = (\delta^i_j)$ – единичная матрица порядка n. Это множество также является группой Ли и называется *ортогональной группой порядка* n.

Группа Ли

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{g \in O(n,\mathbb{R}),\, det g = 1\}$$

называется *специальной ортогональной группой порядка* n.

Пример 1.4. Пусть дано n-мерное векторное пространство V. Рассмотрим множество всех $\mathbb{R}$-линейных отображений $L : V \to V$. Это множество обозначается $End\,V$ и называется *алгеброй эндоморфизмов* векторного пространства V (структуру ассоциативной алгебры с единицей в этом множестве задают стандартные операции сложения отображений, умножения отображения на вещественное число и операция композиции). В этом множестве выделяется подмножество обратимых линейных отображений. Оно обозначается $Aut\,V$ и называется *группой автоморфизмов* векторного пространства V. Структура абстрактной группы задается операцией композиции.

Оказывается, что на множестве $Aut\,V$ существует и структура группы Ли. Так как $Aut\,V$ является векторным пространством, то на нем определена стандартная гладкая структура векторного пространства, а значит, $Aut\,V$ – гладкое многообразие. Если фиксировать в V базис, то операция композиции и взятия обратного элемента сведется к умножению матриц и взятию обратной матрицы, соответственно. Эти операции гладкие, а значит, $Aut\,V$ является группой Ли.

§ 1.2. Алгебры Ли.

(Вещественной) *алгеброй Ли* называется (вещественное) векторное пространство $\mathfrak{g}$, в котором фиксирована бинарная билинейная операция

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами

1) $[X,Y] = -[Y,X]$ (антикоммутативность);

2) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (тождество Якоби),

где $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Пример 1.5. Модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ гладкого многообразия M относительно скобки Ли является алгеброй Ли.

Пример 1.6. Всякое вещественное векторное пространство V является алгеброй Ли относительно коммутатора, заданного формулой $[X,Y] = 0$, $X,Y \in V$. Такая алгебра Ли называется *абелевой алгеброй Ли*.

Пример 1.7. Полная матричная алгебра $M_{n,n}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[A,B] = A \cdot B - B \cdot A, \tag{1.1}$$

где $A, B \in M_{n,n}$, точка обозначает обычное матричное умножение. Эта алгебра Ли называется *полной матричной алгеброй Ли*.

Пример 1.8. Рассмотрим множество $End\,V$ всех линейных отображений вещественного векторного пространства V. Это вещественное векторное пространство относительно сложения отображений и умножения на вещественное число. В этом множестве также может быть введена операция коммутирования по формуле

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f,$$

где $f, g \in End\,V$, $\circ$ – композиция отображений. Эта операция превращает векторное пространство $End\,V$ в алгебру Ли.

Пусть G – группа Ли. Будем групповую операцию G как абстрактной группы обозначать либо точкой, либо писать две буквы рядом. При этом будем называть эту операцию умножением.

Фиксируем произвольный элемент $g \in G$. Операция умножения в группе G определяет два отображения

$$L_g : G \to G; \quad R_g : G \to G$$

по формулам

$$L_g(h) = gh; \quad R_g(h) = hg,\, h \in G$$

соответственно. Так как операция умножения гладкая, то введенные отображения также являются гладкими. Они называются *отображением левого сдвига* и *отображением правого сдвига на элемент* g, соответственно.

Теорема 1.1. *Отображения* L_g *и* R_g *обладают следующими свойствами:*

$$\begin{array}{ll} 1) & L_g \circ L_h = L_{gh}; \\ 2) & R_g \circ R_h = R_{hg}; \\ 3) & L_g, R_g \text{ *являются диффеоморфизмами,*} \end{array}$$

где $g, h \in G$ *– произвольные элементы.*

Доказательство. Докажем первое тождество (второе докажите самостоятельно). Для любого элемента $p \in G$ по определению отображения левого сдвига получим

$$L_g \circ L_h(p) = L_g(hp) = g(hp) = (gh)p = L_{gh}(p).$$

Здесь мы также воспользовались ассоциативностью операции умножения в группе G.

Докажем, что L_g является диффеоморфизмом. Для этого достаточно доказать, что $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Существование обратного показывает, что L_g биекция, а то, что обратное отображение само является левым сдвигом показывает, что оно является гладким. Имеем

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}(gh) = h.$$

Это верно для любого элемента $h \in G$, следовательно, $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Аналогично доказывается, что $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$. Таким образом, получим $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. □

Так как L_g является диффеоморфизмом, для любого векторного поля X на G существует L_g-связанное с ним векторное поле $(L_g)_*X \in \mathfrak{X}(G)$.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если оно совпадает с L_g-связанным с ним векторным полем для любого элемента $g \in G$, то есть

$$(L_g)_*X = X,\, \forall g \in G.$$

Теорема 1.2. *Совокупность* $\mathfrak{g}$ *всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли* G *образует вещественное векторное пространство, канонически изоморфное касательному пространству* $T_e(G)$ *к группе Ли* G *в единице* e *этой группы. В частности,* $dim\, \mathfrak{g} = dim\, G$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{g}$ является подмножеством вещественного векторного пространства $\mathfrak{X}(G)$ гладких векторных полей группы Ли G, то нам достаточно доказать, что $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно операций сложения своих элементов и умножения на вещественное число. Это легко следует из $\mathbb{R}$-линейности отображения увлечения векторных полей.

Построим изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ вещественных векторных пространств. Зададим отображение β формулой

$$\beta(X) = X_e,\, X \in \mathfrak{g},$$

то есть каждому левоинвариантному векторному полю X (оно рассматривается как гладкое сечение касательного расслоения) поставим его значение в единице e группы G. Из определения суммы и произведения на число гладких сечений (см. курс Анализ на многообразиях) легко видеть, что β является гомоморфизмом:

$$\beta(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)_e = (\lambda X + \mu Y)(e) = \lambda X_e + \mu Y_e = \lambda\beta(X) + \mu\beta(Y),$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Инъективность β следует из того, что ядро гомоморфизма β нулевое. В самом деле, пусть $X \in ker\, \beta$. Тогда $\beta(X) = X_e = 0$. Так как X – левоинвариантное (L_g-связано с самим собой), то согласно критерию ϕ-связанных векторных полей получим

$$((L_g)_*)_e X_e = X_{L_g(e)} = X_g.$$

С другой стороны, так как дифференциал $((L_g)_*)_e$ отображения является $\mathbb{R}$-линейным, получим

$$((L_g)_*)_e X_e = ((L_g)_*)_e(0) = 0.$$

Итак, значение векторного поля X в любой точке $g \in G$ равно нулю, то есть $X_g = 0$ для любой точки $g \in G$. Следовательно, равно нулю само векторное поле X. Следовательно, мы показали, что ядро отображения β нулевое.

Покажем, что отображение β сюръективно. Пусть $\xi \in T_e(G)$ – произвольный касательный вектор. Построим семейство векторов

$$X = \{X_g \in T_g(G),\, X_g = ((L_g)_*)_e \xi\}. \tag{1.2}$$

В результате мы получим отображение $X : G \to TG$, где TG – тотальное пространство касательного расслоения. Чтобы доказать, что X является (гладким) векторным полем на многообразии G, нам нужно проверить, что в паре соответствующих карт это отображение задается гладкими функциями. Напомним, что первые n функций гладки тривиальным образом ($y^i = x^i$), $i = 1, \ldots, n$, а вторые n функций $y^{j+n} = X^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$ суть координаты касательных векторов X_g. Для них и нужно доказать гладкую зависимость от координат $(x^1, \ldots, x^n)$ точки g.

Фиксируем локальную карту (U, φ) в окрестности единицы e группы Ли G, причем пусть e имеет в этой карте координаты $(0, \ldots, 0)$. Предположим, что элемент g принадлежит области U. Пусть операция умножения в карте (U, φ) задается функциями

$$z^i = \mu^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где $i = 1, \ldots, n$. Здесь $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ – координаты первого сомножителя, $(x^1, \ldots, x^n)$ – координаты второго сомножителя, через $(z^1, \ldots, z^n)$ обозначены координаты произведения. Так как операция умножения является гладкой, функции z^i имеют частные производные любого порядка по переменным $\tilde{x}^1, \ldots, x^n$.

Обозначим координаты точки g в данной карте через $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Так как точка g у нас зафиксирована, это набор из n вещественных чисел. Тогда отображение левого сдвига L_g будет задаваться функциями

$$z^i = \mu^i(x_0^1, \ldots, x_0^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где переменными будут являться только $x^1, \ldots, x^n$. Тогда дифференциал отображения $((L_g)_*)_e$ будет задаваться матрицей Якоби

$$\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_e = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0).$$

Следовательно, если вектор ξ имеет в локальной карте (U, φ) координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ (это вещественные числа), то координаты $(X_g)^i(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ вектора X_g будут выражаться по формуле

$$(X_g)^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0)\xi^j.$$

Теперь отпустим точку g. Тогда ее координаты будут меняться. В связи с этим сотрем нули в обозначении ее координат. Тогда получим функции

$$X^i(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\xi^j.$$

Эти функции являются гладкими.

Напомним, что мы предполагали, что точка g принадлежит окрестности единицы. Пусть теперь точка h принадлежит некоторой карте (V, ψ), не содержащей единицу. Из определения системы векторов X имеем

$$X_h = ((L_h)_*)_e \xi = ((L_h)_*)_e ((L_{g^{-1}})_*)_g X_g = ((L_{hg^{-1}})_*)_g X_g.$$

Тогда если в фиксированной точке $g(g^1, \ldots, g^n) \in V$ вектор X_g уже построен, то в произвольной точке $h \in V$ аналогично предыдущему получим

$$X^i(h) = (X_h)^i(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \ldots, x^n, g^1, \ldots, g^n)(X_g)^j.$$

Они являются гладкими функциями.

Итак, мы показали, что координаты векторов X_g семейства (1.2) гладко зависят от координат точки g, а значит, X является (гладким) векторным полем. Нам осталось показать, что оно является левоинвариантным. Фиксируем произвольную точку $g \in G$. Тогда для произвольной точки $h \in G$ имеем

$$((L_g)_*)_h X_h = ((L_g)_*)_h ((L_h)_*)_e \xi = ((L_g \circ L_h)_*)_e \xi = ((L_{gh})_*)_e \xi = X_{gh} = X_{L_g(h)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой для композиции дифференциалов. Тогда по критерию ϕ-связанных векторных полей получим $(L_g)_* X = X$, то есть векторное поле X является левоинвариантным. □

Замечание 1.2. Обратите внимание, что модуль всех гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$ в общем случае не имеет глобального базиса (даже если брать коэффициенты разложения из алгебры гладких функций), а векторное пространство левоинвариантных векторных полей имеет глобальный базис (коэффициенты разложения по такому базису – вещественные числа). Примером такого базиса может служить, например, прообраз натурального базиса касательного пространства $T_e(G)$.

Теорема 1.3. *Векторное пространство $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей является алгеброй Ли.*

Доказательство. Так как левоинвариантные векторные поля принадлежат модулю гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$, то для них определена скобка Ли (см. курс Анализ на многообразиях). Она удовлетворяет условиям $\mathbb{R}$-билинейности, антикоммутативности и тождеству Якоби. Следовательно, нам осталось проверить, что множество $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно скобки Ли. Имеем с учетом свойства отображения увлечения

$$(L_g)_*[X,Y] = [(L_g)_*X,(L_g)_*Y] = [X,Y],\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторных полей X и Y. □

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных полей группы Ли G называется *присоединенной алгеброй Ли* или *алгеброй Ли группы Ли G*.

Замечание 1.3. Структуру алгебры Ли можно ввести и в касательном пространстве $T_e(G)$ в единице группы. Для этого используем построенный в теореме 1.2 изоморфизм β векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$. Для того чтобы $T_e(G)$ было алгеброй Ли, там не хватает коммутатора для касательных векторов этого пространства, то есть билинейного отображения

$$[\cdot,\cdot] : T_e(G) \times T_e(G) \to T_e(G),$$

удовлетворяющего свойству антикоммутативности и тождеству Якоби. Определим это отображение так. Для любых касательных векторов $\xi,\eta \in T_e(G)$ положим

$$[\xi,\eta] = \beta[\beta^{-1}\xi,\beta^{-1}\eta].$$

При этом отображение β^{-1} будет изоморфизмом алгебр Ли $T_e(G)$ и $\mathfrak{g}$, так как

$$\beta^{-1}[\xi,\eta] = [\beta^{-1}\xi,\beta^{-1}\eta].$$

Итак, мы видим, что алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$ изоморфны, а значит, могут быть отождествлены.

Пусть дана группа Ли G размерности n и ее присоединенная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что размерность $\mathfrak{g}$ совпадает с размерностью G (теорема 1.2), а значит, равна n. Рассмотрим произвольный базис $(E_1,\dots,E_n)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. По определению алгебры Ли (замкнутость относительно операции коммутирования) левоинвариантное векторное поле $[E_i,E_j]$ должно принадлежать $\mathfrak{g}$ для любых $i,j = 1,\dots,n$, а значит, его можно разложить по базису $(E_1,\dots,E_n)$, причем коэффициентами будут служить вещественные числа:

$$[E_i,E_j] = C_{ij}^k E_k. \tag{1.3}$$

Коэффициенты $\{C_{ij}^k\}$ называются *структурными константами группы Ли* $\mathfrak{g}$, а соотношения (1.3) называются *контравариантными структурными уравнениями группы Ли.*

Задача 1.1. Найдем закон преобразования структурных констант $\{C_{ij}^k\}$ при переходе от одного базиса $(E_1,\dots,E_n)$ к другому базису $(\tilde{E}_1,\dots,\tilde{E}_n)$.

Решение. Отступая от многолетних традиций, обозначим матрицу перехода от базиса $(E_1,\dots,E_n)$ к базису $(\tilde{E}_1,\dots,\tilde{E}_n)$ через $A = (A_j^i)$, $i,j = 1,\dots,n$, то есть

$$\tilde{E}_i = A_i^j E_j. \tag{1.4}$$

Так как мы работаем с векторным пространством, элементами матрицы A служат вещественные числа.

По определению структурных констант имеем

$$[\tilde{E}_i,\tilde{E}_j] = \tilde{C}_{ij}^k \tilde{E}_k.$$

Подставим в это равенство (1.4):

$$[A_i^k E_k, A_j^t E_t] = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p E_p.$$

Так как коммутатор является $\mathbb{R}$-линейным отображением по каждому аргументу, учитывая (1.3), получим

$$A_i^k A_j^t C_{kt}^p E_p = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p E_p.$$

В силу линейной независимости E_p получим

$$A_i^k A_j^t C_{kt}^p = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p$$

или

$$\tilde{C}_{ij}^s = A_i^k A_j^t (A^{-1})_p^s C_{kt}^p.$$

Это тензорный закон преобразования. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры, система чисел $\{C_{ij}^k\}$ задает тензор типа (2,1) на векторном пространстве $\mathfrak{g}$. □

Рассмотрим на группе Ли G 1-формы ω, удовлетворяющие условию

$$(L_g)^*\omega = \omega, \, \forall g \in G,$$

где $(L_g)^*$ – антиувлечение форм. Такие формы называются *левоинвариантными*.

Как мы помним, если 1-форму рассматривать как $C^\infty(M)$-отображение, то при действии формы на векторное поле получается гладкая функция. Для левоинвариантных форм мы получаем, что при их действии на левоинвариантные векторные поля результатом будет константа (постоянная функция). Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 1.1. *Пусть ω – левоинвариантная 1-форма, X – левоинвариантное векторное поле. Тогда $\omega(X) = const$.*

Доказательство. По определению левоинвариантной 1-формы и отображения антиувлечения для любого $g \in G$ имеем

$$\omega(X) = (L_g)^*(\omega)(X) = \omega((L_g)_* X) \circ L_g = \omega(X) \circ L_g.$$

Сравнивая крайние части цепочки равенств, получаем

$$\omega(X) = \omega(X) \circ L_g \, \forall g \in G.$$

Обе части этого равенства – это функции на многообразии G. Вычислим их значение в точке e:

$$\omega(X)(e) = \omega(X)(g),$$

то есть во всех точках $g \in G$ значение функции $\omega(X)$ одно и то же (оно равно $\omega(X)(e)$), то есть эта функция является константой. □

Из доказанной леммы следует, что на левоинвариантные 1-формы мы можем смотреть как на $\mathbb{R}$-линейные отображения вида $\omega : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, то есть как на ковекторы, определенные на векторном пространстве $\mathfrak{g}$. Другими словами, множество всех левоинвариантных форм образует векторное пространство $\mathfrak{g}^*$, дуальное векторному пространству $\mathfrak{g}$ (мы забываем про не левоинвариантные векторные поля и про функции, отличные от констант на многообразии G).

Замечание 1.4. Аналогичным образом среди всех тензорных полей $\mathfrak{T}_s^r(G)$ типа (r, s) на многообразии G можно выделить *левоинвариантные* и доказать, что они образуют векторное пространство тензоров типа (r, s), определенное векторными пространствами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Напомним, что на произвольном гладком многообразии определен оператор внешнего дифференцирования d по формуле

$$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{r+1}) +$$
$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{r+1}).$$

Если мы будем рассматривать только левоинвариантные формы и действовать ими только на левоинвариантные векторные поля, то в силу леммы 1.1 эта формула примет более простой вид: первая группа слагаемых обнулится, так как действие векторного поля на постоянной функции равно нулю. Тогда получим

$$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{r+1}).$$

Здесь все векторные поля левоинвариантные.

В частности, для форм Маурера-Картана эта формула примет вид

$$d\omega(X,Y) = -\omega([X,Y]),\ X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим базис $(E_1,\dots,E_n)$ векторного пространства левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$. Пусть $(\omega^1,\dots,\omega^n)$ – дуальный базис для базиса $(E_1,\dots,E_n)$. По формулам (1.5), (1.3) получим

$$d\omega^k(E_i,E_j) = -\omega^k([E_i,E_j]) = -\omega^k(C_{ij}^m E_m) = -C_{ij}^m \omega^k(E_m) = -C_{ij}^m \delta_m^k = -C_{ij}^k.$$

Итак, мы получили, что компоненты 2-формы $d\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ равны $-C_{ij}^k$. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры в векторном пространстве $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ существует канонический базис $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$. Он хорош тем, что коэффициенты разложения тензоров из $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ по этому базису совпадают с их компонентами, то есть

$$d\omega^k = -C_{ij}^k \omega^i \otimes \omega^j.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор альтернации Alt. Тогда согласно определению операции внешнего умножения и оператора альтернации получим

$$d\omega^k = -C_{ij}^k Alt(\omega^i \otimes \omega^j) = -\frac{1!1!}{2!} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Следовательно,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \tag{1.6}$$

Эти уравнения называются *ковариантными структурными уравнениями Маурера-Картана* или, просто, *уравнениями Маурера-Картана группы Ли* G.

§ 1.3. Полная линейная группа.

В качестве примера общих понятий, изложенных в § 1.2., рассмотрим полную линейную группу $GL(n,\mathbb{R})$. Мы найдем ее алгебру Ли и вычислим уравнения Маурера-Картана.

Мы уже знаем, что группа Ли $GL(n,\mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности n^2. Ее атлас состоит из одной локальной карты $(GL(n,\mathbb{R}),\varphi)$, где картирующее отображение $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ ставит в соответствие каждой матрице $A = (a_j^i) \in GL(n,\mathbb{R})$ в соответствие набор ее элементов, выписанных в строку (например, берем строки матрицы A и записываем их в одну строку). Так как координат в этой карте n^2, их удобнее обозначать через (g_j^i), где $i,j = 1,\dots,n$, верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца в матрице. Тогда координатные функции, которые ставят в соответствие матрице ее (i,j)-й элемент будем обозначать теми же символами

$$g_j^i : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ g_j^i(A) = a_j^i.$$

Обозначим алгебру Ли группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ и докажем, что она изоморфна полной матричной алгебре Ли $M_{n,n}$. Для этого нам нужно построить изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Зададим отображение

$$\varkappa : T_e(GL(n,\mathbb{R})) = T_e(M_{n,n}) \to M_{n,n}$$

по формуле

$$\varkappa(\xi) = A,\ A = (a_j^i) = (\xi(g_j^i)) \equiv ((dg_j^i)_e(\xi)), \tag{1.7}$$

где $\xi \in T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ – произвольный элемент, a_j^i – элементы матрицы $A = \varkappa(\xi)$, $e = I_n$ – единичная матрица. Это отображение линейно, так как

$$\varkappa(\lambda\xi + \mu\eta) = ((\lambda\xi + \mu\eta)(g_j^i)) = \lambda(\xi(g_j^i)) + \mu(\eta(g_j^i)) = \lambda\varkappa(\xi) + \mu\varkappa(\eta),$$

где $\xi,\eta \in T_e(M_{n,n})$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, то есть $\varkappa$ является гомоморфизмом.

Докажем биективность отображения $\varkappa$. Пусть $\xi \in ker\,\varkappa$ – произвольный элемент из ядра отображения $\varkappa$. Тогда ему соответствует нулевая матрица

$$0 = \varkappa(\xi) = (\xi(g_j^i)),$$

то есть $\xi(g_j^i) = (dg_j^i)_e(\xi) = 0$ для любых $i,j = 1,\dots,n$. Так как $(dg_j^i)_e$ – ковекторы натурального базиса, мы получаем, что все координаты вектора ξ равны нулю, то есть $\xi = 0$. Таким образом, отображение $\varkappa$ является инъективным.

Сюръективность отображения $\varkappa$ следует из того, что размерности векторных пространств $T_e(M_{n,n})$ и $M_{n,n}$ равны.

Итак, мы показали, что построенное отображение $\varkappa$ будет изоморфизмом векторных пространств. Тогда отображение

$$\gamma = \varkappa \circ \beta : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to M_{n,n}$$

будет изоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Нам осталось показать, что отображение γ будет изоморфизмом алгебр Ли, то есть будет сохранять коммутатор, то есть

$$\gamma[X, Y] = [\gamma(X), \gamma(Y)],\ X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Для этого нам потребуются вспомогательные формулы.

Лемма 1.2. *Пусть* $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. *Тогда в принятых обозначениях*

$$1)\, g^i_j \circ L_g = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j; \quad 2)\, Y(g^i_j) = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j).$$

Доказательство. Так как $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$, они являются матрицами. Применим правило умножения матриц

$$(g^i_j \circ L_g)(h) = g^i_j(gh) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j(h).$$

В силу произвола в выборе элемента h получим первую формулу. Тогда, учитывая ее, получим

$$(Y(g^i_j))(g) = Y_g(g^i_j) = (((L_g)_*)_e)(Y_e))(g^i_j) = Y_e(g^i_j \circ L_g) = Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) Y_e(g^k_j).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразиях), левоинвариантностью векторного поля Y и определением дифференциала отображения. Так как это равенство верно для любого элемента $g \in G$, то получим требуемое соотношение. □

Теорема 1.4. *Отображение* $\gamma : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to M_{n,n}$ *является изоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Заметим, что $\gamma(X)$ – это матрица. Обозначим ее элементы через $\gamma(X)^i_j$. Напомним, что верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца. Тогда из определения отображения γ получим

$$\gamma(X)^i_j = (\varkappa(X_e))^i_j = X_e(g^i_j).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
\gamma([X, Y])^i_j &= [X, Y]_e(g^i_j) = ([X, Y](g^i_j))(e) = ((X \circ Y - Y \circ X)(g^i_j))(e) = \\
&= (X(Y(g^i_j)) - Y(X(g^i_j)))(e) = X_e(Y(g^i_j)) - Y_e(X(g^i_j)) = X_e(\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j)) - Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k X_e(g^k_j)) = \\
&= \sum_{k=1}^n \big(X_e(g^i_k) Y_e(g^k_j) - Y_e(g^i_k) X_e(g^k_j)\big) = \sum_{k=1}^n \gamma(X)^i_k \gamma(Y)^k_j - \sum_{k=1}^n \gamma(Y)^i_k \gamma(X)^k_j = \\
&= ((\gamma(X) \cdot \gamma(Y)) - \gamma(Y)\gamma(X))^i_j = [\gamma(X), \gamma(Y)]^i_j,
\end{aligned}$$

Итак, отображение γ сохраняет коммутатор, следовательно, является изоморфизмом алгебр Ли. □

Пример 1.9. Обозначим $\{e^i_j\}$ стандартный базис матричной алгебры $M_{n,n}$. В матрице e^i_j на пересечении i-го столбца и j-ой строки стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Коротко это можно записать так

$$(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j.$$

Напомним, что атлас на гладком многообразии $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из одной карты с координатами (g^i_j). Картирующее отображение это карты каждой матрице ставит в соответствие совокупность элементов этой матрицы, выписанных в одну строчку. Тогда натуральный базис этой карты будет $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right\}$. Найдем образы векторов $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\Big|_e\right\}$ при отображении $\varkappa$.

Используем формулу (1.7):

$$\varkappa\left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right)^k_\ell = (dg^k_\ell)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right) = \delta^i_\ell\delta^k_j = (e^i_j)^k_\ell,$$

то есть $\varkappa\left(\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e\right) = e^i_j$.

Вычислим уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$. Фиксируем в полной матричной алгебре $M_{n,n}$ стандартный базис $\{e^i_j\}$, $i,j=1,\dots,n$, состоящий из матриц e^i_j, у которых на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит 1, а все остальные компоненты нулевые. Еще раз запишем это в виде равенства

$$(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell\delta^k_j.$$

Здесь индекс k обозначает номер строки, а индекс ℓ – номер столбца.

Этот базис порождает базис $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Обозначим дуальный базис через $\{\omega^i_j\}$. Он характеризуется тем, что

$$\omega^k_\ell(E^i_j) = \delta^i_\ell\delta^k_j.$$

Другими словами, действие форм ω^i_ℓ будет давать единицу при действии на левоинвариантные векторные поля E^i_j только когда пары (i,j) и (ℓ,k) совпадают.

Запишем уравнения Маурера-Картана в нашем случае. Вспомним их общий вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b\wedge\omega^c,$$

где $a,b,c = 1,\dots,n = dimG$. В этих уравнениях есть один свободный индекс a, который нумерует уравнения, а также есть два индекса суммирования b,c, которые говорят о принадлежности коэффициента C^a_{bc} соответствующему произведению $\omega^b\wedge\omega^c$. В нашем случае каждая форма нумеруется двумя индексами. Тогда свободными будут два индекса, нумерующие уравнения. Они будут стоять у форм дэ омега и у коэффициентов C. Также нам потребуются индексы для суммирования по две штуки на каждую омегу. Эти индексы должны также присутствовать в коэффициенте C и показывать, что по ним происходит суммирование. В результате получим

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2}C^{i\ell t}_{jkr}\omega^k_\ell\wedge\omega^r_t. \tag{1.8}$$

Структурные константы $C^{i\ell t}_{jkr}$ определяются уравнениями

$$[E^\ell_k, E^t_r] = C^{p\ell t}_{qkr}E^q_p.$$

Подействуем на обе части этого уравнения изоморфизмом γ^{-1}. Так как γ^{-1} – изоморфизм алгебр Ли, получим

$$[e^\ell_k, e^t_r] = C^{p\ell t}_{qkr}e^q_p \tag{1.9}$$

(см. формулу (1.3)). Найдем из этих уравнений структурные константы. Для этого вычислим компоненты матриц, стоящих в левой и правой частях этого равенства. Расписываем левую часть равенства (1.9).

$$[e^\ell_k, e^t_r]^i_j = (e^\ell_k)^i_p(e^t_r)^p_j - (e^t_r)^i_p(e^\ell_k)^p_j = \delta^\ell_p\delta^i_k\delta^t_j\delta^p_r - \delta^t_p\delta^i_r\delta^\ell_j\delta^p_k = \delta^\ell_r\delta^i_k\delta^t_j - \delta^t_k\delta^i_r\delta^\ell_j.$$

Расписываем правую часть равенства (1.9).

$$\left(C^{p\ell t}_{qkr}e^q_p\right)^i_j = C^{p\ell t}_{qkr}\delta^q_j\delta^i_p = C^{i\ell t}_{jkr}.$$

Итак, мы получили

$$C^{i\ell t}_{jkr} = \delta^\ell_r\delta^i_k\delta^t_j - \delta^t_k\delta^i_r\delta^\ell_j.$$

Наконец, подставим полученный результат в (1.8):

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2}(\delta^\ell_r\delta^i_k\delta^t_j - \delta^t_k\delta^i_r\delta^\ell_j)\omega^k_\ell\wedge\omega^r_t = -\frac{1}{2}(\omega^i_r\wedge\omega^r_j - \omega^t_j\wedge\omega^i_t) = -\omega^i_r\wedge\omega^r_j.$$

Мы заменили индекс суммирования t во втором слагаемом на индекс r и привели подобные. Итак, уравнения Маурера-Картана для полной линейной группы $GL(n,\mathbb{R})$ в стандартном базисе $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ имеют вид

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k\wedge\omega^k_j.$$

Замечание 1.5. Нетрудно показать, что алгебра эндоморфизмов $End\,V$ векторного пространства V является алгеброй Ли группы Ли автоморфизмов $Aut\,V$ этого векторного пространства относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1,\; L_1, L_2 \in End\,V.$$

Для этого нужно фиксировать базис в V. Тогда элементы из группы $Aut\,V$ могут быть отождествлены с матрицами группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, а элементы из $End\,V$ с матрицами полной матричной алгебры $M_{n,n}$. Откуда следует, что алгебра эндоморфизмов является присоединенной алгеброй Ли группы Ли $Aut\,V$.

§ 1.4. Гомоморфизмы групп Ли и алгебр Ли.

Отображение $\varphi : G \to H$ групп Ли называется *гомоморфизмом групп Ли*, если

(1) отображение φ является гладким;

(2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in G$.

В частности, если группа H является группой Ли автоморфизмов $Aut\,M$ некоторого гладкого многообразия M, то гомоморфизм групп Ли называется *представлением группы Ли* G. Если в качестве M берется векторное пространство (с канонической гладкой структурой), то представление группы Ли G называется *линейным представлением.* Гомоморфизм групп Ли, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли.* Изоморфизм группы Ли на себя называется *автоморфизмом группы Ли.*

Отображение $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Ли называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если

(1) отображение ϕ является линейным;

(2) $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Гомоморфизм алгебр Ли, являющийся биекцией, называется *изоморфизмом алгебр Ли.*

Если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является алгеброй эндоморфизмов $End\,V$ некоторого векторного пространства V, то гомоморфизм алгебр Ли ϕ называется *линейным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\varphi(e) = \tilde{e},$$

где e – единица группы Ли G, $\tilde{e}$ – единица группы Ли H. Этот результат мы можем взять из алгебры (свойство гомоморфизма абстрактных групп). Тогда дифференциал $(\varphi_*)_e$ отображения φ является линейным отображением касательных пространств $T_e(G)$ и $T_{\tilde{e}}(H)$. Это отображение задает $\mathbb{R}$-линейное отображение присоединенных алгебр Ли

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

по формуле

$$\phi = (\tilde{\beta})^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta, \tag{1.10}$$

где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$, $\tilde{\beta} : \mathfrak{h} \to T_{\tilde{e}}(H)$ – изоморфизмы векторных пространств, построенные в теореме 1.2.

Записав формулу (1.10) в виде

$$\tilde{\beta} \circ \phi = (\varphi_*)_e \circ \beta,$$

получим, что отображение ϕ однозначно задается формулой

$$(\phi(X))_{\tilde{e}} = (\varphi_*)_e(X_e),\; X \in \mathfrak{g}. \tag{1.11}$$

Теорема 1.5. *Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда*

(1) для любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{g}$ векторные поля X и $\phi(X)$ являются φ-связанными;

(2) $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Из определения гомоморфизма групп Ли получим, что для любых элементов $g, h \in G$ имеет место равенство

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

Откуда получим, что

$$\varphi(L_g(h)) = L_{\varphi(g)}(\varphi(h)).$$

Так как это верно для любого $h \in G$, получим

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi, \forall g \in G. \tag{1.12}$$

Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Нам нужно доказать, что векторные поля X и $\tilde{X} \equiv \phi(X)$ будут φ -связанными. Согласно критерию связанных векторных полей нам нужно доказать для этого, что

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g.$$

Имеем

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} \tilde{X}_{\tilde{e}} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} (\varphi_*)_e X_e = ((L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*)_e (X_e) = \\ = ((\varphi \circ L_g)_*)_e (X_e) = (\varphi_*)_g \circ ((L_g)_*)_e (X_e) = (\varphi_*)_g (X_g)$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторного поля $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$, формулой (1.11), свойством композиции дифференциалов, формулой (1.12) и левоинвариантностью векторного поля $X \in \mathfrak{g}$. Итак, мы показали, что векторные поля $X \in \mathfrak{g}$ и $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ являются φ-связанными.

Далее, нам нужно показать, что линейное отображение ϕ присоединенных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ будет гомоморфизмом алгебр Ли. Здесь осталось доказать, что ϕ сохраняет коммутатор, то есть

$$\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y], \ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Как мы доказали, векторные поля X и ϕX являются φ-связанными, то есть $\phi X = \varphi_* X$. Аналогично для векторного поля Y. Тогда $[\phi X, \phi Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$. С другой стороны, по тем же соображениям $\phi[X, Y] = \varphi_*[X, Y]$. Правые части этих равенств совпадают по свойству φ-связанности. Следовательно, совпадают и левые части. □

§ 1.5. Подгруппы Ли. Однопараметрические подгруппы Ли и экспоненциальное отображение.

5.1. Подгруппы Ли.

Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G, если она является подмногообразием гладкого многообразия G, то есть отображение φ является регулярным и инъективным.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Векторное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно замкнуто относительно коммутатора, то есть для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Пример 1.10. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G. Докажем, что отображение

$$\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

их присоединенных алгебр Ли является изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{h}$ и $\phi(\mathfrak{h})$. Так как отображение φ регулярно (то есть его дифференциал в каждой точке инъективен), отображение ϕ, связанное с отображением φ_* по формуле (1.11), также будет инъективным, следовательно, будет являться биекцией на образ. Кроме того, в теореме 1.5 мы доказали, что оно будет гомоморфизмом алгебр Ли. Итак, отображение ϕ является изоморфизмом алгебр Ли.

5.2. Однопараметрические подгруппы и левоинвариантные векторные поля.

Однопараметрической подгруппой группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $g : \mathbb{R} \to G$, где $(\mathbb{R}, +)$ – аддитивная группа Ли, построенная в примере 1.1.

Другими словами, гладкое отображение $g : \mathbb{R} \to G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G, если для любых вещественных чисел t_1, t_2 имеем

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1) g(t_2).$$

Замечание 1.6. Так как однопараметрическая подгруппа $g(t)$ является, в частности, гомоморфизмом абстрактных групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(G, \cdot)$, то она переводит нейтральный элемент в нейтральный, то есть $g(0) = e$.

Лемма 1.3. *Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – ненулевое левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Тогда порожденный им локальный поток Φ_X на гладком многообразии G обладает следующими свойствами*

(1) $\Phi_X(\Phi_X(a, t_1), t_2) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;

(2) $\Phi_{\lambda X}(a,t)=\Phi_X(a,\lambda t)$*;*

(3) $\Phi_X(b\cdot a,t)=b\cdot\Phi_X(a,t)$*,*

где $a,b\in G$*,* $\lambda,t,t_1,t_2\in\mathbb{R}$*.*

Доказательство. Первые два свойства суть общие свойства локальных потоков, которые были доказаны в курсе Анализ на многообразиях.

Докажем третье свойство. Принцип доказательства тот же, что и в теореме о локальных потоках на произвольных многообразиях. Фиксируем произвольные элементы $a,b\in G$ и обозначим левую часть равенства через $\alpha(t)$, а правую часть равенства $\beta(t)$. Это некоторые кривые. Нам нужно доказать, что это интегральные кривые одного и того же векторного поля, проходящие через одну начальную точку. Имеем

$$\alpha(0)=\Phi_X(b\cdot a,0)=b\cdot a;\quad \beta(0)=b\cdot\Phi_X(a,0)=b\cdot a,$$

то есть начальные точки этих кривых совпадают. Далее, вычисляем по теореме о локальном потоке (см. курс Анализ на многообразиях)

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)=\frac{d}{dt}\Phi_X(b\cdot a,t)=X_{\Phi_X(b\cdot a,t)}=X_{\alpha(t)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\beta(t)=\frac{d}{dt}b\cdot\Phi_X(a,t)=\frac{d}{dt}L_b(\Phi_X(a,t))=$$

Так как точки a и b фиксированы, отображение $L_b:G\to G$ – диффеоморфизм, а $\Phi_X(a,t)$ – кривая на многообразии G. Тогда по доказанному в курсе Анализ на многообразиях получим

$$=((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)}\frac{d}{dt}\Phi_X(a,t)=((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)}X_{\Phi_X(a,t)}=$$

Так как X левоинвариантное тензорное поле, $(L_b)_*X=X$. Вычисляем значение обеих частей в точке $\beta(t)\equiv L_b(\Phi_X(a,t))$: $((L_b)_*X)_{L_b(\Phi_X(a,t))}=X_{L_b(\Phi_X(a,t))}$ и пользуемся в левой части критерием ϕ-связанных векторных полей $((L_b)_*)_{\Phi_X(a,t)}X_{\Phi_X(a,t)}=X_{L_b(\Phi_X(a,t))}$. Возвращаясь к цепочке равенств, получим

$$=X_{L_b(\Phi_X(a,t))}=X_{\beta(t)}.$$

Итак, кривые $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются интегральными кривыми одного и того же векторного поля X с началом в точке $b\cdot a$, следовательно, они совпадают. □

Теорема 1.6. *Всякое левоинвариантное векторное поле на группе Ли полно. При этом его интегральная кривая с началом в единице группы является однопараметрической подгруппой.*

Доказательство. Пусть дано левоинвариантное векторное поле $X\in\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G. Нам нужно доказать, что локальный поток Φ_X, определяемый этим векторным полем определен на всем многообразии $G\times\mathbb{R}$. Для этого мы сначала определим локальный поток в некоторой окрестности единицы и для некоторого интервала для t, а затем, определим его для всех t и левыми сдвигами разнесем по всей группе G.

Пусть определен локальный поток $\Phi(e,t)$ для точек некоторой окрестности e и для значений t в некотором интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Покажем, что этот поток можно определить для любого t из этого интервала и любого элемента $a\in G$. Действительно, по третьему свойству из леммы 1.3 получим

$$\Phi_X(a,t)=a\cdot\Phi_X(e,t).$$

Так как определена правая часть равенства, определена и левая часть равенства.

Покажем теперь, что локальный поток можно определить для любого вещественного числа t. Опять воспользуемся леммой 1.3. Очевидно, что для любого t существует такое натуральное число n, что число $\frac{t}{n}$ будет принадлежать интервалу $(-\varepsilon,\varepsilon)$, а значит, для $\frac{t}{n}$ локальный поток будет определен. Тогда

$$\Phi_X(a,t)=\Phi_X(a,n\cdot\frac{t}{n})=\Phi_X(e,\underbrace{\frac{t}{n}+\ldots+\frac{t}{n}}_{n\,\text{раз}})=\Phi_X(\ldots(\Phi_X(a,\frac{t}{n}),\frac{t}{n})\ldots).$$

Каждый локальный поток в скобках правой части равенства определен, следовательно, определен и локальный поток в левой части равенства.

Итак, отображение Φ_X определено на многообразии $G\times\mathbb{R}$,а значит, векторное поле X полно.

Обозначим $g(t) = \Phi_X(e,t)$ – это интегральная кривая векторного поля X с началом в точке e. Нам нужно доказать, что она является однопараметрической подгруппой группы Ли G. Во-первых, заметим, что это отображение вида $g : \mathbb{R} \to G$, определенное на всей числовой прямой. Во-вторых, имеем

$$g(t_1+t_2) = \Phi_X(e, t_1+t_2) = \Phi_X(\Phi_X(e,t_1), t_2) = \Phi_X(e,t_1)\cdot\Phi_X(e,t_2) = g(t_1)\cdot g(t_2).$$

Здесь мы воспользовались свойствами (1) и (3) леммы 1.3, то есть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G по определению. ☐

Теорема 1.7. *Всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля на этой группе Ли с началом в единице группы.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G. По сути это гладкая кривая, а значит, имеет смысл говорить о касательных векторах к этой кривой в ее точках. Пусть

$$\xi = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g(t)$$

касательный вектор к $g(t)$ в точке $g(0) = e$ (см. замечание 1.6). На касательный вектор ξ в единице группы G мы можем подействовать изоморфизмом β^{-1} (см. теорему 1.2) и получить левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, то есть $X = \beta^{-1}(\xi)$. Докажем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X. Имеем для произвольного фиксированного вещественного числа t_1

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_1} g(t) = \frac{d}{d(t-t_1)}\bigg|_{t-t_1=0} g((t-t_1)+t_1) = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} g(\tau+t_1) = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} g(t_1)\cdot g(\tau) =$$
$$= ((L_{g(t_1)})_*)_e\,\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} g(\tau) = ((L_{g(t_1)})_*)_e\xi = X_{g(t_1)}.$$

Здесь мы воспользовались определением однопараметрической подгруппы и левоинвариантностью векторного поля X (то есть тем, что $X_g = ((L_g)_*)_e\xi$).

Итак, кривая $g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}g(t) = X_{g(t)}; \\ g(0) = e, \end{cases}$$

следовательно, она будет интегральной кривой построенного левоинвариантного векторного поля X с началом в единице группы e. ☐

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на группе Ли G и множеством однопараметрических подгрупп группы Ли G. Оно сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическую подгруппу $g(t)$, являющуюся интегральной кривой этого векторного поля с началом в единице группы. Эта однопараметрическая подгруппа однозначно определена условиями

$$1)\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = X_e; \quad 2)\, g(0) = e. \tag{1.13}$$

Элемент X присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, порождающий однопараметрическую подгруппу указанным образом, называется *генератором* этой однопараметрической подгруппы.

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. *Экспоненциальным отображением* называется отображение

$$exp : \mathfrak{g} \to G,$$

определяемое соотношением

$$exp\, X = \Phi(e, 1).$$

Теорема 1.8. *Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы Ли G с генератором $X \in \mathfrak{g}$ допускает представление*

$$g(t) = exp(tX).$$

Доказательство. Учитывая свойство (2) леммы 1.3, получим

$$g(t) = \Phi_X(e,t) = \Phi_{tX}(e,1) = exp(tX).$$

☐

Следующую теорему мы примем без доказательства.

Теорема 1.9. *Отображение* $exp : \mathfrak{g} \to G$ *является гладким отображением относительно канонической гладкой структуры векторного пространства на* $\mathfrak{g}$. *Более того, существует окрестность* $U_0(\mathfrak{g})$ *нуля в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *и окрестность* $U_e(G)$ *единицы в группе Ли* G*, такие что экспоненциальное отображение* exp *будет диффеоморфизмом этих окрестностей.*

Окрестности $U_0(\mathfrak{g})$ и $U_e(G)$ из теоремы 1.9 называются *нормальными окрестностями.*

Нам потребуется еще одна теорема из теории групп Ли, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1.10. *Пусть* $\varphi : H \to G$ *– гомоморфизм групп Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "\phi|_{\mathfrak{h}}"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "exp"] \\
H \arrow[r, "\varphi"] & G,
\end{tikzcd}$$

где $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{h}$ *– алгебры Ли групп Ли* G *и* H *соответственно.*

В частности, если $\varphi : G \to G$ *– гомоморфизм группы Ли* G *на себя, то коммутативную диаграмму можно записать в виде*

$$\varphi \circ exp = exp \circ \phi.$$

2. Главные расслоения.

§ 2.1. Действие группы на многообразии.

1.1. Действие абстрактной группы на множестве.

Говорят, что группа (абстрактная) G *действует на множестве* M *слева*, если задан гомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h),\ g, h \in G.$$

Аналогичным образом, говорят, что группа G *действует на множестве* M *справа*, если задан антигомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(h) \circ \varphi(g),\ g, h \in G.$$

Предложение 2.1 . *Задание гомоморфизма* φ *равносильно заданию отображения* $\Phi : G \times M \to M$, *обладающего свойствами*

$$\begin{array}{l} 1)\ \Phi(e,m) = m; \\ 2a)\ \Phi(g,\Phi(h,m)) = \Phi(gh,m) \text{ для левого действия}; \\ 2b)\ \Phi(g,\Phi(h,m)) = \Phi(hg,m) \text{ для правого действия}; \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим случай левого действия (правое действие рассматривается аналогичным образом). Пусть дано левое действие группы G на множестве M, то есть задан гомоморфизм φ. Зададим отображение Φ формулой

$$\Phi(g,m) = \varphi_g(m),\ g \in G, m \in M.$$

Здесь для краткости мы обозначили $\varphi(g) = \varphi_g$.

Докажем, что отображение Φ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\Phi(e,m) = \varphi_e(m)$. По свойству гомоморфизма групп имеем $\varphi_e = id$, а значит, $\Phi(e,m) = m$ и первое свойство доказано. Во-вторых, имеем

$$\Phi(g,\Phi(h,m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) = \varphi_{gh}(m) = \Phi(gh,m).$$

Здесь мы воспользовались определением левого действия. Итак, отображение Φ обладает обладает обоими свойствами.

Обратно, пусть задано отображение Φ, удовлетворяющее указанным свойствам. Тогда определим отображение $\varphi : G \to G_M$ по формуле

$$\varphi(g)(m) \equiv \varphi_g(m) = \Phi(g,m),$$

то есть по той же самой формуле, но прочитанной справа налево. Проверим, что отображение φ является гомоморфизмом (абстрактных) групп. Имеем

$$\varphi_{gh}(m) = \Phi(gh,m) = \Phi(g,\Phi(h,m)) = \varphi_g \circ \varphi_g(m).$$

Здесь мы воспользовались вторым свойством отображения Φ. □

Отображение Φ называется *действием группы* G *на множестве* M, а гомоморфизм φ называется *представлением группы* G *на множестве* M.

Если представление φ инъективно, то оно называется *точным*, а соответствующее действие называется *эффективным*.

Пример 2.1. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Это группа относительно операции умножения комплексных чисел. Множество G можно изобразить как окружность с центром в некоторой фиксированной точке O, которая принята за начало системы координат. Обозначим плоскость, в которой лежит эта окружность, через σ.

Рассмотрим множество поворотов плоскости σ на всевозможные направленные углы вокруг точки O. Это группа. Обозначим ее G^R_σ. Очевидно, что группа поворотов G^R_σ является подгруппой группы G_σ преобразований плоскости σ.

Построим отображение $\varphi : G \to G_\sigma$ следующим образом. Пусть $z \in G$ – произвольное комплексное число. Его можно представить в виде $z = e^{i\psi}$, где $-\pi < \psi \leq \pi$. Тогда комплексному числу $z = e^{i\psi}$

поставим в соответствие поворот R_O^ψ вокруг точки O на угол ψ. Докажем, что отображение φ задает левое (одновременно являющееся и правым) действие группы G на множестве точек плоскости σ. Для комплексных чисел $z_1 = e^{i\psi_1}, z_2 = e^{i\psi_2} \in G$ имеем

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(e^{i(\psi_1+\psi_2)}) = R_O^{\psi_1+\psi_2} = R_O^{\psi_1} \circ R_O^{\psi_2}$$

(все вычисления проводятся по модулю 2π). Итак, отображение φ является гомоморфизмом, следовательно, задает левое действие. Почему действие будет также и правым?

Проверим, будет ли это действие эффективным. Для этого нам нужно проверить, будет ли гомоморфизм φ инъективным. Пусть $z = e^{i\psi} \in Ker\,\varphi$, то есть $\varphi(z) = id \equiv R_O^0$. Тогда $\psi = 0$ и $z = 1$. Итак, отображение φ является инъективным, а действие группы G эффективным.

Замечание 2.1. В случае эффективного действия группы G элемент $g \in G$ можно отождествлять с его образом φ_g. Тогда можно записать, что $(gh)m = g(hm)$ для левого действия и $(gh)m = h(gm)$ для правого действия. Здесь $g, h \in G$, $m \in M$. Отметим, что для правого действия удобнее принять запись $\varphi_g(m) = mg$. Тогда условие антигомоморфности отображение φ будет записано в виде $m(gh) = (mg)h$. Чем и обусловлено название „правое действие“.

Задача 2.1. Пусть на множестве M задано произвольное левое (правое) действие группы G. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ имеем $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

Доказательство. Так как φ_g – это элемент группы преобразований множества M, он является биекцией, а значит, обратим. Докажем, что $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id$. Равенство $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id$ докажите самостоятельно. Имеем для любой точки $m \in M$ (используя определение левого действия)

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(m) = \varphi_{g^{-1}g}(m) = \varphi_e(m) = id(m) = m.$$

□

Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g(x) = y$.

Пример 2.2. Действие группы G из примера 2.1 не является транзитивным. Действительно, рассмотрим две точки плоскости σ, принадлежащие различным концентрическим окружностям с центром в точке O. Тогда не существует поворота, переводящего одну точку во вторую.

Пример 2.3. Возьмем в качестве G группу $\mathbb{R}^2$ с операцией сложения. В качестве множества M возьмем множество точек плоскости σ и фиксируем на ней аффинную систему координат. Тогда отображение φ, ставящее в соответствие каждой паре чисел (a, b) параллельный перенос на вектор с координатами (a, b) в базисе фиксированной системы координат будет задавать левое (и одновременно правое действие) группы $\mathbb{R}^2$ на множестве точек плоскости σ (докажите самостоятельно). Это действие будет транзитивным, так как для любых двух точек x, y плоскости существует параллельный перенос, переводящий одну точку во вторую. Возьмем координаты вектора этого параллельного переноса. Это будет элемент g группы $\mathbb{R}^2$, для которого $\varphi_g(x) = y$. Таким образом, группа $\mathbb{R}^2$ действует на плоскости транзитивно.

Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если из того, что для элемента $g \in G$ существует точка $m \in M$, такая что $\varphi_g m = m$, следует $g = e$. Как всегда e – единица группы.

Замечание 2.2. Определение эффективного действия мы можем сформулировать в другом виде: действие называется эффективным, если для любого элемента $g \in G$ имеем, что для любого элемента $m \in M$ равенство $\varphi_g(m) = m$ влечет $g = e$.

Действительно, пусть φ инъективно. Возьмем произвольное $g \in G$ и пусть для произвольной точки $m \in M$ имеем $\varphi_g(m) = m$, то есть $\varphi_g = id$. В других обозначениях $\varphi(g) = id$. Так как $\varphi(e) = id$ и φ инъективно, получаем, что $g = e$. Обратно, пусть выполняется альтернативное определение эффективного действия. Нам нужно доказать инъективность φ. Для этого докажем, что ядро φ состоит только из единицы e. Пусть $g \in Ker\varphi$ – произвольный элемент. Тогда $\varphi(g) = id$ или для любого $m \in M$ имеем $\varphi_g(m) = m$. Тогда по альтернативному определению эффективного действия получим $g = e$. Что и требовалось доказать. Итак, для эффективного действия группы на множестве мы получили два эквивалентных определения.

Сравнивая альтернативное определение эффективного действия и определение свободного действия, получаем, что любое свободное действие эффективно.

Обратное, вообще говоря, не верно. Действие из примера 2.1 является эффективным, но не свободным, так как точка O является неподвижной точкой не только тождественного преобразования.

Пусть группа G действует на множестве M. Тогда любая точка $m \in M$ порождает отображение

$$\sigma_m : G \to M,$$

сопоставляя каждому элементу $g \in G$ точку

$$\sigma_m(g) = \varphi_g(m). \tag{2.1}$$

Образ отображения σ_m называется *орбитой* точки m относительно действия группы G и обозначается $Orb(m)$.

Пример 2.4. В примере 2.1 орбитами группы G будут концентрические окружности с центром в точке O.

Задача 2.2. Докажите, что $Orb(m) = M$ тогда и только тогда, когда действие транзитивно.

Лемма 2.1. *Если действие свободно, то отображение $\sigma_m : G \to M$ является биекцией на соответствующую орбиту.*

Доказательство. Нам нужно доказать инъективность отображения σ_m. Пусть для некоторых точек $g_1, g_2 \in G$ имеем $\sigma_m(g_1) = \sigma_m(g_2)$. Тогда согласно определению отображения σ_m получим

$$\varphi_{g_1}(m) = \varphi_{g_2}(m). \tag{2.2}$$

Так как отображение φ_{g_2} является преобразованием множества M, оно обратимо. Умножим обе части равенства 2.2 слева на $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. Так как $\varphi_{g_2}^{-1} = \varphi_{g_2^{-1}}$, получим $\varphi_{g_2^{-1}} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. По определению левого действия это равносильно $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(m) = m$. Так как действие свободно, $g_2^{-1}g_1 = e$, то есть $g_1 = g_2$.

Итак, мы показали, что для свободного действия отображение $\sigma_m : G \to Orb(m)$ является биекцией. □

Из леммы непосредственно следует

Теорема 2.1. *Если группа G действует на множестве M свободно, то M распадается в дизъюнктивное объединение орбит, находящихся в биективном соответствии с группой G.*

Пример 2.5. Рассмотрим группу G из примера 2.1 и множество точек плоскости σ без точки O. Тогда на множестве $\sigma \setminus \{O\}$ группа G действует свободно и это множество распадается в дизъюнктивное объединение концентрических окружностей с центром в точке O. Каждая такая окружность является орбитой действия группы G.

1.2. Действие группы Ли на многообразии.

Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Говорят, что G *гладко действует на многообразии* M, если действие $\Phi : G \times M \to M$ является гладким отображением и его представление $\varphi : G \to Diff\, M$ является отображением в группу диффеоморфизмов многообразия M.

Пример 2.6. Пусть G – r-мерная группа Ли, $\varphi : G \to Aut\, V$ – ее представление, то есть гомоморфизм в группу Ли $Aut\, V$ некоторого n-мерного линейного пространства V.

Фиксируем локальную карту (U, ψ) на группе Ли G с координатами $(x^1, \ldots, x^r)$, а также глобальную карту на V, порожденную базисом $b = (e_1, \ldots, e_n)$. Этот базис порождает базис, а значит и глобальную карту в векторном пространстве $\mathfrak{T}^1_1(V)$ тензоров типа (1,1), а именно, базис $(e^i_j = e^i \otimes e_j)$. Здесь как всегда $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис для b. Координатами тензора t типа (1,1) в этой карте будут его координаты $\{t^i_j\}$ относительно базиса (e^i_j).

В этой паре карт гомоморфизм φ задается гладкими функциями (по определению гомоморфизма групп Ли § 1.4.)

$$t^i_j = t^i_j(x^1, \ldots, x^r);\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда действие $\Phi : G \times V \to V$ группы G на векторном пространстве V задается в этих картах уравнениями

$$\tilde{X}^i = t^i_j(x^1, \ldots, x^n) X^j,$$

где $(X^1, \ldots, X^n)$ – координаты вектора $X \in V$ в базисе b. Следовательно, отображение Φ является гладким, так как существуют непрерывные частные производные по переменным $x^1, \ldots, x^r$ и $X^1, \ldots, X^n$.

Вывод: всякое линейное представление группы Ли порождает ее гладкое действие в соответствующем линейном пространстве.

Особенно важным частным случаем линейного представления группы Ли является так называемое *присоединенное представление.* Здесь в качестве векторного пространства берется ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 2.7. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, то есть множество левоинвариантных векторных полей на группе G. Группа Ли G действует на себя слева посредством так называемых *внутренних автоморфизмов*. Именно, любой элемент $a \in G$ порождает отображение $A_a : G \to G$ по формуле

$$A_a(x) = axa^{-1},\ x \in G. \tag{2.3}$$

Это отображение является гомоморфизмом, так как

$$A_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = A_a(x)A_a(y),\ x, y \in G.$$

Более того, $A_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, где L_a – это левый сдвиг на элемент a, $R_{a^{-1}}$ – правый сдвиг на элемент a^{-1}. Тогда отображение A_a будет диффеоморфизмом как композиция таковых (см. теорему 1.1). Следовательно, отображение A_a является изоморфизмом группы Ли G на себя, то есть автоморфизмом.

Далее, имеем для любых $a, b \in G$

$$A_a \circ A_b(x) = A_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = A_{ab}(x),\ x \in G.$$

Тогда отображение $A : G \to Aut(G) \subset G_G$, определенное формулой

$$A(g) = A_g$$

является гомоморфизмом групп. Так как групповые операции гладки, отображение A будет гладким, следовательно, отображение A является представлением группы Ли G на себе. Само действие $\Phi : G \times G \to G$ задается формулой

$$\Phi(g, x) = A_g(x) = gxg^{-1}.$$

Пусть $g \in G$ – фиксированный элемент и $A_g : G \to G$ – внутренний автоморфизм. Его дифференциал $((A_g)_*)_e : T_e(G) \to T_e(G)$ в единице e группы будет изоморфизмом касательного пространства. Тогда отображение

$$Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$$

будет автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ – канонический изоморфизм (см. теорему 1.2). Определим отображение

$$Ad : G \to Aut\,\mathfrak{g}$$

по формуле $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$. Это отображение будет гомоморфизмом групп Ли. Действительно,

$$Ad(gh) = \beta^{-1} \circ ((A_{gh})_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g \circ A_h)_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ ((A_h)_*)_e \circ \beta = \\ = Ad(g) \circ Ad(h).$$

Таким образом, отображение Ad является линейным представлением группы G на ее алгебре Ли. Это представление называется *присоединенным представлением* группы Ли.

Рассмотрим дифференциал отображения Ad в единице e группы G:

$$(Ad_*)_e : T_e(G) \to T_{id}(Aut\,\mathfrak{g}).$$

Касательное пространство $T_{id}(Aut\,\mathfrak{g})$ изоморфно алгебре Ли группы Ли $Aut\,\mathfrak{g}$. Канонический изоморфизм обозначим $\tilde{\beta}$. Как мы знаем (см. замечание 1.5), алгебра Ли группы Ли $Aut\,\mathfrak{g}$ – это алгебра эндоморфизмов $End\,\mathfrak{g}$. Таким образом, определено отображение

$$ad = \tilde{\beta}^{-1} \circ (Ad_*)_e \circ \beta : \mathfrak{g} \to End\,\mathfrak{g}.$$

Можно показать, что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли, а значит, линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себе. Это представление также называется *присоединенным представлением.*

Кроме того, имеет место формула

$$ad_X Y = [X, Y],$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad_X = ad(X) \in End\,\mathfrak{g}$, квадратные скобки обозначают коммутатор левоинвариантных векторных полей в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 2.8. Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Обозначим через $\mathscr{B}$ множество всех базисов V. На этом множестве определено действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Именно, пусть $b = (e_1, \dots, e_n) \in \mathscr{B}$ – произвольный базис. Положим для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\varphi_g(b) = \Phi(g, b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, g_n^{i_n} e_{i_n}) \equiv (g_j^i e_i),\ i, j = 1, \dots, n.$$

В силу невырожденности матрицы g, векторы $\varepsilon_i = g^j_i e_j$ будут линейно независимы, а значит, будут образовывать базис в V. Следовательно, $\varphi_g(b) \in \mathscr{B}$. Очевидно, что отображение φ_g – биекция, то есть преобразование множества $\mathscr{B}$, то есть $\varphi_g \in G_{\mathscr{B}}$.

Выясним, какое это действие: правое или левое. Пусть $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ – произвольные элементы. Тогда

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = \varphi_h(\varphi_g(e_1, \ldots, e_n)) = \varphi_h(g^i_j e_i) = (h^j_k(g^i_j e_i)) = ((h^j_k g^i_j)e_i). \tag{2.4}$$

По правилу записи матрицы перехода от одного базиса к другому (именно ею является матрица g) верхний индекс обозначает номер координаты вектора нового базиса. Эти координаты записываются в столбец матрицы перехода, следовательно, верхний индекс нумерует строки матрицы g. Тогда нижний индекс нумерует столбцы. Вернемся к последнему базису в (2.4). По правилу умножения матриц (строка на столбец) в первом сомножителе должны меняться номера столбцов, то есть нижние индексы. В нашем случае первой матрицей является матрица g, а вторым сомножителем является матрица h. Возвращаясь к цепочке равенств (2.4), получим

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = ((gh)^i_k e_i) = \varphi_{gh}(b).$$

Итак, $\varphi_h \circ \varphi_g = \varphi_{gh}$, то есть действие правое.

Так как для любых двух базисов всегда существует матрица перехода от одного к другому, то действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ является транзитивным. Кроме того, оно свободно, так как только единичная матрица не меняет любой базис.

Действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ позволяет ввести на множестве $\mathscr{B}$ базисов векторного пространства V структуру гладкого многообразия и превратить действие Φ в гладкое действие на гладком многообразии $\mathscr{B}$.

Чтобы построить гладкую структуру на $\mathscr{B}$ нам потребуется внести туда топологию и построить атлас. Начнем с карт атласа. Фиксируем базис $b_0 \in \mathscr{B}$. Тогда возникает отображение

$$\sigma_{b_0} : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathscr{B},$$

определенное формулой $\sigma_{b_0}(g) = \varphi_g(b_0)$, то есть каждой матрице g оно ставит в соответствие базис, в которых переходит b_0 под действием этой матрицы. Очевидно, что это биекция, следовательно, существует обратное отображение $\psi = \sigma^{-1}_{b_0}$, которое сопоставляет каждому базису $b \in \mathscr{B}$ матрицу перехода $C(b_0, b)$ от базиса b_0 к базису b. Внесем во множество $\mathscr{B}$ топологию, потребовав, чтобы отображение ψ было гомеоморфизмом, то есть открытыми множествами в $\mathscr{B}$ назовем полные прообразы открытых множеств в $GL(n, \mathbb{R})$ при отображении ψ. Можно показать, что эта топология не зависит от выбора базиса b_0, то есть если выбрать другой фиксированный базис β_0, то множество множеств, открытых в смысле отображения $\sigma^{-1}_{b_0}$, будет совпадать с множеством множеств, открытых в смысле отображения $\sigma^{-1}_{\beta_0}$.

Тогда пара $(\mathscr{B}, \psi)$ будет глобальной картой на топологическом пространстве $\mathscr{B}$. Эта карта каждому базису ставит в соответствие матрицу перехода от базиса b_0 к нему. Это n^2 вещественных чисел, следовательно, размерность многообразия $\mathscr{B}$ будет n^2.

Покажем, что относительно построенной гладкой структуры действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ будет гладким. Фиксируем глобальную карту $(\mathscr{B}, \psi)$, порожденную базисом b_0. Нам нужно убедиться, что функции, задающие отображение

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathscr{B} \to \mathscr{B}$$

в картах $(GL(n, \mathbb{R}) \times \mathscr{B}, id \times \psi)$ и $(\mathscr{B}, \psi)$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем аргументам. Рассмотрим произвольный базис $b \in \mathscr{B}$. Пусть в карте $(\mathscr{B}, \psi)$ он имеет координаты $(x^i_j) = X$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису b. Для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$ обозначим координаты базиса $\Phi(g, b) \equiv bg$ в карте $(\mathscr{B}, \psi)$ через $(\tilde{x}^i_j) = \tilde{X}$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису bg. Тогда

$$\tilde{X} = \psi(bg) = C(b_0, bg) = C(b_0, b)g = Xg.$$

Переходя к элементам матриц, получим

$$\tilde{x}^i_j = x^i_k g^k_j.$$

В этих формулах переменными являются как x^i_k, так и g^k_j. Очевидно, что правые части формул имеют частные производные любого порядка, следовательно, отображение Φ гладко.

Итак, группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ гладко, свободно и транзитивно действует на n^2-мерном гладком многообразии $\mathscr{B}$.

§ 2.2. Фундаментальные векторные поля.

Пусть группа Ли G действует справа на гладком многообразии P. Обозначим соответствующее действие $\Phi : G \times P \to P$. Как обычно обозначим $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы Ли G.

Определим отображение

$$\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P),$$

где $\mathfrak{X}(P)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии P, следующим образом. Пусть $p \in P$ – произвольная фиксированная точка. Тогда действие группы Ли G индуцирует отображение

$$\sigma_p : G \to P$$

по формуле $\sigma_p(g) = \varphi_g(p) = \Phi(g, p) \equiv pg$. Напомним, что образом этого отображения являются орбиты действия Φ. Если $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $g(t)$ – соответствующая однопараметрическая подгруппа (см. § 1.5.), то определяется отображение

$$\Psi(p, t) = \sigma_p(exp\, tX) \equiv \Phi(exp\, tX, p). \tag{2.5}$$

Отображение Ψ является потоком на многообразии P, причем глобальным, так как однопараметрическая подгруппа определена для любого $t \in \mathbb{R}$. Этот поток порождает полное векторное поле $X^\flat$ по формуле

$$(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi(p, t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma_p(exp\, tX). \tag{2.6}$$

Тогда положим $\lambda(X) = X^\flat$.

Так как отображение Ψ гладкое, то векторное поле $X^\flat$ гладко зависит от точки p, и следовательно, является гладким векторным полем. Кроме того,

$$(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma_p(exp\, tX) = ((\sigma_p)_*)_e \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} exp\, tX = ((\sigma_p)_*)_e X_e.$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.13). Откуда получаем, что

$$(\lambda(X))_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e. \tag{2.7}$$

Предложение 2.2 . *Отображение λ является гомоморфизмом вещественных векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{X}(P)$.*

Доказательство. Это следует из того, что дифференциал гладкого отображения является $\mathbb{R}$-линейным отображением. □

Теорема 2.2. *Отображение λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть*

$$\lambda[X, Y] = [\lambda X, \lambda Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$ – произвольные левоинвариантные векторные поля, $X^\flat = \lambda X$, $Y^\flat = \lambda Y$ – соответствующие им фундаментальные векторные поля. Рассмотрим векторное поле $[X^\flat, Y^\flat]$. По определению и свойствам производной Ли (см. курс Тензорный анализ) получим для любой точки $p \in P$

$$[X^\flat, Y^\flat]_p = (\mathcal{L}_{X^\flat} Y^\flat)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((F_{-t})_*)_{F_t(p)} Y^\flat_{F_t(p)} - Y^\flat_p),$$

где F_t – это однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем $X^\flat$. Напомним, как она определяется: берем поток, порожденный векторным полем $X^\flat$ и фиксируем t, меняется только точка многообразия. В нашем случае поток обозначен $\Psi(p, t)$. Тогда имеем

$$F_t(p) = \Psi(p, t) = \Phi(exp(tX), p) \equiv \varphi_{exp(tX)}(p). \tag{2.8}$$

Вычислим $((F_{-t})_*)_{F_t(p)} Y^\flat_{F_t(p)}$. Имеем с учетом (2.7)

$$((F_{-t})_*)_{F_t(p)} \circ ((\sigma_{F_t(p)})_*)_e Y_e = ((F_{-t} \circ \sigma_{F_t(p)})_*)_e Y_e.$$

Найдем отображение $F_{-t} \circ \sigma_{F_t(p)} : G \to P$. Напомним, что $\sigma_p : G \to P$ задается формулой $\sigma_p(g) = \varphi_g(p)$. Тогда

$$F_{-t} \circ \sigma_{F_t(p)}(g) = F_{-t} \circ \varphi_g \circ F_t(p) = \varphi_{exp(-tX)} \circ \varphi_g \circ \varphi_{exp(tX)}(p) =$$

Используем правое действие (φ – антигомоморфизм)

$$\varphi_{exp(tX)gexp(-tX)}(p) = \varphi_{exp(tX)g(exp(tX))^{-1}}(p) =$$

Здесь мы воспользовались тем, что $exp(tX)$ – однопараметрическая подгруппа, в частности, гомоморфизм групп, следовательно, противоположному элементу для t будет соответствовать обратный в G. В результате мы получаем внутренний автоморфизм для группы Ли (см. (2.3))

$$= \varphi_{A_{exp(tX)}(g)}(p) = \sigma_p \circ A_{exp(tX)}(g).$$

Итак, мы получаем

$$F_{-t} \circ \sigma_{F_t(p)} = \sigma_p \circ A_{exp(tX)}.$$

Кроме того, имеем $Y_p^\flat = ((\sigma_p)_*)_e Y_e$. Тогда

$$[X^\flat, Y^\flat]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((\sigma_p \circ A_{exp(tX)})_*)_e Y_e - ((\sigma_p)_*)_e Y_e = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((\sigma_p)_*)_e(((A_{exp(tX)})_*)_e Y_e - Y_e)).$$

С другой стороны, вычислим $[X, Y]_e$. Напомним, что X и Y – это левоинвариантные векторные поля на групп Ли G. Раз они векторные поля, то для них также можно вычислять производную Ли.

$$[X, Y]_e = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((\mathscr{F}_{-t})_*)_{\mathscr{F}_t(e)} Y_{\mathscr{F}_t(e)} - Y_e),$$

где $\{\mathscr{F}_t\}$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем X. Она получается из потока, который порождает поле X, фиксацией t. В частности, для точки $e \in G$ получим

$$\mathscr{F}_t(e) = \tilde{\Phi}_X(e, t) = exp(tX).$$

Для любой точки $a \in G$ получаем

$$\mathscr{F}_t(a) = \tilde{\Phi}_X(a, t) = a \cdot \tilde{\Phi}_X(e, t) = a \cdot exp(tX) = R_{exp(tX)}(a),$$

где $R_{exp(tX)}$ – правый сдвиг на элемент $exp(tX) \in G$. Кроме того, в силу левоинвариантности векторного поля Y получим

$$Y_{\mathscr{F}_t(e)} = ((L_{\mathscr{F}_t(e)})_*)_e Y_e.$$

Вычислим $((\mathscr{F}_{-t})_*)_{\mathscr{F}_t(e)} Y_{\mathscr{F}_t(e)}$.

$$((\mathscr{F}_{-t})_*)_{\mathscr{F}_t(e)} Y_{\mathscr{F}_t(e)} = ((\mathscr{F}_{-t})_*)_{\mathscr{F}_t(e)} \circ ((L_{\mathscr{F}_t(e)})_*)_e Y_e =$$
$$= (\mathscr{F}_{-t} \circ L_{\mathscr{F}_t(e)})_*)_e Y_e = (R_{exp(-tX)} \circ L_{exp(tX)})_*)_e Y_e = ((A_{exp(tX)})_*)_e Y_e.$$

Итак,

$$[X, Y]_e = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((A_{exp(tX)})_*)_e Y_e - Y_e).$$

Заметим, что

$$[X, Y]_p^\flat = ((\sigma_p)_*)_e [X, Y]_e = ((\sigma_p)_*)_e \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(((A_{exp(tX)})_*)_e Y_e - Y_e).$$

Так как отображение $((\sigma_p)_*)_e$ $\mathbb{R}$-линейно, оно пройдет через предел и и число $\frac{1}{t}$. В результате мы получим $[X, Y]_p^\flat = [X^\flat, Y^\flat]_p$ для любой точки $p \in P$. ☐

Задача 2.3. Докажите, что левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе Ли коммутируют, то есть если X – левоинвариантное, Y – правоинвариантное векторное поле, то $[X, Y] = 0$.

Итак, мы доказали, что гладкое действие группы Ли G на многообразии P индуцирует гомоморфизм алгебр Ли $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$. Образ этого гомоморфизма есть конечномерная подалгебра Ли $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{X}(P)$, элементы которой называются *фундаментальными векторными полями* на многообразии P. Алгебра Ли $\mathfrak{f}$ называется *алгеброй Ли фундаментальных векторных полей* на многообразии P.

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{f}$ порождает $C^\infty(P)$-модуль $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$, который является подмодулем модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладких векторных полей на многообразии P.

Замечание 2.3. Подробно тензорное произведение модулей вводилось в курсе Тензорная алгебра (глава 2). Напомним, что это такое и зачем это нужно. В алгебре Ли $\mathfrak{f}$ определена операция умножения только на вещественные числа. На функции из $C^\infty(P)$ умножать векторные поля из $\mathfrak{f}$ не можем, так как эта операция выведет нас за рамки $\mathfrak{f}$. Хотя в данном случае имеет смысл говорить о произведении функции и векторного поля из $\mathfrak{f}$, так как оно является векторным полем из $\mathfrak{X}(P)$, в котором такое произведение определено.

Чтобы каждый раз не выходить во все множество $\mathfrak{X}(P)$ при умножении фундаментального векторного поля на гладкую функцию, мы поступим следующим образом. Рассмотрим множество конечных формальных сумм вида

$$X = f_1X_1 + \ldots + f_NX_N,$$

где N – не фиксированное натуральное число, $f_1, \ldots, f_N \in C^\infty$, $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{f}$. Это множество обозначается $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Структура $C^\infty(P)$-модуля в этом множестве вводится с помощью операции сложения

$$X + Y = f_1X_1 + \ldots + f_NX_N + \tilde{f}_1\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{f}_{\tilde{N}}\tilde{X}_{\tilde{N}},$$

а операция умножения на гладкую функцию $f \in C^\infty(P)$ определяется так

$$fX = (ff_1)X_1 + \ldots + (ff_N)X_N.$$

Чтобы выполнялись аксиомы модуля, нам нужны будут следующие договоренности:

1. Порядок слагаемых в формальной сумме не важен;
2. $f_1X + f_2X = (f_1 + f_2)X$, $f_1, f_2 \in C^\infty(P)$, $X \in \mathfrak{f}$;
3. $fX_1 + fX_2 = f(X_1 + X_2)$, $f \in C^\infty(P)$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{f}$.

Итак, мы построили $C^\infty(P)$-подмодуль $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ в модуле $\mathfrak{X}(P)$. На его элементы мы можем при необходимости смотреть не только как на формальные суммы, но и „вычислять“ эту формальную сумму, рассматривая входящие туда векторные поля как элементы из $\mathfrak{X}(P)$.

Еще одно достоинство этой конструкции – сохранение глобального базиса из векторного пространства $\mathfrak{f}$ в $C^\infty(P)$-модуле $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{f}$. Действительно, пусть в пространстве $\mathfrak{f}$ существует базис (ниже мы покажем, что таким базисом в случае свободного действия будет образ любого базиса из пространства $\mathfrak{g}$ при отображении λ). Обозначим его $b = (E_1, \ldots, E_r)$. Рассмотрим произвольный элемент $X = f^1X_1 + \ldots + f^NX_N \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Тогда каждый элемент $X_\alpha \in \mathfrak{f}$, $\alpha = 1, \ldots, N$ можно разложить по базису b. Подставим эти разложения в формальную сумму X. Используя введенные договоренности, мы можем раскрыть скобки и собрать коэффициенты при векторах базиса b:

$$X = ()E_1 + \ldots + ()E_r,$$

где скобки обозначают полученные коэффициенты. Другими словами, мы получили разложение X по базису b. Коэффициентами разложения являются гладкие функции многообразия P. В этом смысле система векторных полей b является базисом модуля $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Теорема 2.3. *Если группа Ли G действует на многообразии P эффективно, то гомоморфизм λ является инъективным, в частности, алгебра Ли $\mathfrak{f}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Более того, если G действует свободно на P, то ненулевые фундаментальные векторные поля не имеют особых точек, то есть нигде не обращаются в нуль.*

Доказательство. 1) Пусть G действует эффективно на многообразии P. Надо доказать, что $ker\,\lambda = \{0\}$. Пусть $X \in ker\lambda$, то есть $\lambda(X) = 0$. Тогда соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем λX, тривиальна, то есть $F_t = id$ для любого вещественного t. Тогда $F_t(p) = \varphi_{exp\,tX}(p) = id(p)$ для любой точки $p \in P$. А так как действие эффективно, то $exp\,tX = e$ для любого вещественного t, то есть

$$X_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp\,tX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e = 0,$$

то есть $X_e = 0$, то есть $X = \beta^{-1}(X_e) = 0$. Здесь мы использовали канонический изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$. Итак, мы показали, что $ker\lambda = \{0\}$, следовательно, гомоморфизм λ является мономорфизмом.

2) Пусть группа G действует на многообразии P свободно. По определению имеем, что из существования точки $p \in P$, такой что $\varphi_g(p) = p$, следует $g = e$. Пусть точка $p \in P$, такая что $X^\flat_p = 0$. Отсюда следует, что p является неподвижной точкой однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$, то есть

$$F_t(p) = \varphi_{exp\,tX}(p) = p.$$

Так как действие свободно, $exp\,tX = e$. Откуда, как и выше, получаем $X = 0$. □

Теорема 2.4. *Пусть группа Ли G гладко действует справа на многообразии P. Тогда для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "Ad(g^{-1})"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\lambda"] \\
\mathfrak{f} \arrow[r, "(\varphi_g)_*"] & \mathfrak{f}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $X^\flat = \lambda X \in \mathfrak{f}$ – соответствующее фундаментальное векторное поле на многообразии P. Оно порождает глобальный поток $\Psi : P \times \mathbb{R} \to P$ по формуле $\Psi(p,t) = \varphi_{exp\,tX}(p)$. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Ему отвечает диффеоморфизм $\varphi_g : P \to P$. Из свойств локальных потоков следует, что увлеченному им векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток

$$\Psi_{(\varphi_g)_* X^\flat}(p,t) = \varphi_g \circ \Psi_{X^\flat}(\varphi_g^{-1}(p),t) = \varphi_g \circ \varphi_{exp\,tX} \circ \varphi_g^{-1}(p) = \varphi_{g^{-1}(exp\,tX)g}(p) = \varphi_{A_{g^{-1}}(exp\,tX)}(p).$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.5), определением отображения σ_p, определением правого действия (§ 2.1.) и определением внутреннего автоморфизма (пример 2.7).

Итак, векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток, порожденный однопараметрической подгруппой $A_{g^{-1}}(exp\,tX)$. В частности, векторное поле $(\varphi_g)_* X^\flat$ будет фундаментальным, то есть $(\varphi_g)_* X^\flat = \lambda(Y)$, где Y – генератор этой подгруппы, то есть

$$Y_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A_{g^{-1}}(exp\,tX) = ((A_{g^{-1}})_*)_e \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp\,tX = ((A_{g^{-1}})_*)_e X_e = ((A_{g^{-1}})_*)_e \beta(X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.13) и примером 2.7.

Применим отображение β^{-1} к крайним частям последней цепочки равенств.

$$Y = Ad(g^{-1})(X).$$

Здесь мы также воспользовались определением отображения $Ad(g)$ из примера 2.7. Следовательно,

$$(\varphi_g)_* \lambda(X) = (\varphi_g)_* X^\flat = \lambda Y = \lambda(Ad(g^{-1})X),$$

где $X \in \mathfrak{g}$, то есть

$$(\varphi_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1}). \tag{2.9}$$

□

§ 2.3. Главные расслоения.

Главным расслоением называется четверка (P, M, G, π), где P – гладкое многообразие, G – группа Ли, гладко и свободно действующая на многообразии P, M – пространство орбит $Orb_G P$, являющееся гладким многообразием, $\pi : P \to M$ – гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in P$ ее орбиту. При этом должно выполняться так называемое *свойство локальной тривиальности* главного расслоения, а именно, многообразие M должно допускать открытое покрытие $\mathscr{U}$, которое называется *покрытием локальной тривиальности*, такое что для любого элемента U этого покрытия существует гладкое отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \to G,$$

удовлетворяющее двум свойствам

(F1) $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in P$, $g \in G$;

(F2) отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G,$$

заданное формулой

$$\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$$

является диффеоморфизмом.

Многообразие P называется *тотальным пространством расслоения*, группа Ли G называется *структурной группой*, многообразие M называется *базой расслоения*, отображение π называется *естественной проекцией*, отображение ψ_U называется *диффеоморфизмом локальной тривиальности*, элементы из покрытия локальной тривиальности называются *областями локальной тривиальности.*

Полный прообраз точки $m \in M$ относительно естественной проекции π называется *слоем* над точкой m.

Замечание 2.4. Так как действие группы на многообразии P свободно, каждая орбита этого действия биективно отображается на группу Ли. Можно показать, что эта биекция будет диффеоморфизмом. Другими словами, каждый слой главного расслоения диффеоморфен структурной группе. На каждом слое группа G действует транзитивно и свободно. Очевидно, что $\pi(pg) = \pi(p)$ для любой точки $p \in P$ и $g \in G$, так как точки p и pg находятся в одном слое.

Пример 2.9. Рассмотрим четверку (P, M, G, p_1), где M – гладкое многообразие, G – группа Ли, $P = M \times G$ – декартово произведение гладких многообразий, $p_1 : M \times G \to M$ – проекция на первый сомножитель, задаваемая формулой $p_1(m, g) = m$.

Группа Ли G действует на многообразии P справа по формуле

$$(m, g)h = (m, gh),\ (m, g) \in P, h \in G.$$

Покажите самостоятельно, что это гладкое, свободное, правое действие.

Орбиты этого действия есть классы вида

$$(m, g)G = \cup_{h \in G}(m, g)h = \cup_{h \in G}(m, gh) = \cup_{g \in G}(m, g) \equiv (m, G).$$

Этот класс мы можем отождествить с точкой $m \in M$, то есть $M = Orb_G P$.

В силу этого отождествления естественная проекция

$$\pi : P \to M,$$

задаваемая формулой $\pi(p) = Orb_G p = (m, G)$ канонически отождествляется с отображением p_1.

В качестве покрытия локальной тривиальности выберем покрытие, состоящее из единственного элемента $\mathscr{U} = \{M\}$. При этом положим

$$F_U(p) = F_U((m, g)) = g \equiv p_2(p),$$

то есть отображение F_U является проекцией на второй сомножитель. Оно, очевидно, гладкое. Проверим выполнение свойств $(F1)$ и $(F2)$:

$$F_U(ph) = F_U((m, g)h) = p_2((m, gh)) = gh = F_U(p)h.$$

Таким образом, $(F1)$ выполняется. Далее,

$$\psi_U(p) = \psi_U((m, g)) = (\pi(p), F_U(p)) = (p_1(p), p_2(p)) = (m, g) = p,$$

то есть отображение ψ_U является тождественным, а следовательно, является диффеоморфизмом.

Итак, мы доказали, что четверка (P, M, p_1, G) является главным расслоением. Оно называется *тривиальным главным расслоением.*

Например, круговая цилиндрическая поверхность является тривиальным главным расслоением. При этом в качестве базы мы можем взять и окружность S^1 и прямую $\mathbb{R}$.

Пусть даны два главных расслоения $\mathscr{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathscr{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$. *Гомоморфизмом* расслоения $\mathscr{B}_1$ в расслоение $\mathscr{B}_2$ называется пара (f, ρ), где

$$f : P_1 \to P_2$$

гладкое отображение,

$$\rho : G_1 \to G_2$$

гомоморфизм групп Ли. При этом должны выполняться условия

1. отображение f послойно, то есть $\pi_1 = \pi_2 \circ f$;
2. отображение f согласовано с действиями структурных групп, то есть для любой точки $p \in P_1$ любого элемента $g \in G_1$ имеем $f(pg) = f(p)\rho(g)$.

В частности, если (P_1, f) является подмногообразием в P_2, а (G_1, ρ) – подгруппой группы Ли G_2, то расслоение $\mathscr{B}_1$ называется подрасслоением расслоения $\mathscr{B}_2$.

Если f – диффеоморфизм, ρ – изоморфизм групп Ли, то пара (f, ρ) называется *изоморфизмом* или *эквивалентностью* главных расслоений $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$.

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Гладкое отображение

$$s : M \to P$$

называется *(гладким) сечением* расслоения $\mathscr{B}$, если $\pi \circ s = id$.

Из определения гладкого сечения следует, что для любой точки $m \in M$ ее образ $s(m)$ принадлежит слою $\pi^{-1}(m)$, находящемуся над точкой m. В самом деле, если предположить противное, то есть $s(m) \in \pi^{-1}(m_1)$, $m_1 \neq m$, то получим $\pi \circ s(m) = m_1 \neq id(m)$.

Теорема 2.5. *Главное расслоение* $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ *допускает сечение тогда и только тогда, когда оно изоморфно тривиальному.*

Доказательство. $\Leftarrow$). Пусть главное расслоение $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ изоморфно тривиальному расслоению $\mathscr{B}_0 = (M \times G, M, p_1, G)$, то есть задана пара отображений (f, ρ), где $f : P \to M \times G$ – диффеоморфизм, $\rho : G \to G$ – изоморфизм групп Ли. Нам нужно построить гладкое сечение. Определим отображение $s : M \to P$, положив $s = f^{-1} \circ i_1$, где $i_1(m) = (m, e)$, $e \in G$. Это гладкое отображение как композиция таковых. Кроме того, для любой точки $m \in M$ имеем

$$\pi \circ s(m) = \pi(f^{-1}(m, e)) = (p_1 \circ f)(f^{-1}(m, e)) = m.$$

Здесь мы воспользовались послойностью отображения f. Итак, мы построили гладкое сечение.

$\Rightarrow$). Пусть у главного расслоения $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ существует гладкое сечение $s : M \to P$. Нам нужно построить изоморфизм (f, ρ) данного расслоения на тривиальное $\mathscr{B}_0 = (M \times G, M, p_1, G)$. В качестве ρ возьмем тождественное преобразование. Построим отображение $f : P \to M \times G$. Пусть $p \in P$ произвольная точка. Рассмотрим элемент $g \in G$, который переводит точку $s \circ \pi(p)$ в точку p. Такой элемент существует, так как эти точки лежат в одном слое и единственен, так как действие свободно. Другими словами, элемент g находится как решение уравнения $\Phi(g, s \circ \pi(p)) = p$. Из теоремы о неявной функции получаем, что решение этого уравнения $g = F(p)$ является гладким. Тогда f определим так:

$$f(p) = (\pi(p), F(p)) \Leftrightarrow f = \pi \times F.$$

Это отображение является послойным, так как $p_1 \circ f = p_1 \circ (\pi \times F) = \pi$. Оно согласовано с действием группы, то есть $f(ph) = f(p)id(h)$ для любого $h \in H$. Имеем

$$f(ph) = (\pi(ph), F(ph)) = (\pi(p), \tilde{h}) = \tag{2.10}$$

где $\tilde{h}$ находится из условия

$$(s \circ \pi(ph))\tilde{h} = ph \Leftrightarrow (s \circ \pi(p))\tilde{h} = ph, \tag{2.11}$$

то есть это тот элемент из G, который переводит точку $s \circ \pi(ph)$ в точку ph. Найдем этот элемент. Имеем $(s \circ \pi(p))g = p$. Подействуем на обе части равенства (это точки многообразия P) элементом $h \in G$. Так как действие правое, получим $(s \circ \pi(p))(gh) = ph$. Сравнивая это с (2.11), получим $\tilde{h} = gh = F(p)h$. Возвращаемся к (2.10) с учетом определения действия структурной группы в тривиальном расслоении

$$= (\pi(p), F(p)h) = (\pi(p), F(p))h = f(p)id(h).$$

Итак, отображение f согласовано с действием структурной группы.

Наконец, покажем, что f – это диффеоморфизм. Проверим, что обратное отображение к f задается формулой $f^{-1}(m, g) = (s(m))g$ (очевидно, что это гладкое отображение). Действительно,

$$f \circ f^{-1}(m, g) = f(s(m)g) = (\pi(s(m)g), F(s(m)g)) = (\pi \circ s(m), \tilde{h}) = (m, \tilde{h}).$$

Обозначим $\tilde{h} = F(s(m)g)$ и найдем его. Этот элемент находится из уравнения $(s \circ \pi(s(m)g))\tilde{h} = s(m)g$ или $s(m)\tilde{h} = s(m)g$. Откуда получаем, что $\tilde{h} = g$. Итак, $f \circ f^{-1} = id$. Проверьте самостоятельно, что $f^{-1} \circ f = id$. Тогда получим, что f – диффеоморфизм.

Итак, мы построили пару (f, id), которая является изоморфизмом главного расслоения $\mathscr{B}$ и тривиального расслоения, следовательно, они изоморфны. ☐

Замечание 2.5. Пусть дано главное расслоение (P, M, π, G). Нетрудно показать, что для любой области U локальной тривиальности четверка $(\pi^{-1}(U), U, \pi|_{\pi^{-1}(U)}, G)$ будет главным расслоением. Из свойств $(F1)$ и $(F2)$ следует, что это главное расслоение эквивалентно тривиальному расслоению $(U \times G, U, p_1, G)$ (изоморфизмом будет пара (ψ_U, id). В частности, получаем, что любое главное расслоение допускает локальные сечения, а именно, сечения над любой областью локальной тривиальности.

§ 2.4. Расслоение Хопфа.

Пусть дано комплексное пространство $\mathbb{C}^2$. Рассмотрим множество точек (z^1, z^2) пространства $\mathbb{C}^2$, которое задается уравнением

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1. \tag{2.12}$$

Выясним, что это за множество. Перейдем к овеществлению комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, то есть к пространству $\mathbb{R}^4$, введя новые переменные

$$z^1 = x^1 + iy^1; \quad z^2 = x^2 + iy^2; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тогда в $\mathbb{R}^4$ (сейчас в нем координаты обозначены (x^1, x^2, y^1, y^2)) рассматриваемое множество задается уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 = 1.$$

Это трехмерная сфера. Поэтому обозначим это множество через S^3. Итак, трехмерную сферу мы можем рассматривать как линию комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением (2.12).

Каждое уравнение $az^1 + bz^2 = 0$, где $a, b \in \mathbb{C}$ – фиксированные комплексные числа, не равные нулю одновременно, задает комплексную прямую. Очевидно, что она проходит через точку $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Рассмотрим произвольную фиксированную прямую $az^1+bz^2 = 0$ и найдем ее пересечение с трехмерной сферой. Опять переходим к овеществлению. Для сферы мы уже получили вещественное уравнение. Надо получить аналогичное уравнение для комплексной прямой. Обозначим $a = a_1 + ia_2$ и $b = b_1 + ib_2$. Тогда

$$az^1+bz^2 = (a_1+ia_2)(x^1+iy^1)+(b_1+ib_2)(x^2+iy^2) = (a_1x^1-a_2y^1+b_1x^2-b_2y^2)+i(a_2x^1+a_1y^1+b_1y^2+b_2x^2) = 0.$$

Полученное равенство эквивалентно выполнению системы равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x^1 - a_2y^1 + b_1x^2 - b_2y^2 = 0 \\ a_2x^1 + a_1y^1 + b_1y^2 + b_2x^2 = 0. \end{array} \right.$$

Ранг этой системы равен 2 (докажите самостоятельно), следовательно, она задает 2-плоскость в пространстве $\mathbb{R}^4$, которая проходит через точку $(0, 0, 0, 0)$, то есть через центр сферы. При пересечении получаем большую окружность S^1. Эта окружность называется *окружностью Хопфа.*

Запишем уравнения, задающие окружность Хопфа с помощью комплексных чисел. Окружность Хопфа задается системой (комплексных уравнений)

$$\left\{ \begin{array}{l} |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \\ az^1 + bz^2 = 0. \end{array} \right.$$

Если $a \neq 0$, то из второго равенства выражаем $z^1 = -\frac{b}{a}z^2$ и подставляем в первое равенство (обозначим $k = -\frac{b}{a}$). Аналогичную процедуру проведем в случае $b \neq 0$ (только теперь обозначаем $k = -\frac{a}{b}$). Тогда окружность Хопфа будет задаваться одной из двух пар уравнений

$$\begin{array}{l} |z^1|^2 = \frac{1}{1+|k|^2},\ z^2 = kz^1,\ k = -\frac{a}{b},\ b \neq 0 \\ |z^2|^2 = \frac{1}{1+|k|^2},\ z^1 = kz^2,\ k = -\frac{b}{a},\ a \neq 0 \end{array} \qquad (2.13)$$

Любые две различные окружности Хопфа не пересекаются. Действительно, если существует хотя бы одна общая точка (z^1, z^2) двух окружностей Хопфа, то эта точка, во-первых, отлична от нулевой, и, во-вторых, принадлежит обеим комплексным прямым, которые определяют окружности Хопфа. Тогда комплексные прямые должны пересекаться в двух различных точках. Полученное противоречие доказывает, что окружности Хопфа не пересекаются.

Итак, мы получаем, что через каждую точку трехмерной сферы S^3 проходит ровно одна окружность Хопфа.

Покажем, что две точки (z^1, z^2) и $(\tilde{z}^1, \tilde{z}^2)$ лежат на одной окружности Хопфа тогда и только тогда, когда они отличаются на фазовый множитель, то есть $\tilde{z}^1 = e^{it}z^1$, $\tilde{z}^2 = e^{it}z^2$. В самом деле, из вторых уравнений в системах (2.13) мы видим, что $\frac{z^1}{\tilde{z}^1} = \frac{z^2}{\tilde{z}^2}$. Обозначим это число через λ. Нам нужно показать, что модуль λ равен 1. Так как пара (z^1, z^2) принадлежит сфере S^3, получим $|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1$. Выразим $z^1 = \lambda\tilde{z}^1$, $z^2 = \lambda\tilde{z}^2$ и подставим в это равенство. Тогда $|\lambda|^2(|\tilde{z}^1|^2 + |\tilde{z}^2|^2) = 1$. Так как точка $(\tilde{z}^1, \tilde{z}^2)$ тоже принадлежит сфере S^3, получим $|\tilde{z}^1|^2 + |\tilde{z}^2|^2 = 1$, то есть $|\lambda| = 1$.

Выбирая подходящим образом параметр t, всегда можно добиться, чтобы $Im\, z^2 = 0$. В самом деле, запишем $\tilde{z}^2$ в тригонометрической форме $\tilde{z}^2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$z^2 = \tilde{z}^2e^{it} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos t + i\sin t) = r(\cos(\varphi + t) + i\sin(\varphi + t)).$$

Тогда если в качестве t взять $-\varphi \equiv -arg\, \tilde{z}^2$, то мнимая часть z^2 обратится в нуль. Такая точка на каждой окружности Хопфа единственна. Действительно, если таких точек две (z^1, z^2) и $(\tilde{z}^1, \tilde{z}^2)$, то получаем, что $\tilde{z}^2 = e^{it}z^2$. Но числа $\tilde{z}^2$ и z^2 вещественны, а число e^{it} при $t \neq 0$ мнимое. Полученное противоречие показывает единственность точки с $Im\, z^2 = 0$. Множество таких точек задается уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^1)^2 + (x^2)^2 + (y^1)^2 = 1 \\ y^2 = 0. \end{array} \right.$$

Это двумерная сфера S^2.

Итак, мы получаем, что трехмерная сфера S^3 расслаивается на окружности Хопфа S^1, которые являются орбитами действия группы $S^1 = \{z = e^{it}, t \in [0, 2\pi)\} \equiv U(1)$. Пространство орбит отождествляется со сферой S^2. Отображение $\pi : S^3 \to S^2$ зададим так: берем точку p на сфере S^3, проводим через нее окружность Хопфа и берем на окружности Хопфа (единственную) точку, для которой $Im\, z^2 = 0$. Это точка принадлежит S^2. Ее мы и обозначим $\pi(p)$. Очевидно, что отображение будет сюръективным.

Опишем идею доказательства локальной тривиальности расслоения Хопфа. Точки сферы S^2 – это точки, принадлежащие сфере S^3, то есть точки $z = (z^1, z^2)$. Для задания точки на двумерной сфере достаточно двух вещественных чисел или одного комплексного. Поэтому из пары комплексных чисел $z = (z^1, z^2) \in S^2$ построим комплексное число $w = \frac{z^1}{z^2}$, если $z^2 \neq 0$ и $\tilde{w} = \frac{z^2}{z^1}$, если $z^1 \neq 0$. Итак, мы получаем две карты на S^2

$$U_1 = \{w = \tfrac{z^1}{z^2}, z^2 \neq 0\}; \quad U_2 = \{\tilde{w} = \tfrac{z^2}{z^1}, z^1 \neq 0\}.$$

Конечно, чтобы получить карты, которые мы определяли, нужно перейти к вещественным числам (одно комплексное число превратится в два вещественных, а так как мы находимся на S^2, точки которой характеризуются тем, что $y^2 \equiv Im\, z^2 = 0$, то эти числа упростятся. Постарайтесь провести рассуждения самостоятельно). Тогда диффеоморфизмы локальной тривиальности в комплексном виде будут выглядеть так:

$$\psi_{U_1} : z = (z^1, z^2) \in S^3 \to (w, e^{i\, arg z^2}) \in U_1 \times S^1;$$
$$\psi_{U_2} : z = (z^1, z^2) \in S^3 \to (\tilde{w}, e^{i\, arg z^1}) \in U_2 \times S^1.$$

Итак, мы получили, что расслоение Хопфа является главным расслоением.

§ 2.5. Структурные уравнения главного расслоения.

5.1. Вертикальное распределение.

Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *субмерсией*, если для любой точки $p \in M$ дифференциал этого отображения $(\varphi_*)_p$ сюръективен.

Задача 2.4. Докажите, что если (P, M, π, G) – главное расслоение, то отображение π является субмерсией.

Решение. Нам нужно показать, что отображение $(\pi_*)_p : T_p(P) \to T_{\pi(p)=m}(M)$ является сюръективным для любой точки $p \in P$. Фиксируем произвольную точку $p \in P$ и рассмотрим произвольный касательный вектор $\xi \in T_m(M)$. Нам нужно для него построить прообраз, то есть такой касательный вектор $\eta \in T_p(P)$, что $(\pi_*)_p(\eta) = \xi$.

В силу локальной тривиальности главного расслоения существует окрестность локальной тривиальности U_m для точки m. На этой окрестности существует гладкое сечение $s : U_m \to P$. Пусть $s(m) = q$ – это точка лежит в том же слое, что и точка p. Так как на слое структурная группа G действует транзитивно, существует элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g \circ s(m) = p$. Так как φ_g – диффеоморфизм (в частности, гладкое отображение $\tilde{s} = \varphi_g \circ s$ также будет гладким отображением. Кроме того, поскольку для любой точки $r \in U_m$ точки $s(r)$ и $\varphi_g \circ s(r)$ лежат в одном слое, имеем

$$\pi \circ \varphi_g \circ s(r) = \pi \circ s(r) = r = id(r).$$

Таким образом, мы получаем, что $\tilde{s}$ – гладкое сечение, определенное на окрестности U_m, причем $\tilde{s}(m) = p$. С помощью этого сечения будем строить касательный вектор η. Посмотрим на касательный вектор $\xi \in T_m(M)$ как на класс эквивалентных путей $[\gamma]$. Тогда путь $\tilde{\gamma} = \tilde{s} \circ \gamma$ будет задавать класс эквивалентных путей на многообразии P в точке $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{s} \circ \gamma(0) = \tilde{s}(m) = p$. Этот класс является касательным вектором в точке p и мы обозначим его η. Нам осталось убедиться, что $(\pi_*)_p \eta = \xi$. Имеем

$$(\pi_*)_p \eta = (\pi_*)_p \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{s} \circ \gamma(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi \circ \tilde{s} \circ \gamma(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = \xi.$$

□

Пусть (P, M, π, G) – главное расслоение. Обозначим $\mathfrak{X}_\pi(P)$ векторное пространство векторных полей на P, π-связанных с векторными полями на M. Такие векторные поля называются *проектирумыми.*

$$\mathfrak{X}_\pi(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) | \exists Y \in \mathfrak{X}(M), \pi_* X = Y\}.$$

Легко видеть, что множество проектируемых векторных полей несет структуру вещественного векторного пространства. Тогда возникает $\mathbb{R}$-линейное отображение $\pi_* : \mathfrak{X}_\pi(P) \to \mathfrak{X}(M)$. Обозначим его ядро через $\tilde{\mathscr{V}}$. Другими словами,

$$\tilde{\mathscr{V}} = \{X \in \mathfrak{X}_\pi(P) |\, \pi_* X = 0\}.$$

Тогда на многообразии P определено распределение

$$\mathscr{V} = C^\infty(P) \otimes \tilde{\mathscr{V}}$$

(см. замечание 2.3).

Распределение $\mathscr{V}$ называется *вертикальным* распределением на многообразии P, а векторные поля, принадлежащие ему, называются *вертикальными векторными полями.*

Задача 2.5. Докажите, что для векторное поле $X \in \mathfrak{X}(P)$ принадлежит вертикальному распределению тогда и только тогда, когда $\pi_* X = 0$ (другими словами, когда оно π-связано с нулевым векторным полем на M).

Так как естественная проекция главного расслоения является субмерсией, получим

$$dim\,\mathscr{V}_p = dim\,\tilde{\mathscr{V}}_p = dim\,ker\,(\pi_*)_p = dim\,T_pP - Im(\pi_*)_p = dim\,P - dim\,M.$$

Итак, вертикальное распределение состоит из $dim\,P - dim\,M$-мерных площадок $\mathscr{V}_p$. Покажем что эти площадки являются касательными пространствами к слою в точке p. Для этого посмотрим на вертикальное распределение с иной точки зрения.

Напомним, что группа G действует справа на многообразии P и это действие порождает гомоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Образ этого гомоморфизма мы обозначили $\mathfrak{f}$ и назвали вещественным пространством фундаментальных векторных полей на P. Так как группа G действует эффективно (и более того, свободно), $dim\,\mathfrak{f} = dim\,\mathfrak{g}$. Так как G действует свободно, ненулевые векторные поля в $\mathfrak{f}$ не имеют особенностей (см. теорему 2.3), то есть не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия P. В частности, если $(X_1, \dots, X_r)$ – базис $\mathfrak{g}$, то $(X_1^\flat, \dots, X_r^\flat)$ – базис $\mathfrak{f}$, так как гомоморфизм λ является изоморфизмом.

Более того, так как векторные поля $(X_1^\flat, \dots, X_r^\flat)$ не имеют особенностей, они образуют базис распределения $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Лемма 2.2. *Распределения* $\mathscr{V}$ *и* $\mathscr{F}$ *совпадают.*

Доказательство. Напомним, что распределение – это подмодуль модуля векторных полей. Если фиксировать на многообразии точку и брать значения всех векторных полей данного распределения в этой точке, то мы получим векторное подпространство в касательном пространстве в этой точке. Это векторное подпространство мы назвали площадкой распределения. Чтобы доказать, что два распределения совпадают, достаточно показать, что для каждой точки $p \in P$ совпадают площадки этих распределений $\mathscr{V}_p$ и $\mathscr{F}_p$.

Имеем (выделяем площадку в точке $p \in P$ распределения $\mathscr{F}$)

$$\mathscr{F}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathfrak{f}_p = \mathbb{R} \otimes \mathfrak{f}_p = \mathfrak{f}_p.$$

В $\mathscr{F}$ находятся формальные суммы стоящих рядом функций на P и фундаментальных векторных полей. Мы вычисляем ее значение в точке p. От функции получаем число, а от векторного поля – касательный вектор из площадки $\mathfrak{f}_p$. Касательные векторы мы умеем умножать на вещественные числа, поэтому мы можем посчитать формальную сумму и в результате получим вектор из площадки $\mathfrak{f}_p$.

Рассмотрим отображение $\sigma_p : G \to P$. Так как действие свободно, отображение σ_p является биекцией на образ, а так как действие гладкое, отображение σ_p является диффеоморфизмом. Тогда дифференциал этого отображения будет изоморфизмом векторных пространств $T_e(G)$ и $T_p(Orb_G p)$. Здесь мы использовали то, что образом отображения σ_p является орбита $Orb_G p$ точки p. Другими словами, $((\sigma_p)_*)_e(T_e(G)) = T_p(Orb_G p)$. Поскольку $(\lambda X)_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e$, получим $\mathfrak{f}_p = T_p(Orb_G p)$.

С другой стороны, $\mathscr{V}_p = \tilde{\mathscr{V}}_p = Ker\,(\pi_*)_p$. Так как сужение отображения π на орбиту точки p, то есть на слой $Orb_G p = \pi^{-1}(m)$, висящий над точкой m, является постоянным отображением, его дифференциал (определяется матрицей Якоби, состоящей из частных производных) отображает касательные векторы к многообразию $Orb_G p$ в нуль-векторы, то есть $T_p(Orb_G p) \subset Ker\,(\pi_*)_p$, следовательно, $\mathscr{F}_p \subset \mathscr{V}_p$. Оба этих множества являются векторными пространствами, значит, если мы покажем еще, что их размерности равны, то $\mathscr{F}_p = \mathscr{V}_p$. Имеем $dim\,\mathscr{F}_p = dim\,\mathfrak{f} = dim\,\mathfrak{g} = dim\,G$. С другой стороны, $dim\,Ker\,(\pi_*)_p = dim\,T_p(P) - dim\,Im\,(\pi_*)_p = dim\,P - dim\,M = dim\,G$ в силу локальной тривиальности расслоения. ☐

В частности, из этого следует, что $\mathscr{V} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ и

$$\mathscr{V}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathfrak{f}_p = \mathfrak{f}_p = T_p(Orb_G p).$$

Предложение 2.3 . *Вертикальное распределение инволютивно, а значит, вполне интегрируемо. Его интегральные многообразия максимальной размерности являются подмногообразиями вида* (G, σ_p).

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathscr{V}$. Тогда по определению вертикального распределения имеем $\pi_* X = 0$, $\pi_* Y = 0$. По свойству отображения увлечения имеем

$$\pi_*[X, Y] = [\pi_* X, \pi_* Y] = 0,$$

то есть вертикальное распределение инволютивно. По теореме Фробениуса оно вполне интегрируемо. По определению интегрального многообразия (см. § **??**) пары (G, σ_p) будут интегральными многообразиями максимальной размерности этого распределения, так как $\mathscr{F}_p$ – касательное пространство к $\sigma_p(G) = Orb_G(p)$ в точке p и $\mathscr{F}_p = \mathscr{V}_p$. □

Пример 2.10**.** Рассмотрим круговую цилиндрическую поверхность. Это главное расслоение, где P – цилиндрическая поверхность, M – окружность, которая получается при пересечении P с плоскостью, перпендикулярной образующим, π ставит в соответствие каждой точке $p \in P$ точку пересечения окружности M и прямолинейной образующей, проходящей через точку p. Группа Ли G – это $\mathbb{R}$ с операцией сложения. Легко видеть, что это тривиальное главное расслоение.

Вертикальными векторными полями на цилиндрической поверхности будут поля, такие что их вектора в каждой точке параллельны прямолинейной образующей, проходящей через эту точку.

5.2. Структурные уравнения.

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathscr{V}$ – его вертикальное распределение. Договоримся, что индексы $a, b, c, d, \ldots$ пробегают значения от 1 до $r = dim\, G$; индексы $i, j, k, l, \ldots$ пробегают значения от $r+1$ до $r+n$, где $n = dim\, M$; индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, пробегают значения от 1 до $r + n = dim\, P$.

Фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Пусть $(\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$ – дуальный базис. Уравнения Маурера-Картана структурной группы G имеют вид (см. (1.6)

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c.$$

Так как $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$ – изоморфизм, векторные поля $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ образуют базис векторного пространства $\mathfrak{f}$ фундаментальных векторных полей, а также распределения $\mathscr{F} = \mathscr{V}$. Мы можем дополнить этот базис до локального базиса модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладкими векторными полями $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, то есть для любой точки $p \in P$ существует окрестность U и набор гладких векторных полей $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, такой что

$$(E_1^\flat|_U \equiv Y_1, \ldots, E_r^\flat|_U \equiv Y_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n})$$

базис модуля $\mathfrak{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис. Тогда формы $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$ (где α и β пробегают всевозможные значения) образуют локальный базис модуля тензорных полей типа (2,0). В частности, 2-формы $d\omega^\alpha$ (как тензорные поля типа (2,0)) раскладываются по этому базису, а именно,

$$d\omega^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \otimes \omega^\gamma, \tag{2.14}$$

где $R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma)$ – компоненты 2-формы $d\omega^\alpha$ в данном базисе. Здесь мы воспользовались тем, что компоненты тензорного поля типа (2,0) относительно базиса (Y_α) совпадают с его координатами относительно базиса $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$.

Применим оператор альтернирования Alt к обеим частям равенства (2.14). Так как форма $d\omega^\alpha$ является кососимметрической, $Alt(d\omega^\alpha) = d\omega^\alpha$. В силу линейности Alt функции $R^\alpha_{\beta\gamma}$ можно вынести за знак альтернации и воспользоваться определением операции внешнего умножения. Получим

$$d\omega^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma} Alt(\omega^\beta \otimes \omega^\gamma) = R^\alpha_{\beta\gamma} \frac{1!1!}{2!} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Итак, мы получаем

$$d\omega^\alpha = \tfrac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma; \quad R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma). \tag{2.15}$$

Докажем, что формы $\{\omega^i\}$ образуют систему Пфаффа вертикального распределения $\mathscr{V}$, то есть для любого векторного поля из вертикального распределения значение формы ω^i на нем равно нулю. Действительно, разложим векторное поле X по базису (Y_α): $X = X^\alpha Y_\alpha = X^a E_a^\flat + X^i Y_i$. Тогда

$$X \in \mathscr{V} \quad \Leftrightarrow \quad X = X^a E_a^\flat \quad \Leftrightarrow X^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^i(X) = 0.$$

Так как вертикальное распределение вполне интегрируемо (предложение 2.3), по критерию интегрируемости существуют локально определенные 1-формы ω^i_j, такие что

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k. \tag{2.16}$$

С другой стороны, выпишем из уравнений (2.15) те, для которых индекс α меняется от $r+1$ до $r+n$, то есть $\alpha = i$:

$$d\omega^i = \frac{1}{2}R^i_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^i_{b\gamma}\omega^b \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2}R^i_{j\gamma}\omega^j \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \\ + \frac{1}{2}R^i_{jc}\omega^j \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k. \quad (2.17)$$

Здесь мы учли следующее: индекс суммирования β пробегает сначала значения от 1 до r. Эта сумма коротко обозначается с помощью индекса b, а затем индекс β пробегает значения от $r+1$ до $r+n$. Эту группу слагаемых мы записали с помощью индекса j. Другими словами, сумму по индексу β мы разбили на две скобки. В одной индекс суммирования обозначили b, а в другой – j. Аналогично мы поступили и с индексом γ в каждом из получившихся слагаемых.

Рассмотрим пару слагаемых и переобозначим индексы суммирования $c \to b$ и $j \to k$ во втором слагаемом. Мы это можем сделать, так как эти пары индексов пробегают одно и то же множество значений:

$$\frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{jc}\omega^j \wedge \omega^c = \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{kb}\omega^k \wedge \omega^b = \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k = R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью коэффициентов $R^\alpha_{\beta\gamma}$ по нижним индексам:

$$R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma) = -d\omega^\alpha(Y_\gamma, Y_\beta) = -R^\alpha_{\gamma\beta} \quad (2.18)$$

и свойством антикоммутативности внешнего произведения 1-форм. С учетом приведенных подобных слагаемых, (2.17) примет вид

$$d\omega^i = \frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + (R^i_{bk} + \frac{1}{2}R^i_{jk})\omega^k$$

Сравнивая полученное равенство с (2.16), получим

$$\frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c = 0.$$

Заметим, что в левой части этого равенства 2-формы $\omega^b \wedge \omega^c$ не являются линейно независимыми, так как 1-формы в них не упорядочены по номерам. Чтобы упорядочить 1-формы, воспользуемся формулой, полученной в курсе Тензорная алгебра $t_{ij}\omega^i \wedge \omega^j = 2!t_{[ij]}\omega^i \wedge \omega^j (i < j)$:

$$2!\frac{1}{2}R^i_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c (b < c) = 0.$$

Теперь в левой части равенства стоит линейная комбинация линейно независимых базисных 2-форм. Пользуемся определением линейной независимости и получаем $R^i_{[bc]} = 0$. В силу кососимметричности функций R^i_{bc} (см. формулу (2.18)) получим

$$R^i_{[bc]} = \frac{1}{2}(R^i_{bc} - R^i_{cb}) = \frac{1}{2}(R^i_{bc} + R^i_{bc}) = R^i_{bc}.$$

Итак, мы получили, что $R^i_{bc} = 0$, то есть

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k \equiv (R^i_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j) \wedge \omega^k.$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *первой группой структурных уравнений главного расслоения.*

Рассмотрим оставшиеся уравнения из (2.15) (индекс α пробегает значения от 1 до r, следовательно может быть обозначен буквой a):

$$d\omega^a = \frac{1}{2}R^a_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + (R^a_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j) \wedge \omega^k$$

Обозначим $R^a_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j = \omega^a_k$. Тогда полученное равенство примет вид

$$d\omega^a = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k. \quad (2.19)$$

В этих уравнениях мы можем уточнить значения коэффициентов R^a_{bc}. Оказывается, что это с точностью до знака структурные константы группы Ли G, то есть

$$R^a_{bc} = -C^a_{bc}. \quad (2.20)$$

Напомним, что мы ввели обозначения: (E_a) – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, (σ^a) – дуальный базис, $(E_a^\flat \equiv Y_a, Y_i)$ – локальный базис $\mathfrak{X}(P)$, (ω^a, ω^i) – дуальный базис для базиса $(E_a^\flat \equiv Y_a, Y_i)$.

Рассмотрим отображение антиувлечения для ковекторов

$$\lambda^* : \mathfrak{f}^* \to \mathfrak{g}^*.$$

Здесь мы воспользовались тем, что левоинвариантные векторные поля на многообразии P образуют векторное пространство $\mathfrak{g}$, а значит, дуальное к нему векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ будет векторным пространством ковекторов (оно состоит из форм Маурера-Картана). Напомним, что это отображение задается формулой

$$(\lambda^*\omega)(X) = \omega(\lambda X),\ \omega \in \mathfrak{f}^*,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Докажем, что $\lambda^*(\omega^a) = \sigma^a$.

Действительно,

$$\lambda^*(\omega^a)(E_b) = \omega^a(\lambda E_b) = \omega^a(E_b^\flat) = \delta_b^a,$$

то есть формы $\lambda^*(\omega^a)$ образуют дуальный базис для (E_a), следовательно, совпадают с формами σ^a.

С учетом этого получим

$$R_{bc}^a = d\omega^a(E_b^\flat, E_c^\flat) = E_b^\flat(\omega^a(E_c^\flat)) - E_c^\flat(\omega^a(E_b^\flat)) - \omega^a([E_b^\flat, E_c^\flat]) = -\omega^a([E_b^\flat, E_c^\flat]) =$$
$$= -\omega^a([\lambda E_b, \lambda E_c]) = -\omega^a(\lambda[E_b, E_c]) = -\lambda^*\omega^a([E_b, E_c]) = -\sigma^a(C_{bc}^h E_h) = -C_{bc}^h \delta_h^a = -C_{bc}^a.$$

Здесь мы воспользовались формулой для внешнего дифференциала 1-формы; тем, что $\mathfrak{g}$ является векторным пространством, а значит, действие ковектора из $\mathfrak{g}^*$ на векторе из $\mathfrak{g}$ – это вещественное число. Действие векторного поля на этом числе есть нуль. Далее мы использовали замечание 2.2, структурные уравнения группы Ли (1.3).

Тогда с учетом (2.20) из (2.19) получим

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_k^a \wedge \omega^k$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *второй группой структурных уравнений главного расслоения*. Первая и вторая группы структурных уравнений называются *полной группой структурных уравнений главного расслоения*:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_k^a \wedge \omega^k \end{cases} \tag{2.21}$$

§ 2.6. Связности в главных расслоениях.

6.1. Действие структурной группы на вертикальном распределении.

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathscr{V}$ – его вертикальное распределение. Группа Ли G действует на P справа. Напомним, что представление действия группы Ли на многообразии P мы обозначаем φ_g и φ_g – диффеоморфизм многообразия P для любого элемента из $g \in G$.

Правое действие $\varphi_g : P \to P$ двигает точки из P. К тому же это диффеоморфизм (см. определение действия группы Ли на многообразии). Тогда определено отображение увлечения векторных полей

$$(\varphi_g)_* : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P).$$

Возникает вопрос: что будет при этом диффеоморфизме с вертикальными векторными полями? В какие векторные поля они будут переходить?

Лемма 2.3. *Вертикальное распределение $\mathscr{V}$ инвариантно относительно действия структурной группы, то есть $(\varphi_g)_*\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$ для любого $g \in G$. Кроме того, фундаментальные векторные поля переходят в фундаментальные векторные поля при действии структурной группы.*

Доказательство. 1) Докажем сначала, что фундаментальные векторные поля под действием структурной группы переходят в фундаментальные векторные поля.

Пусть $X^\flat$ – произвольное фундаментальное векторное поле. Тогда получим

$$(\varphi_g)_* X^\flat = (\varphi_g)_*(\lambda X) = \lambda(Ad(g^{-1})X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.9). Так как $Ad(g^{-1})X \in \mathfrak{g}$, векторное поле $(\varphi_g)_* X^\flat = \lambda(Ad(g^{-1})X)$ является фундаментальным.

2) Рассмотрим произвольное вертикальное векторное поле $X \in \mathscr{V}$. Покажем, что векторное поле $(\varphi_g)_* X$ π-связано с нулевым векторным полем на M. Воспользуемся для этого критерием ϕ-связанности векторных полей: $(\phi_*)_p X_p = Y_{\phi(p)}$. Имеем

$$(\pi_*)_p((\varphi_g)_* X)_p = (\pi_*)_p((\varphi_g)_*)_{\varphi_{g^{-1}}(p)} X_{\varphi_{g^{-1}}(p)} = ((\pi \circ (\varphi_g))_*)_{\varphi_{g^{-1}}(p)} X_{\varphi_{g^{-1}}(p)} = (\pi_*)_{\varphi_{g^{-1}}(p)} X_{\varphi_{g^{-1}}(p)} = 0.$$

Итак, мы получили, что $\pi_*((\varphi_g)_* X) = 0$, а значит, $(\varphi_g)_* X \in \mathscr{V}$.

Приведем другое доказательство того же факта. Фиксируем в $\mathscr{V}$ базис $(E^\flat_1, \ldots, E^\flat_r)$, состоящий из фундаментальных векторных полей. Тогда векторное поле X можно разложить по этому базису

$$X = f^a E^\flat_a.$$

Нам нужно вычислить $(\varphi_g)_* X = (\varphi_g)_*(f^a E^\flat_a)$. Для этого нужно научиться выносить функцию за знак отображения увлечения. Фиксируем произвольную точку $p \in P$ и рассмотрим значение векторного поля $(\varphi_g)_*(fX)$ в этой точке, где f – гладкая функция, $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Заметим, что

$$((\varphi_g)_*(fX))_p = ((\varphi_g)_*)_{\varphi_{g^{-1}}(p)}(fX)_{\varphi_{g^{-1}}(p)} = f(R_{g^{-1}}(p))((\varphi_g)_*)_{\varphi_{g^{-1}}(p)} X_{\varphi_{g^{-1}}(p)} =$$
$$= f \circ \varphi_{g^{-1}}(p)((\varphi_g)_* X)_p = ((f \circ \varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_* X)(p).$$

Итак, мы получили вспомогательную формулу „однородности“ отображения увлечения

$$(\varphi_g)_*(fX) = (f \circ \varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_* X \tag{2.22}$$

Вернемся к доказательству инвариантности вертикального распределения, используя формулу (2.22).

$$(\varphi_g)_* X = (\varphi_g)_*(f^a E^\flat_a) = (f^a \circ \varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_* E^\flat_a.$$

Заметим, что $(f^a \circ \varphi_{g^{-1}})$ – гладкие функции на P, $(\varphi_g)_* E^\flat_a$ – фундаментальные векторные поля по доказанному в первом пункте. Таким образом, векторное поле $(\varphi_g)_* X$ является линейной комбинацией фундаментальных векторных полей с коэффициентами – гладкими функциями, то есть является вертикальным векторным полем. □

6.2. Связность в главном расслоении.

Отображение $\Pi : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ называется *проектором*, если

(1) Π – $C^\infty(P)$-линейное отображение

(2) $\Pi^2 = \Pi$.

Напомним также эквивалентное определение проектора: первое условие остается таким же, а второе меняется на следующее: для любого векторного поля $X \in Im\,\Pi$ (то есть векторного поля из образа отображения Π) имеем $\Pi X = X$.

Если на модуле $\mathfrak{X}(P)$ задан проектор Π, то модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{X}(P) = ker\,\Pi \oplus Im\,\Pi$. Верно и обратное, если модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму своих подмодулей $\mathfrak{X}(P) = A \oplus B$, то однозначно определяется проектор Π, такой что $Im\,\Pi = A$, $ker\,\Pi = B$.

Отображение $Q = id - \Pi$ также является проектором и называется *дополнительным проектором.* Общую теорию проекторов можно посмотреть в курсе Тензорная алгебра.

Проектор $C^\infty(P)$-модуля $\mathfrak{X}(P)$ на подмодуль $\mathscr{V}$ называется *вертикальным проектором.*

Говорят, что проектор F модуля $\mathfrak{X}(P)$ *инвариантен* относительно действия структурной группы, если для любого элемента $g \in G$ имеем

$$(\varphi_g)_* \circ F = F \circ (\varphi_g)_*.$$

Здесь $(\varphi_g)_*$ – отображение увлечения векторных полей. Оно определено, так как φ_g является диффеоморфизмом.

Связностью в главном расслоении $\mathscr{B}$ называется вертикальный проектор Π, инвариантный относительно действия структурной группы. Другими словами, $C^\infty(P)$-линейное отображение $\Pi : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ называется связностью, если выполняются следующие условия:

1. $\Pi^2 = \Pi$;
2. $Im\,\Pi = \mathscr{V}$;
3. для любого $g \in G$ имеем $(\varphi_g)_* \circ \Pi = \Pi \circ (\varphi_g)_*$.

Пусть $\Pi_{\mathscr{V}}$ – вертикальный проектор (не обязательно связность, то есть он не обязательно инвариантен относительно действия структурной группы). Обозначим его ядро $ker\,\Pi_{\mathscr{V}} = \mathscr{H}$ и дополнительный проектор – через $\Pi_{\mathscr{H}}$. Множество $\mathscr{H}$ является распределением и называется *псевдогоризонтальным распределением*, а проектор $\Pi_{\mathscr{H}}$ называется *псевдогоризонтальным проектором.*

В частности, если $\Pi_{\mathscr{V}}$ является связностью (то есть является не только вертикальным проектором, но еще и инвариантен относительно действия структурной группы G), то распределение $\mathscr{H}$ называется *горизонтальным распределением*, а проектор $\Pi_{\mathscr{H}}$ называется *горизонтальным проектором.*

Лемма 2.4. *Если $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, то $\Pi_{\mathscr{H}}$ инвариантен относительно действия структурной группы Ли G, то есть $(\varphi_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{H}} = \Pi_{\mathscr{H}} \circ (\varphi_g)_*$.*

Доказательство. Так как $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, имеем $(\varphi_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{V}} = \Pi_{\mathscr{V}} \circ (\varphi_g)_*$. Тогда

$$(\varphi_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{H}} = (\varphi_g)_* \circ (id - \Pi_{\mathscr{V}}) = (id - \Pi_{\mathscr{V}}) \circ (\varphi_g)_*.$$

☐

Следствие 2.1. Если $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, то распределение $\mathscr{H}$ инвариантно относительно действия группы Ли G, то есть $(\varphi_g)_*\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$.

Доказательство. Имеем для любого векторного поля $X \in \mathscr{H}$

$$(\varphi_g)_*X = (\varphi_g)_*(\Pi_{\mathscr{H}}X) = \Pi_{\mathscr{H}}((\varphi_g)_*X),$$

то есть векторное поле $(\varphi_g)_*X \in Im\,\Pi_{\mathscr{H}} = \mathscr{H}$. ☐

Вывод: если на главном расслоении $\mathscr{B}$ задана связность, то на многообразии P возникает распределение $\mathscr{H}$, обладающее следующими свойствами:

(1) оно является дополнительным к вертикальному распределению $\mathscr{V}$;

(2) оно инвариантно относительно действия структурной группы G.

Верно и обратное.

Лемма 2.5. *Пусть на тотальном пространстве главного расслоения $\mathscr{B}$ задано распределение $\mathscr{H}$, обладающее свойствами* (1) *и* (2)*. Тогда на $\mathscr{B}$ однозначно определяется связность.*

Доказательство. По условию модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$. Тогда однозначно определен проектор $\Pi_{\mathscr{V}}$, для которого образ совпадает с $\mathscr{V}$. Нам осталось показать, что проектор $\Pi_{\mathscr{V}}$ инвариантен относительно действия структурной группы.

Пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольный элемент. Тогда он однозначно представим в виде $X = X_{\mathscr{V}} + X_{\mathscr{H}}$, где $X_{\mathscr{V}} \in \mathscr{V}$, $X_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$. По условию для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_*X_{\mathscr{H}}$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\Pi_{\mathscr{V}} \circ (\varphi_g)_*X = \Pi_{\mathscr{V}}((\varphi_g)_*(X_{\mathscr{V}} + X_{\mathscr{H}})) = \Pi_{\mathscr{V}}((\varphi_g)_*X_{\mathscr{V}}) = (\varphi_g)_*X_{\mathscr{V}} = (\varphi_g)_*(\Pi_{\mathscr{V}}X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение увлечения и проектор являются линейными отображениями; $\Pi_{\mathscr{V}}((\varphi_g)_*X) = 0$, так как образ проектора $\Pi_{\mathscr{V}}$ совпадает с ядром дополнительного проектора $\Pi_{\mathscr{H}}$. Далее мы использовали лемму 2.3 и альтернативное условие из определения проектора. Итак, вертикальный проектор инвариантен относительно действия структурной группы, следовательно, является связностью. ☐

Объединяя результаты, мы получаем

Теорема 2.6. *Задание связности в главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию распределения $\mathscr{H} \subset \mathfrak{X}(P)$, такого что*

1. *$\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$;*

2. *для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_*\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$.*

Пусть $\mathscr{B}$ – главное расслоение. Тогда G действует на P свободно и определяет изоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, который выдает фундаментальные векторные поля. Мы научились умножать фундаментальные векторные поля на функции из $C^\infty(P)$, рассматривая формальные суммы $f^1X_1^\flat + \ldots + f^NX_N^\flat$. Это расширило векторное пространство $\mathfrak{f}$ до $C^\infty(P)$-модуля $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Но не слишком сильно, сохранив глобальный базис (то есть конечномерность). Другими словами, любой базис векторного пространства $\mathfrak{f}$ является базисом $C^\infty(P)$-модуля $\mathscr{F}$, но при этом мы умножаем не на вещественные числа, а на функции.

Проведем аналогичную процедуру с присоединенной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (это r-мерное векторное пространство) и получим $C^\infty(P)$-модуль $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Он состоит из формальных сумм вида

$$f^1X_1+\ldots+f^NX_N,$$

где $f^1,\ldots,f^N\in C^\infty(P)$, $X_1,\ldots,X_N\in\mathfrak{g}$ – произвольные левоинвариантные векторные поля. В отличии от $\mathscr{F}$, здесь мы никак не сможем умножить функцию f на левоинвариантное векторное поле X, так как они определены на разных многообразиях. Этот модуль также сохраняет глобальный базис, то есть базис векторного пространства $\mathfrak{g}$ становится базисом модуля $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$, но коэффициенты – функции. Более подробно: рассмотрим произвольный элемент из $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ – это формальная сумма вида $f^1X_1+\ldots+f^NX_N$. Разложим каждое левоинвариантное векторное поле X_α, $\alpha=1,\ldots,N$ по базису $(E_1,\ldots,E_r)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. Коэффициенты разложения – вещественные числа. Подставим полученные разложения в формальную сумму

$$f^1X_1+\ldots+f^NX_N=f^1(g_1^aE_a)+\ldots+f^N(g_N^aE_a)=(f^1g_1^a+\ldots+f^Ng_N^a)E_a.$$

В крайне правой части стоит формальная сумма (суммирование по a). В скобках стоит обычная сумма произведений функций на вещественные числа – это гладкая функция на многообразии P. Таким образом, формальную сумму вида $f^1X_1+\ldots+f^NX_N$ мы смогли привести к виду формальной суммы $(f^1g_1^a+\ldots+f^Ng_N^a)E_a$, где в качестве векторов стоят левоинвариантные векторные поля E_a. Будем говорить в этом случае, что мы разложили элемент $f^1X_1+\ldots+f^NX_N\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ по базису (E_a).

„Научим“ изоморфизм λ работать с модулями $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ и $\mathscr{F}$. Это будет новое отображение

$$\Lambda: C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}\to C^\infty(P)\otimes\mathfrak{f}=\mathscr{F}=\mathscr{V},$$

определенное формулой

$$\Lambda(f^1X_1+\ldots+f^NX_N)=f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N).$$

Обычно его обозначают $\Lambda=id\otimes\lambda$. Это отображение будет изоморфизмом модулей.

Пусть теперь на главном расслоении $\mathscr{B}$ задана связность Π. Тогда определяется отображение

$$\theta=\Lambda^{-1}\circ\Pi:\mathfrak{X}(P)\to\mathscr{V}\to C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}. \tag{2.23}$$

Это отображение $C^\infty(P)$- линейно как композиция таковых. Оно называется *формой связности.*

Как мы видим, это не привычная для нас дифференциальная форма, так как она отображает векторные поля в $C^\infty(P)$- модуль $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$, а не в $C^\infty(P)$ (как мы привыкли в случае обычных форм). Так как $\mathfrak{g}$ является векторным пространством, такие отображения как θ называются *формами со значениями в векторном пространстве.* Так как θ отображает один экземпляр $\mathfrak{X}(P)$, она называется 1-формой со значениями в векторном пространстве $\mathfrak{g}$ (если аргументов было бы r штук, то она называлась бы r-формой).

Такие необычные формы можно свести к знакомым нам обычным формам следующим образом. Так как $\mathfrak{g}$ – конечномерное векторное пространство, в нем есть базис $(E_1,\ldots,E_r)$. Он же будет базисом для $C^\infty(P)$-модуля $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Пусть $X\in\mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда $\theta(X)\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ и этот элемент модуля можно разложить по базису $\theta(X)=\theta^a(X)E_a$. Через $\theta^a(X)$ мы обозначили коэффициенты разложение. Это функции из $C^\infty(P)$ (если меняется X, то меняются коэффициенты $\theta^a(X)$). В результате мы получаем отображения $\theta^a:\mathfrak{X}(P)\to C^\infty(P)$, которые каждому векторному полю X ставят в соответствие функцию $\theta^a(X)$. Очевидно, что эти функции $C^\infty(P)$-линейны, а значит, являются 1-формами (обычными). Эти 1-формы называются *тензорными компонентами* формы связности θ.

Изучим свойства формы связности.

Предложение 2.4 **.** $\theta\circ\Lambda=id$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $X=f^1X_1+\ldots+f^NX_N\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Тогда по определению Λ и θ получим

$$\theta\circ\Lambda(X)=\theta(f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N))=\Lambda^{-1}\circ\Pi(f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N))=\Lambda^{-1}\Lambda(X)=X.$$

Здесь мы воспользовались тем, что фундаментальные векторные поля $\lambda(X_\alpha)$ являются вертикальными ($\mathfrak{f}\subset\mathscr{V}$), а Π является вертикальным проектором, следовательно, $\Pi(\lambda(X_\alpha))=\lambda(X_\alpha)$. ☐

Следствие 2.2. $\theta(fX^\flat)=fX$.

Действительно,

$$\theta(f\lambda(X)) = \theta \circ \Lambda(fX) = fX.$$

У нас было отображение $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Оно строилось так: брался внутренний автоморфизм $A_g : G \to G$, $A_g(x) = gxg^{-1}$ и рассматривался его дифференциал в точке $e \in G$. Это отображение $((A_g)_*)_e : T_e(G) \to T_e(G)$. Тогда, используя изоморфизм β отождествления присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и касательного пространства в точке e к группе Ли G, мы получали отображение $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$.

Научим отображение $Ad(g)$ работать с модулем $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ по аналогии с отображением Λ. Зададим отображение $Ad(g) : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ формулой

$$Ad(g)(f^1 X_1 + \ldots + f^N X_N) = (f^1 \circ \varphi_g) Ad(g)(X_1) + \ldots + (f^N \circ \varphi_g) Ad(g)(X_N).$$

Задача 2.6. Докажите, что $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$, то есть введенное отображение Ad будет гомоморфизмом групп.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} Ad(g_1 g_2)(f^k X_k) = (f^k \circ \varphi_{g_1 g_2}) Ad(g_1 g_2)(X_k) = ((f^k \circ \varphi_{g_2}) \circ \varphi_{g_1})(Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(X_k)) = \\ = Ad(g_1)\big((f^k \circ \varphi_{g_2})(Ad(g_2)(X_k)\big) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(f^k X_k). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением правого действия. Итак, мы показали, что Ad является гомоморфизмом, а значит, представлением на модуле $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$. □

Теорема 2.7. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, θ – форма связности на $\mathscr{B}$. Тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(P) \arrow[r, "(\varphi_g)_*"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathfrak{X}(P) \arrow[d, "\theta"] \\ C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "Ad(g^{-1})"] & C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

или $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (\varphi_g)_*$. Это свойство называется эквивариантностью формы связности.

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на три части.

1) Пусть $X_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$ – произвольное горизонтальное векторное поле. Докажем, что для него выполняется требуемое тождество. Имеем

$$\theta \circ (\varphi_g)_*(X_{\mathscr{H}}) = \Lambda^{-1} \circ \Pi((\varphi_g)_*(X_{\mathscr{H}})) = 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 2.6 и тем, что $\mathscr{H} = ker\, \Pi$.

С другой стороны,

$$Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{H}}) = Ad(g^{-1}) \circ \Lambda^{-1} \circ \Pi(X_{\mathscr{H}}) = 0.$$

Здесь мы использовали также, что $X_{\mathscr{H}} \in ker\, \Pi$ (это следует из определений вертикального проектора и горизонтального распределения).

2) Пусть $X_{\mathscr{V}} \in \mathscr{V}$. Тогда фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и рассмотрим базис $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ в вертикальном распределении $\mathscr{V}$, где $E_a^\flat = \lambda(E_a)$. Следовательно, любое вертикальное векторное поле (то есть векторное поле из $\mathscr{V}$) можно разложить по этому базису: $X_{\mathscr{V}} = f^a E_a^\flat$, $f^a \in C^\infty(P)$, $a = 1, \ldots, r$.

Используя формулу (2.23), получим

$$\theta \circ (\varphi_g)_* X_{\mathscr{V}} = \Lambda^{-1} \circ \Pi \circ (\varphi_g)_* X_{\mathscr{V}} =$$

Так как вертикальное распределение инвариантно относительно действия структурной группы (см. лемму 2.3) и любой проектор на элементах своего образа действует как тождественное преобразование, получаем

$$= \Lambda^{-1} \circ (\varphi_g)_* X_{\mathscr{V}} =$$

Разложим вертикальное векторное поле $X_{\mathscr{V}}$ по базису вертикального распределения (он состоит из фундаментальных векторных полей): $X_{\mathscr{V}} = f^a E_a^\flat$, и вынесем функции за отображения увлечения, используя формулу (2.22).

$$= \Lambda^{-1}((f^a \circ \varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_* E_a^\flat) =$$

Воспользуемся определением отображения $\Lambda = id \otimes \lambda$, следовательно, $\Lambda^{-1} = id \otimes \lambda^{-1}$ и формулой (2.9)

$$= (f^a \circ \varphi_{g^{-1}}) Ad(g^{-1}) \lambda^{-1} E_a^\flat = (f^a \circ \varphi_{g^{-1}}) Ad(g^{-1}) E_a =$$

Воспользуемся определением отображения $Ad(g)$, расширенного на модуль $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ и свойством формы связности $\theta\circ\Lambda = id$.

$$= Ad(g^{-1})(f^a E_a) = Ad(g^{-1})\circ\theta\circ\Lambda(f^a E_a) =$$

И еще раз пользуемся определением Λ

$$= Ad(g^{-1})\circ\theta(f^a E_a^\flat).$$

3) Рассмотрим общий случай $X\in\mathfrak{X}(P)$. Тогда раскладывая $X = X_{\mathscr{H}} + \mathfrak{X}_{\mathscr{V}}$ и применяя пункты 1), 2) и линейность отображений, получим

$$\theta\circ(\varphi_g)_*(X) = \theta\circ(\varphi_g)_*(X_{\mathscr{H}}) + \theta\circ(\varphi_g)_*(X_{\mathscr{V}}) = Ad(g^{-1})\circ\theta(X_{\mathscr{H}}) + Ad(g^{-1})\circ\theta(X_{\mathscr{V}}) = Ad(g^{-1})\circ\theta(X).$$

□

Теорема 2.8. *Задание связности в главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию 1-формы θ на пространстве расслоения со значениями в алгебре Ли структурной группы, обладающей свойствами:*

1. *$\theta\circ\Lambda = id$; в частности, $\theta(fX^\flat) = fX$;*
2. *$Ad(g^{-1})\circ\theta = \theta\circ(\varphi_g)_*$, где $f\in C^\infty(P)$, $X\in\mathfrak{g}$, $g\in G$.*

Доказательство. 1) Если проектор Π – связность на $\mathscr{B}$, то по доказанному 1-форма $\theta = \Lambda^{-1}\circ\Pi$ обладает требуемыми свойствами.

2) Обратно, пусть форма θ, заданная на многообразии P обладает указанными свойствами. Нам нужно построить связность на $\mathscr{B}$, а именно, проектор на вертикальное распределение $\mathscr{V}$, инвариантный относительно действия структурной группы. Зададим отображение

$$\Pi : \mathfrak{X}(P)\to\mathscr{V}$$

по формуле $\Pi = \Lambda\circ\theta$. Очевидно, что оно $C^\infty(P)$-линейно как композиция таковых. Далее,

$$\Pi^2 = (\Lambda\circ\theta)\circ(\Lambda\circ\theta) = \Lambda\circ\theta = \Pi.$$

Здесь мы воспользовались первым свойством θ из условия теоремы. Таким образом, построенное отображение Π является проектором.

Покажем, что образом проектора Π совпадает с вертикальным распределением $\mathscr{V}$. Очевидно, что для любого $X\in\mathfrak{X}(P)$ получим $\Pi(X)\in\mathscr{V}$, так как $\Lambda : C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}\to\mathscr{V}$. Докажем, что отображение Π сюръективно, что и будет означать совпадение образа проектора Π и вертикального распределения $\mathscr{V}$. Имеем, по первому свойству формы θ из условия теоремы $\theta(\Lambda(X)) = X$, то есть для любого $X\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ существует прообраз $(\Lambda(X))$ при отображении θ, то есть θ – сюръективно. Отображение Λ сюръективно по определению (так как сюръективно отображение $\lambda : \mathfrak{g}\to\mathfrak{f})$. Тогда сюръективно и отображение Π. Итак, отображение Π является проектором на вертикальное распределение $\mathscr{V}$.

Нам осталось показать, что этот проектор инвариантен относительно действия структурной группы. Сначала докажем вспомогательную формулу

$$(\varphi_g)_*\circ\Lambda = \Lambda\circ Ad(g^{-1}).$$

Мы уже имеем формулу $(\varphi_g)_*\circ\lambda = \lambda\circ Ad(g^{-1})$ (см. формулу (2.9)). Тогда

$$\begin{aligned}
(\varphi_g)_*\circ\Lambda(f^1X_1+\ldots+f^NX_N) &= (\varphi_g)_*(f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N)) = \\
&= (f^1\circ\varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_*(\lambda X_1)+\ldots+(f^N\circ\varphi_{g^{-1}})(\varphi_g)_*(\lambda X_N) = \\
&= (f^1\circ\varphi_{g^{-1}})\lambda(Ad(g^{-1})(X_1))+\ldots+(f^N\circ\varphi_{g^{-1}})\lambda(Ad(g^{-1})(X_N)) = \\
&= \Lambda((f^1\circ\varphi_{g^{-1}})(Ad(g^{-1})(X_1))+\ldots+(f^N\circ\varphi_{g^{-1}})(Ad(g^{-1})(X_N))) = \\
&= \Lambda\circ Ad(g^{-1})(f^1X_1+\ldots+f^NX_N).
\end{aligned}$$

Тогда с учетом второго условия теоремы получим

$$(\varphi_g)_*\circ\Pi = (\varphi_g)_*\circ\Lambda\circ\theta = \Lambda\circ Ad(g^{-1})\circ\theta = \Lambda\circ\theta\circ(\varphi_g)_* = \Pi\circ(\varphi_g)_*.$$

Значит, Π – связность. При этом ее форма связности

$$\Lambda^{-1}\circ\Pi = \Lambda^{-1}\circ\Lambda\circ\theta = \theta$$

совпадает с исходной формой θ. □

§ 2.7. Горизонтальный лифт.

7.1. Горизонтальный лифт векторного поля.

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\Pi_{\mathscr{V}}$ – вертикальный проектор (не обязательно связность), $\mathscr{H}$ – соответствующее псевдогоризонтальное распределение. Если взять значения всех векторных полей из распределения $\mathscr{H}$ в произвольной фиксированной точке $p \in P$, то мы получим векторное подпространство $\mathscr{H}_p$ касательного пространства $T_p(P)$. Оказывается, что отображение

$$(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p} : \mathscr{H}_p \to T_{\pi(p)}(M)$$

является изоморфизмом векторных пространств (примем этот факт без доказательства). Из этого следует, что взяв любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$, мы можем его „повекторно“ отправить в $\mathscr{H}$, а именно

$$\forall p \in P\, \exists Y_p \in \mathscr{H}_p : (\pi_*)_p Y_p = X_{m=\pi(p)}.$$

Совокупность векторов $\{Y_p\}$ образует векторное поле Y на многообразии P, принадлежащее распределению $\mathscr{H}$, причем из построение следует, что оно π-связано с векторным полем X (см. критерий ϕ-связанных векторных полей). Другими словами, исходя из векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ мы однозначно построили векторное поле Y на многообразии P, удовлетворяющее условиям

$$1) \quad \pi_* Y = X; \quad 2) \quad Y \in \mathscr{H},$$

Векторное поле Y называется *горизонтальным лифтом* векторного поля X и обозначается $X^\sharp$.

Рассмотрим свойства горизонтальных лифтов. Пусть теперь $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность.

Теорема 2.9. *Горизонтальный лифт $X^\sharp$ произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ инвариантен относительно действия структурной группы, то есть для любого элемента $g \in G$ имеем*

$$(\varphi_g)_* X^\sharp = X^\sharp.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что векторное поле $(\varphi_g)_* X^\sharp$ является горизонтальным лифтом векторного поля X. Чтобы воспользоваться для этого определением горизонтального лифта, нам нужно показать, что векторное поле $(\varphi_g)_* X^\sharp$, во-первых, горизонтально, а, во-вторых, что оно π- связано с векторным полем X.

Напомним, что горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ инвариантно относительно действия структурной группы, то есть $(\varphi_g)_* \mathscr{H} \subset \mathscr{H}$. Так как векторное поле $X^\sharp$ является горизонтальным, его образ $(\varphi_g)_* X^\sharp$ также будет горизонтальным векторным полем.

Вычислим $\pi_*((\varphi_g)_* X^\sharp)$. Из определения главного расслоения следует, что $\pi \circ (\varphi_g) = \pi$. Тогда

$$\pi_* \circ (\varphi_g)_* = \pi_*.$$

Используя эту формулу, получим

$$\pi_*((\varphi_g)_* X^\sharp) = \pi_* X^\sharp = X.$$

По определению мы получаем, что векторное поле $(\varphi_g)_* X^\sharp$ является π-связанным с векторным полем X.

Объединяя оба результата, получаем, что $(\varphi_g)_* X^\sharp$ есть горизонтальный лифт векторного поля X, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.10. *Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем*

$$\Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]^\sharp,$$

где $\Pi_{\mathscr{H}} = id - \Pi_{\mathscr{V}}$ – горизонтальный проектор (дополнительный к вертикальному), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. Очевидно, что в обеих частях равенства стоят горизонтальные векторные поля. Осталось доказать, что они являются лифтами одного и того же векторного поля $[X, Y]$ из $\mathfrak{X}(M)$, то есть $\pi_* \circ \Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]$. Имеем

$$\pi_* \circ \Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = \pi_* \circ (id - \Pi_{\mathscr{V}})([X^\sharp, Y^\sharp]) = [\pi_* X^\sharp, \pi_* Y^\sharp] = [X, Y].$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Pi_{\mathscr{V}}([X^\sharp, Y^\sharp]) \in \mathscr{V} = ker\, \pi_*$ (см. § 2.5.) и свойство увлеченных векторных полей. □

7.2. Базис, адаптированный связности.

Пусть на главном расслоении $\mathscr{B}$ фиксирована связность $\Pi_{\mathscr{V}}$. Тогда возникает отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P),$$

сопоставляющее каждому векторному полю $X \in \mathfrak{X}(M)$ его горизонтальный лифт $X^\sharp$. Исследуем свойства этого отображения.

Предложение 2.5 **.** *Отображение $\sharp$ является $\mathbb{R}$-линейным отображением, то есть гомоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{X}(M)$ и $\mathfrak{X}(P)$.*

Доказательство. Нам нужно проверить выполнение двух равенств

$$X^\sharp + Y^\sharp = (X+Y)^\sharp; \quad \lambda X^\sharp = (\lambda X)^\sharp,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, λ – произвольное вещественное число. Доказательство этих равенств аналогично доказательству теоремы 2.9 (проведите самостоятельно). □

Предложение 2.6 **.** *Гомоморфизм $\sharp$ является инъективным отображением.*

Доказательство. Пусть $X \in ker\,\sharp$, то есть $\sharp X = 0$. Из определения горизонтального лифта следует, что

$$\pi_* \circ \sharp = id.$$

Следовательно, $\pi_* \circ \sharp(X) = 0$, то есть $id(X) = 0$, то есть $X = 0$. Таким образом, ядро отображения $\sharp$ нулевое, следовательно оно инъективно. □

Предложение 2.7 **.** *Отображение*

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}$$

является изоморфизмом векторных пространств. Здесь $\mathfrak{X}_\pi(P)$ – модуль проектируемых векторных полей. В частности, $Im\,\sharp = \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}$.

Доказательство. По определению горизонтального лифта имеем $\sharp \circ \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P)\cap\mathscr{H}} = id$. Кроме того, как мы видели $\pi_* \circ \sharp = id$. Откуда получим, что $\sharp^{-1} = \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P)\cap\mathscr{H}}$, то есть оно $\mathbb{R}$-линейно и допускает обратное, то есть является изоморфизмом векторных пространств. □

С помощью изоморфизма $\sharp$ можно построить локальный базис для векторного пространства $\mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}$. Например, взяв натуральный базис $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ локальной карты базы M система $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^\sharp\right\}$ горизонтальных лифтов будет (локальным) базисом для $\mathfrak{X}_\pi(P)\cap\mathscr{H}$. Превратим это векторное пространство в $C^\infty(P)$-модуль стандартным образом (базис при этом сохраняется, но коэффициентами становятся гладкие функции на P), то есть рассмотрим множество формальных сумм

$$C^\infty(P) \otimes (\mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}) = (C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P)) \cap (C^\infty(P) \otimes \mathscr{H}).$$

Так как $\mathscr{H}$ уже является $C^\infty(P)$-модулем, получаем $C^\infty(P) \otimes \mathscr{H} = \mathscr{H}$. Можно доказать, что $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) = \mathfrak{X}(P)$. Тогда

$$C^\infty(P) \otimes (\mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}) = \mathfrak{X}(P) \cap \mathscr{H} = \mathscr{H}.$$

Итак, мы получили, что горизонтальные лифты натурального базиса локальной карты базы расслоения составляют (локальный) базис горизонтального распределения $\mathscr{H}$.

Кроме того, для вертикального распределения $\mathscr{V}$ определен глобальный базис из фундаментальных векторных полей $(E_a^\flat)$, где (E_a) – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $a = 1, \ldots, r = dim\,\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$, получим, что система векторных полей

$$\left(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^\sharp, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^\sharp\right)$$

будет (локальным) базисом модуля $\mathfrak{X}(P)$. Построенный базис называется *базисом, адаптированным связности.*

§ 2.8. Структурные уравнения связности. Теорема Картана-Лаптева.

8.1. Теорема Картана-Лаптева.

Теорема 2.11. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение со связной структурной группой. Тогда псевдогоризонтальное распределение $\mathscr{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ является горизонтальным тогда и только тогда, когда*

$$[\lambda\mathfrak{g}, \mathscr{H}] \subset \mathscr{H},$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли структурной группы G. Другими словами, псевдогоризонтальное распределение $\mathscr{H}$ будет горизонтальным (то есть будет задавать связность) тогда и только тогда коммутатор любого фундаментального векторного поля и векторного поля из псевдогоризонтального распределения $\mathscr{H}$ принадлежит $\mathscr{H}$.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть $\mathscr{H}$ – горизонтальное распределение, то есть оно дополнительно к вертикальному ($\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$) и оно инвариантно относительно действия структурной группы ($(\varphi_g)_*\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$). Нам нужно доказать, что для любого левоинвариантного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$ и любого горизонтального векторного поля $Y \in \mathscr{H}$ коммутатор $[\lambda X, Y]$ будет горизонтальным векторным полем, то есть будет принадлежать $\mathscr{H}$.

Напомним, что отображение $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ присоединенной алгебры Ли в модуль векторных полей на P строилось следующим образом. Левоинвариантное поле $X \in \mathfrak{g}$ порождало однопараметрическую группу $exp(tX)$. При каждом значении $t \in \mathbb{R}$ это элемент из группы Ли G (структурной группы главного расслоения $\mathscr{B}$). Действие Φ этой группы G, заданное на многообразии P, порождало (глобальный) поток $\Psi(p, t) = \Phi(exp(tX), p)$. Этот поток однозначно (и глобально) определял векторное поле $X^\flat$ на P, которое мы назвали фундаментальным векторным полем. Напомним также, что задание действия Φ группы на множестве равносильно заданию его представления φ. Они связаны формулой $\Phi(g, m) = \varphi_g(m)$. Тогда глобальный поток, задающий фундаментальное векторное поле в этих обозначениях можно записать так:

$$\Psi(p, t) = \varphi_{exp(tX)}(p).$$

Если в (глобальном) потоке Ψ фиксировать вещественное число t, а менять только точку p, мы получим (глобальный) диффеоморфизм $F_t(p) = \Psi(p, t) = \varphi_{exp(tX)}(p)$.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим скобку Ли $[\lambda X, Y] = [X^\flat, Y]$. Как мы доказали в курсе Анализ на многообразиях, скобка Ли равна производной Ли векторного поля Y, то есть

$$[X^\flat, Y] = \mathcal{L}_{X^\flat} Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((F_{-t})_* Y - Y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((\varphi_{exp(-tX)})_* Y - Y).$$

Так как $\mathscr{H}$ инвариантно относительно действия структурной группы, оба слагаемых под знаком предела принадлежат $\mathscr{H}$, следовательно, и предел принадлежит $\mathscr{H}$, то есть $[X^\flat, Y] \in \mathscr{H}$ для любого $X \in \mathfrak{g}$.

$\Leftarrow$). Пусть дано распределение $\mathscr{H}$, дополнительное к вертикальному распределению $\mathscr{V}$, то есть $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$. Кроме того, для любого $X \in \mathfrak{g}$ и любого $Y \in \mathscr{H}$ имеем $[\lambda X, Y] \in \mathscr{H}$. Нам нужно доказать, что $\mathscr{H}$ является горизонтальным распределением. Другими словами, нам нужно показать, что на главном расслоении $\mathscr{B}$ существует вертикальный проектор Π, инвариантный относительно действия структурной группы.

Так как модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму вертикального и псевдогоризонтального распределений, из общей теории проекторов получаем, что однозначно определен проектор Π, такой что $Im\,\Pi = \mathscr{V}$, $Ker\,\Pi = \mathscr{H}$, то есть вертикальный проектор. Нам осталось проверить, что он инвариантен относительно действия структурной группы. Для этого докажем вспомогательную формулу: $\mathcal{L}_{X^\flat}(\Pi) = 0$, то есть производная Ли проектора Π в направлении любого фундаментального векторного поля равна нулю. Из курса Анализ на многообразиях мы знаем, что

$$\mathcal{L}_{X^\flat}(\Pi)(Y) = \mathcal{L}_{X^\flat}(\Pi Y) - \Pi(\mathcal{L}_{X^\flat} Y) = [X^\flat, \Pi Y] - \Pi[X^\flat, Y]$$

для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(P)$. Разложим векторное поле Y в сумму вертикальной и горизонтальной составляющих, то есть

$$Y = Y_{\mathscr{V}} + Y_{\mathscr{H}},\ Y_{\mathscr{V}} \in \mathscr{V}, Y_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}.$$

Такое разложение существует и единственно, так как модуль $\mathfrak{X}(P)$ раскладывается в прямую сумму подмодулей $\mathscr{V}$ и $\mathscr{H}$. Тогда

$$\mathcal{L}_{X^\flat}(\Pi)(Y) = [X^\flat, \Pi Y] - \Pi[X^\flat, Y] = [X^\flat, \Pi Y_{\mathscr{V}} + \Pi Y_{\mathscr{H}}] - \Pi[X^\flat, Y_{\mathscr{V}} + Y_{\mathscr{H}}] =$$

Так как $Im\,\Pi = \mathscr{V}$ по альтернативному определению проектора $\Pi Y_{\mathscr{V}} = Y_{\mathscr{V}}$. Так как $ker\,\Pi = \mathscr{H}$, получим $\Pi Y_{\mathscr{H}} = 0$. Продолжаем цепочку равенств

$$= [X^\flat, Y_{\mathscr{V}}] - \Pi[X^\flat, Y_{\mathscr{V}}] - \Pi[X^\flat, Y_{\mathscr{H}}] =$$

Так как вертикальное распределение инволютивно, то есть замкнуто относительно операции коммутирования, скобка Ли во втором слагаемом принадлежит $\mathscr{V}$ и действие проектора Π ее не меняет. В третьем слагаемом, используя условие теоремы, мы получаем, что скобка Ли принадлежит горизонтальному распределению, то есть ядру проектора Π, следовательно, все третье слагаемое равно нулю. Тогда

$$= [X^\flat, Y_{\mathscr{V}}] - [X^\flat, Y_{\mathscr{V}}] = 0.$$

Итак, вспомогательная формула доказана.

Запишем ее, используя определение производной Ли.

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}((F_{-t})_*\Pi - \Pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (F_{-t})_*\Pi = 0.$$

Напомним, что здесь $(F_{-t})_*$ обозначает отображение увлечения тензорных полей типа (1,1).

Фиксируем произвольное вещественное число s и вычислим производную

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} (F_{-t})_*\Pi = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} (F_{-(\tau+s)})_*\Pi \left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t=s} = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} (F_{-s}\circ F_{-\tau})_*\Pi =$$
$$= \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} (F_{-s})_*((F_{-\tau})_*\Pi) = ((F_{-s})_*)_* \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} (F_{-\tau})_*\Pi = 0$$

В результате мы получаем, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} (F_{-t})_*\Pi = 0,$$

то есть тензорное поле $(F_{-t})_*\Pi$ одно и то же при любом значении t (оно не меняется, так как производная равна нулю), то есть $(F_{-t})_*\Pi = (F_0)_*\Pi = id(\Pi) = \Pi$. Так как t – произвольное действительное число, мы можем заменить t на $-t$. Тогда полученная формула примет вид

$$(F_t)_*\Pi = \Pi. \tag{2.24}$$

Вспоминаем, что диффеоморфизм F_t определен локальным потоком $\Psi(p,t) = \Phi(exp(tX), p) = \varphi_{exp(tX)}(p)$. Тогда формула (2.24) запишется в виде

$$(\varphi_{exp(tX)})_*\Pi = \Pi. \tag{2.25}$$

Отображение $exp : \mathfrak{g} \to G$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля U_0 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы U_e группы Ли G. Так как формула (2.25) верна для любых $t \in \mathbb{R}$ и $X \in \mathfrak{g}$, она верна для всех элементов tX окрестности U_0. Обозначим $exp(tX) = g$. Тогда каждому элементу $tX \in U_0$ отображение exp ставит взаимно однозначно элемент g из U_e. В результате мы получаем, что в окрестности U_e верна формула $(\varphi_g)_*(\Pi) = \Pi$, $g \in U_e$.

Сравним полученную формулу с тем, что мы хотели доказать, а именно с инвариантностью проектора Π относительно действия структурной группы: $\Pi \circ (\varphi_g)_* = (\varphi_g)_* \circ \Pi$ для любого $g \in G$. Мы видим два различия: во-первых, мы доказали формулу для элементов только окрестности единицы, а не для всей группы, и, во-вторых, в полученной формуле $(\varphi_g)_*$ – отображение антиувлечения для тензорных полей типа (1,1), а в требуемой теми же символами обозначается отображение увлечения векторных полей.

Сначала распространим полученную формулу на всю группу Ли G. Из теории групп Ли известно, что для связной группы любой ее элемент может быть получен как произведение конечного числа элементов окрестности единицы этой группы. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Тогда $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_N$. Имеем

$$(\varphi_g)_*(\Pi) = (\varphi_{g_1\cdot\ldots\cdot g_N})_*(\Pi) = (\varphi_{g_N})_* \circ \ldots \circ (\varphi_{g_1})_*(\Pi) = \Pi.$$

Наконец, проверим инвариантность Π относительно структурной группы G. Вспоминаем, что Π – это тензорное поле типа (1,1). Следовательно, его увлечение $(\varphi_g)_*(\Pi)$ также тензорное поле типа (1,1). Тогда по определению отображения увлечения тензорных полей типа (1,1) имеем (для любых $Y \in \mathfrak{X}(P)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(P)$)

$$\omega((\varphi_g)_*(\Pi)(Y)) = (\varphi_g)_*(\Pi)(Y,\omega) = \Pi((\varphi_g)^*Y, (\varphi_g)^*\omega) \circ (\varphi_g)^{-1} =$$
$$= ((\varphi_g)^*\omega)(\Pi((\varphi_g)^*Y)) \circ (\varphi_g)^{-1} = \omega((\varphi_g)_* \circ \Pi((\varphi_g)^*Y)) \circ (\varphi_g) \circ (\varphi_g)^{-1} =$$
$$= \omega((\varphi_g)_* \circ \Pi \circ ((\varphi_g)_*)^{-1}Y).$$

Здесь мы воспользовались формулой $L(X,\omega) = \omega(L(X))$, которая позволяет отождествлять тензорные поля типа (1,1) и эндоморфизмы, а также определением отображения антиувлечения форм и векторных полей.

Итак, мы получаем, что

$$(\varphi_g)_*(\Pi) = (\varphi_g)_* \circ \Pi \circ ((\varphi_g)_*)^{-1}.$$

Подставляя ее в формулу $(\varphi_g)_*(\Pi) = \Pi$, получаем инвариантность Π относительно действия структурной группы.

Итак, мы построили вертикальный проектор Π, инвариантных относительно действия структурной группы, причем его ядро совпадает с $\mathscr{H}$. Следовательно, $\mathscr{H}$ – горизонтальное распределение. □

Замечание 2.6. Связность структурной группы существенна в доказательстве достаточности из теоремы 2.11. Необходимость может быть доказана без нее. Это будет существенно при выводе второй группы структурных уравнений связности.

Вернемся к изучению структурных уравнений главного расслоения (см. § 2.5.). Напомним, что если фиксировать базис $(E_1, \dots, E_r)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то фундаментальные векторные поля $(E_1^\flat, \dots, E_r^\flat)$ образует базис векторного пространства фундаментальных векторных полей $\mathfrak{f}$, а также базис распределения $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathscr{F} = \mathscr{V}$. Этот базис мы дополняли до локального базиса $\mathfrak{X}(P)$. Если на многообразии P фиксирована связность, то в качестве дополнительных векторных полей можно взять горизонтальные лифты векторных полей базы, образующих локальный базис модуля $\mathfrak{X}(M)$. Например, можно взять горизонтальные лифты векторных полей натурального базиса:

$$E_{r+1} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^\sharp, \quad \dots, \quad E_{r+n} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x^n}\right)^\sharp.$$

Мы назвали полученный базис

$$(E_1^\flat, \dots, E_r^\flat, E_{r+1}, \dots, E_{r+n}) \tag{2.26}$$

базисом, адаптированным связности.

Напомним, что индексы $a, b, c, d = 1, \dots, r$, индексы $i, j, k, \ell = r+1, \dots, r+n$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r+n$.

Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис.

Лемма 2.6. *1-формы $(\omega^1, \dots, \omega^r)$ образуют систему Пфаффа горизонтального распределения $\mathscr{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(P)$. Имеем

$$X = X^a E_a^\flat + X^i E_i = \omega^a(X) E_a^\flat + \omega^i(X) E_i.$$

Тогда

$$X \in \mathscr{H} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^a(X) = 0.$$

□

Согласно (2.21) вторая группа структурных уравнений главного расслоения имеет вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j,$$

где $\omega^a_j = R^a_{bj}\omega^b + \frac{1}{2} R^a_{kj}\omega^k$. Благодаря связности (а именно, выбору дополнения к базису в горизонтальном распределении) эти уравнения можно еще больше упростить. А именно, с учетом теоремы 2.11 получим

$$R^a_{bj} = d\omega^a(E_b^\flat, E_j) = E_b^\flat \omega^a(E_j) - E_j \omega^a(E_b^\flat) - \omega^a([E_b^\flat, E_j]) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega^a(E_j) = \delta^a_j$, $\omega^a(E_b^\flat) = \delta^a_b$ и $[E_b^\flat, E_j] \in \mathscr{H}$, а значит, по лемме 2.6 $\omega^a([E_b^\flat, E_j]) = 0$. Итак, при фиксации связности вторая группа структурных уравнений приняла вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R^a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j. \tag{2.27}$$

Обратно, пусть $R^a_{bj} = 0$. Тогда для любого фундаментального векторного поля $X^\flat \in \mathfrak{f}$ и любого горизонтального векторного поля $Y_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$ имеем

$$\begin{aligned}
\omega^a([X^\flat, Y_{\mathscr{H}}]) &= -d\omega^a(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) + X^\flat(\omega^a(Y_{\mathscr{H}})) - Y_{\mathscr{H}}(\omega^a(X^\flat)) = -d\omega^a(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) = \\
&= \frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c (X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) - \frac{1}{2} R^a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j (X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) = \frac{1}{2} C^a_{bc} (\omega^b(X^\flat)\omega^c(Y_{\mathscr{H}}) - \omega^b(Y_{\mathscr{H}})\omega^c(X^\flat)) - \\
&\qquad - \frac{1}{2} R^a_{ij} (\omega^i(X^\flat)\omega^j(Y_{\mathscr{H}}) - \omega^i(Y_{\mathscr{H}})\omega^j(X^\flat)) = 0
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathfrak{f}$ векторное пространство, а значит результат действия формы (так как это линейное отображение векторного пространства, то форма является ковектором) на векторном поле (аналогично это вектор) будет вещественное число. Тогда действие вектора на вещественном числе (то есть на постоянной функции) равно нулю. Еще одно слагаемое $\omega^a(Y_{\mathscr{H}})$ обнуляется согласно лемме 2.6. Также мы воспользовались (2.27). Наконец, использовали формулу (**??**) и то, что формы (ω^i) образуют систему Пфаффа вертикального распределения (см § 2.5.).

Замечание 2.7. Уравнения (2.27) выведены без предположения связности структурной группы.

Обратное утверждение, а именно, то что $\mathscr{H}$ является горизонтальным распределением при выполнении (2.27), требует предположения связности структурной группы.

Тем самым нами доказана

Теорема 2.12. *(Картана-Лаптева) Псевдогоризонтальное распределение на пространстве главного расслоения $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ является горизонтальным (то есть определяет связность тогда и только тогда, когда его система Пфаффа (ω^a) удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \,\square$$

Замечание 2.8. В теореме Картана-Лаптева структурная группа G предполагается связной, иначе берется сужение расслоения на связную компоненту группы G.

Соотношения

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^a &= -\tfrac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \tfrac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \end{aligned} \tag{2.28}$$

называются *структурными уравнениями Картана* или *структурными уравнениями связности* (первой и второй группой соответственно).

8.2. Инвариантный вид структурных уравнений.

Запишем структурные уравнения связности в инвариантном виде. Пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда мы можем разложить его по базису (2.26)

$$X = X^a E^\flat_a + X^i E_i.$$

Пусть θ – форма связности на $\mathscr{B}$. Тогда по определению формы связности

$$\theta(X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(X^a E^\flat_a + X^i E_i) = \Lambda^{-1}(X^a E^\flat_a) = X^a \lambda^{-1}(E^\flat_a) = X^a E_a = \\ = \omega^a(X)E_a \equiv \omega^a \otimes E_a(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что Π – проектор на вертикальное распределение, а значит, на горизонтальных векторных полях дает нуль. Напомним, что (E_a) – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Последнее равенство в цепочке мы положили по определению. Итак, мы получили

$$\theta = \omega^a \otimes E_a,$$

то есть формы $\{\omega^a\}$ являются тензорными компонентами формы связности θ.

Далее, положим по определению

$$d\theta = d\omega^a \otimes E_a.$$

Можно показать, что форма $d\theta$ не зависит от выбора базиса (E_a), а значит, определена корректно.

Составим формальные суммы из второй группы структурных уравнений (2.28)

$$d\omega^a \otimes E_a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

С учетом определения структурных констант $C^a_{bc}E_a = [E_b, E_c]$ получим

$$d\theta = -\frac{1}{2}\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

Обозначим

$$\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] = [\theta, \theta]; \quad \tfrac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = \Phi. \tag{2.29}$$

Тогда с учетом этих обозначений вторая группа структурных уравнений запишется в виде

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi,$$

где $\Phi = \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$ – 2-форма на многообразии P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Она называется *формой кривизны связности*. Связность в главном расслоении называется *плоской*, если форма кривизны связности тождественно равна нулю.

Теорема 2.13. *Связность на главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда ее горизонтальное распределение* $\mathscr{H}$ *вполне интегрируемо.*

Доказательство. Согласно второй группе структурных уравнений (2.28) связность в главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда

$$d\omega^a = \left(-\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b\right) \wedge \omega^c,$$

Согласно критерию инволютивности это означает, что система Пфаффа (ω^a) горизонтального распределения инволютивна, а значит, по теореме Фробениуса $\mathscr{H}$ вполне интегрируемо. ☐

8.3. Горизонтальные и вертикальные формы.

r-форма $\omega \in \Lambda_r(P)$ на многообразии P называется *горизонтальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален.

Предложение 2.8 . *Форма* $\omega \in \Lambda_r(P)$ *горизонтальна тогда и только тогда, когда*

$$\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = \omega,$$

где отображение $(\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}(X_1), \ldots, \Pi_{\mathscr{H}}(X_r))$, $\Pi_{\mathscr{H}}$ *– проектор на псевдогоризонтальное распределение, дополнительный к проектору* $\Pi_{\mathscr{V}}$ *на вертикальное распределение.*

Доказательство. Пусть r-форма ω горизонтальна. Тогда для любых векторных полей $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1 + \Pi_{\mathscr{V}}X_1, \ldots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r + \Pi_{\mathscr{V}}X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1, \ldots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = \\ = \Pi^*_{\mathscr{H}}\omega(X_1, \ldots, X_r).$$

Здесь мы воспользовались линейностью формы ω и тем, что она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален ($\Pi_{\mathscr{V}}X_i$ – вертикальные векторные поля).

Обратно, пусть $\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = \omega$. Рассмотрим векторные поля $X_1, \ldots, X_r$, где X_1 – вертикальное векторное поле. Тогда

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = \Pi^*_{\mathscr{H}}\omega(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1, \Pi_{\mathscr{H}}X_2, \ldots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = \\ = \omega(0, \Pi_{\mathscr{H}}X_2, \ldots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что значение r-формы на наборе аргументов, среди которых хотя бы один нулевой, равно нулю. ☐

Пусть на главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ фиксирована связность. r-форма ω называется *вертикальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов горизонтален.

Задача 2.7. Докажите, что r-форма ω является вертикальной тогда и только тогда, когда $\Pi^*_{\mathscr{V}}\omega = \omega$.

Задача 2.8. Докажите, что если r-форма ω вертикальна, то равенства $\Pi^*_{\mathscr{V}}\omega = \omega$ и $\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = 0$ равносильны.

Замечание 2.9. Свойство формы быть горизонтальной – внутреннее свойство главного расслоения, а свойство формы быть вертикальной зависит от выбора связности.

Лемма 2.7. *q-форма ω на многообразии P горизонтальна тогда и только тогда, когда в адаптированном базисе* (E_a, E_i) *она имеет вид*

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_q}\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}, \tag{2.30}$$

где (ω^a, ω^i) *– базис дуальный для базиса* (E_a, E_i).

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (2.30). Напомним, что координаты формы (то есть коэффициенты разложения в (2.30)) совпадают с компонентами этой формы в базисе, то есть

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_q}),$$

где $\alpha = 1, \ldots, r+n$. В силу (2.30), коэффициенты, у которых хотя бы один индекс принимает значения от 1 до r, то есть индекс вида a, равны нулю. Следовательно, $\omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_q})$, где хотя бы одно $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ принимает значение от 1 до r равно нулю.

Рассмотрим набор векторных полей $X_1, \ldots, X_q$ и предположим, что X_1 вертикальное векторное поле, то есть оно раскладывается $X_1 = X_1^a E_a$, $a = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\omega(X_1^{a_1} E_{a_1}, X_2^{a_2} E_{a_2} + X_2^{i_2} E_{i_2}, \ldots, X_r^{a_r} E_{a_r} + X_r^{i_r} E_{i_r}) = X_1^{a_1} \ldots \omega(E_{a_1}, \ldots) + \ldots$$

Здесь мы раскрыли суммы по линейности. Тогда в каждом слагаемом будет сомножитель вида $\omega(E_a, \ldots,)$. Он обращается в нуль, а значит, и вся сумма равна нулю.

Обратно, пусть форма ω горизонтальна. Тогда

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_s}) = 0,$$

если хотя бы один из аргументов вертикален, то есть хотя бы один из индексов принимает значения от 1 до r. □

Пример 2.11. Форма кривизны связности Φ является горизонтальной. Точнее ее тензорные компоненты являются горизонтальными формами в силу леммы 2.7 и определения формы кривизны (2.29).

Форма связности θ является вертикальной. Действительно, по определению формы связности (2.23) имеем

$$\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi,$$

где Π – вертикальный проектор. Так как $ker\, \Pi = \mathscr{H}$, для любого горизонтального векторного поля $X_{\mathscr{H}}$ имеем $\theta(X_{\mathscr{H}}) = 0$.

§ 2.9. Задачи к главе.

Задача 2.9. Пусть дана круговая цилиндрическая поверхность (см. пример 2.10). Как мы видели, его вертикальное распределение состоит из векторных полей, касательные векторы которых параллельны прямолинейным образующим этой цилиндрической поверхности. Базисом вертикального распределения является система фундаментальных векторных полей (в данном случае – это одно векторное поле). Докажите, что фундаментальное векторное поле на цилиндре не может иметь стрелки торчащие в разные стороны. Используя этот факт, покажите, что вертикальное распределение не совпадает с векторным пространством фундаментальных векторных полей (чтобы получить знак равенства, нужно взять тензорное произведение $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Задача 2.10. На круговой цилиндрической поверхности задано отображение двумерного касательного векторного пространства в каждой точке цилиндрической поверхности на вертикальное распределение. Указать соответствующее горизонтальное распределение.

Задача 2.11. Для круговой цилиндрической поверхности в каждой ее точке даны прямые, которые пересекают прямолинейные образующие под одним и тем же углом. Будет ли множество векторов, параллельное такой прямой, образовывать горизонтальную площадку некоторой связности? Если эти прямые будут гладко поворачиваться?

3. Главное расслоение вещественных реперов гладкого многообразия.

§ 3.1. Определение главного расслоения вещественных реперов.

1.1. Вещественные реперы.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка. Рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ и фиксируем в нем базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда совокупность $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ называется *линейным репером* многообразия M с вершиной в точке m (или просто *репером*), а базис $(e_1, \ldots, e_n)$ называется *базисной частью линейного репера* или просто *базисом репера*. Линейный репер, базисная часть которого является натуральным базисом, будем называть *натуральным репером.*

Обозначим $BM = \{(m, e_1, \ldots, e_n), m \in M\}$ множество всех реперов во всех точках многообразия M. Наша ближайшая задача доказать, что четверка $\mathscr{B}(M) = (BM, M, GL(n, \mathbb{R}), \pi)$, где $\pi : BM \to M$ – отображение, ставящее каждому реперу p его вершину m, является главным расслоением (см. § 2.3.).

Мы должны доказать выполнимость всех требований определения главного расслоения. Начнем с действия группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM (пока в этом множестве нет даже структуры топологического пространства). Напомним, что задание действия группы G на множестве P равносильно заданию отображения $\Phi : G \times P \to P$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\Phi(e, m) = m; \quad \Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m),$$

где e – единица группы G, $g, h \in G$ – произвольные элементы, $m \in P$ – произвольный репер. Задаем отображение Φ в нашем случае:

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times BM \to BM$$

каждому реперу $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$ и каждой матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ставит в соответствие репер $q = (m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ с той же вершиной m и базисной частью $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, для которой матрица g является матрицей перехода от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Другими словами, $\varepsilon_i = g_i^j e_j$, где (g_i^j) – элементы матрицы g. Мы будем записывать это действие в сокращенной форме: $q = pg$.

Мы видим, что действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM сводится к действию этой группы на множестве базисов векторного пространства $T_m(M)$. Как мы доказали в примере 2.8 это правое свободное действие. О гладкости этого действия мы пока ничего не можем сказать, так как на множестве BM нет гладкой структуры и пока мы отложим этот вопрос. Займемся орбитами построенного действия. Возьмем произвольный репер $p \in BM$ и применим к нему все элементы группы $GL(n, \mathbb{R})$. Очевидно, что мы получим все возможные реперы с вершиной в точке m, то есть орбитами действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве реперов BM являются множества всевозможных реперов с общей вершиной. Каждую такую орбиту мы можем отождествить с вершиной реперов, принадлежащей им, то есть многообразие M может быть отождествлено с множеством орбит действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM.

Построим гладкую структуру на BM, используя гладкую структуру на M. Пусть (U, φ) – произвольная гладкая карта на M с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Зададим отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

положив $F_U(p) = g$, где g – матрица перехода от базиса натурального репера

$$p_0 = \left(m, e_1^0 = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_m, \dots, e_n^0 = \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_m \right)$$

к базису репера p, то есть элемент $g \in GL(n, \mathbb{R})$ однозначно определяющийся из уравнения $p_0 g = p$.

Теперь естественным образом определяется отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbb{R})$$

по формуле $\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$.

Лемма 3.1. *Отображение ψ_U является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\psi_U(p_1) = \psi_U(p_2)$ для некоторых реперов $p_1, p_2 \in BM$. Тогда, в частности, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, а значит, вершины этих реперов совпадают. Далее, $F_U(p_1) = F_U(p_2)$, следовательно совпадают матрицы перехода от базисной части этих реперов к натуральному реперу, а значит, совпадают и сами базисы. Итак, $p_1 = p_2$, следовательно, отображение ψ_U инъективно.

Это отображение также и сюръективно, так как для любой пары $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$ можно построить репер $p = (m, g^{i_1} e^0_{i_1}, \dots, g^{i_n} e^0_{i_n})$, который будет прообразом этой пары. $\square$

Теперь внесем во множество BM топологию, потребовав, чтобы отображение ψ_U было гомеоморфизмом. Иначе говоря, базой топологии на BM служит система множеств $\psi_U^{-1}(V_1 \times V_2)$, где $V_1 \subset U$ – открытое подмножество в топологии многообразия M, $V_2 \subset GL(n, \mathbb{R})$ – открытое подмножество в топологии группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда BM превратится в топологическое пространство. Из определения построенной топологии легко следует, что в ней отображение $\pi : BM \to M$ будет непрерывным. Действительно, для любого открытого множества $U \subset M$ его полный прообраз $\pi^{-1}(U) = \psi_U^{-1}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ будет открыт как прообраз открытого множества при гомеоморфизме.

Теперь переходим к построению карт на топологическом пространстве BM. Пусть $p \in BM$ – произвольная точка. Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M в окрестности точки $m = \pi(p)$. Рассмотрим пару (W, χ), где $W = \pi^{-1}(U)$ (это открытое множество, так как π непрерывно), $\chi : W \to \mathbb{R}^{n^2+n}$ – отображение, заданное формулой $\chi(p) = (\varphi \circ \pi(p), g_j^i \circ F_U(p)) \equiv (\varphi \times g_j^i) \circ \psi_U$, где $g_j^i : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – функции, ставящие в соответствие матрице (g_j^i) ее элемент из i-й строки и j-го столбца. Отображение χ является гомеоморфизмом как композиция таковых. Тогда пара (W, χ) является локальной картой в топологическом пространстве BM. Ее координаты (y^i, y_j^i) задаются формулами

$$y^i = x^i \circ \pi; \quad y_j^i = g_j^i \circ F_U$$

Докажем, что построенные карты на BM гладко связаны. Пусть $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ – другая локальная карта в окрестности точки p с координатами $(\tilde{y}^i, \tilde{y}_j^i)$. Пусть ей соответствует локальная карта $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ с координатами $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ в окрестности точки $m = \pi(p)$. Тогда $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi$, $\tilde{y}_j^i = g_j^i \circ \tilde{F}_U$. Заметим, что отображение

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

является диффеоморфизмом евклидовых пространств, поскольку эти карты гладко связаны. Пусть этот диффеоморфизм задается уравнениями $\tilde{x}^i = \alpha^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим отображение
$$\tilde{\chi} \circ \chi^{-1} : \chi(W \cap \tilde{W}) \to \tilde{\chi}(W \cap \tilde{W}).$$

Получим формулы, задающее это отображение и убедимся, что они гладкие. Имеем

$$\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi = \alpha^i(x^1, \dots, x^n) \circ \pi = \alpha^i(x^1 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi) = \alpha^i(y^1, \dots, y^n).$$

Это гладкое отображение как композиция таковых.

Далее, обозначим $C = (C^i_k)$ матрицу перехода от натурального репера второй карты к натуральному реперу первой карты, то есть $p_0 = \tilde{p}_0 C$. Тогда

$$\tilde{y}^i_j(p) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(p) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(p_0 g) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(\tilde{p}_0 C g) = g^i_j(Cg) = C^i_k g^k_j = \\ = C^i_k g^k_j(g) = C^i_k g^k_j(F_U(p)) = C^i_k y^k_j(p)$$

Итак, формулы перехода от первой ко второй карте имеют вид

$$\tilde{y}^i = \alpha^i(y^1, \dots, y^n); \quad \tilde{y}^i_j = C^i_k y^k_j.$$

Это гладкие функции. Они обратимы, причем обратные функции также являются гладкими. Таким образом, мы построили гладкую структуру на BM, превратив это множество в гладкое многообразие размерности $n^2 + n$.

Заметим, что относительно построенной гладкой структуры отображения π и F_U являются гладкими, так как задаются формулами $x^i = y^i$, $g^i_j = y^i_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Далее, нам нужно показать, что группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ гладко действует на многообразии BM. Заметим, что в построенных картах действие группы Ли

$$((y^i, y^i_j), g^i_j) \to (\tilde{y}^i, \tilde{y}^i_j)$$

задается уравнениями $\tilde{y}^i = y^i$, $\tilde{y}^i_j = y^i_k g^k_j$, где g^i_j по-прежнему функции, ставящие в соответствие матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ее элемент из i-й строки j-го столбца. Действительно, пусть $\tilde{p} = ph$. Тогда так как $p = p_0 g$, $\tilde{p} = p_0 \tilde{g}$, то

$$\tilde{p} = ph = (p_0 g)h = p_0(gh),$$

то есть $\tilde{g} = gh$. Элементы матриц $\tilde{g}$, g, h – это $\tilde{y}^i_j$, y^i_j, $g^i_j(h) \equiv g^i_j$, откуда получим требуемые формулы. Итак, функции, задающие действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, гладкие.

Нам осталось доказать, что $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in BM$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Обозначим $h = F_U(p)$. Это означает, что $p_0 h = p$, где p_0 – натуральный репер в точке $m = \pi(p)$. Тогда

$$pg = (p_0 h)g = p_0(hg).$$

В силу определения отображения F_U получим $hg = F_U(pg)$, то есть $F_U(p)g = F_U(pg)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что совокупность $\mathscr{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ образует главное расслоение с базой M, естественной проекцией π, структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ и тотальным пространством расслоения BM. Это главное расслоение называется *главным расслоением реперов над многообразием* M.

1.2. Реперное отображение.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка, $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ – произвольный репер в точке m. Тогда репер p можно отождествить с линейным изоморфизмом (*реперным отображением*) $p : \mathbb{R}^n \to T_m(M)$, действующим по формуле

$$p((x^1, \dots, x^n)) = x^i e_i.$$

Замечание 3.1. В курсе Анализ на многообразиях мы построили реперное отображение r_φ, которое определялось локальной картой (U, φ) гладкого многообразия M. Это отображение является частным случаем реперного отображения, введенного в данном параграфе, а именно, это реперное отображение (в смысле этого параграфа), определенное в каждой точке $m \in U$ натуральным репером p_0 с вершиной в этой точке.

Аналогично рассуждениям в курсе Анализ на многообразиях можно доказать (докажите самостоятельно), что реперное отображение является биекцией и, более того, изоморфизмом векторных пространств.

Лемма 3.2. *(о реперах) При указанном отождествлении правое действие Φ группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ на многообразии BM определяется формулой*

$$\Phi(p,g) \equiv pg = p \circ g.$$

Доказательство. Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ – произвольный элемент из BM, $g = (g^i_j) \in GL(n,\mathbb{R})$. Тогда

$$pg = (m, g^{i_1}_1 e_{i_1}, \dots, g^{i_n}_n e_{i_n}).$$

И значит, если репер pg рассматривать как линейный изоморфизм, то

$$(pg)((x^1, \dots, x^n)) = x^i(g^j_i e_j).$$

С другой стороны,

$$p \circ g((x^1, \dots, x^n)) = p(g^1_j x^j, \dots, g^n_j x^j) = g^i_j x^j e_i.$$

Здесь под записью $g((x^1, \dots, x^n))$ понимается умножение матрицы g на столбец $(x^1, \dots, x^n)$. Итак, $pg = p \circ g$. □

§ 3.2. Форма смещения.

Пусть $\mathscr{B}(M) = (BM, M, GL(n,\mathbb{R}), \pi)$ – главное расслоение вещественных реперов. В каждой точке $p \in BM$ тотального пространства расслоения определим отображение

$$\omega_p : T_p(BM) \to \mathbb{R}^n$$

по формуле $\omega_p(\xi) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(\xi)$, где $\xi \in T_p(BM)$. Так как дифференциал гладкого отображения и реперное отображение являются $\mathbb{R}$-линейными, таковым будет и отображение ω_p. Тогда формула

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(X_p),\ X \in \mathfrak{X}(BM),$$

определяет $C^\infty(BM)$-линейное отображение $\omega : \mathfrak{X}(BM) \to C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$. Это отображение является 1-формой со значениями в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта форма называется *формой смещения*. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксировать базис (ε_i), например, стандартный базис, то для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(BM)$ элемент $\omega(X) \in C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\omega(X) = \omega^i(X)\varepsilon_i$, где $\omega^i(X) \in C^\infty(BM)$. Тогда $\omega^i : \mathfrak{X}(BM) \to C^\infty(BM)$ – $C^\infty(BM)$-линейные отображения, то есть обычные 1-формы на многообразии BM. Это тензорные компоненты формы смещения относительно базиса $(\varepsilon_i) \subset \mathbb{R}^n$. Итак,

$$\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i.$$

Изучим свойства формы смещения.

Теорема 3.1. *Форма смещения ω обладает следующими свойствами:*

1. *ω горизонтальная форма, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле;*
2. *$(\varphi_g)^*\omega = g^{-1} \circ \omega$, $g \in GL(n,\mathbb{R})$.*

Доказательство. По определению вертикального векторного поля X (см. § 2.5.) получим $\pi_* X = 0$. Тогда первое утверждение теоремы будет следовать из определения формы смещения.

Для доказательства второго утверждения вспомним формулу из замечания 2.9: $\pi \circ \varphi_g = \pi$. Имеем

$$\begin{aligned}((\varphi_g)^*\omega)_p X = ((\varphi_g)^*_{pg}\omega_{pg})(X) = \omega_{pg}(((\varphi_g)_*)_p X) = (pg)^{-1} \circ (\pi_*)_{pg}(((\varphi_g)_*)_p X) = \\ = g^{-1} \circ p^{-1} \circ ((\pi \circ \varphi_g)_*)_p(X) = g^{-1} \circ \omega_p(X),\ X \in T_p(BM).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой для связи отображений антиувлечения форм и ковекторов, определением антиувлечения ковекторов и определением формы смещения. □

Пусть на расслоении вещественных реперов $\mathscr{B}(M)$ фиксирована связность и пусть $\mathscr{H}$ – ее горизонтальное распределение. Фиксируем элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольный репер $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ из BM. Тогда $p(\xi) \in T_m(M)$. Здесь мы рассматриваем репер как реперное отображение (см. определение перед леммой 3.2). Рассмотрим горизонтальный лифт (§ 2.7.) вектора $p(\xi)$, то есть вектор $(X_\xi)_p \in T_p(BM)$, такой что $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Этот вектор существует и единственен. Таким образом, мы получаем векторное поле X_ξ на многообразии BM. Нетрудно показать, что оно будет гладким. Векторное поле X_ξ называется *базисным векторным полем*, порожденным вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 3.1 . *Векторное поле* $X \in \mathfrak{X}(BM)$ *является базисным векторным полем тогда и только тогда, когда* $\omega(X) = \xi$ *– фиксированный вектор в* $\mathbb{R}^n$, ω *– форма смещения. Другими словами, векторное поле* $X \in \mathfrak{X}(BM)$ *является базисным тогда и только тогда, когда существует* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *такой что для любой точки* $p \in BM$ *имеем* $\omega_p(X_p) = \xi$.

Доказательство. По определению формы смещения для любой точки $p \in BM$ и любого базисного векторного поля X_ξ имеем $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Применим к обеим частям этого равенства отображение p^{-1} (обратное к реперному отображению). Тогда получим $\omega_p((X_\xi)_p) = \xi$. Это верно для любой точки p, следовательно, $\omega(X_\xi) = \xi$.

Обратно, пусть для некоторого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(BM)$ верно равенство $\omega(X) = \xi$. Докажем, что оно будет базисным. Распишем данное равенство для произвольной точки $p \in BM$. Получим $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = \xi$. По определению формы смещения получим $p^{-1} \circ (\pi_*)_p X_p = \xi$ и, применив к обеим частям реперное отображение p, получим определение базисного векторного поля $(\pi_*)_p X_p = p(\xi)$. По определению это означает, что X является базисным векторным полем. ☐

Предложение 3.2 . *Базисные векторные поля принадлежат горизонтальному распределению* $\mathscr{H}$.

Доказательство. Это непосредственно следует из определения горизонтального лифта и базисного векторного поля. ☐

Теорема 3.2. *Совокупность* $\mathfrak{b}$ *всех базисных векторных полей на многообразии* BM *образует* n*-мерное векторное пространство* ($n = dim\, M$), *а ее сужение на* $\mathfrak{b}$ *задает естественный изоморфизм* $\omega : \mathfrak{b} \to \mathbb{R}^n$ *векторных пространств. При этом* $(\varphi_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$.

Доказательство. Пусть ω – форма смещения. Рассмотрим ее сужение на множество $\mathfrak{b}$ базисных векторных полей и докажем, что это сужение является биекцией. Пусть X – произвольное базисное векторное поле. Тогда согласно предложению 3.1 существует единственный элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой что $\omega(X) = \xi$. Этот элемент поставим в соответствие базисному векторному полю X. Пусть Y – другое базисное векторное поле и ему соответствует элемент η. Предположим, что $\omega(X) = \omega(Y)$, то есть $(\pi_*)_p(X_p) = (\pi_*)_p(Y_p)$. Так как векторы X_p и Y_p горизонтальны и отображение $(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p}$ является изоморфизмом, в частности, биекцией, векторы X_p и Y_p совпадают для любой точки $p \in BM$. Тогда $X = Y$ и мы доказали, что $\omega|_\mathfrak{b}$ является инъективным отображением. Сюръективность следует из определения базисного векторного поля. Итак, отображение $\omega|_\mathfrak{b}$ является биекцией. С помощью этого отображения мы введем структуру векторного пространства в множество базисных векторных полей, а именно,

$$X_\xi + Y_\eta = \omega^{-1}(\omega(X_\xi) + \omega(Y_\eta)); \quad \lambda X_\xi = \omega^{-1}(\lambda \omega(X_\xi)),$$

где λ – произвольное вещественное число. Такое определение структуры векторного пространства в $\mathfrak{b}$ превращает биекцию ω в изоморфизм векторных пространств.

Чтобы доказать требуемое равенство, заметим, что для любой точки $p \in BM$ отображение $\omega_p : \mathscr{H}_p \to \mathbb{R}^n$ будет биекцией как композиция биекций $(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p}$ и p^{-1}. Тогда отображение $\omega|_\mathscr{H} : \mathscr{H} \to C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$ будет также биекцией. Обратите внимание, что множеством значений отображения $\omega|_\mathscr{H}$ уже является не $\mathbb{R}^n$, а n-ки гладких функций, так как в случае произвольного горизонтального векторного поля (отличного от базисного) для различных точек $p \in BM$ мы будем получать различные n-ки вещественных чисел.

Далее, по определению антиувлечения получим

$$\omega((\varphi_g)_* X_\xi) = ((\varphi_g)^* \omega)(X_\xi) = g^{-1} \circ \omega(X_\xi) = g^{-1}\xi = \omega(X_{g^{-1}\xi}).$$

Здесь мы воспользовались теоремой 3.1 и предложением 3.1 . Так как $\omega|_\mathscr{H}$ биекция и горизонтальное распределение связности инвариантно относительно правых сдвигов (при правых сдвигах горизонтальные векторные поля переходят в горизонтальные), получим требуемое равенство. ☐

Теорема 3.3. *Пусть* M *–* n*-мерное гладкое многообразие,* $\mathscr{H}$ *– горизонтальное распределение некоторой связности на* BM. *Тогда* $C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b} = \mathscr{H}$. *В частности, горизонтальное распределение* $\mathscr{H}$ *параллелизуемо, то есть допускает глобальный базис из не обращающихся в нуль векторных полей. При этом* $C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(BM)$.

Доказательство. В силу теоремы 3.2 любой базис $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \subset \mathbb{R}^n$ порождает базис $(E_{\xi_1} \equiv E_1, \ldots, E_{\xi_n} \equiv E_n) \subset \mathfrak{b}$. Более того, базисные векторные поля не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия BM. Действительно, если предположить, что в какой-либо точке $p \in BM$ базисное векторное поле X_ξ обращается в нуль, то согласно предложению 3.1 получим

$$\xi = \omega(E_\xi)(p) = \omega_p((E_\xi)_p) = 0,$$

что противоречит выбору базиса в $\mathbb{R}^n$.

Как мы знаем, горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ является n-мерным, то есть для каждой точки $p \in BM$ площадка $\mathscr{H}_p$ является n-мерным векторным пространством. Так как базисные векторные поля горизонтальны и не равны нулю в любой точке многообразия BM, система векторов $((E_1)_p, \dots, (E_n)_p)$ образует базис площадки $\mathscr{H}_p$. Рассмотрим произвольное горизонтальное векторное поле X. Тогда для любой фиксированной точки $p \in BM$ имеем $X_p = X^i(p)(E_i)_p$, где $X^i(p)$ – некоторые вещественные числа. Теперь отпустим точку p. Мы получим разложение для векторного поля X, а именно, $X = X^i(p)E_i$, где $X^i(p)$ – некоторые функции. Эти функции с необходимостью будут гладкими, так как $X^i(p) = \omega^i(X)$, где (ω^i) – дуальный базис для базиса (E_i). Итак, мы показали, что любое горизонтальное векторное поле раскладывается по базисным векторным полям с коэффициентами, являющимися гладкими функциями, а значит, $(X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})$ является базисом горизонтального распределения $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H} = C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b}$.

Таким образом, $C^\infty(BM)$ модуль $\mathscr{H}$ параллелизуем.

С другой стороны, как мы доказали, вертикальное распределение $\mathscr{V}$ допускает глобальный базис, состоящий из фундаментальных векторных полей $(X_1^\flat, \dots, X_{n^2}^\flat)$. Тогда, объединяя два построенных базиса, мы получим базис модуля $\mathfrak{X}(BM) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H} = C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b})$. □

Следствие 3.1. Пространство расслоения реперов над любым гладким многообразием параллелизуемо. Напомним, что многообразие называется *параллелизуемым*, если его модуль векторных полей допускает глобальный базис. Здесь мы исходим из того, что любое главное расслоение допускает связность.

§ 3.3. Структурные уравнения главного расслоения реперов.

3.1. Технические теоремы.

Следующую очень важную теорему, носящую название обобщенной леммы Картана, мы примем без доказательства.

Теорема 3.4. *(обобщенная лемма Картана) Пусть $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра свободного модуля V с конечным числом N образующих (в качестве V мы часто будем рассматривать модуль $\mathfrak{X}(BM)$ гладких векторных полей на тотальном пространстве главного расслоения реперов). Уравнения*

$$\theta_a \wedge \omega^a = 0,$$

где $a = 1, \dots, n$, θ_a – внешние формы произвольной степени r, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса модуля V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = \theta_{ab} \wedge \omega^b$, где $\{\theta_{ab}\}$ – некоторые $(r-1)$-формы, такие что $\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b = 0$.

Сформулируем также без доказательства два следствия из обобщенной леммы Картана (их доказательства не сложны и читатель может доказать их самостоятельно).

Следствие 3.2. В частности, если θ_a – 2-формы, то $\theta_{[ab]} = A_{abc}\omega^c$, где $\{A_{abc}\}$ – подходящие скаляры, кососимметричные по первым двум индексам.

Следствие 3.3. (лемма Картана) В принятых обозначениях уравнения $\theta_a \wedge \omega^a = 0$, где $a = 1, \dots, n$, θ_a – 1-формы, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = A_{ab}\omega^b$, где $\{A_{ab}\}$ – подходящие скаляры, причем $A_{ab} = A_{ba}$.

3.2. Структурные уравнения.

Переходим к главному расслоению вещественных реперов $\mathscr{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Обозначим $W = \pi^{-1}(U)$ – область канонической локальной карты пространства расслоения с координатами (y^i, y^i_j), где $y^i = x^i \circ \pi$, $y^i_j = g^i_j \circ F_U$ (см. § 3.1.).

Пусть (e^i_j) – стандартный базис полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то есть базис состоящий из матриц, у которых $(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j$. Этому базису соответствует стандартный базис $b = (E^i_j)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, где $E^i_j = \beta^{-1} \circ \varkappa^{-1}(e^i_j)$ (см. § 1.3., § 1.2.). Этому базису отвечает базис вертикального распределения $\mathscr{V}$, состоящий из фундаментальных векторных полей

$$\mathscr{E}^i_j = (E^i_j)^\flat.$$

Рассмотрим область $W = \pi^{-1}(U)$ канонической карты главного расслоения реперов. Построим связность на главном расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$. Для этого рассмотрим тривиальное главное расслоение $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$, где $p_1 : U \times GL(n, \mathbb{R}) \to U$ – проекция на первый сомножитель (см. пример 2.9). Действие группы здесь определяется следующим образом: $\varphi_h((m, g)) = (m, R_h(g)) \equiv (id \times \varphi_h)((m, g))$, где R_g обозначает правый сдвиг на группе Ли.

Касательное пространство $T_{(m,g)}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ в любой точке $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$ представимо в виде прямой суммы

$$T_{(m,g)}(U \times GL(n, \mathbb{R})) = T_m(M) \oplus T_g(GL(n, \mathbb{R})),$$

где под $T_m(M)$ мы понимаем $T_m(M) \oplus \{0\}$, а под $T_g(GL(n, \mathbb{R}))$ – $\{0\} \oplus T_g(GL(n, \mathbb{R}))$.

Слой $(p_1)^{-1}(m) = \{(m, g), g \in GL(n, \mathbb{R})\}$ отождествляется с группой $GL(n, \mathbb{R})$, так как точка m фиксирована, а элемент g пробегает всю группу $GL(n, \mathbb{R})$. Так как вектора вертикальных площадок суть касательные векторы к слою расслоения, вертикальные площадки $\mathscr{V}_{(m,g)}$ отождествляются с векторными пространствами $T_g(GL(n, \mathbb{R}))$. Тогда в качестве горизонтальных площадок $\mathscr{H}_{(m,g)}$ можно взять касательные пространства $T_m(M)$. Они будут инвариантны, так как для любого элемента $(X, Y) \in T_m(M) \oplus T_g(GL(n, \mathbb{R}))$ имеем

$$((\varphi_h)_*)_{(m,g)}(X, Y) = ((id_*)_{(m,0)\equiv m}X, ((R_h)_*)_{(0,g)\equiv g}Y) = (X, ((R_h)_*)_g Y).$$

Откуда получаем, что для любого элемента $(X, 0) \in T_m(M)$ имеем $((\varphi_h)_*)_{(m,g)}(X, 0) = (X, 0)$ для любой точки (m, g), а значит, векторные поля из $T_m(M) \equiv T_m(M) \oplus \{0\}$ являются инвариантными относительно действия структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$. Таким образом, мы определили инвариантное, дополнительное к вертикальному распределение, которое будет определять связность на главном расслоении $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$. С помощью построенной связности на тривиальном расслоении мы зададим связность на расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$ с помощью диффеоморфизма $\psi_U : W = \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbb{R})$. Эта связность называется *тривиальной связностью.*

Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in W$ – произвольная точка. Нам нужно определить в ней горизонтальную площадку. Пусть $\mathscr{H}_p = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(T_m(M) \oplus \{0\})$, где $p = \psi_U^{-1}(m, g)$. Совокупность всех таких площадок задает псевдо горизонтальное распределение $\mathscr{H}$. Нам нужно доказать, что распределение $\mathscr{H}$ инвариантно относительно действия структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$, то есть является горизонтальным, а значит, задает связность.

Для этого нам потребуется доказать вспомогательную формулу

$$\varphi_h \circ \psi_U^{-1} = \psi_U^{-1} \circ \varphi_h, \, \forall h \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Вычислим левую часть. В качестве аргумента она берет пару $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$:

$$\varphi_h \circ \psi_U^{-1}(m, g) = \varphi_h(p) = ph.$$

Здесь φ_h обозначает правое действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на многообразии реперов. С другой стороны,

$$\psi_U^{-1} \circ \varphi_h(m, g) = \psi_U^{-1}(m, gh).$$

Здесь φ_h – действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на тривиальном расслоении $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$. Покажем, что $\psi_U(ph) = (m, gh)$. Тогда $ph = \psi_U^{-1}(m, gh)$ и вспомогательное равенство будет полностью доказано.

Напомним, что отображение ψ_U ставит в соответствие реперу p пару (m, g), где m – вершина репера, g – матрица перехода от натурального репера p_0 к реперу p. Для репера ph вершина будет такой же как у репера p, то есть точка m. Кроме того, $ph = (p_0 g)h = p_0(gh)$, то есть матрицей перехода от натурального репера p_0 к реперу ph будет матрица gh. Откуда получаем, что $\psi_U(ph) = (m, gh)$.

Теперь все готово для доказательства инвариантности распределения $\mathscr{H}$ под действием структурной группы. Пусть $Z \in \mathscr{H}$ – произвольный элемент. Фиксируем произвольную точку $p \in W$. Тогда для вектора $Z_p = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(X, 0) \in \mathscr{H}_p$ и любого фиксированного элемента $h \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned}((\varphi_h)_*)_p(Z_p) &= ((\varphi_h)_*)_p((\psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(X, 0) = ((\varphi_h \circ \psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(X, 0) = \\ &= ((\psi_U^{-1} \circ \varphi_h)_*)_{(m,g)}(X, 0) = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,gh)} \circ ((\varphi_h)_*)_{(m,g)}(X, 0) = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,gh)}(X, 0) = \\ &= Z_{ph} = Z_{\varphi_h(p)}.\end{aligned}$$

По критерию ϕ-связанных векторных полей это означает, что $(\varphi_h)_* Z = Z$. В частности, $(\varphi_h)_* Z \in \mathscr{H}$, то есть горизонтально. Итак, мы показали, что построенное распределение $\mathscr{H}$ является горизонтальным.

Тогда, фиксировав эту связность и стандартный базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в $\mathbb{R}^n$, мы получим систему базисных векторных полей $(\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n)$, где для краткости обозначено $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{\varepsilon_i}$. Эта система векторных полей определена локально (для каждой области W) и является базисом горизонтального распределения $\mathscr{H}$.

Таким образом, мы получили базис $(\mathscr{E}_j^i, \mathscr{E}_k)$ модуля $\mathfrak{X}(W)$. В нем векторные поля $\mathscr{E}_j^i$ определены глобально, а векторные поля $\mathscr{E}_k$ определены локально на W. Пусть (ω_j^i, ω^k) – дуальный базис. Напомним, что индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения от 1 до $n = dim\, M$.

Найдем координаты 1-форм ω^i_j в натуральном базисе (dy^i_j, dy^k) карты (W, χ). Обозначим $(\pi^i_j) \subset \mathfrak{gl}^*(n, \mathbb{R})$ базис дуальный базису (E^i_j). Тогда $\{(\pi^i_j)_e\}$ будет базисом, дуальным базису

$$(E^i_j)_e = \varkappa^{-1}(e^i_j) = \left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e$$

(см. пример 1.9), а значит,

$$(\pi^i_j)_e = (dg^i_j)_e. \tag{3.1}$$

Лемма 3.3. *Имеем* $\pi^i_j = \tilde{g}^i_k dg^k_j$, *где* $\tilde{g}^i_k = g^i_k(g^{-1}) \equiv (g^{-1})^i_k$ *– функции на многообразии* $GL(n, \mathbb{R})$, *которые каждой матрице* g *ставят в соответствие элемент* i*-ой строки* j*-го столбца из матрицы* g^{-1}.

Доказательство. Так как формы π^i_j составляют двойственный базис для базиса (E^i_j) алгебры Ли $GL(n, \mathbb{R})$, они являются левоинвариантными, то есть для любого фиксированного элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем $L^*_g \pi^i_j = \pi^i_j$ для любого $g \in GL(n, \mathbb{R})$, где L_g – диффеоморфизм левого сдвига, определяемый формулой $L_g(h) = gh$, $h \in GL(n, \mathbb{R})$ (см. § 1.2.). Тогда, в частности, в точке $e \in GL(n, \mathbb{R})$ – единице группы, получим

$$(L^*_g \pi^i_j)_e = (\pi^i_j)_e. \tag{3.2}$$

Применим формулу из курса Анализ на многообразиях

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}$$

к левой части равенства (3.2). Получим

$$(L^*_g)_g(\pi^i_j)_g = (\pi^i_j)_e.$$

Подействуем на обе части этого равенства отображением $(L^*_g)^{-1} = L^*_{g^{-1}} : T_e(GL(n, \mathbb{R})) \to T_g(GL(n, \mathbb{R}))$. Тогда с учетом равенства (3.1)

$$(\pi^i_j)_g = L^*_{g^{-1}}(\pi^i_j)_e = L^*_{g^{-1}}(dg^i_j)_e. \tag{3.3}$$

Чтобы разобраться с правой частью полученного равенства, докажем ряд вспомогательных формул. Пусть $X_g \in T_g(GL(n, \mathbb{R}))$ – произвольный вектор. Тогда с учетом определения антиувлечения ковекторов $((\phi^* u)(\xi) = u(\phi_* \xi))$, дифференциала функции $(df(X) = X(f))$

$$(L^*_{g^{-1}}(dg^i_j)_e)(X_g) = (dg^i_j)_e(((L_{g^{-1}})_*)_g X_g) = (((L_{g^{-1}})_*)_g X_g)(g^i_j) = X_g(g^i_j \circ L_{g^{-1}}) \tag{3.4}$$

Заметим, что для любого $h \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$g^i_j \circ L_{g^{-1}}(h) = g^i_j(g^{-1}h) = g^i_k(g^{-1})h^k_j = \tilde{g}^i_k g^k_j(h).$$

Напомним, что матрица g, а значит, и матрица g^{-1} у нас фиксированы, следовательно, $\tilde{g}^i_k$ суть вещественные числа. Тогда, продолжая цепочку равенств (3.4), получим

$$(L^*_{g^{-1}}(dg^i_j)_e)(X_g) = X_g(g^i_j \circ L_{g^{-1}}) = X_g(\tilde{g}^i_k g^k_j) = d(\tilde{g}^i_k g^k_j)_g(X_g).$$

Так как это верно для любого вектора X_g, имеем

$$L^*_{g^{-1}}(dg^i_j)_e = d(\tilde{g}^i_k g^k_j)_g = \tilde{g}^i_k (dg^k_j)_g.$$

С учетом (3.3) из этого равенства получаем, что для любой фиксированной точки $g \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$(\pi^i_j)_g = \tilde{g}^i_k (dg^k_j)_g.$$

Теперь отпускаем точку g. Тогда вещественные числа $\tilde{g}^i_k$ превращаются в функции взятия i, k-го элемента матрицы, обратной матрице g, и имеем

$$\pi^i_j = \tilde{g}^i_k dg^k_j. \tag{3.5}$$

□

Лемма 3.4. *Пусть* $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *– произвольный элемент,* $F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n, \mathbb{R})$ *– гладкое отображение, ставящее каждому реперу* $p \in \pi^{-1}(U)$ *матрицу перехода от базиса натурального репера к базису репера* p*. Тогда*

$$(F_U)_*((X|_W)^\flat) = X|_{F_U(W)}.$$

Доказательство. Обозначим $g(t) = exp(tX)$ – однопараметрическую подгруппу, соответствующую левоинвариантному векторному полю X. Тогда по определению главного расслоения получим

$$F_U(pg(t)) = F_U(p)g(t).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$, получим

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F_U(pg(t)) = ((F_U)_*)_p \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} pg(t) = ((F_U)_*)_p X_p^\flat.$$

Здесь мы воспользовались формулой (**??**) и определением фундаментального векторного поля (2.6).

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F_U(p)g(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L_{F_U(p)}(g(t)) = ((L_{F_U(p)})_*)_e \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t) = ((L_{F_U(p)})_*)_e X_e = X_{F_U(p)}.$$

Здесь мы также воспользовались формулой (**??**), формулой (1.13) и левоинвариантностью векторного поля X (см. § 1.2.).

Итак, мы получили, что

$$((F_U)_*)_p X_p^\flat = X_{F_U(p)}.$$

Это верно для любой точки $p \in W$, что и требовалось доказать. □

Согласно лемме 3.4 имеем

$$(F_U)_*(\mathscr{E}_j^i) = E_j^i.$$

Тогда

$$(F_U)^*\pi_j^i = \omega_j^i, \tag{3.6}$$

где (π_j^i) – дуальный базис для базиса (E_j^i) алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Действительно,

$$(F_U)^*\pi_j^i(\mathscr{E}_\ell^k) = \pi_j^i((F_U)_*\mathscr{E}_\ell^k) = \pi_j^i(E_\ell^k) = \delta_\ell^i\delta_j^k.$$

По критерию (см. курс Тензорная алгебра) это означает, что формы $(F_U)^*\pi_j^i$ образуют дуальный базис для базиса $(\mathscr{E}_\ell^k)$ вертикального распределения $\mathscr{V}$.

Наконец, применим отображение F_U^* к равенству (3.5). В левой части мы получим ω_j^i согласно (3.6). Вычислим правую часть, используя то, что $\phi^*(f) = f \circ \phi$, $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$ и $y_j^i = g_j^i \circ F_U$.

$$F_U^*(\tilde{g}_k^i dg_j^k) = (\tilde{g}_k^i \circ F_U)d(g_j^k \circ F_U) = \tilde{y}_k^i dy_j^k,$$

где мы обозначили $\tilde{y}_k^i = \tilde{g}_k^i \circ F_U$ – это функции на W, которые каждому реперу из W сначала ставят в соответствие матрицу перехода от натурального репера к данному, затем берут обратную к этой матрице, и наконец, выделяют (i, k)-й элемент из полученной матрицы.

Итак, мы получили выражения для форм ω_j^i в локальной карте (W, χ):

$$\omega_j^i = \tilde{y}_k^i dy_j^k. \tag{3.7}$$

Рассмотрим произведение функций $g_k^i\tilde{g}_j^k$. Для каждой точки $h \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$g_k^i\tilde{g}_j^k(h) = g_k^i(h)\tilde{g}_j^k(h) = h_k^i(h^{-1})_j^k = \delta_j^i(h),$$

где символ δ_j^i обозначает функции, которые каждой матрице $h \in GL(n, \mathbb{R})$ ставят в соответствие единицу при $i = j$ и нуль при $i \neq j$. Подействуем на полученное равенство отображением F_U^*: $(g_k^i \circ F_U)(\tilde{g}_j^k \circ F_U) = \delta_j^i \circ F_U$. Тогда

$$y_k^i\tilde{y}_j^k = \delta_j^i$$

Продифференцировав это тождество, получим

$$dy_k^i\tilde{y}_j^k + y_k^i d\tilde{y}_j^k = 0.$$

Подставив это соотношение в (3.7), получим

$$\omega_j^i = -y_j^r d\tilde{y}_r^i. \tag{3.8}$$

Итак, двухиндексные формы дуального базиса определяются координатными функциями локальной карты (3.7) и (3.8).

Напомним, что второй группой структурных уравнений главного расслоения мы назвали выражения внешних дифференциалов 1-форм дуального базиса вида ω^a, то есть $d\omega^a$, через 2-формы канонического базиса. В нашем случае вторая группа структурных уравнений – это разложение 2-форм $d\omega^i_j$ по 2-формам канонического базиса. Так как базис у нас локальный, мы получим вторую группу структурных уравнений главного расслоения $(\pi^{-1}(U), U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Выведем их.

Продифференцируем внешним образом (3.7):

$$d\omega^i_j = d\tilde{y}^i_k \wedge dy^k_j =$$

Выразим из (3.8) $d\tilde{y}^i_r$. Напомним, что y^r_j – это по сути элементы матрицы перехода от натурального репера к текущему. Матрица невырожденная, а значит, у нее есть обратная $\tilde{y}^j_t$. Умножим на нее обе части выражения (3.8), учтем, что в правой части будет произведение взаимно обратных матриц и проведем суммирование с дельтой: $\tilde{y}^i_t = -\tilde{y}^j_t \omega^i_j$. Подставим полученное выражение в цепочку равенств.

$$= -\tilde{y}^t_k \omega^i_t \wedge dy^k_j = -\omega^i_t \wedge \tilde{y}^t_k dy^k_j = -\omega^i_t \wedge \omega^t_j.$$

Итак, мы получаем $d\omega^i_j = -\omega^i_t \wedge \omega^t_j$. Это вторая группа структурных уравнений главного расслоения $(\pi^{-1}(U), U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Еще раз подчеркнем, что она верна только для куска главного расслоения реперов. Позже (когда будем фиксировать на главном расслоении реперов связность) мы выведем вторую группу структурных уравнений, которая будет описывать все главное расслоение реперов и будет отличаться от полученной.

Выясним локальное строение 1-форм ω^k.

Теорема 3.5. *Формы (ω^i) суть тензорные компоненты $(\tilde{\omega}^i)$ формы смещения ω относительно стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По определению тензорных компонент формы смещения имеем $\omega = \tilde{\omega}^i \otimes \varepsilon_i$. Тогда

$$(\tilde{\omega}^i)_p(\mathscr{E}_j)_p = (\omega_p(\mathscr{E}_{\varepsilon_j}))^i = (\varepsilon_j)^i = \delta^i_j.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством базисного векторного поля (см. предложение 3.1). С другой стороны, в силу горизонтальности формы смещения (см. теорему 3.1) она будет обращаться в нуль на вертикальных векторных полях, в частности, на фундаментальных векторных полях, то есть $\tilde{\omega}^i_p((\mathscr{E}^k_r)_p) = 0$. Значит, $(\tilde{\omega}^i_p)$ будут элементами дуального базиса для базиса $((\mathscr{E}^i_j)_p, (\mathscr{E}_k)_p)$ и это верно для любой точки p, то есть $\tilde{\omega}^i = \omega^i$. □

Найдем координаты 1-форм ω^i в натуральном базисе (dy^i_j, dy^k) карты (W, χ). Здесь нам также потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3.5. *Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in W$ – произвольная точка, $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p \right\}$ – часть натурального базиса карты (W, χ) в точке p, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m \right\}$ – натуральный базис соответствующей карты (U, φ) в точке m. Тогда*

$$(\pi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_m.$$

Доказательство. Напомним сведения из курса Анализ на многообразиях. Пусть на многообразии M дана локальная карта (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда в каждой точке $m \in U$ возникает система касательных векторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m \right\}$, которая является базисом касательного пространства $T_m(M)$. Этот базис мы назвали натуральным. Фиксируем произвольный индекс $i = 1, \dots, n$. Тогда касательный вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m$, рассматриваемый как класс эквивалентности соприкасающихся путей в точке m содержит путь γ, задаваемый в локальной карте (U, φ) уравнениями

$$\gamma : x^j = x^j_0 + \delta^j_i t,$$

где $(x^1_0, \dots, x^n_0) = \varphi(m)$ – координаты точки m в карте (U, φ), t – параметр.

Применим эту конструкцию для карт (W, χ) и (U, φ) главного расслоения реперов. Фиксируем точку p и индекс i. Тогда вектора $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ и $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m$ задаются путями γ_W и γ_U, соответственно

$$\gamma_W : \begin{array}{l} y^j = y^j_0 + \delta^j_i t \\ y^j_k = (y^j_k)_0 \end{array} \quad ; \quad \gamma_U : \ x^j = x^j_0 + \delta^j_i t,$$

где (x^j_0) – координаты точки m в карте (U, φ), $(y^j_0, (y^j_k)_0)$ – координаты точки p в карте (W, χ). Так как отображение $\pi : BM \to M$ в картах (W, χ), (U, φ) задается уравнениями $x^j = y^j$, получим $\gamma_U = \gamma_W \circ \pi$. Тогда по определению дифференциала отображения в случае вектора, рассматриваемого как класс эквивалентности, получим требуемое соотношение. □

Лемма 3.6. *Пусть* $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j_k}\right\}$ *– натуральный базис карты* (W,χ)*. Тогда векторные поля* $\frac{\partial}{\partial y^j_k}$ *принадлежат вертикальному распределению.*

Доказательство. Напомним, что векторное поле X, заданное на тотальном пространстве расслоения, называется вертикальным, если оно π-связано с нулевым векторным полем на базе M, то есть для любой точки p выполняется равенство $(\pi_*)_p X_p = 0$.

Фиксируем точку $p \in W$ и пару индексов i, j. Рассмотрим касательный вектор $\left.\frac{\partial}{\partial y^i_j}\right|_p$. Тогда в карте (W,χ) путь, принадлежащий этому вектору задается уравнениями

$$\gamma: \begin{array}{l} y^k = y^k_0 \\ y^k_\ell = (y^k_\ell)_0 + \delta^k_j \delta^i_\ell t, \end{array}$$

где $(y^k_0, (y^k_\ell)_0)$ – координаты точки p в карте (W,χ). Так как отображение $\pi : BM \to M$ задается уравнениями $x^k = y^k$, образом пути γ будет множество точек из $U \subset M$, задаваемых уравнениями $x^k = y^k_0$. Это одна точка $\pi(p) = m$. Такой путь задает нулевой вектор, следовательно, $(\pi_*)_p \left.\frac{\partial}{\partial y^i_j}\right|_p = 0$ для любой точки p. Таким образом, мы показали, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial y^i_j}$ вертикальны. □

Лемма 3.7. *В карте* (W,χ) *имеем*

$$(\mathscr{E}_k)_p = y^i_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p .$$

Доказательство. Так как $\mathscr{E}_k$ является базисным векторным полем, согласно предложению 3.1 для любой точки $p \in W$ имеем $\omega_p((\mathscr{E}_k)_p) = \varepsilon_k$, где ω_p – значение формы смещения в точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$, ε_k – элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Тогда по определению формы смещения получим

$$(\pi_*)_p((\mathscr{E}_k)_p) = p(\varepsilon_k) = e_k = g^i_k \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m = g^i_k \circ F_U(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m = y^i_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m . \tag{3.9}$$

Здесь g^i_k сначала обозначают элементы матрицы перехода от натурального базиса к базису $(e_1, \ldots, e_n)$, а затем функции взятия i,k-го элемента.

Так как $\mathscr{E}_k$ – горизонтальные векторные поля, $(\mathscr{E}_k)_p$ – горизонтальные вектора и они раскладываются только по векторам $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ (согласно лемме 3.6 векторы $\left.\frac{\partial}{\partial y^i_j}\right|_p$ вертикальны). Тогда

$$(\mathscr{E}_k)_p = A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p ,$$

где A^k_j – некоторые вещественные числа, которые нужно найти. Для этого воспользуемся равенством (3.9. Имеем

$$(\pi_*)_p \left(A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = y^i_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m .$$

Тогда

$$(\pi_*)_p \left(A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = A^j_k (\pi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_m .$$

Таким образом, получим

$$A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_m = y^i_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m ,$$

следовательно, $A^j_k = y^j_k(p)$. Откуда и получаем требуемое утверждение. □

Из доказанное леммы получим

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \tilde{y}^j_i (\mathscr{E}_j)_p .$$

Наконец, мы можем найти компоненты $(\omega^i)_k$ 1-форм ω^i в натуральном базисе. Имеем для любой точки $p \in W$

$$(\omega^i)_k(p) = \omega^i_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p \right) = \omega^i_p(\tilde{y}^j_k(p)(\mathscr{E}_j)_p) = \tilde{y}^j_k(p)\delta^i_j = \tilde{y}^i_k(p).$$

Здесь мы воспользовались дуальностью частей базисов $(\mathscr{E}_k)$ и (ω^i). Так как полученное равенство верно для любой p, имеем $(\omega^i)_k = \tilde{y}^i_k$. Кроме того, так как 1-формы ω^i суть тензорные компоненты формы смещения относительно стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ и форма смещения является горизонтальной формой, то значения форм ω^i на вертикальных векторных полях $\frac{\partial}{\partial y^i_j}$ будут равны нулю. Тогда учитывая, что координаты 1-формы в дуальном базисе совпадают с ее компонентами, получим разложения 1-форм ω^i по натуральному базису 1-форм

$$\omega^i = \tilde{y}^i_j dy^j.$$

Продифференцируем это соотношение внешним образом и учтем формулы (3.8) (из этой формулы мы выразим $d\tilde{y}^i_j$)

$$d\omega^i = d\tilde{y}^i_j \wedge dy^j = -\tilde{y}^r_j \omega^i_r \wedge dy^j = -\omega^i_r \wedge (\tilde{y}^r_j dy^j) = -\omega^i_r \wedge \omega^r.$$

Итак, мы получили

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j. \tag{3.10}$$

Эти соотношения называются *первой группой структурных уравнений* главного расслоения вещественных реперов.

Заметим, что по доказанному выше формы ω^i совпадают с тензорными компонентами формы смещения, которые определены глобально на всем тотальном пространстве расслоения реперов, а значит являются глобальными объектами. Но формы ω^i_j – объекты локальные (определены в области карты (W, χ)). Следовательно, первая группа структурных уравнений главного расслоения реперов определена локально, также как и вторая группа структурных уравнений.

Замечание 3.2. Обратим внимание, что в отличие от случая произвольного главного расслоения, формы ω^i_j мы построили явным образом, исходя из характеристик главного расслоения реперов. В общей теории главных расслоений мы могли только утверждать, что такие формы существуют.

Замечание 3.3. Если в качестве базиса матричной алгебры $M_{n,n}$ взять не (e^i_j), а $(-e^i_j)$, то базис вертикального распределения будет $(-\mathscr{E}^i_j)$. Тогда дуальный базис вертикального распределения будет состоять из форм $(-\omega^i_j)$ и первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j. \tag{3.11}$$

Обе формы первый группы структурных уравнений используются в современных исследованиях. В дальнейшем мы будем использовать первый вид структурных уравнений, делая замечания по поводу вида тех или иных формул в случае второго вида структурных уравнений. Договоримся говорить, что мы „работаем в минусах“, если используется первая группа структурных уравнений вида (3.10) и будем говорить, что мы "работаем в плюсах если используется первая группа структурных уравнений вида (3.11).

Формы (ω^i_j, ω^k) образуют локальный базис модуля $\mathfrak{X}^*(BM)$, который является дифференциальной алгеброй относительно операции внешнего дифференцирования. Чтобы иметь полную информацию об этой дифференциальной алгебре, нужно научиться дифференцировать любые дифференциальные формы любой степени, а для этого в силу свойств оператора внешнего дифференцирования, достаточно научиться дифференцировать базисные 1-формы, то есть формы ω^i_j и ω^k. Правило дифференцирования одноиндексных форм описаны в первой группе структурных уравнений. Чтобы найти формулу для дифференцирования двухиндексных форм, воспользуемся так называемой *процедурой дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений главного расслоения реперов.

Будем работать в минусах (в плюсах просчитайте самостоятельно). Продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (3.10).

$$0 = -d\omega^i_j \wedge \omega^j + \omega^i_j \wedge d\omega^j = -d\omega^i_j \wedge \omega^j - \omega^i_j \wedge \omega^j_k \wedge \omega^k.$$

Здесь мы воспользовались правилом внешнего дифференцирования внешнего произведения 1-форм и еще подставили первую группу структурных уравнений. Тогда

$$(d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) \wedge \omega^j = 0.$$

Обозначим $\Delta\omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ – это 2-формы, а ω^i – 1-формы. Тогда применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 3.4 и следствие из нее), то есть существуют 1-формы (ω^i_{jk}), локально определенные на многообразии BM, такие что

$$\Delta\omega^i_j = \omega^i_{jk} \wedge \omega^k$$

и $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jk\ell}\omega^\ell$, где $\{A^i_{jk\ell}\}$ – локально определенные гладкие функции на многообразии BM. С учетом определения $\Delta\omega^i_j$ получим

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k.$$

Эти уравнения называются *второй группой структурных уравнений главного расслоения реперов.*

Итак, полная группа структурных уравнений главного расслоения реперов имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k, \end{array} \right.$$

где $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jk\ell}\omega^\ell$ и $\{A^i_{jk\ell}\}$ – локально определенная система гладких функций на многообразии BM.

Итак, мы получили две группы структурных уравнений главного расслоения реперов

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j; \quad d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

Они определены локально в областях карт (W, χ).

В этих уравнениях содержится вся информация о дифференциальной алгебре главного расслоения реперов, а значит, и о геометрии этого расслоения, в частности, в них содержится вся информация о геометрии исходного многообразия M.

§ 3.4. Основная теорема тензорного анализа.

4.1. Вспомогательные функции.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m)$ (это слой в главном расслоении реперов $\mathscr{B}(M)$ над точкой m) определены n функций $\{e_1, \ldots, e_n\}$ со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$, а именно, функция e_i сопоставляет точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ вектор e_i, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что в канонической карте (W, χ) имеем

$$e_i(p) = y^j_i(p) e^0_j,$$

где $e^0_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_m$ – векторы натурального репера, y^i_j – координаты в локальной карте (W, χ) (они являются элементами матрицы перехода от натурального базиса к базису репера p). Это функции гладкие, так как в локальных картах (W, χ) и $(T_m(M), r_\varphi)$ они задаются формулами $(e_i)^j = y^j_i$. Эти функции от переменных y^i, y^i_j бесконечно дифференцируемы.

Продифференцируем функцию e_i. Так как это функция со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ (в результате мы получим 1-форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$), то правило дифференцирования выглядит так

$$de_i = dy^j_i \otimes e^0_j = dy^j_i \otimes \tilde{y}^k_j e_k = \tilde{y}^k_j dy^j_i \otimes e_k = \omega^k_i \otimes e_k.$$

Здесь мы воспользовались линейностью операции тензорного умножения и формулой (3.7). Обратите внимание, что мы работаем в минусах. Итак,

$$de_i = \omega^k_i \otimes e_k.$$

Эта формула имеет смысл лишь на области $W = \pi^{-1}(U)$ локальной карты. Аналогично на области локальной карты W определены n функций $\{e^1, \ldots, e^n\}$ со значениями в пространстве $T^*_m(M)$, которые сопоставляют каждому реперу $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ i-й ковектор дуального репера. Так как для ковектора натурального базиса и дуального базиса репера p связаны с помощью обратной матрицы, получаем

$$e^i(p) = \tilde{y}^i_j e^j_0, \tag{3.12}$$

где $e^j_0 = dx^j|_m$, $j = 1, \ldots, n$ – ковекторы корепера, дуального натуральному реперу. Следовательно, отображение $(e^i \circ \chi^{-1})$ задается уравнениями $(e^i)_j = \tilde{y}^i_j$, то есть функции e^i являются гладкими. Дифференцируя соотношение (3.12), получим

$$de^i = d\tilde{y}^i_j \otimes y^j_k e^k = -\omega^i_k \otimes e^k.$$

Итак,

$$de^i = -\omega^i_k \otimes e^k.$$

4.2. Основная теорема тензорного анализа.

Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M. Оно порождает семейство функций $\{t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$ на многообразии BM по формуле

$$t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(p) = (t_{\pi(p)})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}), \tag{3.13}$$

где $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in BM$, $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис для базиса $(e_1, \ldots, e_n)$. Нетрудно видеть, что это гладкие функции.

Пусть, в частности, дано векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$, то есть тензорное поле типа (0,1). Применим для него формулу (3.13). Тогда получим систему функций на BM следующего вида

$$X^i(p) = X_m(e^i).$$

Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутренним образом порождается функция

$$X_m : \pi^{-1}(m) \to T_m(M)$$

со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ по формуле

$$X_m(p) = X^i(p)e_i(p),$$

где $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$. Очевидно, что эта функция постоянная, так как ее значение в точке p равно значению векторного поля X как сечения касательного расслоения в точке $m = \pi(p)$. Применим к этой функции оператор внешнего дифференцирования. Здесь e_i рассматривается как функция.

$$0 = d(X_m) = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p)de_i = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p)\omega_i^j \otimes e_j = (dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i) \otimes e_i.$$

Теперь мы смотрим на выражение $(dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i) \otimes e_i$ как на форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$. Она будет нулевой тогда и только тогда, когда ее тензорные компоненты $dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i$ равны нулю, то есть

$$dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i = 0$$

для каждой точки p из слоя $\pi^{-1}(m)$. В других обозначениях мы можем записать эту формулу так

$$(dX^i + X^j\omega_j^i)\big|_{\pi^{-1}(m)} = 0.$$

Напомним, что слои главного расслоения являются интегральными многообразиями вертикального распределения. Следовательно, формы $dX^i + X^j\omega_j^i$ принадлежат кораспределению $\mathbf{C}_{\mathscr{V}}$, ассоциированному вертикальному распределению, а значит, раскладываются по базисным формам ассоциированного кораспределения $\mathbf{C}_{\mathscr{V}}$, то есть по формам Пфаффа (ω^i). С учетом этого в области W имеем

$$dX^i + X^j\omega_j^i = X^i{}_j\omega^j, \tag{3.14}$$

где $\{X^i{}_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторые подходящие функции.

Итак, мы доказали, что функции $\{X^i\}$, определенные на многообразии BM удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3.14), где $\{X^i{}_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторая система подходящих функций, определенная на W.

Докажем обратное. Пусть на многообразии BM задана система гладких функций $\{X^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, которая в каждой канонической карте (W, χ) удовлетворяет системе уравнений (3.14). Фиксируем точку $m \in M$. Получим, что на подмногообразии $\pi^{-1}(m)$, которое задается уравнениями $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, эти соотношения принимают вид $dX^i + X^j\omega_j^i = 0$. Подставим в это равенство соотношения (3.7):

$$dX^i + X^j\tilde{y}_k^i dy_j^k = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на обратную матрицу (y_i^ℓ), получим

$$y_i^\ell dX^i + X^j dy_j^\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(y_j^\ell X^j) = 0.$$

Откуда следует, что $y_j^i X^j = const$, $i, j = 1, \ldots, n$, а именно, $y_j^i X^j = X_0^i$. Это дает возможность корректно определить вектор $X_m \in T_m(M)$ по формуле $X_m = X^i(p)e_i$, где $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ – произвольная точка слоя $\pi^{-1}(m)$. Действительно, если $q = (m, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) \in \pi^{-1}(m)$ – другая точка, то

$$X^i(q)\hat{e}_i = X^i(q)y_i^j(q)e_j^0 = X_0^j e_j^0.$$

С другой стороны,

$$X^i(p)e_i = X^i(p)y_i^j(p)e_j^0 = X_0^j e_j^0.$$

Таким образом, $X^i(q)\hat{e}_i = X^i(p)e_i$ и вектор X_m определен корректно.

Семейство векторов $X = \{X_m\}$ образуют гладкое векторное поле на многообразии M. В самом деле, фиксируем натуральное сечение (то есть сечение, которое ставит в соответствие каждой точке $m \in U$ натуральный репер в этой точке) $s : U \to BM$. Это локальное сечение. Оно существует в силу локальной тривиальности главного расслоения. Тогда компоненты векторного поля X в натуральном базисе имеют вид

$$\hat{X}^i(m) = X^i(p_0) = X^i \circ s(m),$$

то есть гладкие функции как композиция таковых. Следовательно, компоненты семейства векторов X являются гладкими функциями, а значит, X является гладким векторным полем. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3.6. *Задание векторного поля* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *на гладком многообразии* M *равносильно заданию семейства гладких функций* $\{X^i\}$ *на пространстве расслоения вещественных реперов* BM*, удовлетворяющих уравнениям*

$$dX^i + X^j\omega^i_j = X^i{}_j\omega^j.$$

Аналогичным образом (докажите самостоятельно) доказывается следующая теорема.

Теорема 3.7. *Задание формы* $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ *на гладком многообразии* M *равносильно заданию семейства гладких функций* $\{\eta_i\}$ *на пространстве расслоения вещественных реперов* BM*, удовлетворяющих уравнениям*

$$d\eta_i - \eta_j\omega^j_i = \eta_{ij}\omega^j,$$

где $\{\eta_{ij}\}$ *– система подходящих гладких функций, определенная на каждой канонической карте* (W, χ)*.*

Аналогичным образом, но более громоздкими рассуждениями доказывается основная теорема тензорного анализа.

Теорема 3.8. *Задание тензорного поля типа* (r, s) *на гладком многообразии* M *равносильно заданию системы гладких функций* $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ *на многообразии* BM*, удовлетворяющий в любой координатной окрестности* (W, χ) *соотношениям*

$$dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k, \qquad (3.15)$$

где $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\}$ *– подходящая система гладких функций в области* W*.*

Замечание 3.4. Во-первых, еще раз напомним, что функции $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$, определенные на BM, в каждой точке $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ суть компоненты тензора t_m в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Во-вторых, выведенные формулы получены при проведении расчетов в минусах, то есть для структурных уравнений вида $d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j$. Если проводить вычисления в плюсах, то есть работать со структурными уравнениями $d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$, то дифференциальные уравнения (3.15) будут выглядеть следующим образом

$$dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} - t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k - \ldots - t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} + \ldots + t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k,$$

то есть знаки меняются на противоположные. Запишите уравнения, которым будут удовлетворять функции для векторного поля и 1-формы в случае плюса в структурных уравнениях.

§ 3.5. Связности в главном расслоении вещественных реперов.

Пусть дано главное расслоение реперов $(BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и рассмотрим каноническую локальную карту (W, χ) на BM. Как мы видели в предыдущем параграфе в модуле $\mathfrak{X}(W)$ существует базис $(\mathscr{E}^i_j, \mathscr{E}_k)$, где $\mathscr{E}^i_j = (E^i_j)^\flat$ – фундаментальные векторные поля (базис вертикального распределения), $\mathscr{E}_k$ – базисные векторные поля, порожденные стандартным базисом арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$, (E^i_j) – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$, (π^i_j) – дуальный к нему базис. Базисные векторные поля мы смогли построить благодаря тому, что на куске главного расслоения реперов $(W, U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ была построена тривиальная связность. Ее горизонтальные площадки были образами при отображении $(\psi_U^{-1})_*$ касательных пространств к многообразию U тривиального расслоения $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, p_1, GL(n, \mathbb{R}))$.

Вычислим форму связности для тривиальной связности главного расслоения $(W, U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$.

Начнем с тривиального расслоения $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, p_1, GL(n, \mathbb{R}))$. Напомним, что в нем мы выделили горизонтальные площадки $\mathscr{H}_{(m,g)} = T_{(m,g)}(U) \equiv T_m(U)$ и горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ состояло из векторных полей вида $(X, 0)$ (напомним, что для многообразия $U \times GL(n, \mathbb{R})$ модуль векторных полей $\mathfrak{X}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{X}(U) \oplus \mathfrak{X}(GL(n, \mathbb{R}))$, то есть любое векторное поле однозначно можно представить как пару (X, Y), где $X \in \mathfrak{X}(U)$, $Y \in \mathfrak{X}(GL(n, \mathbb{R}))$). Таким образом, на тривиальном расслоении задается связность с помощью описания ее горизонтальных площадок. Покажем, что форма этой связности в указанном выше базисе (E^i_j) присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$\Theta = (p_2)^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i,$$

где $p_2 : U \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ – проекция на второй сомножитель. Напомним, что форма связности $\Theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$, где Π – связность (вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы), $\Lambda = id \otimes \lambda : C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathscr{V}$. Отображение Λ является изоморфизмом, следовательно, $\mathscr{H} = ker\,\Pi = ker\,\Theta$. Другими словами, если дана форма со значениями в присоединенной алгебре структурной группы (эквивариантная и удовлетворяющая свойству $\Theta \circ \Lambda = id$), то чтобы убедиться, что она есть форма связности для связности Π, надо проверить, что ее ядро совпадает с ядром Π, то есть с горизонтальным распределением $\mathscr{H}$.

Задача 3.1. Докажите, что форма Θ обладает свойствами эквивариантности и $\Theta \circ \Lambda = id$.

Мы покажем, что ядро формы Θ состоит из векторных полей вида $(X, 0)$. Пусть $(X, Y) \in \mathfrak{X}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ – произвольное векторное поле. Тогда

$$\Theta(X, Y) = p_2^* \pi^i_j(X, Y) E^j_i = \pi^i_j((p_2)_*(X, Y)) E^j_i = \pi^i_j(Y) E^j_i.$$

Напомним, что атлас группы $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из одной карты. Тогда векторные поля натурального базиса определены на всей группе, причем их n^2 штук. С другой стороны, базис (E^i_j) присоединенной алгебры Ли состоит из векторных полей также определенных на всей группе и их тоже n^2 штук, то есть они являются базисом $\mathfrak{X}(GL(n, \mathbb{R}))$ (хотя коэффициенты разложения уже будут функциями). Тогда любое векторное поле, определенное на группе Ли $GL(n, \mathbb{R})$ будет раскладываться и по левоинвариантным векторным полям E^i_j (коэффициенты разложения – функции). Так как (π^i_j) – дуальный базис, $\pi^i_j(Y)$ – это координаты векторного поля Y в базисе (E^i_j) (по определению дуального базиса). Тогда из последней цепочки равенств получаем, что $\Theta(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi^i_j(Y) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, то есть $Y = 0$. Итак, мы показали, что ядро Θ совпадает с $ker\, \Pi = \mathscr{H}$, то есть Θ – форма связности для связности $\mathscr{H}$ тривиального расслоения.

Переходим к расслоению $(W, U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Там мы построили связность (которую назвали тривиальной) с помощью диффеоморфизма ψ_U, определив горизонтальное распределение тривиальной связности как $(\psi_U^{-1})_* \mathscr{H}$. Найдем форму θ этой связности. Так как горизонтальные площадки перебрасывались с тривиального расслоения с помощью диффеоморфизма ψ_U, то и форма связности будет получаться из Θ с его же помощью.

$$\theta = \psi_U^* \Theta = \psi_U^* \circ p_2^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = (p_2 \circ \psi_U)^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = F_U^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = \omega^i_j \otimes E^j_i.$$

Итак, мы получили, что

$$\theta = \omega^i_j \otimes E^j_i,$$

то есть формы (ω^i_j) дуального базиса $(\mathscr{E}^i_j, \mathscr{E}_k)$, являются тензорными компонентами тривиальной связности главного расслоения $(W, U, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$.

Лемма 3.8. *Пусть (P, M, π, G) – произвольное главное расслоение, θ_1 и θ_2 – формы двух связностей на нем. Тогда форма $\zeta = \theta_1 - \theta_2$ является горизонтальной формой, то есть для любого вертикального векторного поля $X \in \mathscr{V}$ имеем $\zeta(X) = 0$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.4 имеем

$$\theta_1 \circ \Lambda = \theta_2 \circ \Lambda = id.$$

Тогда $(\theta_1 - \theta_2) \circ \Lambda = 0$. Так как $Im\, \Lambda = \mathscr{V}$, то для любого $X \in \mathscr{V}$ существует векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(P)$, такое что $\Lambda(Y) = X$. Следовательно, $(\theta_1 - \theta_2)(X) = 0$ для любого вертикального поля X. □

С учетом доказанной леммы получим, что если в расслоении реперов $\mathscr{B}(M)$ фиксирована связность с формой θ, то в области W канонической локальной карты на многообразии BM формы $\theta^i_j - \omega^i_j$ являются горизонтальными (это тензорные компоненты двух связностей: с формой θ и тривиальной). Тогда они раскладываются по системе Пфаффа вертикального распределения $\{\omega^i\}$. В качестве элементов такой системы можно взять тензорные компоненты формы смещения. Другими словами, существуют такие функции $\{\gamma^i_{jk}\} \subset C^\infty(W)$, такие что

$$\theta^i_j - \omega^i_j = \gamma^i_{jk} \omega^k.$$

Выразим из этих соотношений омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов (3.10) (мы работаем в минусах):

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \gamma^i_{jk} \omega^k \wedge \omega^j = -\theta^i_j \wedge \omega^j - \gamma^i_{[jk]} \omega^j \wedge \omega^k.$$

Здесь для установки скобок альтернации мы воспользовались примером 7.3 из курса тензорной алгебры. Обозначим $-\gamma^i_{[jk]} = \frac{1}{2} S^i_{jk}$. Тогда первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \tag{3.16}$$

где $S^i_{jk} = -2\gamma^i_{[jk]}$, и называется (в этом виде) *первой группой структурных уравнений связности.*

Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный базис (ε_i). Тогда обозначим

$$\Omega = \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i.$$

Это 2-форма со значениями в $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что она определена глобально на BM и, очевидно, является горизонтальной, то есть обращается в нуль, если хотя бы один ее аргумент вертикален. Эта форма называется *формой кручения связности.*

Напомним, что вторая группа структурных уравнений связности в произвольном главном расслоении имеет вид

$$d\theta^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c + R^a_{k\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\{\theta^a\}$ – тензорные компоненты формы связности θ. Эти уравнения были выведены без использования связности структурной группы, а значит, могут быть применены в случае полной линейной группы, которая не является связной. В случае главного расслоения реперов имеем (см. § 1.3.)

$$\theta^a = \theta^i_j; \quad \tfrac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j.$$

Обозначим коэффициенты $R^a_{k\ell} = \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}$. Тогда вторая группа структурных уравнений связности главного расслоения реперов примет вид

$$d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell. \tag{3.17}$$

Обозначим $\Phi = \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^k \otimes E^j_i$. Это 2-форма со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g} \ll (n, \mathbb{R})$ структурной группы. Можно показать, что эта форма определена глобально. Она является горизонтальной и называется *формой кривизны связности.*

Замечание 3.5. Если в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ вместо базиса (E^i_j) базис $(-E^i_j)$ (то есть базис получающийся из матриц $(-e^i_j)$ полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то тензорные компоненты формы связности θ заменятся на формы $-\theta^i_j$, а формы ω^i_j заменятся на формы $-\omega^i_j$. При этом первая группа структурных уравнений главного расслоения реперов будет иметь вид $d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$. Рассмотрим разность $-\theta^i_j + \omega^i_j$. Эта форма будет горизонтальной, следовательно раскладывается по одноиндексным омегам: $-\theta^i_j + \omega^i_j = \gamma^i_{jk}\omega^k$. Здесь коэффициенты γ^i_{jk} отличаются от прежних коэффициентов знаком. Выразим из этого равенства двухиндексные омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j + \gamma^i_{jk}\omega^k \wedge \omega^j = \theta^i_j \wedge \omega^j - \gamma^i_{[jk]}\omega^j \wedge \omega^k = \theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где $\frac{1}{2}S^i_{jk} = -\gamma^i_{[jk]}$. Обратите внимание, что полученные здесь функции S^i_{jk} также знаком отличаются от соответствующих функций, полученных выше.

Для второй группы структурных уравнений заметим, что структурные константы $C^{ik\ell}_{jpt}$ не изменятся, так как определяются соотношениями $[e^i_j, e^k_p] = C^{ik\ell}_{jpt}e^t_\ell$. Так как компоненты формы связности в таком базисе имеют вид $(-\theta^i_j)$ из второй группы структурных уравнений связности главного расслоения реперов получим $-d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell$ или

$$d\theta^i_j = \theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jk\ell} = -\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}$. Знак волны мы будем в дальнейшем опускать. Опять видим, что компоненты формы кривизны поменяли знак.

Итак, вычисляя в плюсах, мы получили следующие две группы структурных уравнений связности

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j + \tfrac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k; \quad d\theta^i_j = \theta^i_k \wedge \theta^k_j + \tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell. \tag{3.18}$$

Обратите внимание, что хотя мы выводили эти уравнения в предположении, что базис алгебры Ли состоит из элементов $(-E^i_j)$ в структурных уравнениях стоят тензорные компоненты формы связности, определенные относительно базиса (E^i_j). Это приводит к трудностям, хотя до 2000 года в диссертационных исследованиях использовалась именно эта форма структурных уравнений (в плюсах). В дальнейшем мы будем работать в минусах, а соответствующие результаты в плюсах рекомендуем читателю получать самостоятельно.

Проведем процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений связности. Для этого введем обозначения

$$\Omega^i = \tfrac{1}{2}S^i_{jk}\omega^k \wedge \omega^\ell; \quad \Phi^i_j = \tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell \tag{3.19}$$

для тензорных компонент форм кручения и кривизны связности. Тогда структурные уравнения связности примут вид

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \Omega^i; \quad d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \Phi^i_j. \tag{3.20}$$

Продифференцируем внешним образом первое уравнение из (3.20):

$$0 = -d\theta^i_j \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge d\omega^j + d\Omega^i.$$

Подставим вместо $d\theta^i_j$ и $d\omega^j$ их выражения из (3.20), заменив во втором случае индекс i на индекс j:

$$0 = -(-\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \Phi^i_j) \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge (-\theta^j_k \wedge \omega^k + \Omega^j) + d\Omega^i.$$

Приведем подобные и учтем обозначения (3.19):

$$d\Omega^i - \Phi^i_j \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge \Omega^j = 0. \tag{3.21}$$

Продифференцируем внешним образом первое соотношение из (3.19):

$$\begin{aligned} 2d\Omega^i &= dS^i_{jk} \wedge (\omega^j \wedge \omega^k) + S^i_{jk} d(\omega^j \wedge \omega^k) = dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k - S^i_{jk}\omega^j \wedge d\omega^k = \\ &= dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{jk}(-\theta^j_\ell \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S^j_{\ell t}\omega^\ell \wedge \omega^t) \wedge \omega^k - S^i_{jk}\omega^j \wedge (-\theta^k_\ell \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S^k_{\ell t}\omega^\ell \wedge \omega^t) = \\ &= \left(dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^i_{\ell t} S^\ell_{jk}\omega^t\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что сначала дифференцируется внешнее произведение функции (0-формы) и 2-формы, а затем продифференцировали внешнее произведение двух 1-форм. Далее, мы подставили первую группу структурных уравнений в их первоначальном виде (3.16), не забыв поменять свободный индекс (в первом случае на j, а во втором случае на k). При этом индексы суммирования нам также пришлось поменять. После раскрытия скобок мы видим, что в каждом слагаемом есть внешнее произведение одноиндексных омег. Сделаем у них индексы суммирования одинаковыми и вынесем за скобку (сделаем все индексы суммирования j и k). Внутри больших скобок мы привели подобные, воспользовавшись кососимметричностью S^i_{jk} по нижним индексам.

Умножим (3.21) на 2 и подставим полученное выражение для $2\Omega^i$ и обозначение (3.19) для Ω^i и Φ^i_j:

$$\left(dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k - R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega^j + S^j_{k\ell}\theta^i_j \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Опять здесь есть внешнее произведение двух одноиндексных омег и мы их вынесем за скобку. Но сначала сгруппируем слагаемые, которые очень напоминают основную теорему тензорного анализа 3.8 и введем для этой суммы обозначение:

$$\nabla S^i_{jk} = dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell \tag{3.22}$$

и подставим его в полученное равенство

$$\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Обозначим $\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell\right) \wedge \omega^j = \Psi^i_k$. Это 2-форма. Тогда получим $\Psi^i_k \wedge \omega^k = 0$ и применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 3.4), то есть существуют 1-формы θ^i_{kj}, такие что $\Psi^i_k = \theta^i_{kj} \wedge \omega^j$ и

$$\theta^i_{[kj]} = A^i_{kj\ell}\omega^\ell, \tag{3.23}$$

где $A^i_{kj\ell}$ – система подходящих функций, кососимметричная по индексам k и j. Вернемся к обозначению Ψ^i_k. Тогда получим

$$\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell - \theta^i_{kj}\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Теперь применима лемма Картана (см. следствие 3.3):

$$\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell - \theta^i_{kj} = B^i_{jk\ell}\omega^\ell, \tag{3.24}$$

где $B^i_{jk\ell}$ – система подходящих функций.

Лемма 3.9. *Во введенных обозначениях* $\nabla S^i_{[jk]} = S^i_{jk}$.

Доказательство. Проальтернируем по индексам j и k соотношение (3.22):

$$\nabla S^i_{[jk]} = dS^i_{[jk]} - S^i_{\ell[k}\theta^\ell_{j]} - S^i_{[j|\ell|}\theta^\ell_{k]} + S^\ell_{[jk]}\theta^i_\ell = dS^i_{jk} - \frac{1}{2}S^i_{\ell k}\theta^\ell_j + \frac{1}{2}S^i_{\ell j}\theta^\ell_k - \frac{1}{2}S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + \frac{1}{2}S^i_{k\ell}\theta^\ell_j + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell = \nabla S^i_{jk}.$$

Здесь мы использовали кососимметричность функций S^i_{jk} по паре нижних индексов. □

Проальтернируем соотношения (3.24) по индексам j и k, учтем (3.23) и лемму 3.9. Тогда получим, что ∇S^i_{jk} выражается через одноиндексные омеги с некоторыми коэффициентами, которые мы обозначим $S^i_{jk\ell}$, а именно,

$$dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell = S^i_{jk\ell}\omega^\ell.$$

С учетом соотношений $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$ из этих уравнений получим

$$dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\omega^\ell_j - S^i_{j\ell}\omega^\ell_k + S^\ell_{jk}\omega^i_\ell = \tilde{S}^i_{jk\ell}\omega^\ell.$$

Здесь мы слагаемые с одноиндексными омегами перенесли в правую часть равенства, вынесли за скобку и полученную в скобку сумму обозначили через $\tilde{S}^i_{jk\ell}$. Это функции определенные на координатных окрестностях W. С ученом основной теоремы тензорного анализа (см. теорему 3.8) из этого следует, что система функций $\{S^i_{jk}\} \subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле S типа (2,1) на многообразии M. Этот тензор называется *тензором кручения связности.*

Аналогичную процедуру дифференциального продолжения можно провести для второй группы структурных уравнений связности. Продифференцируем внешним образом вторую группу структурных уравнений связности (3.20)

$$0 = -d\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \theta^i_k \wedge d\theta^k_j + d\Phi^i_j = -(-\theta^i_t \wedge \theta^t_k + \Phi^i_k) \wedge \theta^k_j + \theta^i_k \wedge (-\theta^k_t \wedge \theta^t_j + \Phi^k_j) + d\Phi^i_j = \\ = d\Phi^i_j - \Phi^i_k \wedge \theta^k_j + \theta^i_k \wedge \Phi^k_j. \quad (3.25)$$

После дифференцирования мы подставили вместо $d\theta^i_k$ и $d\theta^k_j$ выражения из второй группы структурных уравнений связности, изменив нужным образом свободные индексы (при этом следите, чтобы индексы суммирования не повторяли свободные индексы – их при необходимости также нужно поменять). Слагаемые с тремя двухиндексными тетами взаимно уничтожатся.

Далее, продифференцируем внешним образом вторые соотношения из обозначений (3.19):

$$2d\Phi^i_j = dR^i_{jk\ell} \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + R^i_{jk\ell}d\omega^k \wedge \omega^\ell - R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge d\omega^\ell = dR^i_{jk\ell} \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + R^i_{jk\ell}(-\theta^k_t \wedge \omega^t + \\ + \frac{1}{2}S^k_{tr}\omega^t \wedge \omega^r) \wedge \omega^\ell - R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge (-\theta^\ell_t \wedge \omega^t + \frac{1}{2}S^\ell_{tr}\omega^t \wedge \omega^r)$$

Здесь мы подставили первую группу структурных уравнений связности.

Подставим выражение для $d\Phi^i_j$ и обозначения (3.19) для Φ^i_j в равенство (3.25):

$$(dR^i_{jk\ell} - R^i_{tk\ell}\theta^t_j - R^i_{jt\ell}\theta^t_k - R^i_{jkt}\theta^t_\ell + R^t_{jk\ell}\theta^i_t) \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}S^k_{tr}\omega^t \wedge \omega^r \wedge \omega^\ell - \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}S^\ell_{tr}\omega^k \wedge \omega^t \wedge \omega^r = 0.$$

Введем обозначение

$$\nabla R^i_{jk\ell} = dR^i_{jk\ell} - R^i_{tk\ell}\theta^t_j - R^i_{jt\ell}\theta^t_k - R^i_{jkt}\theta^t_\ell + R^t_{jk\ell}\theta^i_t$$

и вынесем две одноиндексные омеги за скобки. Для этого нужным образом переобозначим индексы суммирования.

$$(\nabla R^i_{jk\ell} + \frac{1}{2}R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t - \frac{1}{2}R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r) \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Обозначим $\Psi^i_{j\ell} = (\nabla R^i_{jk\ell} + \frac{1}{2}R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t - \frac{1}{2}R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r) \wedge \omega^k$ и применим обобщенную лемму Картана (см. теорему 3.4):

$$\Psi^i_{j\ell} = \theta^i_{j\ell k} \wedge \omega^k, \quad \theta^i_{j[\ell k]} = A^i_{j\ell kr}\omega^r.$$

Тогда

$$(\nabla R^i_{jk\ell} + \frac{1}{2}R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t - \frac{1}{2}R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r - \theta^i_{j\ell k}) \wedge \omega^k = 0. \quad (3.26)$$

Аналогично лемме 3.9 доказывается, что из кососимметричности $R^i_{jk\ell}$ по двум последним индексам следует кососимметричность 1-форм $\nabla R^i_{jk\ell}$ по двум последним индексам. С учетом этого применим лемму Картана к (3.26) и проальтернируем полученное выражение по индексам ℓ и k (проделайте вычисления самостоятельно). Все получившиеся слагаемые кроме $\nabla R^i_{jk\ell}$ будут линейными комбинациями одноиндексных омег. Перенесем эти слагаемые в правую часть и обозначим их $R^i_{jk\ell t}\omega^t$, то есть

$$dR^i_{jk\ell} - R^i_{tk\ell}\theta^t_j - R^i_{jt\ell}\theta^t_k - R^i_{jkt}\theta^t_\ell + R^t_{jk\ell}\theta^i_t = R^i_{jk\ell t}\omega^t.$$

С учетом того, что $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$, получим

$$dR^i_{jk\ell} - R^i_{tk\ell}\omega^t_j - R^i_{jt\ell}\omega^t_k - R^i_{jkt}\omega^t_\ell + R^t_{jk\ell}\omega^i_t = \tilde{R}^i_{jk\ell t}\omega^t.$$

По основной теореме тензорного анализа (см. теорему 3.8) из этого следует, что система функций $\{R^i_{jk\ell}\} \subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле типа (3,1) на многообразии M. Это тензорное поле называется *тензором кривизны связности.*

§ 3.6. Ковариантное дифференцирование.

Гладкое многообразие, для которого фиксирована связность в его главном расслоении реперов, называется *пространством аффинной связности*. На таком многообразии можно построить аппарат инвариантного дифференциального исчисления – основной аппарат современной геометрии.

Пусть M – n-мерное пространство аффинной связности, $\theta = \{\theta^i_j\}$ – форма связности. Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M. В соответствии с основной теоремой тензорного анализа (см. теорему 3.8), задание тензорного поля t равносильно заданию системы функций $\{t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ на многообразии BM, удовлетворяющие уравнениям

$$dt^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\cdots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\omega^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} + t^{kj_2\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\cdots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_s}_k = t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r k}\omega^k, \tag{3.27}$$

где $\{\omega^i_j\}$ – компоненты формы тривиальной связности, $\{t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r k}\}$ – локально определенная система подходящих функций на многообразии BM. Напомним, что эти уравнения имеют смысл лишь в координатной окрестности W, так как эти формы имеют вид $\omega^i_j = \tilde{y}^i_k dy^k_j$. С другой стороны, мы знаем, что $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$. Выразим двухиндексные омеги и подставим их в (3.27):

$$dt^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\cdots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\theta^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r} + t^{kj_2\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\cdots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_s}_k = t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\omega^k, \tag{3.28}$$

где $t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} = t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r k} - t^{j_1\cdots j_s}_{pi_2\ldots i_r}\gamma^p_{i_1 k} - \ldots + t^{j_1\cdots j_{s-1}p}_{i_1\ldots i_r}\gamma^{j_s}_{pk}$. Обозначим

$$t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\cdots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\theta^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r} + t^{kj_2\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\cdots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_s}_k = \nabla t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}.$$

Тогда последние соотношения запишутся в виде

$$\nabla t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r} = t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\omega^k.$$

Заметим, что формы $\nabla t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ глобально определены на многообразии BM, а формы $\{\omega^i\}$, будучи тензорными компонентами глобально определенной формы смещения, также глобально определены и линейно независимы в каждой точке многообразия BM. Тогда функции $t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}$ также глобально определены на BM, то есть $t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} \in C^\infty(BM)$.

Проводя процедуру дифференциального продолжения соотношений (3.28), то есть дифференцируя их внешним образом и используя лемму Картана, получим соотношения вида

$$\nabla t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} = t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k,p}\omega^p.$$

В силу основной теоремы тензорного анализа это означает, что система гладких функций $\{t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\}$ определяет тензорное поле типа $(r+1, s)$ на многообразии M, который называется *ковариантным дифференциалом тензорного поля* t относительно заданной связности. Будем обозначать ковариантный дифференциал тензорного поля t через ∇t.

Пример 3.1. Проведем процедуру дифференциального продолжения соотношений (3.28) в случае векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Напомним, что задание векторного поля X на многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{X^i\}$ на многообразии BM – тотальном пространстве расслоения вещественных реперов. Тогда соотношения (3.28) примут вид

$$dX^i + X^j\theta^i_j = X^i{}_{,j}\omega^j.$$

Продифференцируем их внешним образом:

$$0 + dX^j \wedge \theta^i_j + X^j d\theta^i_j = dX^i{}_{,j} \wedge \omega^j + X^i{}_{,j} d\omega^j.$$

Подставим вместо $d\theta^i_j$ и $d\omega^i$ структурные уравнения (3.16) и (3.17).

$$(X^j{}_{,k}\omega^k - X^k\theta^j_k) \wedge \theta^i_j + X^j(-\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell) = dX^i{}_{,j} \wedge \omega^j + X^i{}_{,j}(-\theta^j_k \wedge \omega^k + \frac{1}{2}S^j_{k\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell). \tag{3.29}$$

Два слагаемых с двумя двухиндексными омегами взаимно уничтожатся. Все остальное переносим направо. Введем обозначение (в него войдут три слагаемых из последнего равенства с необходимым переобозначением индексов суммирования)

$$dX^i{}_{,j} + X^k{}_{,j}\theta^i_k - X^i{}_{,k}\theta^k_j = \nabla X^i{}_{,j}.$$

Тогда (3.29) перепишется в виде

$$\nabla X^i{}_{,j}\wedge\omega^j-\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k\wedge\omega^\ell+\frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k\wedge\omega^\ell=0. \tag{3.30}$$

Дальнейшие рассуждения можно провести двумя разными путями. Первый путь нам уже известен – это использование обобщенной леммы Картана и леммы Картана (так мы доказывали, что тензоры кручения и кривизны действительно являются тензорами). Проведите эти рассуждения самостоятельно.

Мы посмотрим новый путь, идею которого будем использовать в дальнейшем. Заметим, что $\nabla X^i{}_{,j}$ – это 1-формы, определенные на многообразии BM. В его модуле $\mathfrak{X}^*(BM)$ 1-форм существует глобально определенный базис (θ^i_j,ω^k). Утверждая это, мы воспользовались тем, что и двухиндексные теты (тензорные компоненты формы связности), и одноиндексные омеги (тензорные компоненты формы смещения) определены глобально на BM. При этом нетрудно убедиться (используя соотношения $\theta^i_j=\omega^i_j+\gamma^i_{jk}\omega^k$), что формы θ^i_j будут линейно независимы. Тогда формы $\nabla X^i{}_{,j}$ можно разложить по базису (θ^i_j,ω^k):

$$\nabla X^i{}_{,j}=A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k+A^i_{jk}\omega^k,$$

где $A^{ik}_{j\ell}$ и A^i_{jk} – некоторые гладкие функции на многообразии BM. Подставим полученное разложение в (3.30):

$$(A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k+A^i_{jk}\omega^k)\wedge\omega^j-\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k\wedge\omega^\ell+\frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k\wedge\omega^\ell=0.$$

Раскроем скобки.

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k\wedge\omega^j+A^i_{jk}\omega^k\wedge\omega^j-\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k\wedge\omega^\ell+\frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k\wedge\omega^\ell=0.$$

В левой части этого равенства стоит 2-форма. Напомним, что в модуле 2-форм $\Lambda_2(BM)$ есть канонический базис $\{\theta^i_j\wedge\omega^k,\omega^\ell\wedge\omega^t\,(\ell<t)\}$. Он образован из базиса $\mathfrak{X}^*(BM)$ (подробности можно посмотреть в курсе Тензорный анализ или в курсе Анализ на многообразиях). Если в последнем равенстве мы сможем получить разложение по этому базису (такого разложения в нем нет, так как у внешних произведений одноиндексных омег индексы не упорядочены), то используя линейную независимость базисных форм, мы получим соотношения на коэффициенты такой линейной комбинации. Заметим, что внешние произведения $\theta^i_j\wedge\omega^k$ упорядочивать не нужно, так как на первом месте всегда стоит форма θ^i_j, которая в базисе $\mathfrak{X}^*(BM)$ всегда стоит раньше всех одноиндексных омег. Чтобы упорядочить внешние произведения одноиндексных омег, используем задачу 7.5 из курса Тензорной алгебры:

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k\wedge\omega^j-2A^i_{[jk]}\omega^j\wedge\omega^k(j<k)-2\cdot\frac{1}{2}R^i_{j[k\ell]}X^j\omega^k\wedge\omega^\ell(k<\ell)+2\cdot\frac{1}{2}S^j_{[k\ell]}X^i{}_{,j}\omega^k\wedge\omega^\ell(k<\ell)=0.$$

Так как тензоры кручения и кривизны кососимметричны по последним двум нижним индексам, альтернация снимется. У одноиндексных омег переобозначим индексы суммирования так, чтобы их внешнее произведение вынести за скобку:

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k\wedge\omega^j+(-2A^i_{[k\ell]}-2\cdot\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j+2\cdot\frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j})\omega^k\wedge\omega^\ell(k<\ell)=0.$$

Теперь у нас получилось разложение по базису 2-форм. Применяем линейную независимость.

$$A^{ik}_{j\ell}=0;\quad -A^i_{[k\ell]}-\tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j+\tfrac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}=0.$$

Итак, мы получаем, что для разложения $\nabla X^i{}_{,j}$ коэффициенты при двухиндексных тетах равны нулю, а значит, эта форма раскладывается только по одноиндесным омегам.

$$\nabla X^i{}_{,j}=A^i_{jk}\omega^k.$$

Переходя, как и выше, от форм двухиндексных тет к двухиндексным омегам, получим основную теорему тензорного анализа, то есть система функций $\{X^i{}_{,j}\}$ задает тензорное поле типа (1,1).

Систему функций A^i_{jk} обычно обозначают $X^i{}_{,j,k}$.

Задача 3.2. Проведите процедуру дифференциального продолжения соотношений (3.28) в случае 1-формы.

Замечание 3.6. В дальнейшем, доказывая, что система функций, заданная на многообразии BM, задает тензорное поле на многообразии M, мы не будем от уравнений с тетами (тензорными компонентами формы связности) переходить к уравнениям с омегами (которые присутствуют в основной теореме тензорного анализа). Мы будем сразу делать вывод о том, что задано тензорное поле, так как в каждом случае этот переход один и тот же.

Замечание 3.7. Можно показать, что задание связности в главном расслоении реперов многообразия M равносильно заданию оператора Кошуля и, следовательно, оператора ковариантного дифференцирования на многообразии M (см. курс Анализ на многообразиях). При этом компоненты $\hat{t}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}$ ковариантного дифференциала тензорного поля t относительно натурального базиса (как они определялись в курсе Анализ на многообразиях) и функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}$, заданные на многообразии BM, связаны соотношением

$$\hat{t}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k} \circ s,$$

где $s : M \to BM$ – локальное сечение, ставящее точкам области U локальной карты на M натуральные реперы в этих точках.

Тензоры кручения и кривизны связности определенные в этом курсе и в курсе Анализ на многообразиях также совпадают. Подробности можно почитать в монографии Кириченко „Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях“.

4. Тензорная алгебра комплексного векторного пространства.

§ 4.1. Комплексное линейное пространство.

Комплексное векторное пространство определяется точно так же как и вещественное векторное пространство. Только вещественные числа заменяются на комплексные числа. Аналогичным образом на случай комплексного линейного пространства переносятся определения линейной зависимости векторов, базиса и координат вектора. Приведем полученные определения.

Будем называть множество V *комплексным векторным (или комплексным линейным) пространством*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $X, Y \in V$ ставит в соответствие элемент $Z \in V$, называемый *суммой векторов* X *и* Y и обозначаемый $Z = X + Y$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $X \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие элемент $Y \in V$, называемый *произведением вектора* X *на число* λ и обозначаемый $Y = \lambda X$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $X + Y = Y + X$ (коммутативность);

2^0. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $X \in V$ выполняется $X + 0 = X$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $X \in V$ существует элемент $-X \in V$, такой что $X + (-X) = 0$ (элемент $-X$ называется *противоположным* элементу X);

5^0. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$;

6^0. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

7^0. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$;

8^0. $1X = X$,

где $X, Y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства.* Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на комплексное число.*

Система векторов $e_1, \dots, e_n \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{C}$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha^i e_i = 0 \qquad (*)$$

Если равенство $(*)$ выполняется только для чисел $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$, то система векторов $e_1, \dots, e_n$ называется *линейно независимой.*

Если в комплексном линейном пространстве V существует упорядоченная система n линейно независимых векторов, такая что любой вектор из V представим в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами, то комплексное линейное пространство V называется *конечномерным*, число n называется его *размерностью.* Данная система векторов называется базисом комплексного линейного пространства V. Если хотят подчеркнуть, что коэффициенты разложения вектора являются комплексными числами, то говорят „комплексная размерность“ пространства V и „комплексный базис“ пространства V.

Коэффициенты, с помощью которых вектор представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, называются *координатами этого вектора.*

Очевидно, что координаты суммы векторов комплексного линейного пространства равны суммам соответствующих координат векторов-слагаемых. Координаты произведения вектора на комплексное число равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.

Пример 4.1. Рассмотрим множество $\mathbb{C}^n = \{(z^1, \ldots, z^n), z^i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$. Введем операции сложения элементов из $\mathbb{C}^n$ и умножения элемента из $\mathbb{C}^n$ на комплексное число по формулам

$$(z^1, \ldots, z^n) + (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^n) = (z^1 + \tilde{z}^1, \ldots, z^n + \tilde{z}^n); \quad z(z^1, \ldots, z^n) = (zz^1, \ldots, zz^n).$$

Легко видеть, что все аксиомы комплексного линейного пространства выполняются для множества $\mathbb{C}^n$, а значит, оно является комплексным векторным пространством. □

Задача 4.1. Докажите, что комплексная размерность пространства $\mathbb{C}^n$ равна n.

Теорема 4.1. *Пусть V – комплексное линейное пространство размерности n. Тогда оно является вещественным линейном пространством размерности $2n$.*

Доказательство. Так как множество вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, то все 8 аксиом вещественного линейного пространства выполняются автоматически.

Нам остается только найти базис V как вещественного линейного пространства. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис пространства V. Рассмотрим систему векторов

$$(e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n). \tag{4.1}$$

Докажем, что эта система векторов „вещественно“ линейно независима. Составим линейную комбинацию с вещественными коэффициентами:

$$\alpha^1 e_1 + \ldots \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n = 0.$$

Вынесем за скобку векторы $e_1, \ldots, e_n$.

$$(\alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1)e_1 + \ldots + (\alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n)e_n = 0.$$

В левой части этого равенства стоит линейная комбинация векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис V, то такая линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны 0, то есть $\alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i = 0$, то есть $\alpha^i = \beta^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. По определению это означает, что система векторов (4.1) „вещественно“ линейно независима.

Докажем, что любой вектор из V можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (4.1) с вещественными коэффициентами. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис V, то вектор X можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами:

$$X = z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n.$$

Обозначим $z^i = \alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$ и подставим в предыдущее равенство:

$$X = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n.$$

Итак, система векторов (4.1) является базисом V как вещественного линейного пространства, а значит, его вещественная размерность равна $2n$. □

Комплексное линейное пространство V, рассматриваемое как вещественное линейное пространство, называют *овеществлением* комплексного линейного пространства V и обозначают $V^{\mathbb{R}}$.

Замечание 4.1. Обратите внимание, что в теореме 4.1 сами элементы множества V не изменяются. Меняется структура этого множества. Вначале мы „умеем“ умножать векторы на комплексные числа, а затем, „забываем“ об этом умении и умножаем те же самые векторы только на вещественные числа.

Задача 4.2. Докажите, что $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 4.2. *На любом вещественном линейном пространстве размерности $2n$ можно ввести структуру комплексного линейного пространства.*

Доказательство. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим на нем линейный оператор J, удовлетворяющий условию $J^2 = -id$ (оно называется *антиинволютивностью* линейного оператора). Такие линейные операторы существуют. Приведем алгоритм построения одного из таких операторов. Фиксируем на вещественном линейном пространстве V базис $(e_1, \ldots, e_{2n})$ и зададим набор из $(2n)^2$ нулей и единиц, которые расположит в виде матрицы

$$((J_0)^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $i, j = 1, \ldots, 2n$. В любом другом базисе зададим набор чисел, который будет получаться из $((J_0)^i_j)$ по тензорному закону (см. курс Тензорная алгебра). Как мы видели в курсе Тензорная алгебра, эти наборы чисел задают тензор J_0 типа (1,1), причем сами являются его компонентами. Этот тензор назовем *оператором канонической комплексной структуры* на векторном пространстве V. Легко видеть, что $J_0^2 = -id$ (перемножьте матрицы самостоятельно). Произвольный линейный оператор J, удовлетворяющий условию антиинволютивности будем называть *оператором комплексной структуры.*

Вернемся к вещественному линейному пространству V. Фиксируем какой-нибудь оператор комплексной структуры J. Введем в V операцию умножения на комплексные числа с помощью оператора комплексной структуры J по формуле

$$zX = \alpha X + \beta(JX), \tag{4.2}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, $X \in V$ – произвольные элементы.

Первые четыре и восьмая аксиомы комплексного линейного пространства такие же как и в вещественном линейном пространстве, а значит, выполняются автоматически. Остается проверить только три аксиомы комплексного линейного пространства, относящиеся к умножению вектора на комплексное число. Докажем, например, что $z(wX) = (zw)X$, $z, w \in \mathbb{C}$, $X \in V$. Остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $w = \xi + \sqrt{-1}\eta$. Тогда с учетом (4.2) получим

$$z(wX) = z(\xi X + \eta JX) = \alpha(\xi X + \eta JX) + \beta J(\xi X + \eta JX) = (\alpha\xi - \beta\eta)X + (\alpha\eta + \beta\xi)JX = (wz)X.$$

Здесь мы воспользовались линейностью и антиинволютивностью J.

Итак, любое четно мерное вещественное линейное пространство V имеет еще и структуру комплексного линейного пространства. ☐

Замечание 4.2. Заметим, что доказанная теорема объясняет название тензора J – „оператор комплексной структуры“.

В доказанной теореме мы научились умножать векторы вещественного линейного пространства на комплексные числа с помощью оператора комплексной структуры. Но при этом брали только четномерные вещественные пространства. Возникает вопрос: почему бы таким же способом не ввести умножение на комплексные числа и в нечетномерных вещественных пространствах? Оказывается, что в нечетномерных вещественных пространствах антиинволютивных линейных операторов не существует. А именно, верна

Теорема 4.3. *Пусть V – вещественное линейное пространство, J – оператор комплексной структуры на нем. Тогда (вещественная) размерность пространства V четна.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что размерность V четна, нам нужно предъявить базис V с четным числом векторов.

Пусть $e_1 \in V$ – произвольный ненулевой вектор. Докажем, что пара (e_1, Je_1) линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$\alpha e_1 + \beta Je_1 = 0, \tag{4.3}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Применим к этому равенству оператор J:

$$\alpha Je_1 - \beta e_1 = 0. \tag{4.4}$$

Здесь мы воспользовались линейностью J и свойством антиинволютивности.

Если одно из чисел α, β равно нулю, то из (4.3) следует, что нулю равно и другое число. Предположим, что оба числа отличны от нуля. Тогда умножая (4.3) на α, а (4.4) – на β и вычитая из первого второе, получим $(\alpha^2 + \beta^2)e_1 = 0$. Так как $e_1 \neq 0$, получим $\alpha = \beta = 0$. Итак, пара векторов (e_1, Je_1) линейно независима. Если V совпадает с линейной оболочкой векторов e_1, Je_1, то эта пара является базисом V, следовательно, V имеет размерность 2.

Если $V \neq L(e_1, Je_1)$, то существует вектор e_2, такой что (e_1, Je_1, e_2) – линейно независимая система. Докажем, что в этом случае система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) также является линейно независимой. Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулю.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma Je_1 + \eta Je_2 = 0 \tag{4.5}$$

Подействуем на обе части равенства оператором J:

$$\alpha Je_1 + \beta Je_2 - \gamma e_1 - \eta e_2 = 0 \tag{4.6}$$

Если $\eta = 0$, то из (4.5) мы получим $\alpha = \beta = \gamma = 0$ в силу линейной независимости векторов e_1, Je_1, e_2. Аналогично если $\beta = 0$, то из (4.6) получим, что $\alpha = \gamma = \eta = 0$. Таким образом, в обоих случаях все коэффициенты в (4.5) равны нулю, следовательно, система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) линейно независима.

Пусть $\eta \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Умножим (4.5) на β, а (4.6) умножим на $-\eta$ и сложим полученные равенства:

$$(\alpha\beta + \gamma\eta)e_1 + (\beta^2 + \eta^2)e_2 + (\beta\gamma - \alpha\eta)Je_1 = 0.$$

В силу линейной независимости векторов e_1, e_2, Je_1 получим, в частности, что $\beta^2 + \eta^2 = 0$, то есть $\beta = \eta = 0$. Мы пришли к противоречию с предположением, то есть $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 0$ и система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) линейно независима.

Если V совпадает с линейной оболочкой векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2), то (e_1, e_2, Je_1, Je_2) является базисом V и размерность V равна 4. В противном случае существует вектор $e_3 \in V$, такой что векторы $e_1, e_2, Je_1, Je_2, e_3$ линейно независима. Тогда аналогично предыдущему доказывается, что система векторов $(e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, Je_3)$ также линейно независима и так далее. Этот процесс конечен, так как конечномерно векторное пространство V.

В результате этого процесса мы получим базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Таким образом, вещественное векторное пространство V четномерно. Построенный базис называется *базисом вещественно адаптированным комплексной структуре* (или, короче, *RA-базисом*). □

Задача 4.3. Докажите, что относительно RA-базиса оператор комплексной структуры имеет матрицу

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$, I_n – единичная матрица порядка n.

Указание. Подействуйте оператором J на вектора RA-базиса, разложите полученный вектор по RA-базису и результат запишите в столбцы матрицы.

Следствие 4.1. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Тогда его размерность как комплексного линейного пространства равна n.

Доказательство. Пусть дано вещественное векторное пространство V размерности $2n$. Комплексную структуру (то есть умножение на комплексные числа) мы уже ввели в теореме 4.2. Нам остается только выяснить его комплексную размерность (то есть размерность как комплексного линейного пространства).

По теореме 4.3 в V существует RA-базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Докажем, что система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ будет базисом V, рассматриваемого как комплексное линейное пространство, а значит, его размерность будет равна n.

Докажем сначала, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ (комплексно) линейно независимы. Составим линейную комбинацию этих векторов с комплексными коэффициентами и приравняем ее нулю:

$$z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n = 0. \tag{4.7}$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1, \ldots, z^n = \alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n$ и подставим в (4.7):

$$\alpha^1 e_1 + \beta^1 Je_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^n Je_n = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор комплексной структуры J определяет комплексную структуру на V по формуле $(\alpha + \sqrt{-1}\beta)X = \alpha X + \beta JX)$ (см. теорему 4.2). Так как система векторов $e_1, \ldots, e_n$, $Je_1, \ldots, Je_n$ линейно независима, $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = \beta^1 = \ldots = \beta^n = 0$, следовательно, $z^1 = \ldots = z^n$.

Задача 4.4. Докажите, что для любого вектора $X \in V$ существует набор чисел $z^1, \ldots, z^n \in \mathbb{C}$, таких что $X = z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n$.

Итак, мы получили, что $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V как комплексного векторного пространства, а значит, его размерность равна n. □

§ 4.2. Комплексификация вещественного векторного пространства.

2.1. Определение комплексификации.

Пусть V – вещественное векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим множество всех формальных конечных сумм вида

$$Y = z^1 X_1 + \ldots + z^N X_N,$$

где $z^i \in \mathbb{C}$, $X_i \in V$, $i = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$ – произвольное, не фиксированное число. Обратите внимание, что в данных формальных суммах комплексно число z и вектор X вещественного векторного пространства просто стоят рядом. Мы не умеем умножать вектора на комплексные числа (как это было в комплексных линейных пространствах).

Договоримся отождествлять следующие формальные суммы

$$\begin{aligned}&z^1X_1+z^2X_2=z^2X_2+z^1X_1;\quad z^1X+z^2X=(z^1+z^2)X;\quad zX_1+zX_2=z(X_1+X_2);\\&z(z^1X)=(zz_1)X,\end{aligned}\tag{4.8}$$

где $z^1, z^2, z\in\mathbb{C}$, $X_1, X_2, X\in V$. Будем считать равными две формальные суммы, которые можно привести к одному и тому же виду с помощью отождествлений (4.8).

Множество всех построенных формальных сумм с введенными отождествлениями назовем *комплексификацией вещественного векторного пространства* V и будем обозначать $V^{\mathbb{C}}$. Отметим, что введенное определение не является строгим, но вполне пригодно для работы. Желающие ознакомиться со строгим определением комплексификации векторного пространства могут обратиться к монографии Кобаяши, Номидзу „Основы дифференциальной геометрии“ или монографии Кириченко „Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях“.

В множестве $V^{\mathbb{C}}$ можно ввести структуру вещественного векторного пространства с помощью следующих операций сложения и умножения на вещественное число

$$Y_1+Y_2=z^iX_i+\tilde{z}^j\tilde{X}_j;\quad \alpha Y=(\alpha z^i)X_i,\tag{4.9}$$

где $Y_1=z^iX_i\in V^{\mathbb{C}}$, $Y_2=\tilde{z}^j\tilde{X}_j\in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Другими словами, чтобы получить сумму двух элементов комплексификации нужно записать одну за другой обе формальные суммы Y_1 и Y_2 и применить введенные отождествления. Чтобы умножить элемент Y на вещественное число, нужно каждое комплексное число формальной суммы умножить на это вещественное число.

Задача 4.5. Докажите, что введенные операции сложения и умножения на вещественное число удовлетворяют всем 8 аксиомам вещественного векторного пространства.

Отметим, что нулевой элемент имеет вид z^iX_i, где $z^i=0$ или $X_i=0$ для любого индекса i.

Задача 4.6. Докажите, что вещественное векторное пространство V является векторным подпространством вещественного векторного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Указание. Любой элемент из V можно отождествить с формальной суммой вида $1X$.

Будем называть вектора из V *вещественными*, а остальные вектора из $V^{\mathbb{C}}$ – *комплексными векторами.*

Теорема 4.4. *Вещественная размерность пространства* $V^{\mathbb{C}}$ *равна* $2n$.

Доказательство. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V. Докажем, что система векторов

$$(e_1,\dots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\dots,\sqrt{-1}e_n)\tag{4.10}$$

из $V^{\mathbb{C}}$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства.

Сначала докажем, что эта система векторов линейно независима. Составим линейную комбинацию и приравняем ее нулю:

$$\alpha^1e_1+\dots\alpha^ne_n+\beta^1\sqrt{-1}e_1+\dots+\beta^n\sqrt{-1}e_n=0,$$

где $\alpha^i,\beta^i\in\mathbb{R}$. С учетом (4.8) получим

$$(\alpha^1+\beta^1\sqrt{-1})e_1+\dots+(\alpha^n+\beta^n\sqrt{-1})e_n=0.$$

Согласно задаче 4.5 нулевая формальная сумма должна иметь в каждом слагаемом хотя бы один нуль (комплексное число или вектор). Так как вектора базиса $(e_1,\dots,e_n)$ – не нулевые, то нулями будут комплексные числа перед ними, то есть $\alpha^1+\beta^1\sqrt{-1}=\dots=\alpha^n+\beta^n\sqrt{-1}=0$. Таким образом, $\alpha^1=\dots=\alpha^n=\beta^1=\dots=\beta^n=0$ и система векторов (4.10) является линейно независимой (в вещественном смысле).

Чтобы доказать, что любой вектор $Y=z^iX_i\in V^{\mathbb{C}}$ представляется в виде линейной комбинации (с вещественными коэффициентами) векторов (4.10), нужно каждый вектор X_i, входящий в формальную сумму Y разложить по базису $(e_1,\dots,e_n)$ и раскрыть скобки, воспользовавшись определением операций сложения и умножения на вещественное число и отождествлениями. Собрав коэффициенты перед векторами (4.10), мы получим разложение вектора Y по базису (4.10) (подробно распишите самостоятельно).

Итак, мы доказали, что комплексификация произвольного вещественного векторного пространства размерности n является $2n$-мерным вещественным векторным пространством. □

Комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ несет также структуру комплексного линейного пространства. Она задается с помощью операций (4.9), где α – комплексное число. Очевидно, что все 8 аксиом комплексного линейного пространства при этом выполняются.

Следствие 4.2. Комплексная размерность комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ равна n.

Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n)$ – базис $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства, построенный в теореме 4.4. Докажем, что система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Задача 4.7. Докажите, что система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ (комплексно) линейно независима.

Пусть Y – произвольный элемент из $V^{\mathbb{C}}$. Тогда в силу теоремы 4.4 его можно разложить по базису 4.10 с вещественными коэффициентами:

$$Y = \alpha^1 e_1 + \ldots \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n = (\alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1})e_1 + \ldots + (\alpha^n + \beta^n\sqrt{-1})e_n$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1}$, …, $z^n = \alpha^n + \beta^n\sqrt{-1}$. Тогда мы получим разложение вектора Y по векторам $(e_1, \ldots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. □

2.2. Оператор комплексного сопряжения.

Определим в комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ отображение $\tau : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ по формуле

$$\tau(z^i X_i) = \bar{z}^i X_i,$$

где $z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$, черта обозначает комплексное сопряжение. Это отображение называется *оператором комплексного сопряжения*. Очевидно, что оператор комплексного сопряжения является инволютивным, то есть $\tau^2 = id$.

Задача 4.8. Докажите, что оператор комплексного сопряжения τ является антилинейным отображением, то есть выполняются два условия:

$$\tau(Y_1 + Y_2) = \tau(Y_1) + \tau(Y_2); \quad \tau(zY) = \bar{z}\tau(Y),$$

$Y, Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 4.3. Если рассматривать комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ как вещественное векторное пространство, то оператор комплексного сопряжения будет обычным линейным оператором.

Теорема 4.5. *Пусть $X \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда вектор $X \in V$ тогда и только тогда, когда $\tau(X) = X$.*

Доказательство. Пусть $X \in V$. Тогда вектор X мы можем рассматривать как формальную сумму вида $1X$. Применим оператор τ: $\tau(X) = \tau(1X) = 1X = X$.

Обратно, пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$, такой что $\tau(Y) = Y$. Рассмотрим базис $(e_1, \ldots, e_n)$, построенный в следствии 4.2. Заметим, что он состоит из вещественных векторов, то есть из векторов, принадлежащих векторному пространству V. Тогда на разложение вектора Y по этому базису $Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$ можно посмотреть как на формальную сумму. Тогда получим по определению оператора комплексного сопряжения

$$\tau(Y) = \tau(Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n) = \bar{Y}^1 e_1 + \ldots + \bar{Y}^n e_n.$$

С другой стороны, $\tau(Y) = Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$. Откуда получим

$$\bar{Y}^1 e_1 + \ldots \bar{Y}^n e_n = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n,$$

то есть

$$\operatorname{Im} Y^1 e_1 + \ldots + \operatorname{Im} Y^n e_n = 0.$$

Так как система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ является базисом вещественного векторного пространства V (см. теорему 4.4) и числа $\operatorname{Im} Y^1, \ldots, \operatorname{Im} Y^n \in \mathbb{R}$, то в силу (вещественной) линейной независимости получим, что $\operatorname{Im} Y^1 = \ldots = \operatorname{Im} Y^n = 0$. Тогда вектор Y является линейной комбинацией вещественных векторов $e_1, \ldots, e_n$ с вещественными коэффициентами $\operatorname{Re} Y^1, \ldots, \operatorname{Re} Y^n$, то есть элементом из V. □

2.3. Отображения на комплексификации вещественного пространства.

Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Рассмотрим множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ всех $\mathbb{C}$-линейных отображений вида $w : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. Определим в этом множестве операции сложения и умножения на комплексное число стандартным образом

$$(w_1 + w_2)(Y) = w_1(Y) + w_2(Y); \quad (zw)(Y) = zw(Y),\ Y \in V^{\mathbb{C}}. \tag{4.11}$$

Эти операции удовлетворяют всем аксиомам комплексного линейного пространства. Таким образом, множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ наделяется структурой комплексного линейного пространства. Найдем его комплексную размерность.

Пусть $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис (не обязательно из вещественных векторов) комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$. Определим отображения $\varepsilon^i : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, которые каждому вектору из $V^{\mathbb{C}}$ ставят в соответствие его i-ю координату относительно базиса $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Очевидно, что это $\mathbb{C}$-линейные отображения.

Задача 4.9**.** Докажите, что отображения ε^i, $i = 1, \dots, n$ являются линейно независимыми и любой элемент из $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ с комплексными коэффициентами. Другими словами, система линейных отображений $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ образует базис комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Задача 4.10**.** Покажите, что для дуальных базисов $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ имеют место равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Докажите, что если для некоторой системы $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$ выполняются равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$, где $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис $V^{\mathbb{C}}$, то $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ является базисом $(V^{\mathbb{C}})^*$, дуальным базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Другими словами, свойство $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$ является характеристическим для дуального базиса.

Решение. Первое утверждение докажите самостоятельно. Мы докажем второе утверждение.

Пусть дан базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$ и дана система элементов $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$, удовлетворяющая требованиям $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Докажем сначала, что система $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$z_i \varepsilon^i = 0, \tag{4.12}$$

где $z_i \in \mathbb{C}$. Фиксируем произвольный индекс $j = 1, \dots, n$ и подействуем обеими частями равенства (4.12) на вектор ε_j. В силу определений суммы и произведения на комплексное число отображений ε^i получим

$$0 = (z_i \varepsilon^i)(\varepsilon_j) = z_i \varepsilon^i(\varepsilon_j) = z_i \delta^i_j = z_j.$$

Таким образом, $z_j = 0$ для любого $j = 1, \dots, n$, то есть система отображений $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ линейно независима.

Покажем, что любое отображение $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлено в виде линейной комбинации (с комплексными коэффициентами) отображений $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Действительно, для любого вектора $Y = Y^j \varepsilon_j \in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y) = w(Y^j \varepsilon_j) = Y^j w(\varepsilon_j) = Y^i \delta^j_i w_j = Y^i \varepsilon^j(\varepsilon_i) w_j = \varepsilon^j(Y^i \varepsilon_i) w_j = w_j \varepsilon^j(Y).$$

Таким образом, $w = w_j \varepsilon^j$, следовательно, $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ – базис $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Наконец, покажем, что для любого $i = 1, \dots, n$ отображение ε^i ставит в соответствие любому элементу $Y \in V^{\mathbb{C}}$ его i-ю координату в базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, то есть, что базис $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ является дуальным базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Действительно,

$$\varepsilon^i(Y) = \varepsilon^i(Y^j \varepsilon_j) = Y^j \varepsilon^i(\varepsilon_j) = Y^j \delta^i_j = Y^i.$$

☐

Пример 4.2**.** Пусть $u \in V^*$ – произвольный ковектор. Определим отображение $u^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ по формуле $u^{\mathbb{C}}(z^\alpha X_\alpha) = z^\alpha u(X_\alpha)$, где $z^\alpha X_\alpha \in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Отображение $u^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* ковектора u или *расширением ковектора* u *на комплексификацию* $V^{\mathbb{C}}$ *по линейности*. Очевидно, что комплексификация ковектора является $\mathbb{C}$-линейным отображением, то есть принадлежит множеству $(V^{\mathbb{C}})^*$. Отметим еще один очевидный факт $(u^{\mathbb{C}})|_V = u$.

Теорема 4.6**.** *Любой элемент* $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ *может быть представлен в виде конечной формальной суммы вида* $z_\alpha (u^\alpha)^{\mathbb{C}}$, *где* $z_i \in \mathbb{C}$, $u^\alpha \in V^*$, $\alpha = 1, \dots N \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V, $(e^1, \dots, e^n)$ – базис дуального векторного пространства (вещественного) V^*. Хорошо известно, что i-й ковектор дуального базиса ставит в соответствие каждому вектору из V его i-ю координату в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Рассмотрим комплексификации ковекторов дуального базиса $(e^i)^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

Отметим, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$, являющегося базисом вещественного векторного пространства V, будет базисом комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство (см. следствие 4.2). Покажем, что отображение $(e^i)^{\mathbb{C}}$ ставит в соответствие каждому элементу из $V^{\mathbb{C}}$ его

i-ю координату в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент Y из $V^{\mathbb{C}}$ и разложим его по базису $(e_1, \dots, e_n)$. Разложение $Y = Y^j e_j$ мы можем рассматривать как формальную сумму. Тогда

$$(e^i)^{\mathbb{C}}(Y) = (e^i)^{\mathbb{C}}(Y^j e_j) = Y^j e^i(e_j) = Y^j \delta^i_j = Y^i.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством дуального базиса $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Пусть $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ – произвольный элемент. Тогда для любого элемента $Y = Y^j e_j \in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y) = w(Y^j e_j) = Y^j w(e_j) = (e^j)^{\mathbb{C}}(Y) w_j = w_j (e^j)^{\mathbb{C}}(Y).$$

Здесь мы обозначили $w(e_j) = w_j$ – это комплексные числа. Таким образом, для любого элемента $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ имеет место равенство $w = w_j (e^j)^{\mathbb{C}}$. В зависимости от ситуации мы можем посмотреть на правую часть этого равенства и как на формальную сумму и как на линейную комбинацию, в которой операции сложения и умножения на комплексное число определены формулами (4.11). □

Следствие 4.3. Система отображений $((e^1)^{\mathbb{C}}, \dots, (e^n)^{\mathbb{C}})$ является (комплексным) базисом комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$. Координаты элементов из $(V^{\mathbb{C}})^*$ относительно этого базиса совпадают с их компонентами относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$.

2.4. Комплексификация тензоров.

Пусть t – тензор типа (r, s) на вещественном векторном пространстве V. Будем называть такие тензоры *вещественными.* Определим отображение

$$t^{\mathbb{C}} : \underbrace{V^{\mathbb{C}} \times \ldots \times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{(V^{\mathbb{C}})^* \times \ldots \times (V^{\mathbb{C}})^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{C}$$

по формуле

$$t^{\mathbb{C}}(z^{i_1}_{(1)} X^{(1)}_{i_1}, \dots, z^{i_1}_{(r)} X^{(r)}_{i_r}, \tilde{z}^{(1)}_{j_1} (u^{j_1}_{(1)})^{\mathbb{C}}, \dots, \tilde{z}^{(s)}_{j_s} (u^{j_s}_{(s)})^{\mathbb{C}}) =$$
$$= z^{i_1}_{(1)} \ldots z^{i_1}_{(r)} \tilde{z}^{(1)}_{j_1} \ldots \tilde{z}^{(s)}_{j_s} t(X^{(1)}_{i_1}, \dots, X^{(r)}_{i_r}, u^{j_1}_{(1)}, \dots, u^{j_s}_{(s)}).$$

Здесь мы использовали то, что каждый элемент $V^{\mathbb{C}}$ и $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде конечной формальной суммы указанного вида. Построенное отображение называется *комплексификацией* тензора t или *расширением тензора t по линейности.* Очевидно, что комплексификация тензора t комплексно линейна по каждому аргументу.

Замечание 4.4. Пусть T – вещественный тензор типа $(r, 1)$. Тогда он может быть отождествлен с отображением вида

$$t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r\,\text{раз}} \to V$$

(см. курс Тензорная алгебра) по формуле

$$T(X_1, \dots, X_r, u) = u(t(X_1, \dots, X_r)).$$

Тогда его комплексификация $t^{\mathbb{C}}$ будет отображением

$$t^{\mathbb{C}} : \underbrace{V^{\mathbb{C}} \times \ldots \times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}} \to V^{\mathbb{C}},$$

которое определяется формулой

$$t^{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_r) = z^{i_1}_{(1)} \ldots z^{i_r}_{(r)} t(X^{(1)}_{i_1}, \dots, X^{(r)}_{i_r}),$$

где $Y_1 = z^{i_1}_{(1)} X^{(1)}_{i_1}, \dots, Y_r = z^{i_r}_{(r)} X^{(r)}_{i_r} \in V^{\mathbb{C}}$. Можно доказать, что оба определения комплексификации тензора T типа $(r, 1)$ эквивалентны. Мы проведем доказательство этого утверждения в случае тензора типа (1,1), оставляя доказательство общего случая читателю.

Пусть $L : V \to V$ – линейный оператор, с которым отождествляется тензор $T : V \times V^* \to \mathbb{R}$. Тогда они связаны между собой формулой $T(X, u) = u(L(X))$. Построим комплексификации для T и L согласно введенным определениям. Мы получим

$$T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}) = z^i \tilde{z}_j T(X_i, u^j); \quad L^{\mathbb{C}}(z^i X_i) = z^i L(X_i).$$

Нам нужно показать, что $T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}) = (\tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i))$. Имеем

$$T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}) = z^i \tilde{z}_j T(X_i, u^j) = z^i \tilde{z}_j u^j(L(X_i)) = z^i \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}(L(X_i)) = \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i)) =$$
$$= (\tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i)).$$

Пример 4.3. Пусть на вещественном векторном пространстве V^2 задана евклидова структура g (см. курс Тензорная алгебра). Это тензор типа (2,0). Рассмотрим его комплексификацию $g^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, заданную формулой

$$g^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}^k \tilde{X}_k) = z^i \tilde{z}^k g(X_i, \tilde{X}_k).$$

Докажем, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры, на комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство. Линейность и симметричность отображения $g^{\mathbb{C}}$ очевидна.

Пусть (e_1, e_2) – ортонормированный базис пространства V. Тогда эти же векторы будут являться базисом комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$, а значит, любой вектор Y представляется в виде их линейной комбинации с комплексными коэффициентами $Y = Y^1 e_1 + Y^2 e_2$. Пусть $g^{\mathbb{C}}(Y, \tilde{Y}) = 0$ для любого вектора $\tilde{Y} \in V^{\mathbb{C}}$. В частности, это равенство верно для вектора $\tilde{Y} = e_1$. В этом случае получим

$$0 = g^{\mathbb{C}}(Y^1 e_1 + Y^2 e_2, e_1) = Y^1 g(e_1, e_1) + Y^2 g(e_2, e_1) = Y^1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что базис (e_1, e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g.

Аналогичным образом получим для $\tilde{Y} = e_2$, что $Y^2 = 0$. Таким образом, $Y = 0$. По определению это означает, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$.

Покажем, что эта структура не является евклидовой. Для этого рассмотрим два вектора $e_1 + \sqrt{-1} e_2$ и $e_1 - \sqrt{-1} e_2$. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1} e_2, e_1 + \sqrt{-1} e_2) = g(e_1, e_1) + \sqrt{-1} g(e_1, e_2) + \sqrt{-1} g(e_2, e_1) - g(e_2, e_2) = 1 - 1 = 0.$$

Мы воспользовались тем, что базис (e_1, e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g. Итак, мы получаем, что для ненулевого вектора $e_1 + \sqrt{-1} e_2$

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1} e_2, e_1 + \sqrt{-1} e_2) = 0.$$

Мы получаем, что определение евклидовой структуры не выполняется для отображения $g^{\mathbb{C}}$, а значит, $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры. Аналогично можно показать, что для вектора $e_1 - \sqrt{-1} e_2$ имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 - \sqrt{-1} e_2, e_1 - \sqrt{-1} e_2) = 0.$$

Такие векторы называются *изотропными*. Другими словами, ненулевой вектор в псевдо-евклидовом пространстве называется *изотропным*, если его длина равна нулю.

Задача 4.11. Докажите, что векторы $(e_1 - \sqrt{-1} e_2, e_1 + \sqrt{-1} e_2)$ являются линейно независимыми, а значит, образуют базис $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Отметим еще раз, что этот базис состоит из изотропных векторов. □

Пример 4.4. Пусть J – тензор типа (1,1) на вещественном векторном пространстве V. Докажем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ этого тензора коммутирует с оператором комплексного сопряжения τ.

По определению комплексификации тензора получим

$$\tau \circ J^{\mathbb{C}}(z^i X_i) = \tau(z^i J(X_i)) = \bar{z}^i J(X_i) = J^{\mathbb{C}}(\bar{z}^i X_i) = J^{\mathbb{C}} \circ \tau(z^i X_i). \square$$

Задача 4.12. Пусть g – тензор типа (2,0) на вещественном векторном пространстве V. Докажите, что

$$\overline{g^{\mathbb{C}}(Y_1, Y_2)} = g^{\mathbb{C}}(\tau Y_1, \tau Y_2),$$

где $Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$.

§ 4.3. Проекторы.

Пусть V – вещественное векторное пространство. Линейное отображение $P : V \to V$ называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Теорема 4.7. *Линейное отображение $P : V \to V$ является проектором тогда и только тогда, когда для любого элемента a из образа* $\operatorname{Im} P$ *проектора P имеем $P(a) = a$.*

Доказательство. Пусть дан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \operatorname{Im} P$, то есть существует элемент $X \in V$, такой что $a = P(X)$. Тогда с учетом определения проектора получим

$$P(a) = P(P(X)) = P^2(X) = P(X) = a.$$

Обратно, пусть $a \in V$ такой элемент, что $P(a) = a$. Тогда $a \in \operatorname{Im} P$ по определению образа отображения. ☐

Пример 4.5. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Рассмотрим отображение $P : V^3 \to V^3$, заданное формулой

$$P(\vec{x}) = \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a},$$

где $\vec{a} \in V^3$ – некоторый фиксированный вектор, в числителе дроби стоит скалярное произведение векторов. Очевидно, что это отображение линейно в силу линейности скалярного произведения векторов.

Образом построенного отображения является множество всех векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$. Пусть $\vec{b} \in \operatorname{Im} P$, то есть $\vec{b} = t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$P(\vec{b}) = P(t\vec{a}) = tP(\vec{a}) = t\frac{(\vec{a}\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = t\vec{a} = \vec{b}.$$

По теореме 4.7 это означает, что отображение P является проектором. Этот проектор называется *проектированием вектора на прямую.* ☐

Предложение 4.1 **.** *Если на вещественном векторном пространстве V задан проектор P, то оно распадается в прямую сумму образа и ядра этого проектора*

$$V = \operatorname{Im} P \oplus Ker\, P.$$

Доказательство. Пусть на векторном пространстве V задан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $X \in V$ и обозначим через $b = X - P(X)$. Докажем, что $b \in Ker\, P$. Действительно,

$$P(b) = P(X - P(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = 0.$$

Таким образом, $X = P(X) + b$, то есть представим в виде суммы элемента из образа проектора P и его ядра.

Нам осталось доказать, что $Ker\, P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$. Пусть $X \in Ker\, P \cap \operatorname{Im} P$, то есть $P(X) = 0$ и $X = P(Y)$, $Y \in V$. Тогда

$$0 = P(X) = P^2(Y) = P(Y) = X.$$

Таким образом, $X = 0$. ☐

Оказывается верно и обратное.

Предложение 4.2 **.** *Если вещественное векторное пространство V распадается в прямую сумму своих подпространств*

$$V = A \oplus B,$$

то существует проектор $P : V \to V$, такой что $\operatorname{Im} P = A$, $Ker\, P = B$.

Пусть P – проектор на вещественном векторном пространстве V. Рассмотрим отображение $Q = id - P$.

Задача 4.13. Докажите, что отображение Q является проектором.

Этот проектор называется *дополнительным проектором для P.*

Задача 4.14. Докажите, что если Q – дополнительный проектор для P, то P – дополнительный проектор для Q. В связи с этим проекторы P и Q называются *взаимно дополнительными.*

Задача 4.15. Найдите дополнительный проектор к проектору P из примера 4.5 и выясните геометрический смысл этого проектора.

Ответ: $Q(\vec{x}) = id - \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$. Ортогональное проектирование вектора на плоскость σ, перпендикулярную вектору $\vec{a}$.

Задача 4.16. Пусть P и Q – взаимно дополнительные проекторы. Докажите, что

$$\operatorname{Im} P = Ker\, Q; \quad KerP = \operatorname{Im} Q.$$

Следствие 4.4. Композиция взаимно дополнительных проекторов равна нулю.

Задача 4.17. Пусть P и Q – взаимно дополнительные проекторы. Докажите, что

$$Im\, P \cap Ker\, P = Im\, P \cap Im\, Q = \{0\}.$$

§ 4.4. Комплексификация оператора комплексной структуры. Адаптированный базис.

4.1. Построение адаптированного базиса.

Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры на нем. В задаче 4.3 был построен так называемый RA-базис, в котором матрица оператора комплексной структуры имеет достаточно „простой“ вид. Оказывается для комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ этого оператора можно построить в $V^{\mathbb{C}}$ базис, в котором $J^{\mathbb{C}}$ будет также иметь „простой“ вид.

Зададим на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ два отображения σ и $\bar{\sigma}$ формулами

$$\begin{array}{ll} \sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}); \\ \bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Задача 4.18. Докажите, что отображения σ и $\bar{\sigma}$ являются взаимно дополнительными проекторами.

Предложение 4.3 . *Образ проектора σ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$. Образ проектора $\bar{\sigma}$ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $-\sqrt{-1}$.*

Доказательство. Пусть $W \in \operatorname{Im} \sigma$ – произвольный элемент, то есть $W = \sigma(Y)$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$J^{\mathbb{C}}(W) = J(\sigma(Y)) = \frac{1}{2} J^{\mathbb{C}} \circ (id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \frac{1}{2}(J^{\mathbb{C}} + \sqrt{-1}id)(Y) =$$
$$= \sqrt{-1}\frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \sqrt{-1}W.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(J^{\mathbb{C}})^2 = -id$ (это непосредственно следует из условия $J^2 = -id$ и определения комплексификации тензора).

Обратно, пусть $W \in V^{\mathbb{C}}$ является собственным вектором оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}(W) = \sqrt{-1}W \tag{4.13}$$

Докажем, что W принадлежит образу проектора σ. Из (4.13) получим, что

$$(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(W) = 0,$$

то есть W принадлежит ядру проектора $\bar{\sigma}$. Так как σ и $\bar{\sigma}$ взаимно дополнительные проекторы, то в силу задачи 4.16 ядро проектора $\bar{\sigma}$ совпадает с образом проектора σ, то есть W принадлежит $\operatorname{Im} \sigma$. Итак, мы доказали, что $\operatorname{Im} \sigma = D_J^{\sqrt{-1}}$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Обозначим образ проектора σ через $D_J^{\sqrt{-1}}$, а образ проектора $\bar{\sigma}$ через $D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда согласно предложению 4.1 и задаче 4.16 получим, что

$$V^{\mathbb{C}} = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}}. \tag{4.14}$$

Замечание 4.5. Проекторы $\sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ и $\bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ являются комплексно линейными отображениями, то есть

$$\sigma(zY) = z\sigma(Y); \quad \bar{\sigma}(zY) = z\bar{\sigma}(Y),$$

$z \in \mathbb{C}$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$.

Предложение 4.4 . *Собственные подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ комплексно сопряжены друг другу, то есть*

$$\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) = D_J^{-\sqrt{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент, то есть $J^{\mathbb{C}}(Y) = \sqrt{-1}Y$. Тогда с учетом примера 4.4 получим

$$J^{\mathbb{C}}(\tau Y) = \tau(J^{\mathbb{C}}Y) = \tau(\sqrt{-1}Y) = -\sqrt{-1}\tau Y,$$

то есть $\tau Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$, то есть $\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) \subset D_J^{-\sqrt{-1}}$.

Аналогичным образом мы можем доказать, что $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) \subset D_J^{\sqrt{-1}}$.

Обратно, пусть $Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда

$$Y = \tau^2 Y = \tau(\tau Y)$$

Как мы видели выше $\tau Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$, то есть $Y \in \tau(D_J^{\sqrt{-1}})$.

Итак, мы доказали требуемое равенство и кроме того, в силу инволютивности τ получили, что

$$\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) = D_J^{\sqrt{-1}}.$$

□

Лемма 4.1. *В принятых обозначениях*

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \bar{\sigma}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Тогда

$$\tau \circ \bar{\sigma}(Y) = \frac{1}{2}\tau(Y + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(Y)) = \frac{1}{2}(\tau(Y) - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(\tau Y)) = \sigma \circ \tau(Y).$$

Здесь мы воспользовались результатами примера 4.4. □

Рассмотрим сужения отображений σ и $\bar{\sigma}$ на векторное пространство V, которое мы будем рассматривать как комплексное линейное пространство. Отметим, что комплексная структура V отличается от комплексной структуры комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Умножение на комплексные числа в комплексном линейном пространстве V задается формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX, \tag{4.15}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $X \in V$. Изменение комплексной структуры приводит к тому, что отображение $\bar{\sigma}|_V$ становится комплексно антилинейным, то есть

$$\bar{\sigma}|_V(X_1 + X_2) = \bar{\sigma}|_V(X_1) + \bar{\sigma}|_V(X_2); \quad \bar{\sigma}|_V(zX) = \bar{z}\bar{\sigma}|_V(X).$$

Отображение $\sigma|_V$ остается по-прежнему комплексно линейным. Точнее верны следующие две теоремы.

Теорема 4.8. *Отображение $\sigma|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ является изоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, сохраняющая операции сложения векторов и умножения вектора на комплексное число.*

Доказательство. Из предложения 4.3 следует, что $\sigma|_V(X) \in D_J^{\sqrt{-1}}$ для любого вектора $X \in V$.

Докажем, что отображение $\sigma|_V$ сюръективно. Пусть $Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент. Рассмотрим вектор $X = Y + \tau Y$. Очевидно, что $\tau X = X$, а значит, по теореме 4.5 вектора X принадлежит векторному пространству V. Покажем, что $\sigma|_V(X) = Y$. Действительно,

$$\sigma|_V(X) = \sigma(Y + \tau Y) = \sigma Y + \tau \circ \bar{\sigma} Y. \tag{4.16}$$

Здесь мы воспользовались леммой 4.1. Так как $Y \in D_J^{\sqrt{-1}} = \operatorname{Im}\sigma$, то в силу теоремы 4.7 получим $\sigma Y = Y$. Так как проекторы σ и $\bar{\sigma}$ взаимно дополнительные, то $Y \in Ker\,\bar{\sigma}$, а значит, $\bar{\sigma}Y = 0$. Тогда из (4.16) получим, что $\sigma|_V(X) = Y$. Итак, мы доказали, что отображение $\sigma|_V$ сюръективно.

Докажем инъективность отображения $\sigma|_V$. Пусть $X \in Ker\,\sigma \cap V$. Тогда $X \in \operatorname{Im}\bar{\sigma} = D_J^{-\sqrt{-1}}$. Так как $\tau X = X$ для $X \in V$ и $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) = D_J^{\sqrt{-1}} = \operatorname{Im}\sigma$, то $X \in Ker\,\sigma \cap \operatorname{Im}\sigma = \{0\}$. Итак, $X = 0$ и отображение $\sigma|_V$ является инъективным.

Нам осталось доказать, что отображение $\sigma|_V$ комплексно линейно, то есть

$$\sigma|_V(X_1 + X_2) = \sigma|_V(X_1) + \sigma|_V(X_2); \quad \sigma|_V(zX) = z\sigma|_V(X),$$

где $X, X_1, X_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Докажем второе соотношение, как более сложное, а первое соотношение доказывается аналогично. Используя (4.21) получим

$$\begin{aligned}\sigma|_V(zX) = \sigma|_V(\alpha X + \beta JX) &= \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)(\alpha X + \beta JX) = \\ &= \frac{1}{2}((\alpha + \sqrt{-1}\beta)X - \sqrt{-1}(\alpha + \sqrt{-1}\beta)JX) = \\ &= (\alpha + \sqrt{-1}\beta)\frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX) = z\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$. Отметим, что мы воспользовались тем, что $J^{\mathbb{C}}(X) = J(X)$ для векторов $X \in V$. □

Теорема 4.9. *Отображение* $\bar{\sigma}|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ *является антиизоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, для которой выполняется два условия:*

$$\bar{\sigma}|_V(X_1 + X_2) = \bar{\sigma}|_V(X_1) + \bar{\sigma}|_V(X_2); \quad \bar{\sigma}|_V(zX) = \bar{z}\bar{\sigma}|_V(X), \tag{4.17}$$

$X, X_1, X_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Инъективность и сюръективность отображения $\bar{\sigma}|_V$ доказывается также как в предыдущей теореме. Докажем второе соотношение из (4.17). Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}|_V(zX) &= \bar{\sigma}|_V(\alpha X + \beta JX) = \\ &= \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)(\alpha X + \beta JX) = \frac{1}{2}((\alpha - \sqrt{-1}\beta)X + \sqrt{-1}(\alpha - \sqrt{-1}\beta)JX) = \\ &= (\alpha - \sqrt{-1}\beta)\frac{1}{2}(X + \sqrt{-1}JX) = \bar{z}\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

□

Следствие 4.5. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис комплексного линейного пространства V. Тогда система векторов $(\sigma|_V(e_1), \ldots, \sigma|_V(e_n), \bar{\sigma}|_V(e_1), \ldots, \bar{\sigma}|_V(e_n))$ образует базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Доказательство. Так как отображение $\sigma|_V$ является изоморфизмом, то переводит базис векторного пространства V в базис $(\sigma|_V(e_1), \ldots, \sigma|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$. Аналогично, антиизоморфизм $\bar{\sigma}|_V$ переводит базис V в базис $(\bar{\sigma}|_V(e_1), \ldots, \bar{\sigma}|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$. В силу (4.14) прямая сумма этих подпространств является линейным пространством $V^{\mathbb{C}}$, а значит система векторов

$$(\sigma|_V(e_1), \ldots, \sigma|_V(e_n), \bar{\sigma}|_V(e_1), \ldots, \bar{\sigma}|_V(e_n))$$

будет базисом $V^{\mathbb{C}}$. □

Введем обозначения $\varepsilon_1 = \sigma|_V(e_1), \ldots, \varepsilon_n = \sigma|_V(e_n), \varepsilon_{\hat{1}} = \bar{\sigma}|_V(e_1), \ldots, \varepsilon_{\hat{n}} = \bar{\sigma}|_V(e_n)$. Тогда полученный базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ примет вид $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Такой базис называется *базисом, адаптированным комплексной структуре векторного пространства* V, или, короче, *A- базисом.*

Договоримся, что индексы a, b, c, d, e, f, g, h принимают значения от 1 до n, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ принимают значения от n до $2n$ и $\hat{a} = a + n$, где $2n$ – вещественная размерность векторного пространства V. Используя эти обозначения, A-базис коротко будет записываться $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$.

Задача 4.19. Докажите, что для A-базиса $\tau(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\hat{a}}$.

Указание: используйте лемму 4.1.

Построенный A-базис для комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ хорош тем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в этом базисе имеет диагональный вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Действительно, согласно предложению 4.3 получим

$$(J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a; \quad (J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Используя определение матрицы оператора, получим (4.18).

4.2. Свойства компонент тензоров в адаптированном базисе.

Будем называть тензор *вещественным*, если он определен на вещественном векторном пространстве V. Назовем *компонентами вещественного тензора в A-репере* компоненты его комплексификации в A-репере. Исследуем свойства компонент некоторых вещественных тензоров в A-репере.

Пример 4.6. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$ – произвольный A-базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Так как векторное пространство V мы можем рассматривать как подмножество в $V^{\mathbb{C}}$, то произвольный вектор $X \in V$ мы можем разложить по этому A-базису

$$X = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}},$$

где $X^a, X^{\hat{a}}$ – это некоторые комплексные числа, являющиеся координатами вектора X в A-базисе. Докажем, что для координат вектора X имеем

$$\bar{X}^a = X^{\hat{a}}; \quad \bar{X}^{\hat{a}} = X^a, \tag{4.19}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Действительно, используя задачу 4.19, получим

$$\tau X = \tau(X^a \varepsilon_a + X^{\hat{a}} \varepsilon_{\hat{a}}) = \bar{X}^a \varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}} \varepsilon_a.$$

Мы воспользовались здесь антилинейностью оператора комплексного сопряжения. Так как $X \in V$, то есть вещественный вектор, то согласно теореме 4.5 получим $\tau X = X$. Тогда

$$X^a \varepsilon_a + X^{\hat{a}} \varepsilon_{\hat{a}} = \bar{X}^a \varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}} \varepsilon_a.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим соотношения (4.19).

Итак, мы показали, что для вещественного вектора координаты в A-базисе попарно комплексно сопряжены. □

Пример 4.7. Пусть ковектор $\omega \in V^*$, где V – $2n$-мерное вещественное векторное пространство, на котором фиксирован оператор комплексной структуры J. Рассмотрим комплексификацию $\omega^{\mathbb{C}}$ ковектора ω и найдем его компоненты относительно A-базиса

$$\omega_a \equiv (\omega^{\mathbb{C}})_a = \omega^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a) = \frac{1}{2}(\omega(e_a) - \sqrt{-1}\omega(Je_a)).$$

Заметим, что $\omega(e_a)$ и $\omega(Je_a)$ – вещественные числа. Тогда комплексно сопрягая обе части последнего равенства, получим

$$\overline{\omega_a} \equiv \overline{(\omega^{\mathbb{C}})_a} = \frac{1}{2}(\omega(e_a) + \sqrt{-1}\omega(Je_a)) = \omega^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}(e_a)) = (\omega^{\mathbb{C}})_{\hat{a}} \equiv \omega_{\hat{a}}.$$

Итак, мы получили, что компоненты (относительно A-базиса) комплексификации $\omega^{\mathbb{C}}$ произвольного ковектора ω, определенного на вещественном векторном пространстве V, будут попарно комплексно сопряжены. □

Замечание 4.6. Аналогично примеру 4.6 можно доказать, что для любого тензора t типа $(r, 0)$ или $(r, 1)$ компоненты в A-базисе его комплексификации будут попарно комплексно сопряжены. При этом при комплексном сопряжении компоненты индексы без крышки переходят в такие же индексы с крышкой и наоборот.

Задача 4.20. Докажите, что компоненты комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в A-базисе попарно комплексно сопряжены.

§ 4.5. Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве.

Пусть дано комплексное линейное пространство V (комплексной) размерности n.

Определение 4.1. Отображение

$$h : V \times V \to \mathbb{C},$$

обладающее свойствами

1) аддитивностью по обоим аргументам

$$h(X_1 + X_2, Y) = h(X_1, Y) + h(X_2, Y); \quad h(X, Y_1 + Y_2) = h(X, Y_1) + h(X, Y_2);$$

2) комплексной однородностью по первому аргументу

$$h(zX, Y) = zh(X, Y);$$

3) *комплексной антиоднородностью* по второму аргументу

$$h(X, zY) = \bar{z}h(X, Y);$$

4) свойством *эрмитовости*

$$\overline{h(X, Y)} = h(Y, X),$$

где $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$, называется *эрмитовой формой.*

Свойства 1), 2) и 3) называются *линейностью по первому аргументу и антилинейностью по второму аргументу* или *полуторалинейностью* .

Эрмитова форма h называется *невырожденной*, если

$$h(X,Y)=0\,\forall Y\in V\ \Rightarrow\ X=0.$$

Эрмитова форма h называется *положительно определенной*, если $h(X,X)\geq 0$ для любого $X\in V$, причем $h(X,X)=0$ тогда и только тогда, когда $X=0$. Положительно определенная эрмитова форма называется *эрмитовой метрикой* на комплексном векторном пространстве V.

Задача 4.21**.** Докажите, что положительно определенная эрмитова форма является невырожденной.

Замечание 4.7**.** Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве является аналогом билинейной формы на вещественном векторном пространстве. Соответственно положительно определенная эрмитова форма является аналогом евклидовой структуры на вещественном векторном пространстве.

Пример 4.8**.** Пусть дано вещественное евклидово векторное пространство (V,g) размерности $2n$ и оператор комплексной структуры J на V, причем $g(JX,JY)=g(X,Y)$, $X,Y\in V$ (*условие согласованности*). Пару (J,g), удовлетворяющую условию согласованности будем называть *эрмитовой структурой* на вещественном векторном пространстве V.

Задача 4.22**.** Докажите, что для эрмитовой структуры (J,g) верно равенство

$$g(X,JY)+g(JX,Y)=0, \tag{4.20}$$

где $X,Y\in V$.

В частности, из этого следует, что $g(X,JX)=0$ для любого $X\in V$.

Указание: в условии согласованности замените X на JX и воспользуйтесь свойством оператора комплексной структуры $J^2=-id$. Не забудьте, что евклидова структура симметрична.

Как мы знаем (см. теорему 4.2), в V умножение векторов на комплексные числа задается формулой

$$zX=\alpha X+\beta JX, \tag{4.21}$$

где $z=\alpha+\sqrt{-1}\beta$, $X\in V$, то есть V наделено структурой комплексного линейного пространства.

Определим на V как на комплексном линейном пространстве отображение

$$\langle\langle,\rangle\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$$

по формуле

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle=g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY),$$

где $X,Y\in V$. Докажем, что такое отображение будет полуторалинейной формой на V относительно комплексной структуры, заданной формулой (4.21).

Очевидно, что $\langle\langle X_1+X_2,Y\rangle\rangle=\langle\langle X_1,Y\rangle\rangle+\langle\langle X_2,Y\rangle\rangle$. Докажем, что $\langle\langle zX,Y\rangle\rangle=z\langle\langle X,Y\rangle\rangle$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle\langle zX,Y\rangle\rangle&=g(\alpha X+\beta JX,Y)+\sqrt{-1}g(\alpha X+\beta JX,JY)=\\&=\alpha(g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY))+\beta\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}g(JX,Y)+g(JX,JY))=\\&=(\alpha+\sqrt{-1}\beta)(g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY))=z\langle\langle X,Y\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условием согласованности и соотношением (4.20). Аналогично доказывается антилинейность по второму аргументу, то есть

$$\langle\langle X,Y_1+Y_2\rangle\rangle=\langle\langle X,Y_1\rangle\rangle+\langle\langle X,Y_2\rangle\rangle;\quad \langle\langle X,zY\rangle\rangle=\bar{z}\langle\langle X,Y\rangle\rangle,$$

где $X,Y_1,Y_2,Y\in V$.

Наконец, проверим свойство эрмитовости:

$$\begin{aligned}\overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle}&=\overline{g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY)}=g(X,Y)-\sqrt{-1}g(X,JY)=\\&=g(X,Y)+\sqrt{-1}g(JX,Y)=g(Y,X)+\sqrt{-1}g(Y,JX)=\langle\langle Y,X\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что отображение $\langle\langle,\rangle\rangle$ является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве V.

Задача 4.23. Докажите, что эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$ положительно определена.

Задача 4.24. Какой будет эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$, если g будет псевдо-евклидовой структурой? □

Следующая теорема объясняет название „эрмитова структура“ для пары (J, g).

Теорема 4.10. *Пусть V – вещественное векторное пространство четной размерности $2n$. Тогда задание эрмитовой структуры (J, g) на нем равносильно заданию положительно определенной эрмитовой формы $\langle\langle , \rangle\rangle$ на V, рассматриваемом как комплексное линейное пространство с комплексной структурой, определенной оператором комплексной структуры J.*

Доказательство. В одну сторону теорема доказана в примере 4.8, то есть мы построили положительно определенную эрмитову форму, используя эрмитову структуру (J, g), где J – оператор комплексной структуры, g – евклидова структура, согласованная с J.

Обратно, пусть дана положительно определенная эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$ на V. Тогда для любых векторов $X, Y \in V$ комплексное число $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ представим в виде

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g(X, Y) + \sqrt{-1}\Omega(X, Y),$$

где $g(X, Y)$ – это вещественная часть числа $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, а $\Omega(X, Y)$ – мнимая. Таким образом, мы получаем два отображения

$$g : V \times V \to \mathbb{R}; \quad \Omega : V \times V \to \mathbb{R}$$

задаваемые формулами

$$g(X, Y) = \mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle; \quad \Omega(X, Y) = \mathrm{Im}\langle\langle X, Y\rangle\rangle.$$

Задача 4.25. Докажите, что отображения g и Ω вещественно линейны по каждому аргументу.

Докажем, что отображение g симметрично, а отображение Ω кососимметрично. Имеем

$$g(Y, X) = \mathrm{Re}\langle\langle Y, X\rangle\rangle = \mathrm{Re}\,\overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = \overline{\mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = g(X, Y).$$

Здесь мы воспользовались тем, что вещественная часть комплексного числа является вещественным числом, а значит, равна своему комплексному сопряжению. Аналогично получим

$$\Omega(Y, X) = \mathrm{Im}\langle\langle Y, X\rangle\rangle = \mathrm{Im}\,\overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = -\,\mathrm{Im}\langle\langle X, Y\rangle\rangle = -\Omega(X, Y).$$

Таким образом, отображение Ω является кососимметрическим тензором типа (2,0).

В силу свойства эрмитовости формы $\langle\langle , \rangle\rangle$ получим, что

$$\overline{\langle\langle X, X\rangle\rangle} = \langle\langle X, X\rangle\rangle,$$

то есть число $\langle\langle X, X\rangle\rangle$ вещественно. Тогда

$$g(X, X) = \mathrm{Re}\langle\langle X, X\rangle\rangle = \langle\langle X, X\rangle\rangle \geq 0,$$

причем

$$g(X, X) = 0 \Leftrightarrow \langle\langle X, X\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Здесь мы воспользовались положительной определенностью эрмитовой формы $\langle\langle , \rangle\rangle$. Следовательно, g является евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве V.

Нам осталось построить оператор комплексной структуры J, использую тензор Ω и доказать, что полученная комплексная структура согласована с евклидовой структурой g.

Зададим отображение $J : V \to V$ формулой

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY),$$

$X, Y \in V$. Здесь мы строим отображение J, поднимая один индекс у тензора Ω (см. курс Тензорная алгебра). Линейность отображение J очевидна. Кроме того,

$$\begin{aligned} g(X, J^2Y) = \Omega(X, JY) = \mathrm{Im}\langle\langle X, JY\rangle\rangle = \mathrm{Im}\langle\langle X, \sqrt{-1}Y\rangle\rangle = \\ = \mathrm{Im}(-\sqrt{-1}\langle\langle X, Y\rangle\rangle) = -\,\mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle = -g(X, Y). \end{aligned}$$

Напомним, что умножение на комплексное число в V мы определили по формуле $zX = \alpha + \beta JX$, в частности, $\sqrt{-1}X = JX$ в данном комплексном линейном пространстве V. Кроме того, мы воспользовались антилинейностью эрмитовой формы по второму аргументу.

Следовательно, $g(X, J^2Y + Y) = 0$ для любого $X \in V$. Откуда в силу невырожденности g получим $J^2Y = -Y$ для любого $Y \in V$, то есть $J^2 = -id$, то есть J является оператором комплексной структуры.

Наконец, докажем согласованность евклидовой структуры g и оператора комплексной структуры J. Имеем

$$g(X, JY) = \Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X) = -g(Y, JX) = -g(JX, Y).$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью Ω и симметричностью g. Заменяя Y на JY получим $g(JX, JY) = g(X, Y)$. □

Пример 4.9. Пусть (V, g) – вещественное евклидово векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Как мы знаем (см. § 4.2.), $V^{\mathbb{C}}$ является комплексным линейным пространством.

Определим отображение $H : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$H(X, Y) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y),$$

где $X, Y \in V^{\mathbb{C}}$. Докажем, что отображение H является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. Проверим антилинейность отображения H по второму аргументу (остальные условия проверяются аналогично). Имеем

$$H(X, zY) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau(zY)) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \bar{z}\tau Y) = \bar{z}2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y) = \bar{z}H(X, Y).$$

Здесь мы воспользовались антилинейностью оператора комплексного сопряжения τ и комплексной линейностью комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g.

Наконец, проверим свойство эрмитовости отображения H:

$$\overline{H(Y, X)} = \overline{2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y)} = 2g^{\mathbb{C}}(\tau X, Y) = 2g^{\mathbb{C}}(Y, \tau X) = H(X, Y).$$

Мы воспользовались здесь результатом задачи 4.12 и инволютивностью оператора комплексного сопряжения. Итак, отображение H является эрмитовой формой на комплексном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$.

Теорема 4.11. *Пусть (V, g) – евклидово вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры, согласованный с евклидовой структурой g. Тогда изоморфизм $\sigma|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ и антиизоморфизм $\bar{\sigma}|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ являются изометрией и антиизометрией соответственно, то есть*

$$H(\sigma|_V(X), \sigma|_V(Y)) = \langle\langle X, Y\rangle\rangle; \quad H(\bar{\sigma}|_V(X), \bar{\sigma}|_V(Y)) = \langle\langle Y, X\rangle\rangle,$$

$X, Y \in V$.

Доказательство. Имеем

$$H(\bar{\sigma}|_V(X), \bar{\sigma}|_V(Y)) = 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X), \tau\bar{\sigma}|_V(Y)) = 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X), \sigma|_V(Y)) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\mathbb{C}}(X + \sqrt{-1}JX, Y - \sqrt{-1}JY) = \frac{1}{2}(g(X, Y) - \sqrt{-1}g(X, JY) + \sqrt{-1}g(JX, Y) + g(JX, JY)) =$$
$$= g(X, Y) - \sqrt{-1}g(X, JY) = \overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = \langle\langle Y, X\rangle\rangle.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tau \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$ и для вещественных векторов $\tau(X) = X$.

Второе соотношение доказывается аналогично. □

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ комплексного линейного пространства V называется *ортонормированным* относительно эрмитовой метрики $\langle\langle, \rangle\rangle$, если $\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab}$, где δ_{ab} – это дельта Кронекера.

Замечание 4.8. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базис относительно эрмитовой метрики $\langle\langle, \rangle\rangle$ комплексного линейного пространства V. Тогда соответствующий вещественно адаптированный базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ вещественного векторного пространства V будет ортонормированным базисом относительно евклидовой структуры g.

Действительно,

$$\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad g(e_a, e_b) + \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) = \delta_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(e_a, e_b) = g(Je_a, Je_b) = \delta_{ab} \\ g(e_a, Je_b) = 0 \end{cases}$$

Следствие 4.6**.** Ортонормированный относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$ базис комплексного линейного пространства V при изометрии $\sigma|_V$ (соответственно, антиизометрии $\bar\sigma|_V$) переходит в ортонормированный относительно метрики H базис комплексного линейного пространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ (соответственно, пространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$). Другими словами, отображения $\sigma|_V$ и $\bar\sigma|_V$ переводят ортонормированный базис комплексного линейного пространства V в ортонормированный базис комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в следствии 4.6 мы получаем A-базис пространства $V^{\mathbb{C}}$. Но если раньше мы брали произвольный базис в V и действовали на него отображениями σ и $\bar\sigma$, то теперь мы рассматриваем только ортонормированные базисы в V. Будем называть такие базисы *адаптированными эрмитовой структуре* (J, g) или, короче, *A-базисами.* Напомним, что A-базисы мы договорились обозначать $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat 1}, \ldots, \varepsilon_{\hat n})$, где n – комплексная размерность пространства V.

Так как базисы, адаптированные эрмитовой структуре (J, g) являются частным случаем базисов, адаптированных оператору комплексной структуры J, то матрица комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ в таком базисе имеет вид (4.18). Выясним, какой вид имеет матрица комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g в таком базисе. Согласно введенным обозначениям матрицу $g^{\mathbb{C}}$ мы можем записать в следующем блочном виде

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} g^{\mathbb{C}}_{ab} & g^{\mathbb{C}}_{\hat a b} \\ g^{\mathbb{C}}_{a\hat b} & g^{\mathbb{C}}_{\hat a\hat b} \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$; $a, b = 1, \ldots, n$; $\hat a = a + n$. Вычислим элементы каждого из блоков записанной матрицы. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}_{ab} = g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \frac{1}{4} g^{\mathbb{C}}(e_a - \sqrt{-1}Je_a, e_b - \sqrt{-1}Je_b) =$$
$$= \frac{1}{4}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) - \sqrt{-1}g(Je_a, e_b) - g(Je_a, Je_b)) = 0$$

Здесь мы воспользовались определением A-базиса и согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой. Далее,

$$g^{\mathbb{C}}_{\hat a b} = g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_{\hat a}, \varepsilon_b) = \frac{1}{4} g^{\mathbb{C}}(e_a + \sqrt{-1}Je_a, e_b - \sqrt{-1}Je_b) = \frac{1}{4}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) +$$
$$+ \sqrt{-1}g(Je_a, e_b) + g(Je_a, Je_b)) = \frac{1}{2}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b)) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \equiv \frac{1}{2}\delta^a_b.$$

Здесь мы воспользовались согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой и замечанием 4.8.

Элементы остальных двух блоков матрицы (4.22) вычисляются аналогично. В результате получим

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I_n \\ \frac{1}{2}I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 4.9**.** Чтобы убрать коэффициенты $\frac{1}{2}$ в матрице $((g^{\mathbb{C}})_{ij})$, вместо A-базиса рассматривают модифицированный A-базис $(\sqrt{2}\varepsilon_1, \ldots, \sqrt{2}\varepsilon_n, \sqrt{2}\varepsilon_{\hat 1}, \ldots, \sqrt{2}\varepsilon_{\hat n})$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие базисы и называть их A-базисами.

Задача 4.26**.** Докажите, что в модифицированном A-базисе матрицы компонент тензоров J и g имеют вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad ((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 4.10**.** Напомним, что мы договорились называть компонентами вещественного тензора в A-базисе компоненты его комплексификации в этом базисе. В дальнейшем, обозначая компоненты комплексификации вещественного тензора, будем опускать знак комплексификации. Например, матрицы из последней задачи будут обозначаться так:

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 4.10**.** Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, (J, g) – эрмитова структура на нем. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Применим к нему операцию опускания индекса (см.

курс Тензорная алгебра). В результате мы получим некоторый ковектор $u = \ell(X)$. Выразим компоненты этого ковектора в A-базисе через компоненты вектора X. Имеем

$$u_i = g_{ij}X^j$$

где индексы i, j пробегают все значения от 1 до $2n$. Рассмотрим два возможных случая для индекса i.
1) Индекс i принимает значения от 1 до n, то есть $i = a$. Имеем

$$u_a = g_{aj}X^j = g_{ab}X^b + g_{a\hat{b}}X^{\hat{b}} = 0 + \sum_{b=1}^{n} \delta_{ab}X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}}.$$

Здесь индекс j сначала принимает значения от 1 до n (то есть $j = b$), а затем принимает значения от $n+1$ до $2n$ (то есть $j = \hat{b}$). Кроме того, мы воспользовались матрицей евклидовой структуры g в A-базисе.

2) Аналогично получаем, что $u_{\hat{a}} = X^a$.

Итак, компоненты X и $u = \ell(X)$ в A-базисе связаны соотношениями

$$u_a = X^{\hat{a}}; \quad u_{\hat{a}} = X^a. \square$$

Замечание 4.11. Для тензоров произвольного типа действует тот же принцип поднятия и опускания индекса, что и для вектора и ковектора: перемещающийся индекс теряет крышку, если она у него была, и приобретает – если нет.

5. Почти комплексные многообразия.

§ 5.1. G-структуры на гладком многообразии.

Напомним, что если $\mathscr{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathscr{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$ – два главных расслоения над многообразием M, то *гомоморфизмом расслоений* $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ называется пара (f, ρ), где $f : P_1 \to P_2$ – гладкое отображение, $\rho : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли, причем

1. $\pi_2 \circ f = \pi_1$, то есть отображение f переводит точки, принадлежащие одному слою в точки также принадлежащие одному слою (при этом говорят, что отображение f *послойно*);
2. $f(pg) = f(p)\rho(g)$, то есть действие структурной группы согласовано с отображением f посредством отображения ρ.

Если при этом пара (P_1, f) является вложенным подмногообразием многообразия P_2 (см. § 5 первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия), а пара (G_1, ρ) является подгруппой Ли в группе G_2, то главное расслоение $\mathscr{B}_1$ называется *подрасслоением* главного расслоения $\mathscr{B}_2$.

Для нас наибольший интерес представляет случай, когда $\mathscr{B}_2 = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$, то есть главное расслоение вещественных реперов над M, $\mathscr{B}_1 = (P, M, \tilde{\pi}, G)$ – его подрасслоение, причем $f : P \to BM$ – естественное вложение, $\tilde{\pi} = \pi|_P$, G – замкнутая подгруппа Ли полной линейной группы относительно естественного вложения $G \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Пример 5.1. Если $G = O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$, $P = \{$ все ортонормированные реперы на $M\}$, то четверка $(P, M, \tilde{\pi}, O(n, \mathbb{R}))$ будет подрасслоением главного расслоения реперов.

Подрасслоение главного расслоения вещественных реперов над многообразием M по замкнутой подгруппе G называется *G-структурой* (первого порядка) над многообразием M.

Значение G-структур в дифференциальной геометрии, прежде всего, определяется тем, что их задание, как правило, бывает равносильно заданию дифференциально геометрической структуры на многообразии базы. Дифференциально-геометрическую структуру базы мы будем понимать в узком смысле, а именно, как тензорное поле или совокупность тензорных полей на многообразии базы. Например, задание $O(n, \mathbb{R})$-структуры равносильно заданию римановой структуры на многообразии M.

§ 5.2. Структура группы Ли на $GL(n, \mathbb{C})$ и ее подгруппах.

2.1. Группа $GL(n, \mathbb{C})$.

Пусть дано множество $M^{\mathbb{C}}_{n,n}$ $n \times n$-матриц, элементы которых являются комплексными числами. Обозначим через $GL(n, \mathbb{C})$ его подмножество, состоящее из матриц с ненулевым определителем. Как известно из курса алгебры, такое подмножество является абстрактной группой. Наша задача – ввести в этом множестве структуру группы Ли.

Матрицы из множества $GL(n, \mathbb{C})$ имеют комплексные элементы. Это не удобно для построения структуры гладкого многообразия на этом множестве. Как мы помним, для этого нам нужно каждой матрице поставить в соответствие набор из вещественных чисел. Чтобы избежать этой трудности, построим группу, которая состоит из вещественных матриц и изоморфна (как абстрактная группа) группе $GL(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим множество

$$GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} = \{g \in GL(2n, \mathbb{R}) : gJ = Jg\},$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ – оператор стандартной комплексной структуры на $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$.

Лемма 5.1. *Во введенных обозначениях*

$$g \in GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \, det\, g \neq 0,$$

где A, B – вещественные матрицы порядка n.

Доказательство. Пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ принадлежит множеству $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$. Матрица C записана в блочном виде. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – это вещественные $n \times n$-матрицы. Тогда условие $g \circ J = J \circ g$ равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C_2 & -C_1 \\ C_4 & -C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3 & -C_4 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем, что $C_3 = -C_2$, $C_1 = C_4$, то есть матрица из $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ имеет нужный вид.

Проверьте самостоятельно, что матрица вида $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ коммутирует с оператором стандартной комплексной структуры. □

Нетрудно видеть, что множество $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ является абстрактной группой. Она называется *вещественной реализацией полной комплексной линейной группы порядка n.*

Теорема 5.1. *Группа $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ изоморфна полной комплексной линейной группе $GL(n, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Построим отображение

$$\tau : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$$

следующим образом. Пусть $Z = (z_{ab}) \in GL(n, \mathbb{C})$, где $z_{ab} = a_{ab} + ib_{ab}$, $a, b = 1, \ldots, n$. Положим $A = (a_{ab})$, $B = (b_{ab})$. Тогда положим

$$\tau(Z) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что τ является биекцией и сохраняет операцию, а значит, является изоморфизмом групп. Проведите рассуждения самостоятельно. □

На вещественной реализации полной комплексной линейной группы порядка n стандартным образом строится структура гладкого многообразия. Атлас состоит из одной карты $(GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \varphi)$, а картирующее отображение φ ставит в соответствие матрице $g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ последовательность элементов матриц A и B, выписанных в одну строчку. Количество элементов матриц A и B равно $n^2 + n^2 = 2n^2$, следовательно, размерность многообразия $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ равна $2n^2$. Далее, на $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ строится структура группы Ли точно так же как для вещественной полной линейной группы. Таким образом, вещественная реализация полной комплексной линейной группы наделяется структурой группы Ли. Так как полная комплексная линейная группа изоморфна своей вещественной реализации (а значит, с точки зрения геометров это одно и то же), то говорят, что полная комплексная линейная группа имеет структуру группы Ли.

2.2. Подгруппы.

Рассмотрим множество

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) : \, g \cdot \bar{g}^T = I_n\},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, а буква T – транспонированную матрицу. Хорошо известно, что это множество является абстрактной группой (и подгруппой полной комплексной линейной группы) и называется *унитарной группой порядка n.*

Аналогично случаю полной комплексной линейной группы можно построить вещественную реализацию унитарной группы, а значит, определить на ней структуру группы Ли.

Множество $SU(n) = \{g \in U(n) : det\, g = 1\}$ также обладает структурой абстрактной группы и называется *унитарной унимодулярной группой.* Она также обладает структурой группы Ли.

§ 5.3. Действие группы $GL(n,\mathbb{C})$.

Пусть даны вещественное векторное пространство V размерности $2n$ и оператор комплексной структуры J на V. Как мы видели в главе 1, само множество V обладает структурой комплексного линейного пространства и для него определена комплексификация $V^{\mathbb{C}}$, которая также обладает структурой комплексного линейного пространства. Для этих множеств определены следующие множества базисов:

1. $\mathscr{B}(V) = \{(e_1,\dots,e_n)\}$ – множество базисов V как комплексного линейного пространства;
2. $\mathscr{B}^{RA}(V) = \{(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)\}$ – множество базисов V как вещественного векторного пространства;
3. $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}}) = \{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\dots,\varepsilon_{\hat{n}})\}$ – множество базисов $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Теорема 5.2. *Для множеств $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$ существуют биективные отображения на множество $\mathscr{B}(V)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varkappa : \mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}^{RA}(V)$, заданное формулой

$$(e_1,\dots,e_n) \to (e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n).$$

Очевидно, что это отображение инъективно. Сюръективность вытекает из следствия 4.1.

Рассмотрим отображение $\kappa : \mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$, заданное формулой

$$(e_1,\dots,e_n) \to (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\dots,\varepsilon_{\hat{n}}).$$

Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем сюръективность. Пусть дан A-базис. По его определению имеем

$$\varepsilon_a = \tfrac{1}{2}(e_a - \sqrt{-1}Je_a); \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \tfrac{1}{2}(e_a + \sqrt{-1}Je_a).$$

Тогда, сложив эти равенства, получим $e_a = \varepsilon_a + \varepsilon_{\hat{a}}$. Эти формулы позволяют, имея A-базис, построить систему векторов из V. Нетрудно показать, что она будет (комплексно) линейно независима. Так как эта система содержит n векторов, то она будет базисом V, которое рассматривается как комплексное линейное пространство. □

На множестве $\mathscr{B}(V)$ справа свободно и транзитивно действует полная комплексная линейная группа $GL(n,\mathbb{C})$. Это действие строится по аналогии с вещественным случаем. А именно, если $b = (e_1,\dots,e_n)$ – произвольный базис из $\mathscr{B}(V)$, $Z = (z^b_a)$ – произвольная матрица из $GL(n,\mathbb{C})$, то определен базис $\tilde{b} = (\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ по формуле $\tilde{e}_c = z^b_c e_b$. Будем обозначать $\tilde{b} = bZ \equiv R_Z b$.

Другими словами, Z есть матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$. Как и в вещественном случае доказывается, что это правое транзитивное свободное действие. В силу биективного соответствия между множествами $\mathscr{B}(V)$, $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$ это действие индуцирует правое свободное действие группы $GL(n,\mathbb{C})$ на этих множествах. При действии на множестве $\mathscr{B}(V)$ она имеет свой привычный вид. Выясним, как будет выглядеть эта группа, когда она действует на множествах $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$.

Рассмотрим множество $\mathscr{B}^{RA}(V)$. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – базис V как комплексного линейного пространства, $b = (e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ – соответствующий RA-базис. Обозначим $(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ – образ базиса b под действием элемента $Z = (z^i_j) \in GL(n,\mathbb{C})$. Тогда $\tilde{b} = (\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n,J\tilde{e}_1,\dots,J\tilde{e}_n)$ – соответствующий RA-базис. Выясним, какой вид имеет матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$.

Пусть $z^a_b = a^a_b + \sqrt{-1}b^a_b$. Тогда матрица Z представима в виде $Z = A + \sqrt{-1}B$, где $A = (a^a_b)$ и $B = (b^a_b)$. Имеем

$$\tilde{e}_c = z^b_c e_b = a^b_c e_b + b^b_c Je_b; \quad J\tilde{e}_c = J(a^b_c e_b + b^b_c Je_b) = -b^b_c e_b + a^b_c Je_b.$$

Здесь мы воспользовались определением структуры комплексного линейного пространства на вещественном векторном пространстве с помощью оператора комплексной структуры (см. теорему 4.2). Откуда получаем, что матрица перехода от одного RA-базиса к другому имеет вид (чтобы получить эту матрицу, нужно координаты векторов нового базиса записать в столбцы этой матрицы)

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & -b^1_1 & \dots & -b^1_n \\ & \dots & & & \dots & \\ a^n_1 & \dots & a^n_n & -b^n_1 & \dots & -b^n_n \\ & \dots & & & \dots & \\ b^n_1 & \dots & b^n_n & a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на множестве RA-базисов вещественного линейного пространства V свободно и транзитивно действует справа вещественная реализация полной комплексной линейной группы (см. § 5.2.). Так вещественная реализация полной комплексной линейной группы изоморфна полной комплексной линейной группе, будем говорить, что на множестве RA-базисов действует группа $GL(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим множество $\mathscr{B}^A(V^{\mathbb{C}})$. Пусть, по-прежнему, $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V, рассматриваемого как комплексное линейное пространство, $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ – его образ под действием элемента $Z = (z^a_b) \in GL(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие A-базисы $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$ и $\tilde{\beta} = (\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$. Напомним (см. § 4.4.), что

$$\varepsilon_i = \sigma|_V(e_a) = \tfrac{1}{2}(e_a - \sqrt{-1}Je_a); \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}|_V(e_a) = \tfrac{1}{2}(e_a + \sqrt{-1}Je_a).$$

Так как проекторы $\sigma|_V$ и $\bar{\sigma}|_V$ являются гомоморфизмом (разбиваются суммы и выносятся комплексные числа) и антигомоморфизмом (суммы разбиваются, а комплексные числа выносятся комплексно сопряженными) соответственно, получим

$$\tilde{\varepsilon}_a = \sigma|_V(\tilde{e}_a) = \sigma|_V(z^b_a e_b) = z^b_a \sigma|_V(e_b) = z^b_a \varepsilon_b; \quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = \bar{\sigma}|_V(\tilde{e}_a) = \bar{\sigma}|_V(z^b_a e_b) = \bar{z}^b_a \varepsilon_{\hat{b}}.$$

Записывая координаты векторов $(\tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}})$ в столбцы матрицы, получим, что матрица перехода от базиса β к базису $\tilde{\beta}$ имеет вид

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Таким образом, на множестве A-реперов комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$ группа $GL(n, \mathbb{C})$ действует свободно и транзитивно посредством матриц вида (5.1). Под словами „группа $GL(n, \mathbb{C})$ действует на множестве A-реперов“ понимается, что группа $GL(n, \mathbb{C})$ заменяется на изоморфную ей группу, которая и работает с A-базисами.

§ 5.4. Почти комплексные многообразия.

Пусть M – гладкое многообразие, на котором фиксировано тензорное поле J типа (1,1), такое что $J^2 = -id$. Тензорное поле J называется *почти комплексной структурой* на многообразии M, а пара (M, J) называется *почти комплексным многообразием.*

Нетрудно показать, что необходимым условием существования почти комплексной структуры на многообразии M является его четномерность и ориентируемость. В связи с этим обозначим размерность многообразия M через $2n$.

Для каждого почти комплексного многообразия M размерности $2n$ построим главное расслоение так называемых *комплексных реперов.*

Фиксируем произвольную точку $m \in M$ и рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ в этой точке. Касательное пространство $T_m(M)$ является $2n$-мерным вещественным векторным пространством. На нем определен оператор комплексной структуры J_m – значение тензорного поля J (почти комплексной структуры многообразия M) в точке m. Здесь J рассматривается как сечение векторного расслоения тензоров типа (1,1). С помощью оператора комплексной структуры J_m можно в $T_m(M)$ ввести структуру комплексного линейного пространства (по аналогии с доказательством теоремы 4.2) по формуле

$$zX = \alpha X + \beta J_m X,$$

где $X \in T_m(M)$, $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$. Тогда множество $T_m(M)$ становится n-мерным комплексным линейным пространством. Совокупность $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис $T_m(M)$ как комплексного линейного пространства, называется *комплексным репером* на гладком многообразии M. Обозначим множество комплексных реперов через $BM^{\mathbb{C}}$. Мы можем взять все множество комплексных реперов и попытаться построить на нем структуру главного расслоения. Но у нас возникнут такие же трудности, как и при построении структуры группы Ли на множестве $GL(n, \mathbb{C})$. Обойдем мы эти трудности точно таким же образом. Мы заменим множество комплексных реперов на некоторое подмножество обычных вещественных реперов (где $T_m(M)$ рассматривается как $2n$-мерное вещественное векторное пространство), причем эти два множества должны находится в биективном соответствии друг с другом. Согласно теореме 5.2 множество $\mathscr{B}(T_m(M))$ базисов $T_m(M)$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство, биективно отображается на множество $\mathscr{B}^{RA}(T_m(M))$ RA-базисов. Тогда каждому комплексному реперу $(m, e_1, \ldots, e_n)$ однозначно ставится в соответствие вещественно адаптированный репер $(m, e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Обозначим это множество BM^{RA}. На этом множестве справа свободно и транзитивно действует вещественная реализация $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ полной комплексной линейной группы. Тогда четверка $(BM^{RA}, GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \pi, M)$ будет главным расслоением (причем подрасслоением главного расслоения (вещественных) реперов). Это доказывается также как в случае главного расслоения реперов. А значит, для расслоения $(BM^{RA}, GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \pi, M)$ будут иметь место структурные уравнения и основная теорема тензорного анализа. Так как множество реперов BM^{RA} биективно отображается на множество $BM^{\mathbb{C}}$, а группа $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ изоморфна $GL(n, \mathbb{C})$, то главное расслоение $(BM^{RA}, GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \pi, M)$ обозначается $(BM^{\mathbb{C}}, GL(n, \mathbb{C}), \pi, M)$ и называется *главным расслоением комплексных реперов.*

Аналогичная хитрость помогает ввести структуру главного расслоения во множестве A-реперов. Множество всех A-реперов заменяется множеством RA-реперов (они находятся в биективном соответствии по теореме 5.2), а группа матриц $\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix}$ заменяется на изоморфную ей группу $GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$. Тогда опять строим структуру главного расслоения на множестве BM^{RA} и благодаря введенным отождествлениям говорим, что четверка $(BM^A, GL(n, \mathbb{C}), \pi, M)$ является *главным расслоением A-реперов.*

Обратите внимание, что в обоих случаях расслоения комплексных реперов и расслоения A-реперов мы получили подрасслоения в главном расслоении вещественных реперов. Размерность тотальных пространств этих расслоений равна $n + 2n^2$ ($n = \dim M$, $2n^2 = dim\, GL(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$), а размерность главного расслоения вещественных реперов равна $n + (2n)^2$. Поэтому записать структурные уравнения и основную теорему тензорного анализа в случае расслоения комплексных реперов и A-реперов мы можем (в случае A-реперов тензорные поля заменяются их комплексификациями), но нужно быть осторожными в разложении форм по базису. В базисе 1-форм будет меньше форм, чем в базисе 1-форм главного расслоения вещественных реперов. Другими словами, часть 1-форм из базиса главного расслоения вещественных реперов будет выражаться через остальные формы. Подробнее этот факт мы рассмотрим в дальнейшем.

Условимся в дальнейшем, что индексы $i, j, k, \ell, m, p, r, s, t$ пробегают значения от 1 до $2n$, индексы a, b, c, d, e, f, h пробегают значения от 1 до n и $\hat{a} = a + n$.

Можно доказать, что задание почти комплексной структуры на многообразии M равносильно заданию G-структуры со структурной группой $GL(n, \mathbb{C})$, тотальное пространство которой состоит из A-реперов. Будем называть эту G-структуру *присоединенной G-структурой* почти комплексного многообразия.

Почти комплексная структура J, а точнее ее комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ характеризуется тем, что в A-реперах определяется функциями

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где $(J^{\mathbb{C}})^i_j(p) = (J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j))^i$, $p = (m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Действительно, согласно предложению 4.3 векторы A-базиса являются собственными векторами комплексификации оператора комплексной структуры $J^{\mathbb{C}}_m$, отвечающими собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a; \quad J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Тогда, записывая координаты векторов $J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a)$ и $J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{a}})$ в столбцы матрицы, получим (5.3). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем работать с комплексификациями тензорных полей. Для сокращения записей будем опускать значок комплексификации у буквы, обозначающей тензорное поле. В связи с этой договоренностью равенство (5.3) примет вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Напомним, что индекс i пробегает значения от 1 до $2n$, то есть этот индекс сначала пробегает значения от 1 до n, а затем значения от $n+1$ до $2n$. Как мы договорились, первый интервал индексов обозначается буквой a, второй интервал индексов перенумерован $\hat{1}$, …, $\hat{n}$ и обозначается $\hat{a}$. Аналогично с индексом j. Тогда матрица (J^i_j) приобретает вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} J^a_b & J^a_{\hat{b}} \\ J^{\hat{a}}_b & J^{\hat{a}}_{\hat{b}} \end{pmatrix},$$

где

$$J^a_b = \sqrt{-1}\delta^a_b; \quad J^a_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_b = 0; \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv -\sqrt{-1}\delta^b_a. \tag{5.4}$$

Рассмотрим дуальный базис (ω^i_j, ω^k) главного расслоения вещественных реперов. Так как главное расслоение A-реперов является подрасслоением главного расслоения вещественных реперов (с учетом рассмотренных отождествлений), определено гладкое отображение $f : BM^A \to BM$ (см. определение G-структуры § 5.1.). Тогда определено отображение антиувлечения f^*, которое переведет 1-формы (ω^i_j, ω^k) базиса (см. § 3 главы 4 из первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия) модуля $\mathfrak{X}^*(BM)$ в 1-формы (они будут уже линейно зависимы из-за уменьшения размерности многообразия) $(f^*\omega^i_j, f^*\omega^k)$ модуля $\mathfrak{X}^*(BM^A)$. Так как гладкое отображение f является естественным вложением (то есть точка из BM^A рассматривается как точка из BM), то 1-формы $f^*\omega^i_j$, $f^*\omega^k$ – это по сути те же формы, что и ω^i_j, ω^k (с учетом введенных отождествлений), но их значения рассматриваются не во всех вещественных реперах (точках многообразия BM), а только в A-реперах (точках многообразия BM^A). В связи с этим мы будем обозначать формы $f^*\omega^i_j, f^*\omega^k$ через ω^i_j, ω^k, помня, что работаем на пространстве расслоения A-реперов.

Пример 5.2. Подробно рассмотрим выше сказанное на примере основной теоремы тензорного анализа для почти комплексной структуры. В этом примере мы подробно запишем все выражения со знаками комплексификации и аналогичные выражения в сокращенных обозначениях (далее мы будем писать только сокращенные обозначения).

Так как почти комплексная структура является тензорным полем типа (1,1) по основной теореме тензорного анализа на пространстве BM всех вещественных реперов имеем (напомним, что мы работаем в минусах. Рекомендуется провести аналогичные рассуждения в плюсах.)

$$dJ^i_j - J^i_k\omega^k_j + J^k_j\omega^i_k = J^i_{jk}\omega^k.$$

Применим к обеим частям отображение антиувлечения f^*:

$$d(J^i_j \circ f) - (J^i_k \circ f)f^*\omega^k_j + (J^k_j \circ f)(f^*\omega^i_k) = (J^i_{jk} \circ f)f^*\omega^k.$$

Отображение антиувлечения f^* ставит в соответствие вещественной форме ее комплексификацию. Например, ω^k – компонента формы смещения на главном расслоении вещественных реперов, а $f^*\omega^k$ – ее комплексификация. Аналогично получаем для функций $J^i_j \circ f$ следующий алгоритм действия: отображение f переводит тензорное поле J в его комплексификацию $J^{\mathbb{C}}$ и для нее вычисляются компоненты в A-репере:

$$J^i_j \circ f(p) = (f^*J)^i_j(p) = J^{\mathbb{C}}(\varepsilon_j, u^i) = (J^{\mathbb{C}})^i_j,$$

где $p = (m, \varepsilon_i)$ – A-репер, (m, u^i) – дуальный репер.

В результате получаем (все значки расставлены)

$$d((J^{\mathbb{C}})^i_j) - (J^{\mathbb{C}})^i_k(\omega^{\mathbb{C}})^k_j + (J^{\mathbb{C}})^k_j(\omega^{\mathbb{C}})^i_k = (J^{\mathbb{C}})^i_{jk}(\omega^{\mathbb{C}})^k.$$

Итак, на пространстве расслоения A-реперов для почти комплексной структуры J получаем (еще раз напомним, что значки комплексификации здесь опущены)

$$dJ^i_j - J^i_k\omega^k_j + J^k_j\omega^i_k = J^i_{jk}\omega^k. \tag{5.5}$$

Индексы i, j, k бывают двух типов: от 1 до n и от $\hat{1} \equiv n+1$ до $\hat{n} \equiv 2n$. В первом случае этот индекс обозначается $a, b, c, \ldots$, а во втором случае – $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots$. С учетом этого рассмотрим дифференциальные уравнения (5.5). Здесь свободными индексами (они будут нумеровать уравнения) являются индексы i и j. Сначала рассмотрим уравнения, в которых эти индексы принимают значения от 1 до n, то есть обозначим i через a, j – через b (индекс суммирования k пока не трогаем):

$$dJ^a_b - J^a_k\omega^k_b + J^k_b\omega^a_k = J^a_{bk}\omega^k. \tag{5.6}$$

Теперь займемся индексом k. Каждый индекс суммирования k обозначает сумму от 1 до $2n$. Ее можно разбить на две суммы: от 1 до n (здесь индекс суммирования должен обозначаться c) и от $n+1 \equiv \hat{1}$ до $2n \equiv \hat{n}$ (здесь индекс суммирования обозначается $\hat{c}$). Тогда (5.6) примет вид

$$dJ^a_b - J^a_c\omega^c_b - J^a_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + J^c_b\omega^a_c + J^{\hat{c}}_b\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^c.$$

Воспользуемся соотношениями (5.4):

$$d(\sqrt{-1}\delta^a_b) - \sqrt{-1}\delta^a_c\omega^c_b - 0\omega^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b\omega^a_c + 0\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^c.$$

Здесь под внешним дифференциалом функции вида $\sqrt{-1}f$, где f обычная гладкая функция гладкого многообразия, мы понимаем $\sqrt{-1}df$, то есть для оператора внешнего дифференцирования мы также рассматриваем комплексификацию. Тогда

$$0 - \sqrt{-1}\omega^a_b + \sqrt{-1}\omega^a_b = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \quad \Leftrightarrow \quad J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = 0.$$

Посмотрим на формы $(\omega^c, \omega^{\hat{c}})$. Это часть базиса (ω^i_j, ω^k) модуля $\mathfrak{X}^*(BM)$ главного расслоения вещественных реперов, а именно, формы ω^k. Как мы говорили выше, какие-то формы из этого базиса будут линейно выражаться через остальные формы, а значит, какая-то часть форм будет линейно зависима. Могут ли это быть формы $(\omega^c, \omega^{\hat{c}}) \equiv (\omega^k)$? Дальнейшие рассуждения носят эвристический характер и не могут быть восприняты как строгое доказательство. Формы ω^k являются дуальным базисом для горизонтальных лифтов векторных полей с базы M. При построении главного расслоения A-реперов базу мы не „уменьшению"“, а значит, формы ω^k перешли с главного расслоения вещественных реперов на главное расслоение A-реперов, оставшись линейно независимыми. Сразу отметим, что „уменьшению“ подверглась структурная группа. За нее отвечают формы ω^i_j. Поэтому мы ожидаем, что среди них появится какая-то линейная зависимость. Но это будет немного ниже.

Возвращаемся к равенствам

$$J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = 0.$$

Это линейная комбинация линейно независимых форм, следовательно, получим

$$J^a_{bc} = 0; \quad J^a_{b\hat{c}} = 0. \tag{5.7}$$

Итак, рассматривая часть уравнений (5.5) (а именно, уравнения, для которых i и j пробегают значения от 1 до n), мы получили (5.7).

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда i пробегает значения от $n+1$ до $2n$, а j пробегает значения от 1 до n, то есть $i = \hat{a}$, $j = b$:

$$\begin{gathered}
dJ^{\hat{a}}_b - J^{\hat{a}}_c\omega^c_b - J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + J^c_b\omega^{\hat{a}}_c + J^{\hat{c}}_b\omega^{\hat{a}}_{\hat{c}} = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b\omega^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
2\sqrt{-1}\omega^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
\omega^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k
\end{gathered}$$

Итак, мы получили ожидаемую линейную зависимость между 1-формами.

Аналогично рассуждая (проведите вычисления самостоятельно) при $i = a$, $j = \hat{b}$ получим

$$\omega^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k.$$

Как вы уже догадались, в случае $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$ мы получим $J^{\hat{a}}_{\hat{b}k} = 0$. Проверьте это самостоятельно.

Итак, дифференциальные уравнения (5.5), (локально) заданные на пространстве расслоения A-реперов, если расписать из по группам, принимают вид

$$J^a_{bk} = J^{\hat{a}}_{\hat{b}k} = 0; \quad \omega^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k; \quad \omega^a_{\hat{b}} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k. \tag{5.8}$$

Рассмотрим первую группу структурных уравнений главного расслоения вещественных реперов (попрежнему мы работаем в минусах)

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j. \tag{5.9}$$

Чтобы записать соответствующие ей уравнения на пространстве расслоения A-реперов, нужно перейти к комплексификации форм и применить антиувлечение f^*. Опуская обозначения комплексификации и антиувлечения, мы получим уравнения в таком же виде, но будем помнить, что перешли от главного расслоения вещественных реперов к его подрасслоению, состоящему из A-реперов. Так как часть двухиндексных омег будет выражаться через одноиндексные, то уравнения (5.9) можно преобразовать. Сначала рассмотрим случай $i = a$.

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k \wedge \omega^{\hat{b}} = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}c}\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b}\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}.$$

Здесь мы использовали равенства (5.8). В последнем слагаемом последнего выражения мы поставили альтернацию, не производя упорядочения омег по номерам (см. пример 7.3 главы 1 курса Тензорная алгебра).

Аналогично рассуждая для $i = \hat{a}$ (проведите подробные вычисления самостоятельно) получим

$$d\omega^{\hat{a}} = -\omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c.$$

Итак, мы получаем две группы равенств

$$\begin{aligned}
d\omega^a &= -\omega^a_b \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}c}\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b}\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}; \\
d\omega^{\hat{a}} &= -\omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Эти уравнения называются *первой группой структурных уравнений почти комплексной структуры* гладкого многообразия M.

§ 5.5. Почти комплексная связность на почти комплексном многообразии.

Пусть на гладком многообразии M задана почти комплексная структура J. Тогда определяется присоединенная G-структура. Это подрасслоение главного расслоения реперов, а значит, является главным расслоением. На нем, как на главном расслоении, можно задать связность. Такая связность называется *почти комплексной связностью.*

Если ∇ – почти комплексная связность, то она однозначно достраивается до связности на пространстве расслоения всех реперов и отождествляется с этой связностью.

Теорема 5.3. *Связность ∇ является почти комплексной связностью на почти комплексном многообразии (M, J) тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$.*

Доказательство. Обозначим $\theta = \{\theta^i_j\}$ форму связности ∇. Эта связность будет почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда ее форма связности принимает значения в алгебре Ли структурной группы, то есть в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Напомним, что для определения действия на множестве A-реперов, мы отождествляли матрицы A группы Ли $GL(n, \mathbb{C})$ с матрицами вида (блочный вид)

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Можно показать, что тогда матрицы присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ можно отождествить с матрицами такого же вида, где A – произвольная $n \times n$-матрица с комплексными элементами, то есть произвольный элемент алгебры $M^{\mathbb{C}}_{n,n}$. Напомним, что тензорные компоненты формы связности θ определяются следующим образом: $\theta(X) = \theta^i_j(X)E^j_i$, где X – векторное поле на пространстве расслоения всех реперов, (E^j_i) – базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$. Чтобы значение $\theta(X)$ для любого векторного поля X попало во множество матриц вида (5.11) необходимо и достаточно, чтобы формы $\theta^{\hat{a}}_b$ и $\theta^a_{\hat{b}}$ были тождественно нулевыми и $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$.

С другой стороны, для связности ∇ по основной теореме тензорного анализа получаем

$$dJ^i_j - J^i_k\theta^k_j + J^k_j\theta^i_k = J^i_{j|k}\omega^k,$$

где $\{J^i_{j|k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры J в связности ∇. Тогда $\nabla J \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $dJ^i_j - J^i_k\theta^k_j + J^k_j\theta^i_k = 0$. На пространстве присоединенной G-структуры эти уравнения в силу соотношений $J^a_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$, $J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$, $J^{\hat{a}}_b = J^a_{\hat{b}} = 0$ примут вид

1. $i = a$, $j = b$. Тождество $0 = 0$.
2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Получим $\theta^{\hat{a}}_b = 0$.
3. $i = a$, $j = \hat{b}$. Получим $\theta^a_{\hat{b}} = 0$.
4. $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$. Тождество $0 = 0$.

Соотношение $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ является выражением вещественности связности.

Таким образом, связность ∇ является почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда θ принимает значения в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$, $\theta^{\hat{a}}_b = \theta^a_{\hat{b}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$. ☐

Замечание 5.1. Согласно доказанной теореме почти комплексную связность мы можем определить как связность на почти комплексном многообразии, для которой $\nabla J = 0$.

Покажем, что почти комплексные связности существуют. Пусть на почти комплексном многообразии задана произвольная связность ∇ без кручения с формой связности $\theta = \{\theta^i_j\}$ (такой связностью может быть риманова связность. Она существует на любом многообразии, так как на любом (паракомпактном) многообразии существует риманова метрика. Обозначим через $\{J^i_{j,k}\}$ компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры. Тогда первая группа структурных уравнений связности ∇ имеет вид $d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j$. Аналогично выводу формул (5.10) получаем первую группу уравнений связности ∇:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^c + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}; \\ d\omega^{\hat{a}} &= -\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}\omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Положим

$$\eta^a_b = \theta^a_b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{c},b}\omega^{\hat{c}}; \quad \eta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{c,\hat{b}}\omega^c; \quad \eta^{\hat{a}}_b = \eta^a_{\hat{b}} = 0.$$

Тогда (5.12) перепишется в виде

$$d\omega^a = -\eta^a_b \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}; \quad d\omega^{\hat{a}} = -\eta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]}\omega^b \wedge \omega^c. \tag{5.13}$$

Легко видеть, что $\bar{\eta}^a_b = \eta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ и $\eta^{\hat{a}}_b = \eta^a_{\hat{b}} = 0$. Нам осталось показать, что система форм $\{\eta^i_j\}$ является тензорными компонентами некоторой связности. Для этого воспользуемся теоремой Картана-Лаптева. Согласно этой теореме нужно проверить, что 2-формы $d\eta^i_j + \eta^i_k \wedge \eta^k_j$ раскладываются по системе форм $\omega^i \wedge \omega^j$. По другому этот факт можно записать так:

$$d\eta^i_j + \eta^i_k \wedge \eta^k_j = 0(mod\, \omega^i \wedge \omega^j).$$

Рассматриваем случаи:

1. $i = a$, $j = b$. Тогда

$$d\eta^a_b + \eta^a_c \wedge \eta^c_b + \eta^a_{\hat{c}} \wedge \eta^{\hat{c}}_b = d(\theta^a_b - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{c},b}\omega^{\hat{c}}) + (\theta^a_c - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{d},c}\omega^{\hat{d}}) \wedge (\theta^c_b - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^c_{\hat{f},b}\omega^{\hat{f}}) =$$
$$= d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^c_{\hat{f},b}\theta^a_c \wedge \omega^{\hat{f}} - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{d},c}\omega^{\hat{d}} \wedge \theta^c_b - \frac{1}{4} J^a_{\hat{d},c} J^c_{\hat{f},b}\omega^{\hat{d}} \wedge \omega^{\hat{f}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}(dJ^a_{\hat{c},b} \wedge \omega^{\hat{c}} + J^a_{\hat{c},b} d\omega^{\hat{c}}). \tag{5.14}$$

Так как θ – форма связности, ее компоненты удовлетворяют теореме Картана-Лаптева, то есть $d\theta^i_j + \theta^i_k \wedge \theta^k_j = 0(mod\, \omega^i \wedge \omega^j)$. В частности, если $i = a$ и $j = b$ получим (используем (5.8))

$$0(mod\, \omega^i \wedge \omega^j) = d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b + \theta^a_{\hat{c}} \wedge \theta^{\hat{c}}_b = d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b + (\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{c},k}\omega^k) \wedge (-\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{c}}_{b,\ell}\omega^\ell) =$$
$$= d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b(mod\, \omega^i \wedge \omega^j),$$

так как последнее слагаемое является линейной комбинацией форм $\omega^i \wedge \omega^j$. Таким образом, мы получаем, что

$$d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b = 0(mod\, \omega^i \wedge \omega^j) \tag{5.15}$$

Далее, по основной теореме тензорного анализа для связности ∇ имеем

$$dJ^i_{j,k} - J^\ell_{j,k}\theta^i_\ell - J^i_{\ell,k}\theta^\ell_j - J^i_{j,\ell}\theta^\ell_k = J^i_{j,k,\ell}.$$

В частности, для $i = a$, $j = \hat{c}$, $k = b$ получим

$$dJ^a_{\hat{c},b} + J^d_{\hat{c},b}\theta^a_d - J^a_{\hat{d},b}\theta^{\hat{d}}_{\hat{c}} - J^a_{\hat{c},d}\theta^d_b - J^a_{\hat{c},\hat{d}}\theta^{\hat{d}}_b = J^a_{\hat{c},b,\ell}\omega^\ell.$$

Здесь учли, что $J^{\hat{d}}_{\hat{c},b} = J^a_{d,b} = 0$. Тогда

$$dJ^a_{\hat{c},b} \wedge \omega^{\hat{c}} = -J^d_{\hat{c},b}\theta^a_d \wedge \omega^{\hat{c}} + J^a_{\hat{d},b}\theta^{\hat{d}}_{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{c}} + J^a_{\hat{c},d}\theta^d_b \wedge \omega^{\hat{c}}(mod\, \omega^i \wedge \omega^j). \tag{5.16}$$

Используя (5.10), получаем, что

$$J^a_{\hat{c},b} d\omega^{\hat{c}} = -J^a_{\hat{c},b}\theta^{\hat{c}}_{\hat{d}} \wedge \omega^{\hat{d}}. \tag{5.17}$$

Подставим (5.17), (5.16), (5.15) в (5.14) и получаем, что $d\eta^a_b + \eta^a_c \wedge \eta^c_b + \eta^a_{\hat{c}} \wedge \eta^{\hat{c}}_b = 0(mod\, \omega^i \wedge \omega^j)$.

Оставшиеся три случая для индексов i и j рассматриваются аналогично (и даже гораздо проще). Проведите вычисления самостоятельно.

Итак, мы построили пример почти комплексной связности $\tilde{\nabla}$, исходя из произвольной связности без кручения. Из уравнений (5.13) видно, что тензор кручения $S = \{S^i_{jk}\}$ связности $\tilde{\nabla}$ на пространстве присоединенной G-структуры имеет следующие ненулевые компоненты (мы сравниваем с общим видом первой группы структурных уравнений связности $d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$)

$$S^a_{\hat{b}\hat{c}} = \sqrt{-1} J^a_{[\hat{a},\hat{c}]}; \quad S^{\hat{a}}_{bc} = -\sqrt{-1} J^{\hat{a}}_{[b,c]}. \tag{5.18}$$

(остальные компоненты равны нулю). Найдем выражение для тензора кручения почти комплексной связности в инвариантном виде. Так как $S^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = 0$ и $J^{\hat{a}}_{\hat{b},\hat{c}} = 0$, первое равенство из (5.18) мы можем записать в виде

$$S^i_{\hat{b}\hat{c}} + \sqrt{-1} J^i_{[\hat{b},\hat{c}]} = 0.$$

По определению компонент тензорного поля на пространстве присоединенной G-структуры имеем (знак комплексификации у тензорных полей мы не пишем из-за громоздкости, но он подразумевается)

$$(S_m(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}))^i + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)_m(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}) - (\nabla J)_m(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}}))^i = 0.$$

В левой части этого равенства стоит сумма i-х компонент двух векторов, то есть i-я компонента суммы векторов. Раз все его компоненты равны нулю, то и сам вектор нулевой:

$$S_m(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)_m(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}) - (\nabla J)_m(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})) = 0.$$

По определению векторов A-репера получим

$$S_m(\bar{\sigma}(e_b), \bar{\sigma}(e_c)) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)_m(\bar{\sigma}(e_b), \bar{\sigma}(e_c)) - (\nabla J)_m(\bar{\sigma}(e_c), \bar{\sigma}(e_b))) = 0. \tag{5.19}$$

Рассмотрим векторные поля $X, Y \in X(M)$, фиксируем точку $m \in M$ и разложим вектора X_m и Y_m по базису $(e_1, \ldots, e_n)$: $X_m = X^b_m e_b$, $Y_m = Y^c_m e_c$. Умножим обе части (5.19) на X^b_m, Y^c_m и просуммируем

$$S_m(\bar{\sigma}X_m, \bar{\sigma}Y_m) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)_m(\bar{\sigma}X_m, \bar{\sigma}Y_m) - (\nabla J)_m(\bar{\sigma}Y_m, \bar{\sigma}X_m) = 0.$$

Это равенство верно для любой точки $m \in M$, следовательно имеем

$$S(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y) - (\nabla J)(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y)) = 0.$$

Подставим в это равенство определение проектора $\bar{\sigma}(X) = \frac{1}{2}(X + \sqrt{-1}JX)$

$$S(X + \sqrt{-1}JX, Y + \sqrt{-1}JY) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}((\nabla J)(X + \sqrt{-1}JX, Y + \sqrt{-1}JY) - \\ - (\nabla J)(Y + \sqrt{-1}JY, X + \sqrt{-1}JX)) = 0.$$

Воспользуемся комплексной линейностью комплексификации тензорного поля

$$S(X,Y) - S(JX,JY) + \sqrt{-1}(S(X,JY) + S(JX,Y)) + \frac{1}{2}(\sqrt{-1}(\nabla J(X,Y) - \nabla J(JX,JY) - \\ - \nabla J(Y,X) + \nabla J(JY,JX)) - (\nabla J(X,JY) + \nabla J(JX,Y) - \nabla J(Y,JX) - \nabla J(JY,X))) = 0.$$

В каждой точке многообразия M левая часть последнего равенства (как и правая) представляет из себя комплексное число. Как известно, комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю вещественная и мнимая части этого числа. Поэтому получаем

$$S(X,Y) - S(JX,JY) - \frac{1}{2}(\nabla J(X,JY) + \nabla J(JX,Y) - \nabla J(Y,JX) - \nabla J(JY,X) = 0; \tag{5.20}$$

$$S(X,JY) + S(JX,Y) + \frac{1}{2}(\nabla J(X,Y) - \nabla J(JX,JY) - \nabla J(Y,X) + \nabla J(JY,JX)) = 0;$$

Второе равенство получается из первого, если заменить в первом X на JX. Поэтому существенным для нас будет только первое равенство.

Аналогично равенства $S^a_{bc} = 0$ и $S^a_{b\hat{c}} = 0$ объединяются в равенство $S^a_{bi} = 0$ и переводятся в инвариантный вид

$$S(X,Y) = JS(X,JY). \tag{5.21}$$

Так как S – тензор кручения, он кососимметричен. Тогда из последнего равенства получим $S(Y,X) = JS(JY,X)$. Переобозначая X и Y получим $S(X,Y) = JS(JX,Y)$. Сравнивая это равенство с (5.21) и действуя J на обе части, получим $S(JX,Y) = S(X,JY)$. Заменяя X на JX получим $S(JX,JY) = -S(X,Y)$. С учетом этого равенства возвращаемся к (5.20)

$$S(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla J(X,JY) + \nabla J(JX,Y) - \nabla J(Y,JX) - \nabla J(JY,X))$$

Переходя к ковариантной производной, мы можем записать тензор кручения S почти комплексной связности $\tilde{\nabla}$ в виде

$$S(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)). \tag{5.22}$$

Последнее равенство выражает тензор кручения почти комплексной связности через ковариантную производную почти комплексной структуры J в исходной связности ∇ (из которой мы строили почти комплексную связность). Мы можем получить выражение для S, которое не будет зависеть от выбора связности ∇. Напомним, что связность ∇ имеет нулевое кручение, то есть $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Кроме того, по свойствам взятия ковариантной производной $\nabla_X(JY) = \nabla_X(J)Y + J\nabla_X Y$. Применим эти два равенства в (5.22)

$$S(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JY}(JX) - J\nabla_{JY}X + \nabla_Y(J^2X) - J\nabla_Y(JX) - \nabla_{JX}(JY) +$$

$$+ J\nabla_{JX}Y - \nabla_X(J^2Y) + J\nabla_X(JY)) = \frac{1}{4}([X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY]).$$

Таким образом, тензор кручения почти комплексной связности не зависит от выбора исходной связности и задается формулой

$$S(X,Y) = \frac{1}{4}([X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY]).$$

Тензор кручения почти комплексной связности также обозначается $N_J(X,Y)$ и называется *тензором Нейенхейса почти комплексной структуры.*

§ 5.6. Почти эрмитовы структуры.

Пусть M – $2n$-мерное гладкое многообразие. *Почти эрмитовой структурой* на M называется пара $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где J – почти комплексная структура, g – риманова метрика, согласованная с J, то есть $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Гладкое многообразие M, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием.*

С почти эрмитовой структурой связаны две 2-формы: $\Omega(X,Y) = \langle X, JY\rangle$ – *фундаментальная форма почти эрмитовой структуры* и $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – *келерова форма почти эрмитовой структуры.*

Задача 5.1. Докажите, что тензорные поля Ω и F, заданные выше действительно являются 2-формами, то есть кососимметричны. Докажите, что $\Omega = -F$.

Как мы знаем, в комплексификации $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{X}(M)$ модуля гладких векторных полей и в комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства определены два проектора

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}); \quad \bar{\sigma} = \tfrac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})$$

на собственные распределения (векторные подпространства) $D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно. При этом $T_m^{\mathbb{C}}(M) = D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ и Кроме того, проекторы σ и $\bar{\sigma}$ являются изометрией и антиизометрией $T_m(M)$ (которое рассматривается как комплексное линейное пространство) и комплексных линейных подпространств $D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно относительно метрик $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, $X, Y \in T_m(M)$ и $H(X,Y) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y)$, $X, Y \in T_m^{\mathbb{C}}(M)$.

Эти обстоятельства позволяют установить естественное биективное соответствие между множеством ортонормированных реперов (относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$) комплексного линейного пространства $T_m(M)$, множеством ортонормированных (относительно метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$) RA-реперов вещественного векторного пространства $T_m(M)$ и множеством ортонормированных A-реперов (относительно метрики H) комплексного линейного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$. Именно, если $(m, e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный репер комплексного линейного пространства $T_m(M)$, то ему соответствует $(m, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$ – ортонормированный RA-репер вещественного векторного пространства $T_m(M)$, а также $(m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ – ортонормированный репер комплексного линейного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\sigma(e_a)$. Обратите внимание, что в отличие от случая почти комплексной структуры векторы ε_a и $\varepsilon_{\hat{a}}$ приобретают множитель. Сути дела это не меняет, но матрица метрики $g^{\mathbb{C}}$ в таком репере принимает более простой вид.

Можно показать, что задание почти эрмитовой структуры на гладком многообразии равносильно заданию главного расслоения ортонормированных A-реперов. Структурной группой этого расслоения будет унитарная группа $U(n)$. Как и в случае почти комплексных многообразий множество ортонормированных A-реперов мы можем заменять на множества ортонормированных комплексных реперов и множество ортонормированных RA-реперов (соответствующим образом будет видоизменяться группа $U(n)$, действующая на эти реперы). Так как эти множества находятся в биективном соответствии, мы будем получать из них главные расслоения, изоморфные главному расслоению ортонормированных A-реперов. Так как они изоморфны, с точки зрения геометрии они представляют собой одно и то же расслоение, которое мы будем называть присоединенной *G-структурой* почти эрмитова многообразия M.

Отметим (см. § 4.5.), что ортонормированные A-реперы характеризуются тем, что в них матрицы (J^i_j) и (g_{ij}) структурных тензорных полей имеют вид (еще раз напомним, что мы опускаем знак комплексификации при обозначении тензорных полей)

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Пример 5.3. Пусть Ω – фундаментальная форма почти эрмитовой структуры. Тогда форма Ω однозначно определяется набором функций $\{\Omega_{ij}\}$ (а точнее $\{\Omega^{\mathbb{C}}_{ij}\}$), заданных на пространстве расслоения A-реперов по формуле

$$\Omega_{ij}(p) = \Omega^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j),$$

где $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$. Рассмотрим различные значения индексов i и j.

1. $i = a$, $j = b$. Тогда
$$\Omega_{ab}(p) = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, J^{\mathbb{C}}_m\varepsilon_b\rangle = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, \sqrt{-1}\varepsilon_b) = \sqrt{-1}g_{ab} = 0.$$
Здесь мы воспользовались тем, что векторы ε_b являются собственными для $J^{\mathbb{C}}_m$, отвечающими собственному значению $\sqrt{-1}$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (перейдем к общеупотребительной записи, опуская p, m и знак комплексификации)
$$\Omega_{\hat{a}b} = \Omega(\varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_b) = g(\varepsilon_{\hat{a}}, J\varepsilon_b) = g(\varepsilon_{\hat{a}}, \sqrt{-1}\varepsilon_b) = \sqrt{-1}g_{\hat{a}b} = \sqrt{-1}\delta^a_b.$$

3. Аналогично рассуждая, получим
$$\Omega_{a\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a; \quad \Omega_{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Последний результат можно было получить из других соображений. В примере 4.7 было показано, что для вещественных тензорных полей при комплексном сопряжении задающих их систем функций индексы с крышками меняются на индексы без крышек и наоборот. Применим этот факт в нашем случае. Тогда

$$\Omega_{\hat{a}\hat{b}} = \overline{\Omega_{ab}} = 0; \quad \Omega_{a\hat{b}} = \overline{\Omega_{\hat{a}b}} = \overline{\sqrt{-1}\delta^a_b} = -\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv -\sqrt{-1}\delta^b_a.$$

Последнее равенство $\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv \delta^b_a$ это просто обозначение.

§ 5.7. Структурные уравнения почти эрмитовой структуры.

7.1. Вывод структурных уравнений.

Пусть M – $2n$-мерное почти эрмитово многообразие и (J, g) – почти эрмитова структура на нем. Обозначим через ∇ риманову связность метрики g. Как мы знаем на пространстве расслоения вещественных реперов первая группа структурных уравнений произвольной связности имеет вид (см. 3.18))

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где $\{\omega^i\}$ – тензорные компоненты формы смещения, $\{\theta^i_j\}$ – тензорные компоненты формы связности, $\{S^i_{jk}\}$ – система функций на пространстве расслоения вещественных реперов, задающая тензор кручения данной связности (напомним, что мы работаем в минусах. Полезно аналогичные вычисления провести в плюсах). Так как для римановой связности тензор кручения равен нулю, мы получаем для нее следующие уравнения

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j. \tag{5.24}$$

Чтобы перейти на расслоение A-реперов берем комплексификации обеих частей этих равенств и применяем антиувлечение отображения вложения $f : GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$. Обозначения оставляем те же, помня, что перешли на пространство расслоения A-реперов. Вид уравнений остается тот же. Эти уравнения можно уточнить, так как часть двухиндексных омег должна выражаться через остальные омеги (ожидаем, что по аналогии со случаем почти комплексной структуры они будут выражаться через одноиндексные омеги). Эту зависимость мы можем получить из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет почти комплексная структура и риманова метрика на пространстве расслоения A-реперов. Начнем с почти комплексной структуры.

$$dJ^i_j - J^i_k\theta^k_j + J^k_j\theta^i_k = J^i_{j,k}\omega^k,$$

где $\{J^i_{j,k}\}$ – системы функций на пространстве расслоения A-реперов, которые задают ковариантный дифференциал почти комплексной структуры в римановой связности (а точнее его комплексификацию). Опять напомним, что все объекты в этих дифференциальных уравнениях являются комплексификациями. Распишем эти уравнения для различных значений индексов i и j.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда

$$dJ^a_b - J^a_c\theta^c_b - J^a_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b + J^c_b\theta^a_c + J^{\hat{c}}_b\theta^a_{\hat{c}} = J^a_{b,k}\omega^k.$$

Подставим (5.23).

$$0 - \sqrt{-1}\delta^a_c\theta^c_b - 0 + \sqrt{-1}\delta^c_b\theta^a_c + 0 = J^a_{b,k}\omega^k$$
$$-\sqrt{-1}\theta^a_b + \sqrt{-1}\theta^a_b = J^a_{b,k}\omega^k.$$

Откуда получаем, что $J^a_{b,k}\omega^k = 0$. В силу линейной независимости форм ω^k получим $J^a_{b,k} = 0$.

2) $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$. Рассуждая аналогично пункту 1) получим $J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0$ (проведите вычисления самостоятельно).

3) $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (сразу расписываем суммы и не пишем заведомо нулевые слагаемые)

$$0 - J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b + J^c_b\theta^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$$
$$\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b\theta^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$$
$$\sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b + \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$$

Откуда получаем ожидаемые соотношения на теты.

$$\theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k.$$

4) $i = a$, $j = \hat{b}$. Аналогично пункту 3) получим (проведите вычисления самостоятельно)

$$\theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k.$$

Итак, мы получили, что

$$J^a_{b,k} = 0; \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k; \quad \theta^a_{\hat{b}} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k. \tag{5.25}$$

Проведем аналогичные рассуждения для римановой метрики g. По основной теореме тензорного анализа (переведенной в термины римановой связности) получим

$$dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = 0.$$

Здесь мы учли, что в римановой связности ковариантный дифференциал римановой метрики тождественно равен нулю, следовательно, в правых частях этих уравнений будут стоять нули.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда с учетом (5.23) получим (мы опять не пишем заведомые нули)

$$-g_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_a - g_{a\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_a + \delta_{a\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b = 0$$

Итак, мы получаем, что

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0.$$

2) Аналогично (проведите вычисления самостоятельно) при $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$ получим

$$\theta^b_{\hat{a}} + \theta^a_{\hat{b}} = 0.$$

3) $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда

$$-\delta_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_{\hat{a}} - \delta_{\hat{a}c}\theta^c_b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \theta^a_b = 0.$$

Оставшийся случай выдаст такой же результат. Итак, мы нашли еще соотношения на двухиндексные теты:

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0; \quad \theta^b_{\hat{a}} + \theta^a_{\hat{b}} = 0; \quad \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \theta^a_b = 0. \tag{5.26}$$

Распишем первую группу структурных уравнений римановой связности (5.24) с учетом полученных соотношений.

1) Положим в уравнениях (5.24) $i = a$.

$$d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \theta^a_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c} \omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{b}} =$$

$$= -\theta^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c} \omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} \omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} \quad (5.27)$$

Отметим, что на последнем слагаемом мы только поставили альтернацию, но не упорядочивали индексы b и c.

Введем обозначения

$$\omega_b = \omega^{\hat{b}}; \quad B^{ab}{}_c = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad C^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}. \quad (5.28)$$

Тогда (5.27) запишется в виде

$$d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c. \quad (5.29)$$

Рассматривая аналогичным образом случай $i = \hat{a}$ (проведите расчеты самостоятельно), получим

$$d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \quad (5.30)$$

где

$$B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]}; \quad C_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c}. \quad (5.31)$$

Уравнения (5.29) и (5.30) называются *первой группой структурных уравнений почти эрмитовой структуры (или почти эрмитова многообразия).*

7.2. Свойства систем функций.

При выводе структурных уравнений почти эрмитовой структуры у нас возникли системы функций, определенные на пространстве расслоения A-реперов, $\{B_{abc}, B^{abc}\}$, $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\{C_{abc}, C^{abc}\}$. Исследуем их свойства симметрии.

Предложение 5.1 . *Полученные системы функций комплексно сопряжены следующим образом*

$$\overline{B_{abc}} = B^{abc}; \quad \overline{B_{ab}{}^c} = B^{ab}{}_c; \quad \overline{C_{abc}} = C^{abc}.$$

Доказательство. Как мы видели в § 4.4. для комплексификаций вещественных тензоров при комплексном сопряжении индексы компонент в A-репере приобретают крышку, если ее не было, и теряют, если была. Так как функции

$$J^a_{\hat{b},\hat{c}}(p) = ((\nabla J)^{\mathbb{C}}_m)^a_{\hat{b}\hat{c}},$$

то есть компоненты комплексификации вещественного тензора $(\nabla J^{\mathbb{C}})_m$ в A-базисе, то при комплексном сопряжении этих функций мы получим следующий результат

$$\overline{J^a_{\hat{b},\hat{c}}} = J^{\hat{a}}_{b,c}.$$

Тогда для функций C^{abc} получим

$$\overline{C^{abc}} = \overline{\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c} = C_{abc}.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично (проведите вычисления самостоятельно). □

Предложение 5.2 . *Свойства симметрии*

$$B^{ab}{}_c = -B^{ba}{}_c; \quad C^{abc} = -C^{bac}; \quad B^{abc} = -B^{acb};$$
$$B_{ab}{}^c = -B_{ba}{}^c; \quad C_{abc} = -C_{bac}; \quad B_{abc} = -B_{acb}.$$

Доказательство. Из определения функций B^{abc} и B_{abc} непосредственно следует их кососимметричность по последней паре индексов. Чтобы доказать свойства симметрии для двух других пар функций, напомним, что для почти эрмитовых многообразий мы получили следующие соотношения (см. (5.26) и (5.25))

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0; \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k;$$

Подставим вторые соотношения в первые и сразу сократим на числовой коэффициент.

$$J^{\hat b}_{a,k}\omega^k + J^{\hat a}_{b,k}\omega^k = 0.$$

В силу линейной независимости форм ω^k получим

$$J^{\hat b}_{a,c} + J^{\hat a}_{b,c} = 0; \quad J^{\hat b}_{a,\hat c} + J^{\hat a}_{b,\hat c} = 0.$$

Сравнивая полученные равенства с определением функций C_{abc} и $B_{ab}{}^c$ (см. (5.31)), получим

$$C_{bac} + C_{abc} = 0; \quad B_{ba}{}^c + B_{ab}{}^c = 0.$$

$\square$

Очевидно, что

$$B_{abc} = C_{a[bc]}; \quad B^{abc} = C^{a[bc]}. \tag{5.32}$$

Оказывается, можно функции C_{abc} выразить через функции B_{abc}.

Предложение 5.3 **.** *Во введенных обозначениях имеем*

$$C_{abc} = B_{abc} + B_{bca} + B_{cba}.$$

Доказательство. Согласно (5.32) получим

$$B_{abc} + B_{bca} + B_{cba} = C_{a[bc]} + C_{b[ca]} + C_{c[ba]} = \frac{1}{2}(C_{abc} - C_{acb} + C_{bca} - C_{bac} + C_{cba} - C_{cab}) =$$

Воспользуемся кососимметричностью функций C_{abc} по первым двум индексам.

$$= \frac{1}{2}(2C_{abc}) = C_{abc}.$$

$\square$

Задача 5.2**.** Докажите, что

$$\theta^a_{\hat b} = -B^{ab}{}_c\omega^c + C^{abc}\omega_c = -B^{ab}{}_c\omega^c + (B^{abc} + B^{bca} + B^{cba})\omega_c$$
$$\theta^{\hat a}_b = -B_{ab}{}^c\omega_c + C_{abc}\omega^c = -B_{ab}{}^c\omega_c + (B_{abc} + B_{bca} + B_{cba})\omega^c.$$

§ 5.8. Виртуальный тензор.

8.1. Определение виртуального тензора.

Введем в рассмотрение отображение $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$B(X,Y)(m) = B^{ab}{}_c X_b Y^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b Y_c \varepsilon^a, \tag{5.33}$$

где мы ввели обозначение $\varepsilon^a = \varepsilon_{\hat a}$, $X_b = X^{\hat b}$, $m \in M$ и репер $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon^b)$. Обычно в этой формуле точку m не пишут.

Задача 5.3**.** Докажите, что отображение B определено корректно, то есть $B(X,Y)$ является вещественным векторным полем.

Указание. Докажите, что в каждой точке $m \in M$ значение $B(X,Y)(m)$ векторного поля $B(X,Y)$ будет вещественным вектором, то есть $\tau B(X,Y)(m) = B(X,Y)(m)$ (см. теорему 4.5).

Задача 5.4**.** Докажите, что отображение B является $C^\infty(M)$-линейным, то есть оно может быть отождествлено с тензорным полем типа (2,1) на многообразии M. Это тензорное поле называется *виртуальным тензором* почти эрмитова многообразия.

Заметим, что априори отображение B может зависеть от выбора A-репера. Покажем, что это не так. Для этого найдем инвариантное выражение для виртуального тензора.

Рассмотрим формулу (5.33). Используя обозначения (5.31) и (5.28), получим

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b,c}X^{\hat b}Y^c\varepsilon_a + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b,\hat c}X^bY^{\hat c}\varepsilon_{\hat a} =$$

Рассмотрим вектор $(\nabla J)(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c)$. По определению координат вектора в базисе имеем

$$(\nabla J)(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c) = J^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a + J^{\hat{a}}_{\hat{b},c}\varepsilon_{\hat{a}} = J^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a,$$

так как $J^{\hat{a}}_{\hat{b},c} = 0$ (см. (5.25)). Аналогично получаем, что $J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} = \nabla J(\varepsilon_b, \varepsilon_{\hat{c}})$. Тогда продолжая цепочку равенств, получим

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2}(-\nabla J(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c)X^{\hat{b}}Y^c + \nabla J(\varepsilon_b, \varepsilon_{\hat{c}})X^bY^{\hat{c}}) =$$

$X^b, X^{\hat{b}}, Y^c, Y^{\hat{c}}$ – это комплексные числа. Они являются координатами векторов X_m и Y_m в A-базисе (обозначение точки m как всегда опущено). Эти числа нужно внести под тензор ∇J). Так как ∇J – это комплексификация (знак комплексификации опущен для краткости записи) значения в точке m ковариантного дифференциала почти комплексной структуры, то под знак ∇J эти числа также можно внести (в силу комплексной линейности комплексификации). Тогда

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2}(-\nabla J(X^{\hat{b}}\varepsilon_{\hat{b}}, Y^c\varepsilon_c) + \nabla J(X^b\varepsilon_b, Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}})) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(-\nabla J(\bar{\sigma}X, \sigma Y) + \nabla J(\sigma X, \bar{\sigma}Y)) =$$

Теперь применяем определения проекторов $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{-1}}{8}(-\nabla J(X + \sqrt{-1}JX, Y - \sqrt{-1}JY) + \nabla J(X - \sqrt{-1}JX, Y + \sqrt{-1}JY)) = \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{8}(-\nabla J(X,Y) - \nabla J(JX,JY) - \sqrt{-1}\nabla J(JX,Y) + \sqrt{-1}\nabla J(X,JY) + \nabla J(X,Y) + \nabla J(JX,JY) - \\
&\qquad - \sqrt{-1}\nabla J(JX,Y) + \sqrt{-1}\nabla J(X,JY)) =
\end{aligned}$$

Приводим подобные. Так как мы ожидаем вещественный вектор, $\sqrt{-1}$ быть не должно, следовательно, взаимно уничтожатся все слагаемые внутри внешних скобок, которые не содержат множитель $\sqrt{-1}$.

$$= \frac{1}{4}(\nabla J(JX,Y) - \nabla J(X,JY)) =$$

Переходим от ковариантных дифференциалов к производным.

$$= \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)JX - \nabla_{JY}(J)X).$$

Итак,

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X). \tag{5.34}$$

Итак, мы показали, что вектор $B(X,Y)(m)$ не зависит от выбора A-репера в точке m. Кроме того, мы получили выражение для отображения B в инвариантном виде исчисления Кошуля. Так как полученное равенство верно для любой точки m, то мы получили соотношения для тензорных полей. Это выражение еще раз подтверждает, что отображение B будет $C^\infty(M)$-линейным как композиция таковых, то есть будет тензорным полем типа (2,1). Это тензорное поле называется *виртуальным тензором почти эрмитова многообразия.*

8.2. Свойства виртуального тензора.

Изучим свойства виртуального тензора.

Задача 5.5. Используя формулу (5.34), покажите, что

$$B(JX,Y) = -B(X,JY) = -JB(X,Y).$$

Благодаря почти комплексной структуре J модуль векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ можно рассматривать как (бесконечномерное) комплексное линейное пространство. Умножение на комплексные числа при этом будет задаваться формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX,\ z = \alpha + \sqrt{-1}\beta.$$

Тогда на комплексном линейном пространстве виртуальный тензор будет обладать следующими свойствами

$$B(zX,Y) = \bar{z}B(X,Y); \quad B(X,zY) = zB(X,Y),$$

то есть отображение B будет $\mathbb{C}$-линейно по второму аргументу и $\mathbb{C}$-антилинейно по первому аргументу.

Действительно,

$$B(zX,Y)=B(\alpha X+\beta JX,Y)=\alpha B(X,Y)+\beta B(JX,Y)=$$
$$=\alpha B(X,Y)-\beta JB(X,Y)=(\alpha-\beta\sqrt{-1})B(X,Y)=\bar{z}B(X,Y)$$

Здесь мы воспользовались $\mathbb{R}$-линейностью тензорного поля B и результатом задачи 5.5.

Как и любое тензорное поле, для виртуального тензора B можно рассматривать комплексификацию $B^{\mathbb{C}}$. Как мы знаем, $B^{\mathbb{C}}$ будет комплексно линеен по каждому аргументу. Обычно знак комплексификации опускают. Будьте внимательны, чтобы не перепутать виртуальный тензор и его комплексификацию. Первый $\mathbb{C}$-линеен по второму аргументу и $\mathbb{C}$-антилинеен по первому, а вторая $\mathbb{C}$-линейна по каждому аргументу.

8.3. Компоненты виртуального тензора.

Найдем компоненты виртуального тензора в A-репере, то есть систему функций $\{B^i_{jk}\}$ на пространстве расслоения A-реперов, которые определяются следующим образом (Обратите внимание, что мы различаем обозначения B^c_{ab} и $B_{ab}{}^c$!!!)

$$B^i_{jk}(p)=(B_m(\varepsilon_j,\varepsilon_i))^i,\ p=(m,\varepsilon_i).$$

(Знак комплексификации на B_m опущен, хотя подразумевается, так как с векторами ε_i, которые принадлежат комплексификации касательного пространства, сам тензор B_m работать не умеет.) Нам нужно рассмотреть все возможные случаи для индексов i,j,k. Таких случаев будет 8.

1) Пусть $j=e$, $k=f$. Используя формулу (5.33), получим

$$B(\varepsilon_e,\varepsilon_f)=B^{ab}{}_c(\varepsilon_e)_b(\varepsilon_f)^c\varepsilon_a+B_{ab}{}^c(\varepsilon_e)^b(\varepsilon_f)_c\varepsilon^a.$$

Напомним введенные обозначения $(\varepsilon_e)_b\equiv(\varepsilon_e)^{\hat{b}}$, то есть $\hat{b}$ координата вектора ε_e. Так как вектор ε_e из первой половины базиса (индекс e принимает значения от 1 до n), а индекс $\hat{b}$ принимает значения от $n+1$ до $2n$, то $(\varepsilon_e)^{\hat{b}}=0$. Аналогично получаем, что $(\varepsilon_f)_c=0$. Итак, вектор $B(\varepsilon_e,\varepsilon_f)=0$, а значит все его координаты в A-базисе также равны нулю. Откуда получаем $B^d_{ef}=B^{\hat{d}}_{ef}=0$.

2) Пусть $j=\hat{e}$, $k=f$. Используя формулу (5.33), получим

$$B(\varepsilon_{\hat{e}},\varepsilon_f)=B^{ab}{}_c(\varepsilon_{\hat{e}})_b(\varepsilon_f)^c\varepsilon_a+B_{ab}{}^c(\varepsilon_{\hat{e}})^b(\varepsilon_f)_c\varepsilon^a=B^{ab}{}_c\delta^e_b\delta^c_f\varepsilon_a=B^{ae}{}_f\varepsilon_a.$$

Здесь обнулилась только вторая группа слагаемых по причинам аналогичным пункту 1). Тогда координаты вектора $B(\varepsilon_{\hat{e}},\varepsilon_f)$ будут следующие $B^a_{\hat{e}f}=B^{ae}{}_f$, $B^{\hat{a}}_{\hat{e}f}=0$.

Аналогичным образом можно показать, что у виртуального тензора есть еще одна группа ненулевых компонент в A-репере, а именно, $B^{\hat{a}}_{e\hat{f}}=B_{ae}{}^f$. Остальные компоненты равны нулю (покажите самостоятельно).

Итак, ненулевые компоненты виртуального тензора B в A-репере:

$$B^a_{\hat{b}c}=B^{ab}{}_c;\quad B^{\hat{a}}_{b\hat{c}}=B_{ab}{}^c. \tag{5.35}$$

Заметим, что точно такой же результат можно получить, если использовать формулу (5.34) и обозначения (5.28), (5.31). Проведите вычисления самостоятельно.

8.4. Представление виртуального тензора в виде суммы примитивного и бесследного тензоров.

Напомним, что на касательном пространстве $T_m(M)$, рассматриваемом как комплексное линейное пространство, определена эрмитова форма

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle=\langle X,Y\rangle+\sqrt{-1}\langle X,JY\rangle,\ X,Y\in T_m(M).$$

Лемма 5.2. *Произвольный вектор* $\zeta\in T_m(M)$ *может быть представлен в виде*

$$\zeta=\sum_{a=1}^{n}\langle\langle\zeta,e_a\rangle\rangle e_a.$$

Доказательство. По определению эрмитовой формы и комплексной структуры, задаваемой оператором комплексной структуры имеем

$$\sum_{a=1}^{n}\langle\langle\zeta,e_a\rangle\rangle e_a=\sum_{a=1}^{n}\langle\zeta,e_a\rangle e_a+\sqrt{-1}\sum_{a=1}^{n}\langle\zeta,Je_a\rangle e_a=\sum_{a=1}^{n}\langle\zeta,e_a\rangle e_a+\sum_{a=1}^{n}\langle\zeta,Je_a\rangle Je_a=\zeta.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в ортонормированном базисе (e_a,Je_a) (он ортонормирован относительно евклидовой структуры g_m) вещественные числа $\langle\zeta,e_a\rangle$ и $\langle\zeta,Je_a\rangle$ являются координатами вектора ζ в этом базисе. □

Следом тензора T типа (2,1) назовем тензор $tr\,T$, который определяется формулой

$$(tr\,T)_m = -\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n} T(e_a, e_a),$$

где $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный относительно метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ базис касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Назовем тензор T типа (2,1) *бесследным*, если его след равен нулю в каждой точке многообразия M.

Назовем тензор T типа (2,1) *примитивным*, если существует ковектор η, такой что

$$T(X,Y) = \langle\langle \eta, X\rangle\rangle Y - \langle\langle Y, X\rangle\rangle \eta.$$

Теорема 5.4. *Виртуальный тензор B почти эрмитова многообразия (M, J, g) в каждой точке многообразия M можно однозначно представить в виде суммы бесследного и примитивного тензора.*

Доказательство. Рассмотрим виртуальный тензор B, фиксируем точку $m \in M$ и обозначим для краткости той же буквой B значение виртуального тензора в точке m. Предположим, что тензор B представим в виде

$$B(X,Y) = B_0(X,Y) + \langle\langle \eta, X\rangle\rangle Y - \langle\langle Y, X\rangle\rangle \eta, \tag{5.36}$$

где B_0 – бесследный тензор. Найдем выражение для вектора η.

Вычислим след тензора B в равенстве (5.36).

$$\sum_{a=1}^{n} B(e_a, e_a) = \sum_{a=1}^{n} B_0(e_a, e_a) + \sum_{a=1}^{n}(\langle\langle \eta, e_a\rangle\rangle e_a - \langle\langle e_a, e_a\rangle\rangle \eta) = 0 + \eta - n\eta = (1-n)\eta.$$

Здесь мы воспользовались тем, что тензор B_0 является бесследным, леммой 5.2 и ортонормированностью базиса относительно эрмитовой метрики. Откуда получаем

$$\eta = \frac{1}{1-n}\sum_{a=1}^{n} B(e_a, e_a) \equiv tr\,B. \tag{5.37}$$

Нетрудно показать, что вектор η не зависит от выбора ортонормированного базиса. Это следует из того, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является унитарной. Так как виртуальный тензор антилинеен по одному и линеен по другому аргументу, элементы унитарной матрицы выносятся с одного аргумента по линейности, а с другого по антилинейности (комплексно сопряженным). Тогда получим произведение матрицы и комплексно сопряженной транспонированной матрицы. В силу унитарности это произведение равно единичной матрице. Проведите подробные вычисления самостоятельно.

Тензор B_0 определяется формулой

$$B_0(X,Y) = B(X,Y) - \langle\langle \eta, X\rangle\rangle Y + \langle\langle Y, X\rangle\rangle \eta, \tag{5.38}$$

где $\eta = tr\,B$. Непосредственная проверка показывает, что это бесследный тензор. Итак, если разложение виртуального тензора B в каждой точке m многообразия M существует, то оно бесследный и примитивный тензоры определяются соотношениями (5.37) и (5.38), а значит, они определены однозначно.

Чтобы доказать существование, зададим бесследный и примитивный тензоры формулами (5.37) и (5.38). Очевидно, что их сумма есть $B(X,Y)$. □

Замечание 5.2. Для дальнейших рассуждений нам понадобится так называемый *оператор кодифференцирования*. Пусть на гладком многообразии M фиксирована риманова метрика g. Обозначим определяемую ей связность через ∇. Рассмотрим отображение $\delta : \Lambda_r(M) \to \Lambda_{r-1}(M)$, задаваемое формулой

$$(\delta\Omega)_{i_1\dots i_{r-1}} = g^{i_r k}\Omega_{i_1\dots i_{r-1}i_r,k},$$

где $\Omega_{i_1\dots i_{r-1}i_r,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы Ω. Как мы знаем из курса тензорной алгебры, матрица (g^{ij}) является обратной к матрице (g_{ij}) компонент римановой метрики.

Заметим, что если взять ортонормированный относительно метрики g базис, то матрица (g_{ij}) будет единичной, а значит, и обратная ей матрица также будет единичной, то есть $g^{ij} = \delta^{ij}$. Тогда формула определяющая кодифференциал формы, примет вид

$$(\delta\Omega)_{i_1\dots i_{r-1}} = \delta^{i_r k}\Omega_{i_1\dots i_{r-1}i_r,k} = \sum_{k=1}^{2n}\Omega_{i_1\dots i_{r-1}k,k}, \tag{5.39}$$

Это соотношение можно записать в почти инвариантном виде

$$(\delta\Omega)(X_1,\dots,X_{r-1})=\sum_{k=1}^{2n}\nabla_{E_k}(\Omega)(X_1,\dots,X_{r-1},E_k),$$

где $(E_1,\dots,E_{2n})$ – локальный ортонормированный базис модуля $\mathfrak{X}(M)$, $X_1,\dots,X_{r-1}$ – произвольные векторные поля на M. Если взять значение обеих частей этого равенства в точке $m\in M$, то получим

$$(\delta\Omega)_m(X_1,\dots,X_{r-1})=\sum_{k=1}^{2n}\nabla_{e_k}(\Omega)(X_1,\dots,X_{r-1},e_k) \tag{5.40}$$

Здесь уже $X_1,\dots,X_{r-1}$ – произвольные касательные векторы из $T_m(M)$, $(e_1,\dots,e_{2n})$ – произвольный ортонормированный базис касательного пространства $T_m(M)$ (относительно евклидовой структуры g_m – значение римановой метрики g, рассматриваемой как сечение векторного расслоения тензоров типа (2,0), в точке m). В правой части этого равенства также стоит значение ковариантного дифференциала формы Ω в точке m. Так как он записан в виде ковариантной производной, то писать букву m некуда и мы ее опустили.

Пусть $(J,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитова структура на гладком многообразии M^{2n}. Напомним, что 2-форма $F(X,Y)=\langle JX,Y\rangle$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ называется *келеровой формой*, а форма $\Omega(X,Y)=\langle X,JY\rangle$ называется *фундаментальной формой*. Очевидно, что $\Omega=-F$.

Определим 1-форму

$$\omega(X)=-\frac{1}{n-1}\delta F(JX)\equiv\frac{1}{n-1}\delta\Omega(JX),\ X\in\mathfrak{X}(M),$$

которая называется *формой Ли*. Двойственное ей векторное поле ξ называется *вектором Ли*. Двойственность векторного поля 1-форме означает, что $\omega(X)=g(X,\xi)$ для любого векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$.

Выясним, как вектор η из разложения виртуального тензора связан с вектором Ли. Так как вектор Ли связан с фундаментальной формой, а вектор η связан с виртуальным тензором, а значит, с ковариантным дифференциалом почти комплексной структуры, нам нужно установить формулу, связывающую ковариантные дифференциалы почти комплексной структуры и фундаментальной формы.

Применим оператор ковариантного дифференцирования ∇_X к определению фундаментальной формы: $\Omega(Y,Z)=g(Y,JZ)$ или (подготовка к дифференцированию)

$$C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(\Omega\otimes Y\otimes Z)=C^{(1)(2)(3)}_{(1)(2)(3)}(g\otimes Y\otimes J\otimes Z).$$

Получим (подробные вычисления проведите самостоятельно)

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z)=g(Y,\nabla_X(J)Z).$$

Используя полученную формулу, вычислим кодифференциал формы Ω. Согласно формуле (5.40) в каждой точке $m\in M$ имеем

$$(\delta\Omega)(Y)=\sum_{a=1}^{n}g(Y,\nabla_{e_a}(J)e_a)+\sum_{a=1}^{n}g(Y,\nabla_{Je_a}(J)(Je_a)=g(Y,\sum_{a=1}^{n}\nabla_{e_a}(J)e_a)+\nabla_{Je_a}(J)(Je_a)). \tag{5.41}$$

Здесь мы воспользовались тем, что RA-базис (e_a,Je_a) является ортонормированным относительно метрики g_m (см. замечание 4.8).

С другой стороны, используя формулу (5.34), получим

$$-JB(e_a,e_a)=B(Je_a,e_a)=\frac{1}{4}(\nabla_{e_a}(J)(J^2e_a)-\nabla_{Je_a}(J)(Je_a))=\frac{1}{4}(-\nabla_{e_a}(J)e_a-\nabla_{Je_a}(J)(Je_a)).$$

Просуммируем по a и учтем, что в силу замечания 4.8 базис (e_a) касательного пространства $T_m(M)$ (комплексное линейное пространство) является ортонормированным относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

$$(1-n)Jtr\,B=\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}(J)e_a+\nabla_{Je_a}(J)(Je_a)).$$

Сравнивая полученный результат с (5.41), имеем

$$(\delta\Omega)(Y)=g(Y,4(1-n)Jtr\,B)=4(1-n)g(Y,J\eta).$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.37). Далее воспользуемся определением формы Ли и двойственного ей вектора Ли. Тогда левая часть последней цепочки равенств примет вид (вместо Y подставим JY)

$$(n-1)g(\xi, Y) = (n-1)\omega(JY) = 4(1-n)g(JY, J\eta) = 4(1-n)g(Y, \eta)$$

В силу невырожденности метрики g получим $\eta = -\frac{1}{4}\xi$.

Итак, для виртуального тензора почти эрмитовой структуры в каждой точке $m \in M$ получаем разложение

$$B(X,Y) = B_0(X,Y) + \frac{1}{4}(\langle\langle Y, X\rangle\rangle\xi - \langle\langle \xi, X\rangle\rangle Y), \tag{5.42}$$

где ξ – вектор Ли, B_0 – бесследный тензор. Так как это равенство верно для любой точки, то оно же задаст соотношение для соответствующих тензорных полей.

Замечание 5.3. Равенство (5.42) работает с объектами, определенными в точке, то есть с тензорами и касательными векторами. Так как оно верно для каждой точки многообразия M, объекты этого равенства можно рассматривать как векторные и тензорные поля.

Если обозначить примитивный тензор (тензорное поле) через B_1, то для виртуального тензора получим разложение на бесследный и примитивный тензоры (тензорные поля):

$$B = B_0 + B_1.$$

Нетрудно показать, что такое разложение определено однозначно. Мы будем пользоваться этим разложением для классификации почти эрмитовых структур, полагая $B_0 = 0$ или $B_1 = 0$. Запишем эти соотношения в A-реперах.

Начнем с условия $B_0 = 0$, то есть (см. (5.42)) виртуальный тензор является примитивным тензором, то есть

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(\langle\langle Y, X\rangle\rangle\xi - \langle\langle \xi, X\rangle\rangle Y). \tag{5.43}$$

Чтобы записать это соотношение в компонентах, мы должны, во-первых, взять значение тензорных полей, входящих в это равенство, в точке m и, во-вторых, подставить вместо аргументов вектора A-базиса. Второе пока мы сделать не сможем, так как эта формула работает с комплексными векторами из $T_m(M)$, а нужна формула, работающая с векторами комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$. Для перехода к нужной формуле вспомним, что эрмитова форма $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ определялась следующим образом

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X, JY),\ X, Y \in T_m(M),$$

а умножение на мнимую единицу в $T_m(M)$ определялось как $\sqrt{-1}X = JX$. Тогда равенство (5.43) примет вид

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(g(Y,X)\xi + g(Y,JX)J\xi - g(\xi,X)Y - g(\xi,JX)JY).$$

Это равенство работает с векторами касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как вещественное векторное пространство. В этом равенстве мы можем перейти к комплексификации всех входящих в него тензоров и подставить вместо аргументов векторы A-репера. Для сокращения записи мы не будем писать над тензорами знак комплексификации. Рассмотрим возможные случаи для векторов X и Y.

1. Пусть $X = \varepsilon_{\hat{b}}$, $Y = \varepsilon_c$. Тогда

   $$B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c) = \frac{1}{4}(g(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})\xi + g(\varepsilon_c, J\varepsilon_{\hat{b}})J\xi - g(\xi, \varepsilon_{\hat{b}})\varepsilon_c - g(\xi, J\varepsilon_{\hat{b}})J\varepsilon_c.$$

   Далее, воспользуемся тем, что вектор ε_c является собственным вектором J, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$, а вектор $\varepsilon_{\hat{b}}$ – собственным вектором, отвечающим собственному значению $-\sqrt{-1}$, то есть $J\varepsilon_c = \sqrt{-1}\varepsilon_c$ и $J\varepsilon_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{b}}$. Так как $B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c)$ является вектором комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, его можно разложить по A-базису. Коэффициентами разложения будут компоненты виртуального тензора. Тогда

   $$\begin{aligned} B^a_{\hat{b}c}\varepsilon_a + B^{\hat{a}}_{\hat{b}c}\varepsilon_{\hat{a}} &= \frac{1}{4}(\delta^b_c(\xi^a\varepsilon_a + \xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}) - \sqrt{-1}\delta^b_c J(\xi^a\varepsilon_a + \xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}) - g(\xi^a\varepsilon_a + \xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_{\hat{b}})\varepsilon_c + \sqrt{-1}g(\xi^a\varepsilon_a + \xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_{\hat{b}})\sqrt{-1}\varepsilon_c)) = \\ &= \frac{1}{4}(\delta^b_c\xi^a\varepsilon_a + \delta^b_c\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} + \delta^b_c\xi^a\varepsilon_a - \delta^b_c\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} - \xi^b\varepsilon_c - \xi^b\varepsilon_c) = \frac{1}{2}(\delta^b_c\xi^a\varepsilon_a - \xi^b\delta^a_c\varepsilon_a) = \xi^{[a}\delta^{b]}_c\varepsilon_a. \end{aligned}$$

   Так как $B^{\hat{a}}_{\hat{b}c} = 0$ и векторы A-базиса линейно независимы, получим

   $$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c. \tag{5.44}$$

2. Аналогично предыдущему пункту покажите, что при $X = \varepsilon_b$, $Y = \varepsilon_{\hat{c}}$ получим комплексно сопряженное соотношение, то есть
$$B_{ab}{}^{c} = \xi_{[a}\delta^{c}_{b]},$$
где $\xi_a = \xi^{\hat{a}}$ – обозначение.
3. Все остальные (еще два) возможные значения X и Y дадут тождества вида $0 = 0$. Проверьте это самостоятельно.

Итак, мы показали, что $B_0 = 0$ тогда и только тогда, когда виртуальный тензор B примитивен, что равносильно выполнению тождества (5.44) на пространстве расслоения A-реперов. Заметим, что тождество из второго пункта получается из тождества (5.44) применение операции комплексного сопряжения.

Теперь рассмотрим случай, когда $B_1 = 0$, то есть виртуальный тензор является бесследным, то есть $tr\, B = 0$. По определению следа имеем $\sum_{a=1}^{n} B(e_a, e_a) = 0$ в каждой точке $m \in M$, где (e_a) – ортонормированный относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ базис комплексного векторного пространства $T_m(M)$. Нам опять нужно перейти к комплексификации. Так как вектор e_a можно рассматривать как вектор комплексификации вида $1 \cdot e_a$, то на виртуальный тензор мы можем написать значок комплексификации. Далее, так как по определению A-базиса (точнее, модифицированного A-базиса замечание 4.9)
$$\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(e_a - \sqrt{-1}Je_a); \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(e_a + \sqrt{-1}Je_a),$$
складывая эти равенства, получим
$$e_a = \sqrt{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_{\hat{a}}).$$
Подставим это равенство в $\sum_{a=1}^{n} B(e_a, e_a) = 0$ и воспользуемся линейностью комплексификации виртуального тензора и тем, что все его компоненты кроме $B^{a}_{\hat{b}c} = B^{ab}{}_{c}$ и $B^{\hat{a}}_{b\hat{c}} = B_{ab}{}^{c}$ равны нулю.
$$B^{i}_{\hat{a}a}\varepsilon_i + B^{i}_{a\hat{a}}\varepsilon_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B^{b}_{\hat{a}a}\varepsilon_b + B^{\hat{b}}_{a\hat{a}}\varepsilon_{\hat{b}} = 0$$
В силу линейной независимости векторов A-базиса получим
$$B^{b}_{\hat{a}a} \equiv B^{ba}{}_{a} = 0; \quad B^{\hat{b}}_{a\hat{a}} \equiv B_{ba}{}^{a} = 0.$$
Полученная пара соотношений является комплексно сопряженной. Поэтому мы получаем, что $B_1 = 0$ тогда и только тогда, когда B является бесследным тензором, то есть выполняется следующее равенство на пространстве расслоения A-реперов
$$B^{ba}{}_{a} = 0.$$

§ 5.9. Структурные тензоры.

9.1. Определение структурных тензоров.

Аналогично случаю виртуального тензора можно рассмотреть два отображения $\tilde{C} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ и $C : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, заданные формулами
$$\tilde{C}(X,Y) = C^{abc}X_bY_c\varepsilon_a + C_{abc}X^bY^c\varepsilon^a; \quad C(X,Y) = B^{abc}X_bY_c\varepsilon_a + B_{abc}X^bY^c\varepsilon^a \tag{5.45}$$
и показать, что они задают тензорные поля типа (2,1). Их инвариантная запись будет иметь вид
$$\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)); \tag{5.46}$$
$$C(X,Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)).$$

Задача 5.6**.** Проведите соответствующие вычисления самостоятельно.

Тензорное поле C называется *структурным тензором почти эрмитовой структуры.* Второе тензорное поле специального названия не имеет, так как очень редко используется в изучении почти эрмитовых структур. Договоримся называть его *неальтернированным структурным тензором.*

Очевидно, что $C = Alt\,\tilde{C}$.

Задача 5.7**.** Докажите, что $\tilde{C}(JX,Y) = \tilde{C}(X,JY) = -J\tilde{C}(X,Y)$. Выведите из этого, что $C(JX,Y) = C(X,JY) = -JC(X,Y)$.

Задача 5.8**.** Докажите, что структурный тензор $\mathbb{C}$-антилинеен по каждому аргументу.

Задача 5.9**.** Докажите, что ненулевые компоненты неальтернированного структурного тензора в A-репере имеют вид
$$\tilde{C}^{\hat{a}}_{bc} = C_{abc}; \quad \tilde{C}^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}.$$

Задача 5.10**.** Докажите, что ненулевые компоненты структурного тензора в A-репере имеют вид
$$C^{\hat{a}}_{bc} = B_{abc}; \quad C^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = B^{abc}.$$

9.2. Представление структурного тензора в виде суммы кососимметричного и квазисимметричного тензоров.

Определим тензорное поле $\mathscr{C}$ типа (3,0) на почти эрмитовом многообразии следующей формулой

$$\mathscr{C}(X,Y,Z) = \langle\langle X, \tilde{C}(Y,Z)\rangle\rangle.$$

Так как эрмитова форма линейна по первому и антилинейна по второму аргументу, а неальтернированный структурный тензор антилинеен по обоим аргументам, получим, что тензорное поле $\mathscr{C}$ будет линейно (и в вещественном и в комплексном смыслах) по обоим аргументам. Правда, в каждой точке $m \in M$ оно будет ставить в соответствие набору векторов из $T_m(M)$ комплексное число. Тогда, если отпустить точку, то отображение $\mathscr{C}$ будет ставить в соответствие "обычным"векторным полям X, Y, Z в соответствие комплекснозначную функцию. Несмотря на это, мы будем называть отображение $\mathscr{C}$ тензорным полем на многообразии M (или комплексным тензорным полем).

Найдем компоненты тензорного поля $\mathscr{C}$ в A-репере. Имеем

$$\mathscr{C}_{abc} = \langle\varepsilon_a, \tilde{C}(\varepsilon_b, \varepsilon_c)\rangle + \sqrt{-1}\langle\varepsilon_a, J\tilde{C}(\varepsilon_b, \varepsilon_c)\rangle = \langle\varepsilon_a, C_{fbc}\varepsilon_{\hat{f}}\rangle + \sqrt{-1}\langle\varepsilon_a, J(C_{fbc}\varepsilon_{\hat{f}})\rangle =$$
$$= C_{fbc}\delta^f_a + \sqrt{-1}C_{fbc}\langle\varepsilon_a, J\varepsilon_{\hat{f}}\rangle = C_{abc} + C_{abc} = 2C_{abc}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.45) и тем, что $\varepsilon_{\hat{f}}$ являются собственными векторами оператора комплексной структуры, отвечающими собственному значению $-\sqrt{-1}$.

Аналогично можно получить (проведите вычисления самостоятельно), что $\mathscr{C}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = 2C^{abc}$. Остальные компоненты тензорного поля $\mathscr{C}$ будут равны нулю (вычислите несколько штук).

Итак, мы имеем тензорное поле $\mathscr{C}$ типа (3,0). К нему можно применить оператор альтернирования точно так же как мы применяли его к обычным (вещественным) тензорным полям: шесть подстановок будут перемешивать аргументы и результаты (комплексные тензорные поля) будут складываться с учетом знака подстановки. Так как оператор альтернирования является проектором, то тензорное поле $\mathscr{C}$ может быть (однозначно) представлено в виде суммы двух тензорных полей C_0 и C_1, где

$$C_1 = Alt\,\mathscr{C}; \quad C_0 = \mathscr{C} - C_1.$$

По определению оператора альтернирования получаем, что тензорное поле C_1 будет кососимметрическим тензорным полем. Тензорное поле C_0 назовем *квазисимметричным тензорным полем.*

Для тензорного поля C_0 имеем

$$Alt\,C_0 = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,C_1 = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,Alt\,\mathscr{C} = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,\mathscr{C} = 0.$$

Здесь мы воспользовались определением проектора $Alt^2 = Alt$. Таким образом, тензорное поле C_0 принадлежит ядру проектора Alt. Так как векторное пространство тензоров раскладывается в прямую сумму ядра и образа проектора (см. § 4.3.), тензорное поле $\mathscr{C}$ однозначно представимо в виде суммы кососимметрического и квазисимметрического тензорных полей.

9.3. Условия кососимметричности и квазисимметричности в компонентах.

Аналогично случаю виртуального тензора, нам нужно будет получить условия на пространстве расслоения A-реперов, которые равносильны условиям $C_0 = 0$ и $C_1 = 0$.

Пусть $C_0 = 0$, то есть тензорное поле $\mathscr{C}$ является кососимметрическим, то есть $\mathscr{C} = Alt\,\mathscr{C}$. Тогда для компонент $\mathscr{C}$ выполняются соотношения

$$C^{abc} = C^{[abc]}; \quad C_{abc} = C_{[abc]}, \tag{5.47}$$

для остальных компонент получаем тождества вида $0 = 0$. Заметим, что соотношения в (5.47) комплексно сопряжены, а значит, существенным является только одно из них (второе получается из него комплексным сопряжением). Поэтому мы будем работать только с первым соотношением. Таким образом, мы получили промежуточный результат: $C_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $C^{abc} = C^{[abc]}$. Это соотношение не удобно, так как в структурных уравнениях (5.29) и (5.30) почти эрмитовой структуры участвуют компоненты $\{B^{abc}\}$ структурного тензора, а не компоненты $\{C^{abc}\}$ неальтернированного структурного тензора. Поэтому покажем, что соотношение

$$C^{abc} = C^{[abc]} \quad \Leftrightarrow \quad B^{abc} = B^{[abc]}. \tag{5.48}$$

Доказательство. Пусть выполняется соотношение $C^{abc} = C^{[abc]}$. Тогда

$$B^{abc} = C^{a[bc]} = \frac{1}{2}(C^{abc} - C^{acb}) = \frac{1}{2}(C^{[abc]} - C^{[acb]}) = \frac{1}{2}(C^{[abc]} + C^{[abc]}) = C^{[a[bc]]} = B^{[abc]}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что после альтернации получается кососимметрическое тензорное поле, а значит, при перестановке любых двух аргументов знак меняется на противоположный. Также мы воспользовались тем, что внешняя альтернация "съедает"все внутренние альтернации, следовательно, $C^{[a[bc]]} = C^{[abc]}$.

Обратно, пусть выполняется $B^{abc} = B^{[abc]}$. Тогда с учетом предложения 5.3 получим

$$C^{abc} = B^{abc} + B^{bca} + B^{cba} = B^{[abc]} + B^{[bca]} + B^{[cba]} = B^{[abc]} + B^{[abc]} - B^{[abc]} = B^{[abc]} = C^{[a[bc]]} = C^{[abc]}.$$

Здесь мы опять воспользовались кососимметричностью альтернированного тензорного поля по любой паре индексов. ☐

Итак, мы получили окончательный результат. Условие $C_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда тензорное поле $\mathscr{C}$ является кососимметрическим, то есть $B^{abc} = B^{[abc]}$.

Задача 5.11**.** Покажем, что условие $B^{abc} = B^{[abc]}$ равносильно тому, что система функций $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ (которая является компонентами структурного тензора в A-репере) кососимметрична по любой паре индексов.

Решение. Из определения системы функций $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ (см. формулы (5.31)) следует, что они кососимметричны по последней паре индексов. Покажем, что они кососимметричны по первой паре индексов. Из соотношения $B^{abc} = B^{[abc]}$ получаем

$$B^{abc} = B^{[abc]} = -B^{[bac]} = -B^{bac}.$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью альтернированного тензора по любой паре индексов. ☐

Рассмотрим условие $C_1 = 0$, то есть $\mathscr{C} = C_0$, то есть $\mathscr{C}$ принадлежит ядру проектора Alt, то есть $Alt\mathscr{C} = 0$. В компонентах это условие запишется в виде

$$C^{[abc]} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что все компоненты $\mathscr{C}$ равны нулю, кроме компонент C^{abc} и C_{abc}. Но эти компоненты комплексно сопряжены, следовательно, из записанного соотношения следует, что комплексно сопряженных функций выполняется аналогичное соотношение и его можно не писать.

Аналогично случаю $C_0 = 0$ докажите, что условие $C^{[abc]} = 0$ равносильно условию $B^{[abc]} = 0$.

§ 5.10. Классификация Грея-Херbegin Херврейллы почти эрмитовых многообразий.

Изучение почти эрмитовых структур в общем виде крайне сложно и практически не дает конкретной геометрической информации о таких структурах. Конкретная информация получается, если накладывать на почти эрмитову структуру какие-либо дополнительные требования. Классическим примером такого требования является условие $\nabla J = 0$ в римановой связности метрики g. Соответствующие почти эрмитовы структуры называются *келеровыми структурами.* Многообразия с такими структурами по названием А-пространств были введены П.А. Широковым (Казань) в начале XX века и чуть позже Е.Келером (E.Kähler). Позднее такие многообразия стали называть келеровыми многообразиями. Существует много примеров келеровых многообразий и, с другой стороны, их геометрия очень глубоко разработана. Геометрия келеровых многообразий стоит на стыке таких наук как топология, алгебраическая геометрия, глобальная теория эллиптических операторов, теоретическая физика. Несмотря на глубокую разработанность этой тематики, интерес к ней не ослабевает и в настоящее время. Такое богатство свойств навело на мысль ослабить свойство келеровости, что привело к открытию новых классов почти эрмитовых многообразий. Изучение вновь введенных классов привело к необходимости провести классификацию почти эрмитовых структур. Это было сделано в 1980 году А.Греем и Л.Херbegin Херврейллой. Они показали, что все почти эрмитовы структуры можно разделить на 16 классов. Тождества, полученные А.Греем и Л.Херврейллой, достаточно громоздки. Мы приведем их без доказательства, а затем, покажем, что на пространстве присоединенной G-структуры эти тождества существенно упрощаются. Тогда для $2n \geq 6$ получим

Класс	Определяющее тождество
$\{0\} \equiv \mathcal{K}$	$\nabla F = 0$ или $\nabla J = 0$
$W_1 \equiv \mathcal{NK}$	$\nabla_X(F)(X,Y) = 0$ или $3\nabla F = dF$ или $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$
$W_2 \equiv \mathcal{AK}$	$dF = 0$ или $d\Omega = 0$
$W_3 \equiv \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	$\delta F = N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \delta F = 0$
W_4	$\nabla_X(F)(Y,Z) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,Y\rangle \delta F(Z) - \langle X,Z\rangle \delta F(Y) - \langle X,JY\rangle \delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle \delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_3 \oplus W_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_1 \oplus W_3$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = \delta F = 0$
$W_2 \oplus W_4$	$dF = F \wedge \omega$ или $Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \frac{1}{n-1}F(X,Y)\delta F(JZ)) = 0$
$W_1 \oplus W_4 = VG$	$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,X\rangle \delta F(Y) - \langle X,Y\rangle \delta F(X) - \langle JX,Y\rangle \delta F(JX))$
$W_2 \oplus W_3$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = \delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = \mathcal{SK}$	$\delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \frac{-1}{n-1}(\langle X,Y\rangle \delta F(Z) - \langle X,Z\rangle \delta F(Y) - \langle X,JY\rangle \delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle \delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_1$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0$ или $\langle N(X,Y),X\rangle = 0$
$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_2$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = 0$ или $Alt_{XYZ}\langle N(X,Y),JZ\rangle = 0$
W	No condition

Проведем классификацию почти эрмитовых многообразий из других соображений, но получим те же самые классы.

Пусть $m \in M$ – произвольная точка $2n$-мерного почти эрмитова многообразия M, на котором фиксирована почти эрмитова структура $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Из формул (5.34) и (5.46) следует, что

$$B(X,Y) - \tilde{C}(X,Y) = \frac{1}{2}\nabla_Y(J)(JX)$$

или, воспользовавшись свойством оператора почти комплексной структуры, получим

$$\frac{1}{2}(-J\nabla_Y(J)X) = B(X,Y) - \tilde{C}(X,Y)$$

или, подействовав на обе части эндоморфизмом J, получим

$$(\nabla J)(X,Y) \equiv \nabla_Y(J)X = 2JB(X,Y) - 2J\tilde{C}(X,Y).$$

Так как это верно для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, получим

$$\nabla J = 2JB - 2J\tilde{C}.$$

Структурный тензор B можно разложить на сумму бесследного B_0 и примитивного B_1, а неальтернированный структурный тензор (а точнее, тензорное поле, полученное из неальтернированного структурного тензора опусканием верхнего индекса) можно разложить в сумму кососимметрического C_1 и квазисимметричного тензора C_0.

Проведем классификацию почти эрмитовых структур по принципу "обнуления"тензорных полей B_0, B_1, C_0, C_1. Получим следующую таблицу:

B_0	0	0	0	0	-	0	0	-	0	-	-	0	-	-	-	-
B_1	0	0	0	-	0	0	-	0	-	0	-	-	0	-	-	-
C_0	0	0	-	0	0	-	0	0	-	-	0	-	-	0	-	-
C_1	0	-	0	0	0	-	-	-	0	0	0	-	-	-	0	-

Оказывается, такая классификация совпадает с классификацией Грея-Хервеллы, но имеет более простые критерии, которые легко получаются благодаря результатам § 5.8. и § 5.9.. Их мы запишем в следующей таблице.

Принятые названия структуры	Класс Грея-Хервеллы	Критерий	Условие в A-репере
Келерова	$\mathcal{K} = \{0\}$	$B = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{abc} = 0$
Приближенно келерова	$\mathcal{NK} = W_1$	$B = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
Почти келерова	$\mathcal{AK} = W_2$	$B = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$
–	$\mathcal{SK} \cap \mathcal{H} = W_3$	$B_1 = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{abc} = 0$
–	W_4	$B_0 = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}$
Квазикелерова	$\mathcal{QK} = W_1 \oplus W_2$	$B = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$
–	$W_1 \oplus W_3$	$B_1 = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
Структура Вайсмана-Грея	$VG = W_1 \oplus W_4$	$B_0 = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
–	$W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$
–	$W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}$, $B^{[abc]} = 0$
Эрмитова	$\mathcal{H} = W_3 \oplus W_4$	$\tilde{C} = 0$	$B^{abc} = 0$
G_2-структура	$G_2 = W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_1 = 0$	$B^{[abc]} = 0$
G_1-структура	$G_1 = W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_0 = 0$	$B^{[abc]} = B^{abc}$
–	$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}$
Семикелерова	$\mathcal{SK} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$
Почти эрмитова	$AH = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	–	–

Пример 5.4. Докажем, что класс $W_1 \oplus W_4$ (многообразия Вайсмана-Грея) один и тот же в обеих классификациях. Для этого нужно либо записать условия, заданные на пространстве расслоения A-реперов, в инвариантном виде, либо записать инвариантное условие из классификации Грея-Хервеллы на пространстве расслоения A-реперов. Мы пойдем вторым путем.

Напомним, что в классификации Грея-Хервеллы класс многообразий Вайсмана-Грея задается следующим тождеством

$$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,X\rangle\delta F(Y) - \langle X,Y\rangle\delta F(X) - \langle JX,Y\rangle\delta F(JX)), \tag{5.49}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Здесь $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – келерова форма.

Пока перейти к компонентам в тождестве (5.49) мы не можем. Нужно сделать так, чтобы все аргументы были различны, а у нас пока два раза встречается X. Из-за этого при переходе к компонентам мы получили бы тождества только для компонент с одинаковыми индексами, которые работают с аргументами, стоящими на месте X. Для получения большей информации (тождеств на компоненты с различными индексами) мы должны провести так называемый *процесс поляризации тождества* (5.49). Так как тождество (5.49) верно для любых аргументов X, оно верно для аргумента $X + Z$, где X, Z – произвольные векторные поля на многообразии M. Тогда мы получаем новое тождество

$$\nabla_{X+Z}(F)(X+Z,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X+Z, X+Z\rangle\delta F(Y) - \langle X+Z,Y\rangle\delta F(X+Z) - \\ - \langle J(X+Z),Y\rangle\delta F(J(X+Z)))$$

Воспользуемся линейностью тензорных полей и тождеством (5.49)

$$\nabla_X(F)(Z,Y) + \nabla_Z(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(2\langle X,Z\rangle\delta F(Y) - \langle X,Y\rangle\delta F(Z) - \langle Z,Y\rangle\delta F(X) - \\ - \langle JX,Y\rangle\delta F(JZ) - \langle JZ,Y\rangle\delta F(JX)). \tag{5.50}$$

Теперь мы можем перейти к компонентам в A-репере. Пусть $p = (m, \varepsilon_i)$ – произвольный A-репер. Берем значения всех тензорных полей, входящих в тождество (5.50) и подставляем векторы $X_m = \varepsilon_i$, $Y_m = \varepsilon_j$, $Z_m = \varepsilon_k$. Отметим, что у тензоров мы опять для краткости не пишем (но подразумеваем) точку m.

$$\nabla_{\varepsilon_i}(F)(\varepsilon_k,\varepsilon_j) + \nabla_{\varepsilon_k}(F)(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = \frac{-1}{2(n-1)}(2\langle\varepsilon_i,\varepsilon_k\rangle\delta F(\varepsilon_j) - \langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle\delta F(\varepsilon_k) - \langle\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle\delta F(\varepsilon_i) - \\ - \langle J\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle\delta F(J\varepsilon_k) - \langle J\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle\delta F(J\varepsilon_i)).$$

Применяем определение компонент тензора

$$F_{kj,i} + F_{ij,k} = \frac{-1}{2(n-1)}(2g_{ik}(\delta F)_j - g_{ij}(\delta F)_k - g_{kj}(\delta F)_i - g_{\ell j}J_i^\ell(\delta F)_p J_k^p - g_{\ell j}J_k^\ell(\delta F)_p J_i^p. \tag{5.51}$$

Выразим ковариантный дифференциал келеровой формы F через ковариантный дифференциал почти комплексной структуры J. По определению имеем $F(X,Y) = g(JX,Y)$ или $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(F \otimes X \otimes Y) = C^{(1)(2)(3)}_{(1)(2)(3)}(g \otimes J \otimes X \otimes Y)$. Откуда, применяя оператор ковариантного дифференцирования ∇_Z получим $\nabla(F)(X,Y,Z) = g((\nabla J)(X,Z),Y)$. В компонентах это тождество примет вид (подставьте вектора A-базиса самостоятельно)

$$F_{ij,k} = g_{\ell j} J^{\ell}_{i,k}. \tag{5.52}$$

Тогда кодифференциал келеровой формы F будет вычисляться следующим образом (см. (5.2))

$$(\delta F)_i = g^{jk} g_{\ell j} J^{\ell}_{i,k} = \delta^k_\ell J^\ell_{i,k} = J^k_{i,k}. \tag{5.53}$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрицы (g^{ij}) и (g_{ij}) являются взаимно обратными.

Подставим соотношения (5.52) и (5.53) в (5.51)

$$g_{\ell j} J^{\ell}_{k,i} + g_{\ell j} J^{\ell}_{i,k} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2 g_{ik} J^{\ell}_{j,\ell} - g_{ij} J^{\ell}_{k,\ell} - g_{kj} J^{\ell}_{i,\ell} + g_{i\ell} J^{\ell}_{j} J^{m}_{t,m} J^{t}_{k} + g_{k\ell} J^{\ell}_{j} J^{m}_{t,m} J^{t}_{i}\right) \tag{5.54}$$

В полученном тождестве три свободных индекса. Они могут бегать по первой части A-базиса и по второй. Рассмотрим все возможные случаи (их будет 8 штук).

1. Пусть $i = a$, $j = b$, $k = c$.

   $$g_{\ell b} J^{\ell}_{c,a} + g_{\ell b} J^{\ell}_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2 g_{ac} J^{\ell}_{b,\ell} - g_{ab} J^{\ell}_{c,\ell} - g_{cb} J^{\ell}_{a,\ell} + g_{a\ell} J^{\ell}_{b} J^{m}_{t,m} J^{t}_{c} + g_{c\ell} J^{\ell}_{b} J^{m}_{t,m} J^{t}_{a}\right)$$

   Напомним, что среди компонент достаточно много нулей. Как мы получили выше

   $$g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0; \quad J^{a}_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_{b} = 0; \quad J^{a}_{b,k} = J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0.$$

   Расписывая суммы "крышка – без крышки"сразу будем учитывать эти нули и не писать их.

   $$g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{c,a} + g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)} (0 - 0 - 0 + 0 + 0).$$

   Откуда получаем,

   $$J^{\hat{b}}_{a,c} + J^{\hat{b}}_{c,a} = 0. \tag{5.55}$$

   С учетом обозначений (5.31) получаем $C_{bac} = -C_{bca}$, то есть $B_{bac} = C_{b[ac]} = C_{bac}$ и, следовательно, компоненты структурного тензора будут кососимметричны по любой паре индексов. Легко видеть, что верно и обратное утверждение, то есть если компоненты структурного тензора кососимметричны по любой паре индексов, то будут выполняться (5.55). Как мы знаем (см. задачу 5.11) кососимметричность структурного тензора равносильна условию $B_{[abc]} = B_{abc}$. Итак, в этом случае мы получаем условие $B_{[abc]} = B_{abc}$, которое присутствует в определении многообразия Вайсмана-Грея второй классификации.

2. Пусть $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Тогда из (5.54) получим (опять мы не пишем заведомо нулевые слагаемые)

   $$g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{c,\hat{a}} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2 g_{\hat{a}c} J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} - g_{\hat{a}b} J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - 0 + g_{\hat{a}d} J^{d}_{b} J^{\hat{f}}_{e,\hat{f}} J^{e}_{c} + 0\right)$$
   $$J^{\hat{b}}_{c,\hat{a}} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2 J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} \delta^{a}_{c} - \delta^{a}_{b} J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - \delta^{a}_{b} J^{\hat{f}}_{c,\hat{f}}\right).$$

   Для получения последнего равенства мы воспользовались тем, что $J^d_b = \sqrt{-1}\delta^d_b$.

   С учетом обозначений (5.31) получим

   $$B_{bc}{}^{a} = \frac{-1}{n-1} \left(B_{db}{}^{d} \delta^{a}_{c} - B_{dc}{}^{d} \delta^{a}_{b}\right). \tag{5.56}$$

   Это соотношение уже похоже на то, которое нам нужно получить. Осталось только выразить свертку виртуального тензора через компоненты вектора Ли. Напомним, что вектор Ли ξ – это векторное поле двойственное форме Ли

   $$\alpha = \frac{-1}{n-1} \delta F \circ J, \tag{5.57}$$

   то есть задается формулой

   $$g(X,\xi) = \frac{-1}{n-1} \delta F \circ J(X),\ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{5.58}$$

Запишем это равенство в компонентах на пространстве расслоения A-реперов. Для этого нужно взять значения всех тензорных полей в точке $m \in M$ и вместо аргумента X подставить вектор A-базиса.

$$g_{ij}\xi^j = \frac{-1}{n-1}(\delta F)_j J_i^j = \frac{-1}{n-1} J_{j,k}^k J_i^j.$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.53). Для полученного равенства возможны два случая: $i = a$ и $i = \hat{a}$ (рассмотрите самостоятельно). Пусть $i = a$. Тогда (мы опять не пишем заведомо нулевые слагаемые)

$$g_{a\hat{b}}\xi^{\hat{b}} = \frac{-1}{n-1} J_{b,\hat{c}}^{\hat{c}} J_a^b$$

Договоримся обозначать $\xi^{\hat{a}} = \xi_a$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$\delta_a^b \xi_b = \frac{-1}{n-1}(-2\sqrt{-1}) B_{cb}{}^c \sqrt{-1}\delta_a^b.$$

Здесь мы воспользовались обозначениями (5.31). Окончательно получим

$$\xi_b = \frac{-2}{n-1} B_{cb}{}^c. \tag{5.59}$$

Выразим из этого равенства свертку виртуального тензора и подставим в (5.56).

$$B_{bc}{}^a = \frac{1}{2}(\xi_b \delta_c^a - \xi_c \delta_b^a).$$

Это соотношение полностью совпадает с соотношением, задающим многообразия Вайсмана-Грея во второй классификации.

3. Остальные шесть возможных значений индексов дадут либо тождества вида $0 = 0$, либо комплексно сопряженные выражения. Рассмотрите несколько случаев самостоятельно.

Задача 5.12. Докажите, что остальные классы почти эрмитовых многообразий обеих классификаций совпадают.

§ 5.11. Вторая группа структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.

Пусть $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – структура Вайсмана-Грея на гладком многообразии M размерности $2n > 2$. Как мы доказали в § 5.10. почти эрмитово многообразие является многообразием Вайсмана-Грея тогда и только тогда, когда структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, а виртуальный тензор – примитивен, то есть

$$B_{ab}{}^c = \xi_{[a}\delta_{b]}^c; \quad B_{[abc]} = B_{abc}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Рассмотрим первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия (см. § 5.7.). Для многообразия Вайсмана-Грея они имеют тот же вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b, \end{aligned} \tag{5.60}$$

где

$$B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}; \quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J_{[b,c]}^{\hat{a}}; \quad B^{ab}{}_c = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^{a}; \quad B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a},$$

$\{\theta_b^a\}$ – тензорные компоненты формы римановой связности метрики g.

Выразим внешние дифференциалы форм θ_b^a через формы θ_b^a и ω^c. Процесс получения этих выражений называется *процедурой дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений, а выражения, которые мы получим, называются *второй группой структурных уравнений* многообразия Вайсмана-Грея.

Рассмотрим первое равенство из первой группы структурных уравнений и продифференцируем его внешним образом. Воспользуемся при этом свойствами оператора внешнего дифференцирования:

$$d^2 = 0; \quad d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta,\ \omega \in \Lambda_r(M).$$

Получим

$$0 = -d\theta^a_b \wedge \omega^b + \theta^a_b \wedge d\omega^b + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc} d\omega_b \wedge \omega_c - B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c + \\ + dB^{ab}{}_{c} \wedge \omega^c \wedge \omega_b + B^{ab}{}_{c} d\omega^c \wedge \omega_b - B^{ab}{}_{c}\omega^c \wedge d\omega_b.$$

Подставим вместо внешних дифференциалов одноиндексных омег их выражения из первой группы структурных уравнений.

$$0 = -d\theta^a_b \wedge \omega^b + \theta^a_b \wedge (-\theta^b_c \wedge \omega^c + B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d + B^{bc}{}_{d}\omega^d \wedge \omega_c) + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + \\ + B^{abc}(\theta^d_b \wedge \omega_d + B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f + B_{bd}{}^{f}\omega_f \wedge \omega^d) \wedge \omega_c - B^{abc}\omega_b \wedge (\theta^d_c \wedge \omega_d + B_{cdf}\omega^d \wedge \omega^f + B_{cd}{}^{f}\omega_f \wedge \omega^d) + \\ + dB^{ab}{}_{c} \wedge \omega^c \wedge \omega_b + B^{ab}{}_{c}(-\theta^c_d \wedge \omega^d + B^{cdf}\omega_d \wedge \omega_f + B^{cd}{}_{f}\omega^f \wedge \omega_d) \wedge \omega_b - \\ - B^{ab}{}_{c}\omega^c \wedge (\theta^d_b \wedge \omega_d + B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f + B_{bd}{}^{f}\omega_f \wedge \omega^d) \quad (5.61)$$

Сгруппируем слагаемые, используя переобозначения индексов суммирования, и введем обозначения следующим образом

$$\begin{gathered} dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = \Delta B^{abc}; \qquad (5.62) \\ dB^{ab}{}_{c} + B^{db}{}_{c}\theta^a_d + B^{ad}{}_{c}\theta^b_d - B^{ab}{}_{d}\theta^d_c = \Delta B^{ab}{}_{c}; \\ d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b = \Delta\theta^a_b; \end{gathered}$$

и подставим в (5.61).

$$-\Delta\theta^a_b \wedge \omega^b + \Delta B^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + \Delta B^{ab}{}_{c} \wedge \omega^c \wedge \omega_b + 2B^{adc}B_{dbf}\omega^f \wedge \omega_c \wedge \omega^b - 2B^{adc}B_{cb}{}^{f}\omega_d \wedge f \wedge \omega^b + \\ + B^{af}{}_{c}B^{cd}{}_{b}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b - B^{af}{}_{c}B_{fdb}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b - B^{ad}{}_{c}B_{db}{}^{f}\omega^c \wedge \omega_f \wedge \omega^b + \\ + B^{ab}{}_{c}B^{cdf}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega_b = 0 \quad (5.63)$$

Выражения ΔB^{abc} и $\Delta B^{ab}{}_{c}$ являются 1-формами на пространстве расслоения A-реперов, а $\Delta\theta^a_b$ является 2-формой на этом же пространстве, следовательно, они раскладываются по соответствующим базисам. Для 1-форм это базис $(\theta^a_b, \omega^a, \omega_b)$. Обозначим коэффициенты разложения следующим образом.

$$\begin{gathered} \Delta B^{abc} = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_{d}\omega^d + B^{abcd}{}_{h}\theta^h_d; \\ \Delta B^{ab}{}_{c} = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_{c}{}^{d}\omega_d + B^{ab}{}_{c}{}^{d}_{h}\theta^h_d. \end{gathered}$$

Для 2-форм $\Delta\theta^a_b$ мы поступим немного по-другому. 2-форма является частным случаем тензорного поля типа (2,0). Если в модуле векторных полей фиксировать какой-либо базис, то в модуле тензорных полей типа (2,0) существует так называемый канонический базис (см. пример 1.4 из первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия). Он получается как всевозможные тензорные произведения 1-форм дуального базиса. В нашем случае он имеет вид

$$\{\theta^a_b \otimes \theta^c_d, \theta^a_b \otimes \omega^c, \omega^c \otimes \theta^a_b, \theta^a_b \otimes \omega_c, \omega_c \otimes \theta^a_b, \omega^c \otimes \omega^d, \omega^c \otimes \omega_d, \omega_d \otimes \omega^c, \omega_c \otimes \omega_d\}.$$

Разложим 2-формы $\Delta\theta^a_b$ (которые рассматриваются как тензорные поля типа (2,0)) по этому базису.

$$\Delta\theta^a_b = \tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}\theta^d_c \otimes \theta^e_f + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ac}{}_{ed}\theta^e_c \otimes \omega^d + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{d}{}^{c}_{e}\omega^d \otimes \theta^e_c + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}{}_{e}\theta^e_c \otimes \omega_d + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{adc}{}_{e}\omega_d \otimes \theta^e_c + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{cd}\omega^c \otimes \omega^d + \\ + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{c}{}^{d}\omega^c \otimes \omega_d + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ad}{}_{c}\omega_d \otimes \omega^c + \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}\omega_c \otimes \omega_d.$$

Применим эндоморфизм альтернирования к обеим частям этого равенства и воспользуемся определением операции внешнего умножения (см. первую часть курса Многомерная дифференциальная геометрия). Так как 2-формы являются кососимметрическими тензорными полями, то есть принадлежат образу эндоморфизма альтернирования, получим $Alt(\Delta\theta^a_b) = \Delta\theta^a_b$.

$$\Delta\theta^a_b = \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}\theta^d_c \wedge \theta^e_f + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ac}{}_{ed}\theta^e_c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{d}{}^{c}_{e}\omega^d \wedge \theta^e_c + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}{}_{e}\theta^e_c \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{adc}{}_{e}\omega_d \wedge \theta^e_c + \\ + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{c}{}^{d}\omega^c \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ad}{}_{c}\omega_d \wedge \omega^c + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}\omega_c \wedge \omega_d.$$

Сгруппируем слагаемые с разными типами 1-форм.

$$\Delta\theta^a_b = \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}\theta^d_c \wedge \theta^e_f + \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ac}{}_{ed} - \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{d}{}^{c}_{e})\theta^e_c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}{}_{e} - \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}{}_{e})\theta^e_c \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \\ + \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{a}{}_{c}{}^{d} - \tilde{\mathscr{A}}_{b}^{ad}{}_{c})\omega^c \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_{b}^{acd}\omega_c \wedge \omega_d.$$

Обозначим получившиеся коэффициенты при 2-формах символом $\tilde{A}$ с соответствующими индексами, которые мы будем писать подряд (без пробелов).

$$\Delta\theta^a_b = \tilde{A}^{acf}_{bde}\theta^d_c \wedge \theta^e_f + \tilde{A}^{ac}_{bed}\theta^e_c \wedge \omega^d + \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c \wedge \omega_d + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \tilde{A}^{ad}_{bc}\omega^c \wedge \omega_d + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d. \tag{5.64}$$

Обратите внимание, что все индексы в этом равенстве пробегают все возможные значения (то есть не упорядочены по номерам), а значит, это равенство не является разложением по базису 2-форм. Хотя во многих работах пишут „разложим“ 2-форму по базису". Под этой фразой подразумевают тот процесс, который мы проделали. В дальнейшем мы не будем проводить подробных вычислений, а будем писать только последнее равенство, говоря при этом, что мы *разложили 2-форму $\Delta\theta^a_b$ по системе форм* $\{\theta^d_c \wedge \theta^e_f, \theta^e_c \wedge \omega^d, \theta^e_c \wedge \omega_d, \omega^c \wedge \omega^d, \omega^c \wedge \omega_d, \omega_c \wedge \omega_d\}$. Отметим еще один важный факт: системы функций $\tilde{A}^{acf}_{bde}$, $\tilde{A}^a_{bcd}$, $\tilde{A}^{acd}_b$ только константой $\frac{1}{2}$ отличаются от соответствующих компонент $\tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}$, $\tilde{\mathscr{A}}^a_{bcd}$, $\tilde{\mathscr{A}}^{acd}_b$ формы $\Delta\theta^a_b$. Так как любая 2-форма кососимметрична по своим аргументам, мы получаем кососимметричность ее компонент и функций $\tilde{A}$ по соответствующим им индексам, то есть

$$\tilde{A}^{acf}_{bde} = -\tilde{A}^{afc}_{bed}; \quad \tilde{A}^a_{bcd} = -\tilde{A}^a_{bdc}; \quad \tilde{A}^{acd}_b = -\tilde{A}^{adc}_b. \tag{5.65}$$

Подставим все три разложения в (5.63).

$$\begin{gathered}
-(\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c \wedge \theta^f_d + \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c \wedge \omega_d + \tilde{A}^{ac}_{bef}\theta^e_c \wedge \omega^f + \tilde{A}^{ac}_{bd}\omega^d \wedge \omega_c + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d) \wedge \omega^b + \\
+(B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d + B^{abcd}{}_h\theta^h_d) \wedge \omega_b \wedge \omega_c + (B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d + B^{ab}{}_{ch}^{\ \ d}\theta^h_d) \wedge \omega^c \wedge \omega_b + 2B^{adc}B_{dbf}\omega^f \wedge \omega_c \wedge \omega^b - \\
-2B^{adc}B_{cb}{}^f\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b + B^{af}{}_cB^{cd}{}_b\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b - B^{af}{}_cB_{fdb}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b - B^{ad}{}_cB_{db}{}^f\omega^c \wedge \omega_f \wedge \omega^b + \\
+B^{ab}{}_cB^{cdf}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega_b = 0
\end{gathered}$$

Раскроем в этом равенстве скобки. В его левой части мы получим линейную комбинацию 3-форм. Пока эта линейная комбинация не является разложением по базису, так как 1-формы в 3-формах не упорядочены по номерам. Чтобы получить упорядоченную последовательность 1-форм, воспользуемся задачами 7.4 и 7.5 из курса Тензорная алгебра, а именно формулами

$$t_{ij}e^i \wedge e^j = 2!t_{[ij]}e^i \wedge e^j(i < j); \quad t_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k = 3!t_{[ijk]}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i < j < k).$$

$$\begin{gathered}
-2\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c \wedge \theta^f_d \wedge \omega^b - \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b - 2\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]}\theta^e_c \wedge \omega^f \wedge \omega^b - 2\tilde{A}^{ac}_{[bd]}\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega^b - \tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b - \\
-6\tilde{A}^a_{[bcd]}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b + 6B^{a[bcd]}\omega_d \wedge \omega_b \wedge \omega_c + 2B^{a[bc]}{}_d\omega^d \wedge \omega_b \wedge \omega_c + 2B^{a[bc]}{}_h^{\ d}\theta^h_d \wedge \omega_b \wedge \omega_c + \\
+2B^{ab}{}_{[cd]}\omega^d \wedge \omega^c \wedge \omega_b + 2B^{a[b}{}_c{}^{d]}\omega_d \wedge \omega^c \wedge \omega_b + B^{ab}{}_{ch}^{\ \ d}\theta^h_d \wedge \omega^c \wedge \omega_b + \\
+4B^{adc}B_{d[bf]}\omega^f \wedge \omega_c \wedge \omega^b - 4B^{a[d|c|}B_{cb}{}^{f]}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b + 2B^{a[f}{}_cB^{|c|d]}{}_b\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b - 6B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b - \\
-2B^{ad}{}_{[c}B_{|d|b]}{}^f\omega^c \wedge \omega_f \wedge \omega^b + 6B^{a[b}{}_cB^{|c|df]}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega_b = 0
\end{gathered} \tag{5.66}$$

Так как в первом слагаемом этого равенства ставить скобки альтернации не удобно, мы запишем процедуру упорядочивания тет следующим образом: разобьем все слагаемые на пары $\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c \wedge \theta^f_d \wedge \omega^b + \tilde{A}^{adc}_{bfe}\theta^f_d \wedge \theta^e_c \wedge \omega^b$. Здесь ни по одному индексу суммирование не производится. Воспользуемся кососимметричностью коэффициентов (5.65) и переобозначим индексы во втором слагаемом $f \leftrightarrow e$ и $c \leftrightarrow d$. В результате получим $2\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c \wedge \theta^f_d \wedge \omega^b$, где $(e, c) < (f, d)$, а значит, формы теты уже будут упорядочены.

Рассмотрим также отдельно слагаемое $\tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b$. После альтернации получим

$$\tilde{A}^{a[cd]}_b\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b(c < d) = \frac{1}{2}(A^{acd}_b - A^{adc}_b)\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b(c < d) = A^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b(c < d).$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью коэффициентов (5.65).

Собере́м коэффициенты при одинаковых 3-формах в скобку (переобозначая при этом, где нужно индексы суммирования). Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим

$\theta^e_c \wedge \theta^f_d \wedge \omega^b$: $-2\tilde{A}^{acd}_{bef} = 0;$
$\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b$: $-\tilde{A}^{acd}_{be} - B^{ad}{}_b{}^c{}_e = 0;$
$\theta^e_c \wedge \omega^f \wedge \omega^b$: $-2\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0;$
$\theta^h_d \wedge \omega_b \wedge \omega_c$: $2B^{a[bc]}{}_h^{\ d} = 0;$
$\omega^b \wedge \omega^d \wedge \omega_c$: $-2\tilde{A}^{ac}_{[bd]} + 2B^{ac}{}_{[db]} + 4B^{afc}B_{f[bd]} - 2B^{af}{}_{[d}B_{|f|b]}{}^c = 0;$
$\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega^b$: $-\tilde{A}^{acd}_b + 2B^{a[cd]}{}_b + 2B^{a[c}{}_b{}^{d]} - 4B^{a[c|f|}B_{fb}{}^{d]} + 2B^{a[d}{}_fB^{|f|c]}{}_b = 0;$
$\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b$: $-6\tilde{A}^a_{[bcd]} - 6B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]} = 0;$
$\omega_b \wedge \omega_c \wedge \omega_d$: $6B^{a[bcd]} + 6B^{a[b}{}_fB^{|f|cd]} = 0.$

Лемма 5.3. *Имеем* ${B^{a[bc]}}_d = {B^{abc}}_d$. *Другими словами функции* $\{{B^{abc}}_d\}$ *кососимметричны по двум последним верхним индексам.*

Доказательство. Проальтернируем соотношения

$$dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = {B^{abc}}_d\omega^d + B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}^d_f\theta^f_d \tag{5.67}$$

по индексам b и c и воспользуемся кососимметричностью структурного тензора по любой паре индексов.

$$dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + \frac{1}{2}(B^{adc}\theta^b_d - B^{adb}\theta^c_d) + \frac{1}{2}(B^{abd}\theta^c_d - B^{acd}\theta^b_d) = {B^{a[bc]}}_d\omega^d + B^{a[bc]d}\omega_d + B^{a[bc]}{}^d_f\theta^f_d$$

Опять воспользовавшись кососимметричностью структурного тензора легко видеть, что левая часть последнего равенства совпадает с левой частью равенства (5.67), а значит, равны и правые части этих равенств. Тогда в силу линейной независимости базисных форм имеем

$${B^{a[bc]}}_d = {B^{abc}}_d; \quad B^{a[bc]d} = B^{abcd}; \quad B^{a[bc]}{}^d_f = B^{abc}{}^d_f.$$

□

Замечание 5.4. Из принципа доказательства леммы 5.3 видно, что системы функций, по которым раскладываются формы ΔB^{abc} и $\Delta {B^{ab}}_c$, наследует свойства симметрии по индексам структурного и виртуального тензоров соответственно.

Используя лемму 5.3 и кососимметричность структурного тензора по любой паре индексов, а виртуального тензора по верхней паре индексов полученные тождества мы можем записать в виде

$$\begin{gathered}
\tilde{A}^{acd}_{bef} = 0;\ \tilde{A}^{acd}_{be} + B^{ad}{}_b{}^c_e = 0;\ \tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0;\ B^{abc}{}^d_h = 0; \\
\tilde{A}^{ac}_{[bd]} + {B^{ac}}_{[bd]} + 2B^{acf}B_{fbd} + {B^{af}}_{[b}{B_{d]f}}^c = 0; \\
-\tilde{A}^{acd}_b + {B^{acd}}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}{B_{fb}}^{d]} + {B^{a[c}}_f {B^{d]f}}_b = 0; \\
\tilde{A}^a_{[bcd]} + {B^{af}}_{[b}B_{cd]f} = 0;\ B^{a[bcd]} + {B^{a[b}}_f B^{cd]f} = 0.
\end{gathered} \tag{5.68}$$

Рассмотрим второе уравнение из первой группы структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея (см. (5.60)). Продифференцируем ее аналогично внешним образом.

$$\begin{aligned}
0 = d\theta^b_a \wedge \omega_b - \theta^b_a \wedge d\omega_b + dB_{abc} \wedge \omega^b \wedge \omega^c + B_{abc}d\omega^b \wedge \omega^c - B_{abc}\omega^b \wedge d\omega^c + d{B_{ab}}^c \wedge \omega_c \wedge \omega^b + \\
+ {B_{ab}}^c d\omega_c \wedge \omega^b - {B_{ab}}^c\omega_c \wedge d\omega^b.
\end{aligned}$$

Подставляем первую группу структурных уравнений.

$$\begin{aligned}
0 = d\theta^b_a \wedge \omega_b - \theta^b_a \wedge (\theta^c_b \wedge \omega_c + B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + {B_{bc}}^d\omega_d \wedge \omega^c) + dB_{abc} \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \\
+ B_{abc}(-\theta^b_d \wedge \omega^d + B^{bdf}\omega_d \wedge \omega_f + {B^{bd}}_f\omega^f \wedge \omega_d) \wedge \omega^c - B_{abc}\omega^b \wedge (-\theta^c_d \wedge \omega^d + B^{cdf}\omega_d \wedge \omega_f + {B^{cd}}_f\omega^f \wedge \omega_d) + \\
+ d{B_{ab}}^c \wedge \omega_c \wedge \omega^b + {B_{ab}}^c(\theta^d_c \wedge \omega_d + B_{cdf}\omega^d \wedge \omega^f + {B_{cd}}^f\omega_f \wedge \omega^d) \wedge \omega^b - \\
- {B_{ab}}^c\omega_c \wedge (-\theta^b_d \wedge \omega^d + B^{bdf}\omega_d \wedge \omega_f + {B^{bd}}_f\omega^f \wedge \omega_d).
\end{aligned} \tag{5.69}$$

После раскрытия скобок сгруппируем первые два слагаемых:

$$d\theta^b_a \wedge \omega_b - \theta^b_a \wedge \theta^c_b \wedge \omega_c = d\theta^b_a + \theta^b_c \wedge \theta^c_a) \wedge \omega_b = \Delta\theta^b_a \wedge \omega_b.$$

Здесь во втором слагаемом мы поменяли индексы суммирования b и c. Обозначение $\Delta\theta^b_a$ см. (5.62).

Выделим еще две группы слагаемых и введем следующие обозначения.

$$dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c = \Delta B_{abc}; \quad d{B_{ab}}^c - {B_{db}}^c\theta^d_a - {B_{ad}}^c\theta^d_b + {B_{ab}}^d\theta^c_d = \Delta {B_{ab}}^c.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
0 = \Delta\theta^b_a \wedge \omega_b + \Delta B_{abc} \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \Delta {B_{ab}}^c \wedge \omega_c \wedge \omega^b + 2B_{abc}B^{bdf}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^c + 2B_{abc}{B^{bd}}_f\omega^f \wedge \omega_d \wedge \omega^c + \\
+ {B_{ab}}^c B_{cdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega^b + {B_{ab}}^c{B_{cd}}^f\omega_f \wedge \omega^d \wedge \omega^b - {B_{ab}}^c B^{bdf}\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_f - {B_{ab}}^c{B^{bd}}_f\omega_c \wedge \omega^f \wedge \omega_d.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Разложим 1-формы ΔB_{abc} и $\Delta {B_{ab}}^c$ по базису $\{\theta^a_b, \omega^c, \omega_d\}$.

$$\Delta B_{abc} = B_{abcd}\omega^d + {B_{abc}}^d\omega_d + B_{abc}{}^d_f\theta^f_d; \quad \Delta {B_{ab}}^c = {B_{ab}}^c{}_d\omega^d + {B_{ab}}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^{cd}_f\theta^f_d.$$

Разложение для 2-формы $\Delta\theta^a_b$ у нас уже есть (5.64). Причем мы уже доказали, что коэффициент $\tilde{A}^{acf}_{bde} = 0$. Подставим полученные разложения форм в (5.70), раскрываем скобки и ставим альтернации для получения разложения по базису 3-форм.

$$\begin{gathered}
0 = \tilde{A}^{bc}_{aed}\theta^e_c \wedge \omega^d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^{[b|c|d]}_{ae}\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^b_{acd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^{[bd]}_{ac}\omega^c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + 6\tilde{A}^{[bcd]}_a\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + \\
+ 6B_{a[bcd]}\omega^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{abc}{}^d\omega_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{abc}{}^d_f\theta^f_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{a[b}{}^c{}_{d]}\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + 2B_{ab}{}^{[cd]}\omega_d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + \\
+ B_{ab}{}^{cd}{}_f\theta^f_d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + 4B_{abc}B^{bdf}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^c + 4B_{ab[c}B^{bd}{}_{f]}\omega^f \wedge \omega_d \wedge \omega^c + 6B_{a[b}{}^cB_{|c|df]}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega^b + \\
+ 2B_{a[b}{}^cB_{|c|d]}{}^f\omega_f \wedge \omega^d \wedge \omega^b - 6B_{ab}{}^{[c}B^{|b|df]}\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_f - 2B_{ab}{}^{[c}B^{|b|d]}{}_f\omega_c \wedge \omega^f \wedge \omega_d.
\end{gathered}$$

Здесь мы сразу сняли альтернацию с кососимметричных индексов систем функций.

Применяем линейную независимость базисных 3-форм.

$\theta^e_c \wedge \omega^d \wedge \omega_b$: $\tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0$;

$\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $\tilde{A}^{[b|c|d]}_{ae} = 0$;

$\theta^f_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c$: $B_{abc}{}^d_f = 0$;

$\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b$: $\tilde{2}A^b_{acd} + 2B_{acd}{}^b + 2B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 4B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + 2B_{a[d}{}^fB_{|f|c]}{}^b = 0$;

$\omega^c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $2\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + 2B_{ac}{}^{[bd]} + 4B_{afc}B^{fdb} - 2B_{af}{}^{[b}B^{|f|d]}{}_c = 0$;

$\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $6\tilde{A}^{[bcd]}_a - 6B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0$;

$\omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^b$: $6B_{a[bcd]} + 6B_{a[b}{}^fB_{|f|cd]} = 0$.

Опять аналогично предыдущему применяем кососимметричность функций и получаем следующие тождества

$$\begin{gathered}
\tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0;\ B_{abc}{}^d_f = 0;\ \tilde{A}^{[b|c|d]}_a e = 0; \\
\tilde{A}^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} - B_{a[d}{}^fB_{c]f}{}^b = 0; \\
\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + 2B_{afc}B^{fdb} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0; \\
\tilde{A}^{[bcd]}_a - B_{af}{}^{[c}B^{db]f} = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0.
\end{gathered} \tag{5.71}$$

Рассмотрим два тождества из (5.68) и (5.71): $\tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0$ и $\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0$. В них участвуют функции одного вида, но обозначение индексов не согласовано. Обозначим индексы второго равенства так, чтобы они совпали с соответствующими индексами первого равенства: $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} = 0$. Первое тождество проальтернируем по индексам a и d: $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{[ad]}{}^{bc}{}_e = 0$. Так как виртуальный тензор кососимметричен по нижним индексам, и значит, кососимметричны по этим индексам все связанные с ним функции (см. лемму 5.3 и следующее за ней замечание), получим $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{[ad]}{}^{bc}{}_e = 0$. Таким образом,

$$\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0; \quad A^{bc}_{[a|e|d]} = 0.$$

Откуда получаем, что $B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0$ и $\tilde{A}^{bc}_{aed} = 0$. Аналогично получаем, что $B^{ad}{}_b{}^e_c = 0$ и $\tilde{A}^{aed}_{bc} = 0$.

Итак, мы получаем из разложения форм $\Delta\theta^a_b$, ΔB_{abc}, ΔB^{abc}, $\Delta B_{ab}{}^c$ и $\Delta B^{ab}{}_c$ следующие тождества

$$\begin{gathered}
d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \tilde{A}^{ad}_{bc}\omega^c \wedge \omega_d + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d; \\
dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d; \\
dB^{ab}{}_c + B^{db}{}_c\theta^a_d + B^{ad}{}_c\theta^b_d - B^{ab}{}_d\theta^d_c = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d; \\
dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d; \\
dB_{ab}{}^c - B_{db}{}^c\theta^d_a - B_{ad}{}^c\theta^d_b + B_{ab}{}^d\theta^c_d = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d,
\end{gathered}$$

и следующие тождества

$$\begin{gathered}
\tilde{A}^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + 2B^{acf}B_{fbd} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0; \\
-\tilde{A}^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[c}{}_fB^{d]f}{}_b = 0; \\
\tilde{A}^a_{[bcd]} + B^{af}{}_{[b}B_{cd]f} = 0;\ B^{a[bcd]} + B^{a[b}{}_fB^{cd]f} = 0. \\
\tilde{A}^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} - B_{a[d}{}^fB_{c]f}{}^b = 0; \\
\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + 2B_{afc}B^{fdb} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0; \\
\tilde{A}^{[bcd]}_a - B_{af}{}^{[c}B^{db]f} = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0.
\end{gathered}$$

Чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями введенными в диссертации Н.Н.Щипковой (которая первой начала исследование многообразий Вайсмана-Грея методом присоединенной G-структуры, но они проводила вычисления в плюсах), мы введем следующие обозначения

$$A^a_{bcd} = \tilde{A}^a_{bcd} + B^{af}{}_{[c}B_{d]bf}; \quad A^{bcd}_a = \tilde{A}^{bcd}_a - B_{af}{}^{[c}B^{d]bf}; \quad A^{ac}_{bd} = \tilde{A}^{ac}_{bd} + 2B^{acf}B_{fbd}.$$

Тогда в новых обозначениях получим

$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + (A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c}B_{d]bf})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c}B^{d]af})\omega_c \wedge \omega_d + \\ + (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf}B_{fbd})\omega^d \wedge \omega_c;$$

$$\begin{gathered} dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d; \\ dB^{ab}{}_c + B^{db}{}_c\theta^a_d + B^{ad}{}_c\theta^b_d - B^{ab}{}_d\theta^d_c = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d; \\ dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d; \\ dB_{ab}{}^c - B_{db}{}^c\theta^d_a - B_{ad}{}^c\theta^d_b + B_{ab}{}^d\theta^c_d = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d. \end{gathered} \tag{5.72}$$

Первую группу уравнений этого списка будем называть *второй группой структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.* Все вместе эти уравнения будем называть *полной второй группой структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.*

Обратите внимание, что полного соответствия с результатами Н.Н. Щипковой мы не добились (отличие в знаках), но это связано с тем, что мы проводили вычисления в минусах.

Полученные тождества во введенных обозначениях будут выглядеть следующим образом

$$\begin{gathered} A^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0; \\ -A^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[c}{}_fB^{d]f}{}_b = 0; \\ A^a_{[bcd]} = 0;\ B^{a[bcd]} + B^{a[b}{}_fB^{cd]f} = 0; \\ A^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[c}{}^fB_{d]f}{}^b = 0; \\ A^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0; \\ A^{[bcd]}_a = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0. \end{gathered} \tag{5.73}$$

§ 5.12. Следствия из структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.

Напомним, что многообразия Вайсмана-Грея определяются тем, что их виртуальный тензор примитивен, а структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, то есть

$$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c; \quad B^{[abc]} = B^{abc},$$

где система функций $\{\xi^a, \xi_a \equiv \xi^{\hat{a}}\}$ является системой компонент вектора Ли ξ в A-репере.

Лемма 5.4. *Равенство $B_{abc} = C_{abc}$ равносильно равенству $B_{[abc]} = B_{abc}$. В частности, для многообразий Вайсмана-Грея $B_{abc} = C_{abc}$, то есть неальтернированный структурный тензор совпадает со структурным тензором.*

Доказательство. Пусть выполнено второе равенство. Напомним (см. (5.48)), что это равенство равносильно равенству $C_{[abc]} = C_{abc}$. Тогда

$$B_{abc} = C_{a[bc]} = \frac{1}{2}(C_{abc} - C_{acb}) = \frac{1}{2}(C_{[abc]} - C_{[acb]}) = \frac{1}{2}(C_{[abc]} + C_{[abc]}) = C_{abc}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что альтернированный тензор будет кососимметричен по любой паре индексов.

Обратно, пусть выполняется равенство $B_{abc} = C_{abc}$. Тогда система функций C_{abc} будет кососимметрична по последней паре индексов, так как по ним кососимметрична система функций B_{abc}. Тогда функции C_{abc} кососимметричны по любой паре индексов, что равносильно кососимметричности неальтернированного структурного тензора (а точнее 3-формы $\mathscr{C}$, которая получается из него опусканием индекса), то есть $C_{[abc]} = C_{abc}$. Последнее равенство равносильно равенству $B_{[abc]} = B_{abc}$. □

Из доказанной леммы и задачи 5.2

Лемма 5.5. *Для многообразий Вайсмана-Грея имеем*

$$\begin{aligned} \theta^a_{\hat{b}} &= -B^{ab}{}_c\omega^c + B^{abc}\omega_c = -\tfrac{1}{2}\xi^a\delta^b_c\omega^c + \tfrac{1}{2}\xi^b\delta^a_c\omega^c + B^{abc}\omega_c; \\ \theta^{\hat{a}}_b &= -B_{ab}{}^c\omega_c + B_{abc}\omega^c = -\tfrac{1}{2}\xi_a\delta^c_b\omega_c + \tfrac{1}{2}\xi_b\delta^c_b\omega_c + B_{abc}\omega^c. \end{aligned}$$

Так как вектор Ли ξ является векторным полем, то есть тензорным полем типа (0,1), по основной теореме тензорного анализа на пространстве расслоения всех реперов получим

$$d\xi^i + \xi^j \theta^i_j = \xi^i{}_{,j}\omega^j,$$

где система функций $\{\xi^i{}_{,j}\}$ является компонентами ковариантного дифференциала вектора Ли. Аналогично примеру 5.2 перекидываем эти уравнения на пространство расслоения A-реперов.

Для единственного свободного индекса i этих уравнений возможны два случая:

1. $i = a$. Тогда
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b + \xi^{\hat{b}}\theta^a_{\hat{b}} = \xi^a{}_{,b}\omega^b + \xi^a{}_{,\hat{b}}\omega^{\hat{b}}.$$
Воспользуемся леммой 5.5 и договоримся обозначать $\xi^a{}_{,\hat{b}} = \xi^{a,b}$.
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b + \xi_b(-B^{ab}{}_c\omega^c + B_{abc}\omega^c) = \xi^a{}_{,b}\omega^b + \xi^{a,b}\omega_b. \tag{5.74}$$
Введем обозначение
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b = \xi^{ab}\omega_b + \xi^a{}_b\omega^b. \tag{5.75}$$
Тогда из соотношений (5.74) в силу линейной независимости базисных форм получим (распишите вычисления подробно и обратите внимание на переобозначение индексов суммирования)
$$\xi^{a,b} = \xi^{ab} - \xi_c B^{abc}; \quad \xi^a{}_{,b} = \xi^a{}_b - \xi_c B^{ac}{}_b = \xi^a{}_b - \tfrac{1}{2}\xi^a\xi_c + \tfrac{1}{2}\xi^c\xi_c\delta^a_b.$$
Здесь мы использовали примитивность виртуального тензора многообразий Вайсмана-Грея.

2. Рассуждая аналогично (проведите расчеты самостоятельно) для $i = \hat{a}$, получим
$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b; \tag{5.76}$$
$$\xi_a{}^{,b} = \xi_a{}^b - \xi^c B_{ac}{}^b = \xi_a{}^b - \frac{1}{2}\xi^b\xi_a + \frac{1}{2}\xi^c\xi_c\delta^b_a;$$
$$\xi_{a,b} = \xi_{ab} - \xi^c B_{abc}$$

Задача 5.13**.** Докажите, что $\bar{\xi}^a{}_b = \xi_a{}^b$, $\bar{\xi}^{ab} = \xi_{ab}$, где черта обозначает комплексное сопряжение.

Решение. Рассмотрим уравнения

$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b = \xi^a{}_b\omega^b + \xi^{ab}\omega_b$$

и применим к нему оператор комплексного сопряжения. Так как ξ, θ^a_b и ω^a, ω_b являются комплексификациями обычных вещественных объектов, согласно результатам § 4.4. индексы без крышки заменятся на индексы с крышками и наоборот.

$$d\xi^{\hat{a}} + \xi^{\hat{b}}\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = \bar{\xi}^a{}_b\omega^{\hat{b}} + \bar{\xi}^{ab}\omega_{\hat{b}}.$$

Воспользуемся соотношениями (5.26) и договоренностью обозначать у функций индекс с крышкой индексом без крышки, но опущенным (или поднятым) по отношению к исходному индексу.

$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \bar{\xi}^a{}_b\omega_b + \bar{\xi}_{ab}\omega^b.$$

Заметим, что суммирование по одинаковым индексам здесь остается, хотя правило суммирования Эйнштейна нарушается.

Сравним это соотношение с уравнениями

$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b.$$

Левые части равны, следовательно, равны и правые части. Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим

$$\bar{\xi}^a{}_b = \xi_a{}^b; \quad \bar{\xi}_{ab} = \xi_{ab}.$$

□

Задача 5.14**.** Докажите, что системы функций $\{A^{acd}_b\}$, $\{A^a_{bcd}\}$ и $\{A^{ac}_{bd}\}$ из второй группы структурных уравнений связаны равенствами

$$\bar{A}^{ac}_{bd} = A^{bd}_{ac}; \quad \bar{A}^{acd}_b = -A^b_{acd}.$$

Указание. Примените оператор комплексного сопряжения ко второй группе структурных уравнений.

Задача 5.15**.** Докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея имеют место тождества

$$B^{ab}{}_{cd} = \xi^{[a}{}_{d}\delta^{b]}_{c}; \quad B^{ab}{}_{c}{}^{d} = \xi^{[a|d|}\delta^{b]}_{c}.$$

и формулы комплексно сопряженные.

Указание. Воспользуйтесь примитивностью структурного тензора и уравнениями (5.11.) и аналогичными уравнениями для вектора Ли.

Теорема 5.5**.** *Для многообразия Вайсмана-Грея имеют место тождества*

$$B_{acd}{}^{b} = \xi_{[ac}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{2}\xi^{f}B_{f[ac}\delta^{b}_{d]} - \frac{1}{2}\xi^{b}B_{acd};$$

$$A^{b}_{acd} = \frac{1}{6}\xi_{a[c}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{6}\xi_{[cd]}\delta^{b}_{a} + \frac{1}{3}\xi_{[c|a|}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{6}\xi^{f}B_{fa[c}\delta^{b}_{d]} - \frac{1}{6}\xi^{f}B_{fcd}\delta^{b}_{a} + \frac{1}{4}\xi_{a}\xi_{[c}\delta^{b}_{d]}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее равенство из (5.11.):

$$A^{b}_{acd} + B_{acd}{}^{b} + B_{a[c}{}^{b}{}_{d]} + B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[c}{}^{f}B_{d]f}{}^{b} = 0.$$

Распишем в нем альтернацию

$$A^{b}_{acd} + B_{acd}{}^{b} + \frac{1}{2}(B_{ac}{}^{b}{}_{d} - B_{ad}{}^{b}{}_{c}) + \frac{1}{2}(B_{afc}B^{fb}{}_{d} - B_{afd}B^{fb}{}_{c}) + \frac{1}{2}(B_{ac}{}^{f}B_{df}{}^{b} - B_{ad}{}^{f}B_{cf}{}^{b}) = 0$$

и применим лемму 5.15 и примитивность виртуального тензора

$$A^{b}_{acd} + B_{acd}{}^{b} + \frac{1}{2}\xi_{[a|d|}\delta^{b}_{c]} - \frac{1}{2}\xi_{[a|c|}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{4}(\xi^{f}B_{afc}\delta^{b}_{d} - \xi^{b}B_{adc}) - \frac{1}{4}(\xi^{f}B_{afd}\delta^{b}_{c} - \xi^{b}B_{acd}) +$$
$$+ \frac{1}{8}(\xi_{a}\delta^{f}_{c} - \xi_{c}\delta^{f}_{a})(\xi_{d}\delta^{b}_{f} - \xi_{f}\delta^{b}_{d}) - \frac{1}{8}(\xi_{a}\delta^{f}_{d} - \xi_{d}\delta^{f}_{a})(\xi_{c}\delta^{b}_{f} - \xi_{f}\delta^{b}_{c}) = 0.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получим

$$A^{b}_{acd} + B_{acd}{}^{b} - \frac{1}{2}\xi_{a[c}\delta^{b}_{d]} - \frac{1}{2}\xi_{[cd]}\delta^{b}_{a} + \frac{1}{2}\xi^{f}B_{af[c}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{2}\xi^{b}B_{acd} - \frac{1}{4}\xi_{a}\xi_{[c}\delta^{b}_{d]} = 0 \tag{5.77}$$

Проальтернируем по индексам a, c, d и учтем кососимметричность $B_{acd}{}^{b}$ по любой паре нижних индексов и тождество $A^{b}_{[acd]} = 0$ (см. (5.11.))

$$B_{acd}{}^{b} - \frac{1}{2}\xi_{[ac}\delta^{b}_{d]} - \frac{1}{2}\xi_{[cd}\delta^{b}_{a]} - \frac{1}{2}\xi^{f}B_{f[ac}\delta^{b}_{d]} + \frac{1}{2}\xi^{b}B_{acd} - \frac{1}{4}\xi_{[a}\xi_{c}\delta^{b}_{d]} = 0$$

Заметим, что второе слагаемое в последнем равенстве равно нулю, так как оно симметрично по индексам a и c, а альтернация симметричного тензора дает нуль (если не понятно, почему это так, раскройте альтернацию по определению и убедитесь, что последнее слагаемое действительно равно нулю). Далее, второе и третье слагаемые подобны (после перестановки индексов под знаком альтернации. Здесь мы учитываем, что после альтернации тензор становится кососимметрическим и, меняя местами два индекса, мы получаем знак минус). Проделав это, мы убеждаемся, что получили первое тождество из условия теоремы.

Выразим из последнего тождества $B_{acd}{}^{b}$ и подставим в (5.77).

$$A^{b}_{acd} - \frac{1}{2}\xi_{a[c}\delta^{b}_{d]} - \frac{1}{2}\xi_{[cd]}\delta^{b}_{a} + \frac{1}{3}(\xi_{a[c}\delta^{b}_{d]} + \xi_{c[d}\delta^{b}_{a]} + \xi_{d[a}\delta^{b}_{c]}) + \frac{1}{2}\xi^{f}B_{af[c}\delta^{b}_{d]} +$$
$$+ \frac{1}{6}(\xi^{f}B_{fa[c}\delta^{b}_{d]} + \xi^{f}B_{fc[d}\delta^{b}_{a]} + \xi^{f}B_{fd[a}\delta^{b}_{c[}) - \frac{1}{4}\xi_{a}\xi_{[c}\delta^{b}_{d]} = 0$$

Приводя подобные и перегруппировывая слагаемые в альтернации, получим требуемое тождество. □

Задача 5.16**.** Используя доказанную теорему, покажите, что для любого многообразия класса W_4 выполняется тождество

$$\xi_{[ab]} = 0.$$

Задача 5.17**.** Докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеют место тождество

$$\xi_{[ad]}{}^{c} = \xi_{b}(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) - \xi^{b}(-A^{c}_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^{b}B_{d]b}{}^{c}.$$

Решение. Рассмотрим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты в A-репере вектора Ли (см. первое соотношение в (5.76))

$$d\xi_a - \xi_b\theta_a^b = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b.$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом.

$$-d\xi_b \wedge \theta_a^b - \xi_b d\theta_a^b = d\xi_{ab} \wedge \omega^b + \xi_{ab}d\omega^b + d\xi_a{}^b \wedge \omega_b + \xi_a{}^b d\omega_b.$$

Подставим первую и вторую группы структурных уравнений (5.29), (5.30), (5.11.).

$$\begin{aligned}
&-\xi_b(-\theta_c^b \wedge \theta_a^c + (A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf})\omega_c \wedge \omega_d + (A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad})\omega^d \wedge \omega_c)-\\
&-(\xi_{bc}\omega^c + \xi_b{}^c\omega_c + \xi_c\theta_b^c) \wedge \theta_a^b = d\xi_{ab} \wedge \omega^b + \xi_{ab}(-\theta_c^b \wedge \omega^c + B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d + B^{bc}{}_d\omega^d \wedge \omega_c) + d\xi_a{}^b \wedge \omega_b+\\
&+\xi_a{}^b(\theta_b^c \wedge \omega_c + B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + B_{bc}{}^d\omega_d \wedge \omega^c) \qquad (5.78)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\Delta\xi_{ab} = d\xi_{ab} - \xi_{cb}\theta_a^c - \xi_{ac}\theta_b^c; \quad \Delta\xi_a{}^b = d\xi_a{}^b - \xi_c{}^b\theta_a^c + \xi_a{}^c\theta_c^b.$$

$\Delta\xi_{ab}$ и $\Delta\xi_a{}^b$ – это 1-формы на пространстве расслоения A-реперов. Их можно разложить по базису 1-форм

$$\Delta\xi_{ab} = \xi_{ab}{}^c_d\theta_c^d + \xi_{ab}{}^c\omega_c + \xi_{abc}\omega^c; \quad \Delta\xi_a{}^b = \xi_a{}^{bc}{}_d\theta_c^d + \xi_a{}^{bc}\omega_c + \xi_a{}^b{}_c\omega^c.$$

Подставим эти разложения в (5.78)

$$\begin{aligned}
&-\xi_b(A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af})\omega^c \wedge \omega^d - \xi_b(A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf})\omega_c \wedge \omega_d - \xi_b(A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad})\omega^d \wedge \omega_c) =\\
&= \xi_{ab}{}^c_d\theta_c^d \wedge \omega^b + \xi_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + \xi_{abc}\omega^c \wedge \omega^b + \xi_a{}^{bc}{}_d\theta_c^d \wedge \omega_b + \xi_a{}^{bc}\omega_c \wedge \omega_b + \xi_a{}^b{}_c\omega^c \wedge \omega_b + \xi_{ab}B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d+\\
&+\xi_{ab}B^{bc}{}_d\omega^d \wedge \omega_c + \xi_a{}^b B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \xi_a{}^b B_{bc}{}^d\omega_d \wedge \omega^c
\end{aligned}$$

В силу линейной независимости базисных форм получим

$$\begin{array}{ll}
\theta_c^d \wedge \omega^b: & \xi_{ab}{}^c_d = 0\\
\theta_c^d \wedge \omega_b: & \xi_a{}^{bc}{}_d = 0\\
\omega^c \wedge \omega^d: & -\xi_b(A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af}) = \xi_{a[dc]} + \xi_a{}^b B_{bcd}\\
\omega_c \wedge \omega_d: & -\xi_b(A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf}) = \xi_a{}^{[dc]} + \xi_{ab}B^{bcd}\\
\omega^d \wedge \omega_c: & -\xi_b(A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{ad}{}^c + \xi_a{}^c{}_d + \xi_{ab}B^{bc}{}_d - \xi_a{}^b B_{bd}{}^c.
\end{array} \qquad (5.79)$$

Так как для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеем $\xi_a{}^b = \xi^b{}_a$, получим $\xi_a{}^{dc} = \xi^d{}_a{}^c$ (докажите самостоятельно). Проальтернируем третье равенство по индексам a и d из (5.79) и подставим в комплексно сопряженное ко второму равенству.

Альтернированное третье равенство.

$$-\xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{[ad]}{}^c + \xi_{[a}{}^c{}_{d]} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^b B_{d]b}{}^c$$

Комплексно сопрягаем второе и сразу заменяем свободные индексы, чтобы удобно было подставлять: $a \to c$, $d \to a$, $c \to d$.

$$-\xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) = \xi^c{}_{[ad]} + \xi^{cb}B_{bda}.$$

Подставляем.

$$-\xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{[ad]}{}^c - \xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]df}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^b B_{d]b}{}^c.$$

Окончательно получаем

$$\xi_{[ad]}{}^c = \xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) - \xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^b B_{d]b}{}^c.$$

□

Задача 5.18**.** Используя результат предыдущей задачи, докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеет место тождество

$$\xi_{[ad]}{}^c = -2B^{bcf}B_{fad}\xi_b - \frac{2}{3}\xi^b\xi^c B_{abd} + \frac{2}{3}\xi^c\xi_{[da]} + \frac{1}{6}\xi^b\xi_{[bd]}\delta_a^c + \frac{1}{6}\xi^b\xi_{[ab]}\delta_d^c - \xi^{cb}B_{bda}.$$

Задача 5.19**.** Получите что-нибудь хорошее для четырехмерного многообразия Вайсмана-Грея.

§ 5.13. Компоненты некоторых классических тензоров в A-репере для многообразия Вайсмана-Грея.

13.1. Тензор Римана-Кристоффеля.

Пусть M – многообразие Вайсмана-Грея со структурой (J,g). Напомним, что *тензором Римана-Кристоффеля* называется тензор кривизны римановой связности метрики g. Рассмотрим структурные уравнения связности

$$d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell, \tag{5.80}$$

где $\{R^i_{jk\ell}\}$ – компоненты тензора кривизны связности на пространстве расслоения всех вещественных реперов, $\{\theta^i_j\}$ – тензорные компоненты формы кривизны связности. На пространстве расслоения A-реперов структурные уравнения связности будут иметь такой же вид, но все входящие в них объекты должны быть заменены на их комплексификации. Как обычно мы будем подразумевать комплексификацию объекта, но писать ее не будем. Итак, теперь уравнения (5.80) записаны на пространстве расслоения A-реперов, а значит, индексы могут принимать два вида значений: с крышкой и без крышки. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $i=a$, $j=b$. Тогда

$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - \theta^a_{\hat{c}} \wedge \theta^{\hat{c}}_b + \frac{1}{2}R^a_{bk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell.$$

Применим лемму 5.5.

$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - (-B^{ac}{}_d\omega^d + B^{acd}\omega_d) \wedge (-B_{cb}{}^f\omega_f + B_{cbf}\omega^f) + \frac{1}{2}R^a_{bk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell.$$

Раскроем скобки и распишем подробно последнее слагаемое.

$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - B^{ac}{}_d B_{cb}{}^f\omega^d \wedge \omega_f + B^{ac}{}_d B_{cbf}\omega^d \wedge \omega^f + B^{acd}B_{cb}{}^f\omega_d \wedge \omega_f - B^{acd}B_{cbf}\omega_d \wedge \omega^f +$$
$$+ \frac{1}{2}R^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R^a_{b\hat{c}\hat{d}}\omega_c \wedge \omega_d + R^a_{b\hat{c}d}\omega_c \wedge \omega^d$$

Сообразите самостоятельно, куда в последнем слагаемом делся коэффициент $\frac{1}{2}$. Здесь мы переобозначили $\omega^{\hat{c}}$ на ω_c, а для функций $R^a_{b\hat{c}d}$ обозначения менять не стали. Таким образом, правило суммирования Эйнштейна нарушается, но суммирование по букве c у нас остается. Аналогичное замечание для буквы d.

Сравним полученное тождество со второй группой структурных уравнений (5.11.). Тогда

$$(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c}B_{d]bf})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c}B^{d]af})\omega_c \wedge \omega_d + (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf}B_{fbd})\omega^d \wedge \omega_c =$$
$$= -B^{ac}{}_d B_{cb}{}^f\omega^d \wedge \omega_f + B^{ac}{}_d B_{cbf}\omega^d \wedge \omega^f + B^{acd}B_{cb}{}^f\omega_d \wedge \omega_f - B^{acd}B_{cbf}\omega_d \wedge \omega^f +$$
$$+ \frac{1}{2}R^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R^a_{b\hat{c}\hat{d}}\omega_c \wedge \omega_d + R^a_{b\hat{c}d}\omega_c \wedge \omega^d$$

Соберем в скобки коэффициенты при одинаковых 2-формах.

$$(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c}B_{d]bf} - B^{af}{}_c B_{fbd} - \frac{1}{2}R^a_{bcd})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c}B^{d]af} - B^{afc}B_{fb}{}^d - \frac{1}{2}R^a_{b\hat{c}\hat{d}})\omega_c \wedge \omega_d +$$
$$+ (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf}B_{fbd} + B^{af}{}_d B_{fb}{}^c - B^{afc}B_{fbd} + R^a_{b\hat{c}d})\omega^d \wedge \omega_c = 0$$

Во внешних произведениях $\omega^c \wedge \omega^d$ и $\omega_c \wedge \omega_d$ одноиндексные омеги не упорядочены по номерам, следовательно, в левой части последнего равенства линейная комбинация не является разложением по базису 2-форм. Чтобы получить разложение по базису 2-форм, нужно скобки перед этими 2-формами проальтернировать по индексам c,d. Часть слагаемых этих скобок уже проальтернирована по этим индексам, следовательно, повторная альтернация ничего не изменит в этих слагаемых. Также эта альтернация ничего не изменит в функциях, которые были введены кососимметричными по индексам c,d. Например, в функциях A^a_{bcd}, R^a_{bcd}. Таким образом, после упорядочивания получим

$$2(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c}B_{d]bf} - B^{af}{}_{[c}B_{|fb|d]} - \frac{1}{2}R^a_{bcd})\omega^c \wedge \omega^d(c<d) + 2(A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c}B^{d]af} - B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} -$$
$$- \frac{1}{2}R^a_{b\hat{c}\hat{d}})\omega_c \wedge \omega_d(c<d) + (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf}B_{fbd} + B^{af}{}_d B_{fb}{}^c - B^{afc}B_{fbd} + R^a_{b\hat{c}d})\omega^d \wedge \omega_c = 0$$

В последней скобке ω^d всегда предшествует $\omega_c \equiv \omega^{\hat{c}}$, а значит, в этом слагаемом уже все упорядочено. Используя свойство кососимметричности структурного тензора по любой паре индексов, в первой и второй скобках мы получим, что два слагаемых взаимно уничтожаются. Наконец, воспользуемся линейной независимостью базисных форм

$$R^a_{bcd} = 2A^a_{bcd}; \quad R^a_{b\hat{c}\hat{d}} = 2A^{acd}_b; \quad R^a_{b\hat{c}d} = -A^{ac}_{bd} + B^{acf}B_{fbd} - B^{af}{}_d B_{fb}{}^c.$$

2. Пусть $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (5.80) примет вид

$$d\theta^{\hat{a}}_b = -\theta^{\hat{a}}_c \wedge \theta^c_b - \theta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \wedge \theta^{\hat{c}}_b + \frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell =$$
$$= -(-B_{ac}{}^d\omega_d + B_{acd}\omega^d) \wedge \theta^c_b + \theta^c_a \wedge (-B_{cd}{}^f\omega_f + B_{cdf}\omega^f) + \frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell$$

Здесь мы воспользовались формулами из леммы 5.5 и формулами (5.26).

С другой стороны, продифференцируем внешним образом тождество $\theta^{\hat{a}}_b = -B_{ab}{}^c\omega_c + B_{abc}\omega^c$ из леммы 5.5 и подставим первую группу структурных уравнений и (5.11.). Тогда

$$d\theta^{\hat{a}}_b = d(-B_{ab}{}^c\omega_c + B_{abc}\omega^c) = -dB_{ab}{}^c \wedge \omega_c - B_{ab}{}^c d\omega_c + dB_{abc} \wedge \omega^c + B_{abc}d\omega^c =$$
$$= -B_{ab}{}^c{}_d\omega^d \wedge \omega_c - B_{ab}{}^{cd}\omega_d \wedge \omega_c - B_{db}{}^c\theta^d_a \wedge \omega_c - B_{ad}{}^c\theta^d_b \wedge \omega_c + B_{ab}{}^d\theta^c_d \wedge \omega_c -$$
$$- B_{ab}{}^c(\theta^d_c \wedge \omega_d + B_{cdf}\omega^d \wedge \omega^f + B_{cd}{}^f\omega_f \wedge \omega^d) + B_{abcd}\omega^d \wedge \omega^c + B_{abc}{}^d\omega_d \wedge \omega^c +$$
$$+ B_{dbc}\theta^d_a \wedge \omega^c + B_{adc}\theta^d_b \wedge \omega^c + B_{abd}\theta^d_c \wedge \omega^c + B_{abc}(-\theta^c_d \wedge \omega^d + B^{cdf}\omega_d \wedge \omega_f + B^{cd}{}_f\omega^f \wedge \omega_d)$$

Левые части двух последних тождеств равны, значит равны и их правые части. Тогда после приведения подобных (проведите подробные расчеты самостоятельно) получим

$$\frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + R^{\hat{a}}_{b\hat{c}d}\omega_c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}\omega_c \wedge \omega_d = B_{ab}{}^c{}_d\omega_c \wedge \omega^d + B_{ab}{}^{cd}\omega_c \wedge \omega_d - B_{ab}{}^f B_{fcd}\omega^c \wedge \omega^d -$$
$$- B_{ab}{}^f B_{fd}{}^c\omega_c \wedge \omega^d - B_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d + B_{abd}{}^c\omega_c \wedge \omega^d + B_{abf}B^{fcd}\omega_c \wedge \omega_d - B_{abf}B^{fc}{}_d\omega_c \wedge \omega^d.$$

Собираем коэффициенты при одинаковых 2-формах и упорядочиваем индексы в этих формах (расстановка альтернаций и коэффициентов). В результате в силу линейной независимости базисных форм получаем (объясните, почему на некоторых функциях стоит альтернация, а на некоторых – нет)

$$R^{\hat{a}}_{bcd} = -2(B_{ab}{}^f B_{fcd} + B_{ab[cd]}); \quad R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]} + B_{abf}B^{fcd}).$$

Здесь получается еще одно равенство, но оно нам не нужно (покажем это ниже).

Остальные случаи индексов i и j в структурных уравнениях связности не дадут новых результатов. Докажем это. Во-первых, вспомним, что в курсе Анализ на многообразиях мы определили ковариантный тензор кривизны по формуле (запишем индексную форму этой формулы)

$$R_{ijk\ell} = g_{im}R^m_{jk\ell}.$$

В курсе Анализ на многообразиях в этом равенстве стояли компоненты тензоров кривизны в натуральном базисе. Как мы знаем (из курса тензорной алгебры), если компоненты тензоров равны в одном базисе, то они равны в любом другом базисе. Тогда на последнее соотношение можно смотреть как на равенство компонент в A-реперах тензора кривизны (а точнее его комплексификации). Распишем это равенство для различных возможных случаев свободных индексов.

$$R_{abcd} = g_{am}R^m_{bcd} = g_{af}R^f_{bcd} + g_{a\hat{f}}R^{\hat{f}}_{bcd} = \delta^f_a R^{\hat{f}}_{bcd} = R^{\hat{a}}_{bcd}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в A-реперах $g_{af} = 0$. Итак,

$$R_{abcd} = R^{\hat{a}}_{bcd}.$$

Аналогичным образом можно показать, что $R_{\hat{a}bcd} = R^a_{bcd}$, то есть при перемещении индекса по вертикали он меняет свое состояние "с крыщкой – без крышки"на противоположное. Тогда полученные нами соотношения на компоненты тензора Римана-Кристоффеля можно записать в виде

$$\begin{array}{ll} R_{\hat{a}bcd} = 2A^a_{bcd}; & R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -A^{ac}_{bd} + B^{acf}B_{fbd} - B^{af}{}_d B_{fb}{}^c \\ R_{abcd} = -2(B_{ab}{}^f B_{fcd} + B_{ab[cd]}); & R_{ab\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]} + B_{abf}B^{fcd}). \end{array} \tag{5.81}$$

Так как ковариантный тензор Римана-Кристоффеля обладает следующими свойствами симметрии (см. курс Анализ на многообразиях)

$$1)\, R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}; \quad 2)\, R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k}; \quad 3)\, R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$$

и кроме того, является вещественным, то есть при комплексном сопряжении его компонент индексы с крышками становятся индексами без крышек и наоборот, получаем, что из перечисленных четырех компонент можно получить все остальные 12 компонент (всего их 16 штук).

13.2. Тензор Риччи.

Свертка тензора Римана-Кристоффеля позволяет определить еще один тензор (точнее тензорное поле типа (2,0)) на любом римановом многообразии (в частности, на почти эрмитовом многообразии). Он называется *тензором Риччи* и определяется следующей формулой (также см. курс Анализ на многообразиях)

$$r_{jk} = R^i_{jik} \equiv g^{i\ell} R_{ij\ell k}.$$

Замечание 5.5. В литературе (середины прошлого века) также встречается еще одно определение тензора Риччи

$$r_{j\ell} = R^i_{j\ell i}.$$

В силу свойств симметрии тензора Римана-Кристоффеля, такой тензор Риччи отличается от введенного нами знаком.

Задача 5.20. Покажите, что тензор Риччи симметричен.

Указание: воспользуйтесь свойствами симметрии ковариантного тензора Римана-Кристоффеля.

Найдем компоненты тензора Риччи в A-реперах.

1. Пусть $j = a$, $k = b$. Тогда

$$r_{ab} = R^i_{abi} = R^c_{abc} + R^{\hat{c}}_{ab\hat{c}} = \sum_c (R_{\hat{c}abc} + R_{cab\hat{c}}) = \sum_c (R_{\hat{c}abc} + R_{\hat{c}bac}) = A^c_{acb} + A^c_{bca} = -A^c_{abc} - A^c_{bac}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами симметрии ковариантного тензора Римана-Кристоффеля и выражения для компонент тензора Римана-Кристоффеля.

Воспользуемся второй формулой из теоремы 5.5.

$$\begin{aligned} r_{ab} = -2(A^c_{abc} + A^c_{bac}) = -(&\frac{1}{3}\xi_{a[b}\delta^c_{c]} + \frac{1}{3}\xi_{[bc]}\delta^c_a + \frac{2}{3}\xi_{[b|a|}\delta^c_{c]} + \frac{1}{3}\xi^f B_{fa[b}\delta^c_{c]} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fbc}\delta^c_a + \\ &+ \frac{1}{2}\xi_a\xi_{[b}\delta^c_{c]} + \frac{1}{3}\xi_{b[a}\delta^c_{c]} + \frac{1}{3}\xi_{[ac]}\delta^c_b + \frac{2}{3}\xi_{[a|b|}\delta^c_{c]} + \frac{1}{3}\xi^f B_{fb[a}\delta^c_{c]} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fac}\delta^c_b + \frac{1}{2}\xi_b\xi_{[a}\delta^c_{c]}) = \\ &= -(\frac{1}{6}n\xi_{ab} - \frac{1}{6}\xi_{ab} + \frac{1}{3}\xi_{[ba]} + \frac{1}{3}\xi_{ba}n - \frac{1}{3}\xi_{ba} + \frac{1}{6}\xi^f B_{fab}n - \frac{1}{6}\xi^f B_{fab} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fba} + \\ &+ + \frac{1}{4}n\xi_a\xi_b - \frac{1}{4}\xi_a\xi_b + \frac{1}{6}n\xi_{ba} - \frac{1}{6}\xi_{ba} + \frac{1}{3}\xi_{[ab]} + \frac{1}{3}\xi_{ab}n - \frac{1}{3}\xi_{ab} + \frac{1}{6}\xi^f B_{fba}n - \frac{1}{6}\xi^f B_{fba} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fab} + \\ &+ \frac{1}{4}n\xi_b\xi_a - \frac{1}{4}\xi_b\xi_a) = -\frac{n-1}{2}(\xi_{ab} + \xi_{ba} + \xi_a\xi_b). \end{aligned}$$

2. Пусть $j = \hat{a}$, $k = b$. Тогда

$$r_{\hat{a}b} = R^c_{\hat{a}cb} + R^{\hat{c}}_{\hat{a}\hat{c}b} = R_{\hat{c}\hat{a}cb} + R_{c\hat{a}\hat{c}b} = -\bar{R}_{ca\hat{b}\hat{c}} - R_{\hat{a}c\hat{c}b}.$$

Используя найденные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, найдем $\bar{R}_{ca\hat{b}\hat{c}}$. Для компонент структурного тензора мы уже знаем правило комплексного сопряжения (см. предложение 5.1). Для функций ${B_{ab}}^{cd}$ получите правило комплексного сопряжения самостоятельно, используя уравнения (5.11.). Как подсказывает интуиция в результате получится следующее правило

$$\overline{{B_{ab}}^{cd}} = {B^{ab}}_{cd}.$$

Возвращаемся к вычислению компонент тензора Риччи.

$$\begin{aligned} r_{\hat{a}b} = -(2{B^{ca}}_{[bc]} + 2B^{caf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} + B^{acf}B_{fcb} - {B^{af}}_b {B_{fc}}^c)) = \\ = -(({B^{ca}}_{bc} - {B^{ca}}_{cb}) - 3B^{acf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} - \frac{1}{4}(\xi^a\delta^f_b - \xi^f\delta^a_b)(\xi_f\delta^c_c - \xi_c\delta^c_f)) = \\ = -({\xi^{[c}}_c\delta^{a]}_b - {\xi^{[c}}_b\delta^{a]}_c - 3B^{acf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} - \frac{1}{4}(n\xi^a\xi_b - \xi^a\xi_b - \xi^f\xi_f\delta^a_b n + \xi^f\xi_f\delta^a_b)) = \\ = -(\frac{1}{2}({\xi^c}_c\delta^a_b - {\xi^a}_b - {\xi^a}_b + \xi^a_b n) - 3B^{acf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} - \frac{1}{4}((n-1)\xi^a\xi_b - (n-1)\xi^f\xi_f\delta^a_b)) = \\ = -(\frac{n-2}{2}{\xi^a}_b + \frac{1}{2}{\xi^c}_c\delta^a_b - 3B^{acf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} - \frac{n-1}{4}(\xi^a\xi_b - \xi^f\xi_f\delta^a_b)). \end{aligned}$$

Так как тензор Риччи является вещественным и симметричным, то две оставшиеся группы компонент выражаются через найденные следующим образом:

$$r_{\hat{a}\hat{b}} = \bar{r}_{ab}; \quad r_{a\hat{b}} = \bar{r}_{\hat{a}b}.$$

Итак, компоненты тензора Риччи в A-репере имеют вид

$$r_{ab} = -\frac{n-1}{2}(\xi_{ab} + \xi_{ba} + \xi_a \xi_b); \quad r_{\hat{a}b} = -(\tfrac{n-2}{2}\xi^a{}_b + \tfrac{1}{2}\xi^c{}_c \delta^a_b - 3B^{acf}B_{fbc} - A^{ac}_{cb} - \tfrac{n-1}{4}(\xi^a \xi_b - \xi^f \xi_f \delta^a_b));$$
$$r_{\hat{a}\hat{b}} = -\frac{n-1}{2}(\xi^{ab} + \xi^{ba} + \xi^a \xi^b); \quad r_{a\hat{b}} = -(\tfrac{n-2}{2}\xi_a{}^b + \tfrac{1}{2}\xi_c{}^c \delta^b_a - 3B_{acf}B^{fbc} - A^{cb}_{ac} - \tfrac{n-1}{4}(\xi_a \xi^b - \xi_f \xi^f \delta^b_a)).$$

Замечание 5.6**.** Кроме тензора Риччи есть еще так называемый *эндоморфизм Риччи*. Он обозначается ric и определяется следующим образом:

$$g(ric(X), Y) = r(X, Y), \ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

В компонентах это равенство примет вид

$$g_{ij} r^j_k = r_{ik},$$

где r^j_k обозначены компоненты эндоморфизма Риччи.

В A-репере для эндоморфизма Риччи получим

$$r_{ab} = g_{aj} r^j_b = \delta^c_a r^{\hat{c}b} = r^{\hat{a}}_b.$$

Аналогично можно получить соотношения для остальных компонент (посчитайте самостоятельно). Мы видим, что компоненты тензора Риччи и эндоморфизма Риччи следующим образом: при перемещении индекса он теряет крышку, если она была, или приобретает ее, если не было.

Так как тензор Риччи симметричен, нам все равно на какое место (первое или второе опускать индекс у эндоморфизма Риччи. Поэтому компоненты $r^{\hat{a}}{}_b = r_b{}^{\hat{a}}$ мы будем обозначать $r^{\hat{a}}_b$. Для компонент $r^a_{\hat{b}}$, r^a_b, $r^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ вводится аналогичная договоренность.

13.3. Скалярная кривизна.

Скалярной кривизной называется функция

$$\varkappa = g^{ij} r_{ij}.$$

Вычислим скалярную кривизну в A-репере. Заметим, что матрица (g^{ij}) является обратной к матрице (g_{ij})

$$\varkappa = g^{a\hat{b}} r_{a\hat{b}} + g^{\hat{a}b} r_{\hat{a}b} = 2\sum_{a=1}^{n} r_{aa} = -(2(n-1)\xi^c{}_c - 6B^{acf}B_{acf} - 2A^{ac}_{ca} + \frac{(n-1)^2}{2}\xi^a \xi_a)).$$

13.4. Важное следствие.

Для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 2 имеет место тождество

$$\xi^a{}_a = \xi_a{}^a.$$

Для многообразий Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеет место тождество

$$\xi^a{}_b = \xi_b{}^a.$$

Действительно, рассмотрим компоненту тензора Римана-Кристоффеля вида

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]} + B_{abf}B^{fcd}).$$

Так как тензор Римана-Кристоффеля вещественен и обладает свойствами симметрии, получим

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{c}\hat{d}ab} = \bar{R}_{cd\hat{a}\hat{b}}.$$

Подставим в полученное равенство значения компонент тензора Римана-Кристоффеля (5.81).

$$2B_{ab}{}^{[cd]} + 2B_{acf}B^{fcd} = \overline{2B_{cd}{}^{[ab]}} + 2B_{cdf}B^{fab} = 2B^{cd}{}_{[ab]} + 2B^{cdf}B_{fab}.$$

В силу кососимметричности структурного тензора получим

$$B_{ab}{}^{[cd]} = B^{cd}{}_{[ab]}.$$

Воспользуемся результатом задачи 5.15.

$$\xi_{[a}{}^{[d}\delta^{c]}_{b]} = \xi^{[c}{}_{[b}\delta^{d]}_{a]}$$

Раскроем альтернацию (на $\frac{1}{4}$ сразу сокращаем).

$$\xi_a{}^d\delta^c_b + \xi_b{}^c\delta^d_a - \xi_a{}^c\delta^d_b - \xi_b{}^d\delta^c_a = \xi^d{}_a\delta^c_b + \xi^c{}_b\delta^d_a - \xi^c{}_a\delta^d_b - \xi^d{}_b\delta^c_a.$$

Свернем эти тождества по индексам b и d. Это означает что из множества полученных равенств мы выберем те, у которых индексы b и d одинаковые (обозначим эти равные индексы одной буквой, например, b) и почленно их сложим. В результате получим

$$2\xi_a{}^c - n\xi_a{}^c - \xi_b{}^b\delta^c_a = -\xi^c{}_a n - \xi^b{}_b\delta^c_a + 2\xi^c{}_a. \tag{5.82}$$

Теперь свернем по индексам a и c.

$$2(1-n)\xi_b{}^b = 2(1-n)\xi^b{}_b.$$

Так как размерность многообразия больше 2, n больше 1, и на числовой коэффициент можно сократить. В результате получим первое из требуемых соотношений. Подставим это соотношение в (5.82). После приведения подобных получим

$$(2-n)\xi_a{}^c = (2-n)\xi^c{}_a.$$

Для многообразий Вайсмана-Грея размерности выше 4 ($n > 2$) из этого следует, что $\xi_a{}^c = \xi^c{}_a$.

§ 5.14. Конформные преобразования. Конформно инвариантные классы многообразий Вайсмана-Грея.

14.1. Тензор Вейля конформной кривизны.

Пусть дано гладкое многообразие M с почти эрмитовой структурой $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$. В частности, это многообразие является римановым, а значит, для него определено понятие конформного преобразования. Напомним (см. курс Анализ на многообразиях), что *конформным преобразованием* риманова многообразия называется переход от римановой метрики g к римановой метрике $\tilde{g} = e^{2f}g$. Легко видеть (покажите самостоятельно), что почти комплексная структура J согласована с метрикой $\tilde{g}$, а значит, определяет на гладком многообразии M почти эрмитову структуру. Для краткости договоримся обозначать почти эрмитово многообразие (M, J, g) через $\mathscr{M}$, а почти эрмитово многообразие $(M, J, \tilde{g})$ – через $\tilde{\mathscr{M}}$.

Если для каждой точки риманова многообразия (M, g) существует окрестность U и функция f, заданная на этой окрестности, такие что риманово многообразие $(U, \tilde{g} = e^{2f}g)$ является евклидовым (то есть тензор Римана-Кристоффеля этого многообразия тождественно равен нулю), то многообразие (M, g) называется *локально конформно плоским.* Если существует функция f, заданная на всем многообразии M, то многообразие (M, g) называется *глобально конформно плоским.*

Хорошо известно (см. Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ"или Постников "Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия"), что риманово многообразие (размерности выше 3) является локально конформно плоским тогда и только тогда, когда в нуль обращается так называемый *тензор Вейля конформной кривизны* (точнее, ковариантный тензор Вейля конформной кривизны. Для тензора конформной кривизны, так же как для тензора Римана-Кристоффеля есть тензор типа (3,1), определяемый формулой $W^i_{jk\ell} = g^{it}W_{tjk\ell}$, который мы также будем называть тензором Вейля конформной кривизны)

$$W_{ij,k\ell} = R_{ij,k\ell} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}r_{j\ell} - g_{i\ell}r_{jk} - g_{jk}r_{i\ell} + g_{j\ell}r_{ik}\right) + \frac{\varkappa}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}).$$

где n – размерность гладкого многообразия M.

Заметим, что из классической дифференциальной геометрии известно, что любое двумерное риманово многообразие является локально конформно плоским. Для трехмерного риманова многообразия критерий локальной конформной плоскости приобретает другой вид (см. Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ"), а тензор Вейля конформной кривизны в нем всегда равен нулю. Обратите внимание, что в книгах Рашевского и Постникова тензор Вейля конформной кривизны отличается друг от друга знаками. Это обусловлено тем, что в этих книгах по-разному определен тензор Риччи: $r_{jk} = R^i_{jki}$ – у Рашевского и $r_{jk} = R^i_{jik}$ – у Постникова. Мы определили тензор Риччи также, как в книге Постникова и поэтому возьмем формулу для тензора Вейля конформной кривизны именно из этой книги.

Задача 5.21. Докажите, что тензор Вейля конформной кривизны W обладает следующими свойствами симметрии

$$1)\, W_{ijk\ell} = -W_{jik\ell};\quad 2)\, W_{ijk\ell} = -W_{ij\ell k};\quad 3)\, W_{ijk\ell} = W_{k\ell ij}.$$

Это те же самые свойства симметрии, что и у тензора Римана-Кристоффеля.

14.2. Компоненты тензора Вейля.

Так как любое почти эрмитово многообразие, в частности, является римановым, то для него также определены понятия локальной конформной плоскости и тензора Вейля конформной кривизны. Так как размерность почти эрмитова многообразия четна и обозначена $2n$, тензор Вейля конформной кривизны для почти эрмитова многообразия имеет вид

$$W_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{ik}g_{j\ell} + r_{j\ell}g_{ik} - r_{i\ell}g_{jk} - r_{jk}g_{i\ell}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{jk}g_{i\ell} - g_{j\ell}g_{ik}),$$

Найдем компоненты тензора Вейля конформной кривизны для многообразий Вайсмана-Грея. Так как тензор Вейля конформной кривизны обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор Римана-Кристоффеля, и вещественен, он тоже имеет четыре компоненты, через которые выражаются все остальные 12 компонент. Найдем эти четыре компоненты.

1. Пусть $i = a$, $j = b$, $k = c$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{ac}g_{bd} + r_{bd}g_{ac} - r_{ad}g_{bc} - r_{bc}g_{ad}) -$$
$$- \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{bc}g_{ad} - g_{bd}g_{ac}) = R_{abcd} = -2(B_{ab}{}^{f}B_{fcd} + B_{ab[cd]}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $g_{ab} = 0$ и выражением для компонент тензора Римана-Кристоффеля.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}c}g_{bd} + r_{bd}g_{\hat{a}c} - r_{\hat{a}d}g_{bc} - r_{bc}g_{\hat{a}d}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{bc}g_{\hat{a}d} - g_{bd}g_{\hat{a}c}) =$$
$$= R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{bd}\delta^a_c - r_{bc}\delta^a_d)$$

Подставим в это выражение компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тензора Риччи.

$$W_{\hat{a}bcd} = 2A^a_{bcd} + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b\xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b\xi_c)\delta^a_d).$$

3. $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$, $k = c$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{\hat{a}\hat{b}cd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}c}g_{\hat{b}d} + r_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c} - r_{\hat{a}d}g_{\hat{b}c} - r_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d} - g_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c}) =$$
$$= R_{\hat{a}\hat{b}cd} - \frac{1}{2(n-1)}(r^a_c\delta^b_d + r^b_d\delta^a_c - r^a_d\delta^b_c - r^b_c\delta^a_d) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(\delta^b_c\delta^a_d - \delta^b_d\delta^a_c).$$

Здесь мы не будем пока подставлять компоненты тензоров Римана-Кристоффеля и Риччи. Оставим эту компоненту в таком виде.

4. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = \hat{c}$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{\hat{a}b\hat{c}d} = R_{\hat{a}b\hat{c}d} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}\hat{c}}g_{bd} + r_{bd}g_{\hat{a}\hat{c}} - r_{\hat{a}d}g_{b\hat{c}} - r_{b\hat{c}}g_{\hat{a}d}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{b\hat{c}}g_{\hat{a}d} - g_{bd}g_{\hat{a}\hat{c}}) =$$
$$= -A^{ac}_{bd} + B^{acf}B_{fbd} - B^{af}{}_{d}B_{fb}{}^{c} + \frac{1}{2(n-1)}(r^a_d\delta^c_b + r^c_b\delta^a_d) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}\delta^c_b\delta^a_d.$$

14.3. Конформно инвариантные классы.

Хорошо известно (Рашевский „Риманова геометрия и тензорный анализ“), что тензор Вейля конформной кривизны $W^i_{jk\ell}$ является конформно инвариантным, то есть он один и тот же для исходного почти эрмитова многообразия и конформно преобразованного. Ковариантный тензор Вейля при конформном преобразовании изменяется следующим образом

$$\tilde{W}_{ijk\ell} = \tilde{g}_{it}\tilde{W}^t_{jk\ell} = e^{2f}g_{it}W^t_{jk\ell} = e^{2f}W_{ijk\ell}.$$

Из этого следует, что $W_{ijk\ell} = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{W}_{ijk\ell} = 0$, то есть обращение в нуль тензора Вейля является конформно инвариантным условием, следовательно, класс почти эрмитовых многообразий, для которых $W_{ijk\ell} = 0$, является замкнутым относительно конформных преобразований. Другими словами, если взять почти эрмитово многообразие, для которого $W_{ijk\ell} = 0$, и подвергнуть его конформному преобразованию, то получим почти эрмитово многообразие, для которого также $\tilde{W}_{ijk\ell} = 0$. Как мы отмечали выше, это условие в размерности выше трех равносильно конформной евклидовости исходного многообразия.

На пространстве расслоения A-реперов компоненты тензора Вейля делятся на четыре группы. В каждую из них входят компоненты найденные нами выше и компоненты, получающиеся с помощью свойств симметрии тензора Вейля и его вещественности. Обозначим эти классы следующим образом:

$$\begin{aligned} C_0 : W_{abcd} = 0; \quad C_1 : W_{\hat{a}bcd} = 0; \\ C_2 : W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0; \quad C_3 : W_{\hat{a}b\hat{c}d} = 0. \end{aligned}$$

Найдем критерии принадлежности многообразия Вайсмана-Грея каждому из перечисленных классов.

Рассмотрим класс C_0. С учетом результатов предыдущего пункта получим, что многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_0 тогда и только тогда, когда

$$B_{ab}{}^{f} B_{fcd} + B_{ab[cd]} = 0. \tag{5.83}$$

Напомним, что при проведении дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея мы получили следующее тождество (см. (5.11.))

$$B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^{f} B_{cd]f} = 0. \tag{5.84}$$

В силу кососимметричности функций B_{abcd} по первым трем индексам мы можем переписать первое слагаемое последнего тождества в виде

$$B_{a[bcd]} = \frac{1}{3}(B_{abcd} + B_{acdb} + B_{adbc}) = \frac{1}{3}(B_{abcd} - B_{adcb} + B_{adbc}) = \frac{1}{3}(B_{abcd} + 2B_{ad[bc]})$$

Подставим полученное выражение и (5.83) в (5.84):

$$\frac{1}{3}(B_{abcd} - 2B_{ad}{}^{f} B_{fbc}) + B_{a[b}{}^{f} B_{cd]f} = 0.$$

Раскроем альтернацию и учтем примитивность виртуального тензора.

$$\frac{1}{3}(B_{abcd} - 2B_{ad}{}^{f} B_{fbc}) + \frac{1}{3}(B_{ab}{}^{f} B_{cdf} + B_{ac}{}^{f} B_{dbf} + B_{ad}{}^{f} B_{bcf}) = 0$$

$$B_{abcd} - \xi_a B_{dbc} + \xi_d B_{abc} + \frac{1}{2}(\xi_a B_{cdb} - \xi_b B_{cda} + \xi_a B_{dbc} - \xi_c B_{dba} + \xi_a B_{bcd} - \xi_d B_{bcf}) = 0 \tag{5.85}$$

Приводя подобные и используя обозначения для альтернации и симметризации по индексам, получим

$$B_{abcd} = -\xi_{[a} B_{b]cd} - \xi_{(c} B_{d)ab}. \tag{5.86}$$

Непосредственно проверяется, что для многообразия Вайсмана-Грея, для которого выполняется (5.86), будет выполняться (5.83), а значит, многообразие принадлежит классу C_0.

Теорема 5.6. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_0 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (5.86).*

Рассмотрим многообразие класса C_1, то есть

$$2A^a_{bcd} + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b\xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b\xi_c)\delta^a_d) = 0 \tag{5.87}$$

Напомним, что в теореме 5.5 мы получили следующую формулу, которая верна для любых многообразий Вайсмана-Грея

$$A^a_{bcd} = \frac{1}{6}\xi_{b[c}\delta^a_{d]} + \frac{1}{6}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{1}{3}\xi_{[c|b|}\delta^a_{d]} + \frac{1}{6}\xi^f B_{fb[c}\delta^a_{d]} - \frac{1}{6}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b + \frac{1}{4}\xi_b\xi_{[c}\delta^a_{d]}. \tag{5.88}$$

Подставим (5.88) в (5.87).

$$\frac{1}{3}\xi_{b[c}\delta^a_{d]} + \frac{1}{3}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{2}{3}\xi_{[c|b|}\delta^a_{d]} + \frac{1}{3}\xi^f B_{fb[c}\delta^a_{d]} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b + \frac{1}{2}\xi_b\xi_{[c}\delta^a_{d]} + \\ + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b\xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b\xi_c)\delta^a_d) = 0.$$

Раскроем альтернации, сгруппируем их по-другому и приведем подобные.

$$-\frac{1}{6}\xi_{[bc]}\delta^a_d + \frac{1}{6}\xi_{[bd]}\delta^a_c + \frac{1}{3}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{1}{6}\xi^f B_{fbc}\delta^a_d - \frac{1}{6}\xi^f B_{fbd}\delta^a_c - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b = 0. \tag{5.89}$$

Так как пока все преобразования были равносильными, мы получили промежуточный критерий класса C_1.

Далее пойдут не равносильные преобразования. Свернем (5.89) по индексам a и d (выберем из всех уравнений (5.89), для которых $a = d$ и почленно сложим их).

$$\frac{1}{6}n\xi_{[cb]} + \frac{1}{6}\xi_{[bc]} + \frac{1}{3}\xi_{[cb]} + \frac{1}{6}n\xi^f B_{fbc} - \frac{1}{6}\xi^f B_{fbc} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcb} = 0.$$

Воспользуемся кососимметричностью альтернированного тензора и кососимметричностью структурного тензора.

$$\frac{1}{6}(n+1)(-\xi_{[bc]} + \xi^f B_{fbc}) = 0.$$

Окончательно получим

$$\xi_{[bc]} = \xi^f B_{fbc}. \tag{5.90}$$

Обратно, подставляя (5.90) в (5.89), получаем тождество вида $0 = 0$, следовательно,(5.90) и (5.89) равносильны. Таким образом, доказана

Теорема 5.7. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_1 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (5.90).*

Рассмотрим класс C_2. Аналогично получаем (подробные вычисления проведите самостоятельно)

$$B^{abf}B_{fcd} = \xi^{[a}{}_{[c}\delta^{b]}_{d]} + \frac{1}{n-1}r^{[a}_{[c}\delta^{b]}_{d]} + \frac{\varkappa(\delta^b_c\delta^a_d - \delta^b_d\delta^a_c)}{4(2n-1)(n-1)}. \tag{5.91}$$

Теорема 5.8. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_2 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (5.91).*

Рассмотрим класс C_3. Приравнивая соответствующую компоненту тензора Вейля нулю, получим

$$-A^{ac}_{bd} + B^{acf}B_{fbd} - B^{af}{}_d B_{fb}{}^c + \frac{1}{2(n-1)}(r^a_d\delta^c_b + r^c_b\delta^a_d) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}\delta^c_b\delta^a_d = 0 \tag{5.92}$$

Проальтернируем это тождество по индексам b, d и подставим первое соотношение из (5.11.). После приведения подобных получим

$$B^{ac}{}_{[bd]} + B^{acf}B_{fbd} + \frac{1}{n-1}r^{[a}_{[d}\delta^{c]}_{b]} - \frac{\varkappa(\delta^c_b\delta^a_d - \delta^c_d\delta^a_b)}{4(2n-1)(n-1)} = 0.$$

Полученное тождество совпадает с критерием класса C_2 (убедитесь в этом самостоятельно), то есть класс C_3 включен в класс C_2.

Теорема 5.9. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_3 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (5.92).*

Замечание 5.7. Можно показать, что кроме включения $C_3 \subset C_2$ имеет место следующее включение конформно инвариантных классов многообразий Вайсмана-Грея $C_1 \subset C_0$. Тогда, очевидно, что класс $C_1 \cap C_3$ совпадает с классом конформно плоских многообразий Вайсмана-Грея. Для него была получена следующая классификационная теорема

Теорема 5.10. *Многообразие Вайсмана-Грея размерности выше 4 является конформно плоским тогда и только тогда, когда локально конформно эквивалентно одному из следующих многообразий:*

1. *комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$;*
2. *шестимерной сфере S^6_k, $k > 0$;*
3. *многообразию $S^6_k \times S^2_{-k}$, $k > 0$, снабженных канонической приближенно келеровой структурой. Здесь символ S^m_k обозначает m-мерное пространство постоянной кривизны k.*

Также была получена классификационная теорема для класса $C_1 \cap C_2$.

§ 5.15. Отображения присоединенных G-структур почти эрмитовых многообразий, порожденные конформными преобразованиями почти эрмитовой структуры.

Пусть дано почти эрмитово многообразие $\mathscr{M} = (M, J, g)$ и конформно преобразованное почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}} = (M, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M. Обозначим присоединенную G-структуру многообразия $\mathscr{M}$ через $\mathscr{P} = (P, M, \pi, U(n))$, а присоединенную G-структуру многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$ через $\tilde{\mathscr{P}} = (\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$. Рассмотрим отображение

$$\psi : \tilde{P} \to P,$$

заданное следующим образом

$$\psi : p = (m, \varepsilon_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_i = e^{-f}(m)\varepsilon_i),$$

где $m = \pi(p) = \tilde{\pi}(\tilde{p})$ – точка многообразия M. Другими словами, отображение ψ не меняет вершины репера, а все вектора репера умножает на одно и то же вещественное число $e^{-f}(m)$.

Замечание 5.8. Отображение ψ индуцирует отображение дуальных реперов. Будем обозначать его той же буквой ψ. Оно задается следующим образом:

$$\psi : (m, u^i) \to (m, \tilde{u}^i = e^f(m)u^i). \tag{5.93}$$

Действительно,

$$\tilde{u}^i(\tilde{\varepsilon}_j) = e^f(m)u^i(e^{-f}(m)\varepsilon_j) = u^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j.$$

Здесь мы воспользовались тем, что базисы (ε_i) и (u^j) являются дуальными.

Покажем, что отображение ψ задано корректно, то есть образом A-репера $p = (m, \varepsilon_i)$ будет A-репер, то есть $\tilde{p} \in \tilde{P}$. Для этого достаточно показать, что компоненты $\{\tilde{J}^i_j\}$ почти комплексной структуры J и компоненты $\{\tilde{g}_{ij}\}$ римановой метрики $\tilde{g}$ в репере $\tilde{p}$ имеют вид

$$(\tilde{J}^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{5.94}$$

По определению компонент тензорного поля в A-репере имеем

$$\tilde{J}^i_j(\tilde{p}) = J_m(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{u}^i) = J_m(e^{-f}(m)\varepsilon_j, e^f(m)u^i) = J_m(\varepsilon_j, u^i) = J^i_j(p).$$

Таким образом, матрица компонент почти комплексной структуры J в точках $\tilde{p}$ имеет такой же вид как матрица компонент J в точках p, то есть вид (5.94).

Задача 5.22. Докажите, что матрица компонент римановой метрики $\tilde{g}$ в точках $\tilde{p}$ имеет вид (5.94).

Итак. отображение ψ задано корректно. Очевидно, что ψ является диффеоморфизмом. Тогда пара отображений (ψ, id), где $id : U(n) \to U(n)$ является изоморфизмом главных расслоений $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$.

Обозначим $\omega = \{\omega^i\}$ и $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i\}$ формы смещения для почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ соответственно. Фиксируем на каждом из многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ риманову связность.

Лемма 5.6. *Для форм смещения ω и $\tilde{\omega}$ имеем*

$$(\psi^*\tilde{\omega}^i)(p) = e^f \circ \pi(p)\omega^i(p) \equiv e^f(m)\omega^i(p).$$

Доказательство. Как мы видели в курсе Многомерная дифференциальная геометрия (I), любой базис $(\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ порождает базис $(X_{\xi_1} \equiv X_1, \dots, X_{\xi_{2n}} \equiv X_{2n})$ векторного пространства всех базисных полей пространства расслоения реперов. Рассмотрим, в частности, в качестве такого базиса стандартный базис арифметического векторного пространства

$$\xi_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \xi_{2n} = (0, \dots, 0, 1).$$

Очевидно, что $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$, а значит, для дифференциалов этих отображений имеет место равенство

$$(\tilde{\pi}_*)_{\psi(p)} \circ (\psi_*)_p = (\pi_*)_p.$$

Тогда по определению формы смещения получим

$$(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_i)_p = \psi^*_{\psi(p)}\tilde{\omega}_{\psi(p)}(X_i) = \tilde{\omega}_{\psi(p)}((\psi_*)_p(X_i)_p) = \tilde{p}^{-1} \circ (\tilde{\pi}_*)_{\tilde{p}} \circ (\psi_*)_p(X_i)_p = \tilde{p}^{-1}(\pi_*)_p(X_i)_p =$$
$$= \tilde{p}^{-1}p(\xi_i) = \tilde{p}^{-1}(\varepsilon_i) = \tilde{p}^{-1}(e^f(m)\tilde{\varepsilon}_i) = e^f(m)\tilde{p}^{-1}(\tilde{\varepsilon}_i) = e^f(m)\xi_i = e^f(m)\omega_p(X_i)_p.$$

Здесь мы воспользовались формулой $(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}(\omega_{\phi(p)})$ – формула (1.27) из курса Многомерная дифференциальная геометрия (I). Эта формула связывает отображение антиувлечения форм и отображение антиувлечения ковекторов. Далее использовали определение отображения антиувлечения ковекторов, определение формы смещения, характеристическим свойством базисного векторного поля $\pi_* X_\xi = p(\xi)$ (см. § 4.2 курса Многомерная дифференциальная геометрия (I)).

Таким образом, получаем $(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_i)_p = e^f(m)\omega_p(X_i)_p$ для любой точки $p \in P$, то есть $(\psi^*\tilde{\omega})(X_i) = e^f\omega(X_i)$.

Из определения отображения ψ следует, что оно переводит слой главного расслоения $\mathscr{P}$ в слой расслоения $\tilde{\mathscr{P}}$. Следовательно, касательное пространство к слою переходит в касательное пространство к слою при отображении $(\psi_*)_p$ для любой точки $p \in P$. Следовательно, вертикальное распределение $\mathscr{V}$ расслоения $\mathscr{P}$ под действием отображения ψ_* переходит в вертикальное распределение $\tilde{\mathscr{V}}$ расслоения $\tilde{\mathscr{P}}$.

Так как базисные векторные поля образуют базис горизонтального распределения, а форма смещения обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле (то есть является горизонтальной формой), получим

$$(\psi^*\tilde{\omega})(X) = (\psi^*\tilde{\omega})(X_{\mathscr{V}} + X^iX_i) = (\psi^*\tilde{\omega})(X_{\mathscr{V}}) + X^i(\psi^*\tilde{\omega})(X_i) = \tilde{\omega}(\psi_*X_{\mathscr{V}}) \circ \psi + X^ie^f\omega(X_i) =$$
$$= 0 + e^f\omega(X^iX_i) = e^f\omega(X_{\mathscr{V}} + X^iX_i) = e^f\omega(X).$$

для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$. Здесь мы разложили векторное поле X на сумму вертикального и горизонтального векторного поля (так как $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$, горизонтальное распределение берется относительно римановой связности многообразия $\mathscr{M}$), а горизонтальное разложили по базису базисных векторных полей. ☐

Замечание 5.9. Лемма 5.6 и формула преобразования дуального A-репера (5.93) наводят на мысль, что компоненты формы смещения тесным образом связаны с ковекторами дуального A-репера (m, u^i). Это действительно так.

Рассмотрим форму смещения ω для главного расслоения A-реперов. Она вводится точно так же как в случае главного расслоения всех вещественных реперов (см. курс Многомерная дифференциальная геометрия)

$$\omega_p = p^{-1} \circ \pi_*,$$

где $p = (m, \varepsilon_i)$ – A-репер, π – отображение проекции.

Предположим, что на многообразии M (или что равносильно на пространстве расслоения всех реперов) фиксирована связность. Тогда для любого вектора $X \in T_m(M)$ на многообразии M определен горизонтальный лифт $i_{\mathscr{H}}X$ этого вектора в горизонтальную площадку $\mathscr{H}_p$, где p – A-репер, принадлежащий слою $\pi^{-1}(m)$, висящему над точкой m.

Подействуем касательный вектор $(i_{\mathscr{H}}X)_p$, $p \in P$ формой смещения

$$\omega_p(i_{\mathscr{H}}X) = p^{-1}X.$$

Здесь мы воспользовались определением горизонтального лифта, а именно, тем, что $\pi_* \circ i_{\mathscr{H}}(X) = X$. В правой части этого равенства стоит набор координат вектора X в базисе A-репера p, то есть набор из $2n$ чисел $(u^1(X), \dots, u^{\hat{n}}(X))$ (здесь мы воспользовались определением дуального базиса). Правую часть этого равенства мы можем записать так: $\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X)\xi_i$, где ξ_i – стандартный базис арифметического векторного пространства, ω^i – тензорные компоненты формы смещения. Тогда

$$(\omega^1_p(i_{\mathscr{H}}X), \dots, \omega^{\hat{n}}_p(i_{\mathscr{H}}X)) = (u^1(X), \dots, u^{\hat{n}}(X)),$$

что означает $\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X) = u^i(X)$. Это верно для любого касательного вектора X, следовательно

$$\omega^i_p \circ i_{\mathscr{H}} = u^i,$$

где $p = (m, \varepsilon_i) \in P$ – произвольный A-репер, (m, u^i) – дуальный репер.

Обозначим римановы связности метрик g и $\tilde{g}$ через ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. Пусть $\{\theta^a_b\}$ и $\{\tilde{\theta}^a_b\}$ компоненты форм связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ на пространствах присоединенных G-структур. Применим к формам

$\tilde{\theta}^a_b$ отображение антиувлечения ψ^*. В результате мы получим некоторую 1-форму на многообразии P. Разложим эту форму по базису 1-форм $(\theta^a_b, \omega^c, \omega_d)$:

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c, \tag{5.95}$$

где A^{ac}_{bd}, B^{ac}_b, B^a_{bc} – функции на многообразии P, которые мы сейчас найдем. Используем для этого первую группу структурных уравнений (5.29) почти эрмитовой структуры $(J, \tilde{g})$

$$d\tilde{\omega}^a = -\tilde{\theta}^a_b \wedge \tilde{\omega}^b + \tilde{B}^{abc}\tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}_c + \tilde{B}^{ab}{}_c\tilde{\omega}^c \wedge \tilde{\omega}_b, \tag{5.96}$$

где

$$\begin{array}{ll} \tilde{B}^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}; & \tilde{B}_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \\ \tilde{B}^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; & \tilde{B}_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^{\hat{a}}_{[b,c]}, \end{array}$$

$\{\tilde{J}^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры J в римановой связности $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{g}$.

Применим отображение антиувлечения ψ^* к равенству (5.96) и учтем, что отображение антиувлечения коммутирует с оператором внешнего дифференцирования d, обладает свойством $\psi^*(\omega \wedge \theta) = \psi^*\omega \wedge \psi^*\theta$ и для функций $\psi^* f = f \circ \psi$

$$d(\psi^*\tilde{\omega}^a) = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b) \wedge (\psi^*\tilde{\omega}^b) + (\tilde{B}^{abc} \circ \psi)(\psi^*\tilde{\omega}_b) \wedge (\psi^*\tilde{\omega}_c) + (\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)(\psi^*\tilde{\omega}^c) \wedge (\psi^*\tilde{\omega}_b).$$

С учетом леммы 5.6 получим

$$d((e^f \circ \pi)\omega^a) = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b) \wedge (e^f \circ \pi)\omega^b + (\tilde{B}^{abc} \circ \psi)(e^f \circ \pi)\omega_b \wedge (e^f \circ \pi)\omega_c + (\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)(e^f \circ \pi)\omega^c \wedge (e^f \circ \pi)\omega_b$$

Продифференцируем левую часть этого равенства

$$(e^f \circ \pi)d(f \circ \pi) \wedge \omega^a + (e^f \circ \pi)d\omega^a = -(e^f \circ \pi)(\psi^*\tilde{\theta}^a_b) \wedge \omega^b + (e^f \circ \pi)^2(\tilde{B}^{abc} \circ \psi)\omega_b \wedge \omega_c + (e^f \circ \pi)^2(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)\omega^c \wedge \omega_b.$$

Сокращая на $(e^f \circ \pi)$ и используя первую группу структурных уравнений

$$d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b$$

почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$, получим

$$\begin{aligned} d(f \circ \pi) \wedge \delta^a_b\omega^b - \theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b = \\ = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b) \wedge \omega^b + (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi)\omega_b \wedge \omega_c + (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)\omega^c \wedge \omega_b. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Заметим, что $d(f \circ \pi) = d(\pi^* f) = \pi^* df$, где df – это 1-форма на многообразии M. Обозначим ее β. Форма $\pi^*\beta$ – это 1-форма на многообразии P. Покажем, что она является горизонтальной формой, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле. Действительно, для любого вертикального векторного поля X имеем

$$\pi^*\beta(X) = \beta(\pi_* X) \circ \pi = \beta(0) \circ \pi = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что по определению вертикальные векторные поля – это поля π-связанные с нулевым векторным полем на базе M.

Тогда форма $\pi^*\beta$ будет раскладываться по базису ассоциированного кораспределения вертикального распределения, то есть по формам ω^i из базиса (θ^i_j, ω^k). Напомним, что эти формы являются тензорными компонентами формы смещения ω. Итак,

$$\pi^*\beta = \beta_i\omega^i. \tag{5.98}$$

Покажем, что функции β_i, определенные на пространстве расслоения A-реперов, являются компонентами формы β в A-реперах, то есть нужно показать, что $\beta_i(p) = \beta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i)$.

Возьмем горизонтальный лифт $i_{\mathscr{H}}$ произвольного векторного поля X на многообразии M, подействуем на него обеими частями равенства (5.98) и возьмем значение полученной функции в произвольной точке $p = (m, \varepsilon_i) \in P$, то есть в произвольном A-репере.

$$(\pi^*\beta)(i_{\mathscr{H}}X)(p) = (\beta_i\omega^i)(i_{\mathscr{H}}X)(p).$$

Воспользуемся определением тензорного поля как полилинейного отображения (см. курс Анализ на многообразиях) и определением умножения тензорного поля на функцию

$$(\pi^*\beta)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p = \beta_i(p)\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X)_p.$$

Учтем замечание 5.9 и формулу, связывающую отображения увлечения форм и ковекторов $(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}$.

$$\pi^*_{\pi(p)}\beta_{\pi(p)}(i_{\mathscr{H}}X)_p = \beta_i(p)u^i(X_m).$$

Далее, используем определение отображения ковекторов (см. курс Многомерная дифференциальная геометрия (I))

$$\beta_m((\pi_*)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p) = \beta_i(p)u^i(X_m).$$

По определению горизонтального лифта имеем $(\pi_*)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p = X_m$. Тогда

$$\beta_m(X_m) = \beta_i(p)u^i(X_m).$$

Перейдем в этом равенстве к комплексификациям тензоров и подставим в качестве X_m вектор ε_j из A-репера p. Тогда

$$\beta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j) = \beta_i(p)u^i(\varepsilon_j) = \beta_i(p)\delta^i_j = \beta_j(p),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к тождеству (5.97). В первое слагаемое левой части подставим $d(f\circ\pi) = \pi^*\beta = \beta_i\omega^i$. Сразу распишем сумму $\beta_i\omega^i = \beta_c\omega^c + \beta_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = \beta_c\omega^c + \beta^c\omega_c$, где как обычно мы ввели обозначение $\beta_{\hat{c}} = \beta^c$ и $\omega^{\hat{c}} = \omega_c$ и подставим (5.95)

$$(\beta_c\omega^c + \beta^c\omega_c)\wedge\delta^a_b\omega^b - \delta^a_c\delta^b_d\theta^c_b\wedge\omega^d + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b = -(A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c)\wedge\omega^b +$$
$$+ (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\psi)\omega_b\wedge\omega_c + (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)\omega^c\wedge\omega_b$$

Обратите внимание, что слагаемое $(\beta_c\omega^c + \beta^c\omega_c)\wedge\omega^a$ мы записали (очевидно в равносильном) виде $(\beta_c\omega^c + \beta^c\omega_c)\wedge\delta^a_b\omega^b$. Это нужно для того, чтобы оно приняло вид: коэффициент, который суммируется с базисными 2-формами, который нужен для применения линейной независимости. Аналогичным образом мы поступили со слагаемым $\theta^a_b\wedge\omega^b$.

Сгруппируем подобные слагаемые, упорядочим базисные 1-формы и применим линейную независимость полученных базисных 2-форм (подробные вычисления проведите самостоятельно). Тогда

$$\begin{array}{ll} \theta^c_b\wedge\omega^d: & -\delta^b_d\delta^a_c = -A^{ab}_{dc};\\ \omega^c\wedge\omega^b: & \beta_{[c}\delta^a_{b]} = -B^a_{[bc]};\\ \omega_c\wedge\omega^b: & \beta^c\delta^a_b - B^{ac}{}_b = -B^{ac}_b - (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b\circ\psi);\\ \omega_b\wedge\omega_c: & B^{abc} = (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\psi). \end{array} \tag{5.99}$$

Первое из полученных соотношений подставим в (5.95)

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = \theta^a_b + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c. \tag{5.100}$$

Аналогичным образом рассмотрим второе тождество из первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$

$$d\tilde{\omega}_a = \tilde{\theta}^b_a\wedge\tilde{\omega}_b + \tilde{B}_{abc}\tilde{\omega}^b\wedge\tilde{\omega}^c + \tilde{B}_{ab}{}^c\tilde{\omega}_c\wedge\tilde{\omega}^b.$$

Применим отображение антиувлечения ψ^*, лемму 5.6, первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$, подставим равенства (5.100) и (5.98).

$$(\beta_b\omega^b + \beta^b\omega_b)\wedge\delta^c_a\omega_c + \theta^b_a\wedge\omega_b + B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b = (\theta^b_a + B^{bc}_a\omega_c + B^b_{ac}\omega^c)\wedge\omega_b +$$
$$+ (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}\circ\psi)\omega^b\wedge\omega^c + (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\psi)\omega_c\wedge\omega^b. \tag{5.101}$$

Опять готовим последнее равенство к применению линейной независимости базисных 2-форм и получаем

$$\begin{array}{ll} \omega^b\wedge\omega_c: & \beta_b\delta^c_a - B_{ab}{}^c = B^c_{ab} - (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\psi);\\ \omega_b\wedge\omega_c: & \beta^{[b}\delta^{c]}_a = -B^{[bc]}_a;\\ \omega^b\wedge\omega^c: & B_{abc} = (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}\circ\psi). \end{array} \tag{5.102}$$

Рассмотрим тождества (5.99) и (5.102). Найдем из них коэффициенты B^{ac}_b и B^a_{bc} для форм (5.100). Проальтернируем третье соотношение из (5.99) по индексам a и c с учетом кососимметричности компонент виртуальных тензоров многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ по верхним индексам:

$$\beta^{[c}\delta^{a]}_b - B^{ac}{}_b = -B^{[ac]}_b - (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b\circ\psi)$$

и подставим в это выражение второе соотношение из (5.102)

$$(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b\circ\psi) = B^{ac}{}_b + \beta^a\delta^c_b - \beta^c\delta^a_b.$$

Подставим это соотношение в третье соотношение из (5.99)

$$B_b^{ac} = -\beta^a \delta_b^c.$$

Аналогично (проведите подробные вычисления самостоятельно) находим

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta_b^c - \beta_b \delta_a^c;$$
$$B_{ab}^c = \beta_a \delta_b^c.$$

Таким образом, для почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ мы получаем следующие результаты

$$\psi^* \tilde{\theta}_b^a = \theta_b^a + \beta_b \delta_c^a \omega^c - \beta^a \delta_b^c \omega_c = \theta_b^a + \beta_b \omega^a - \beta^a \omega_b; \tag{5.103}$$
$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi) = B^{ac}{}_b + \beta^a \delta_b^c - \beta^c \delta_b^a;$$
$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta_b^c - \beta_b \delta_a^c;$$
$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; (e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc};$$

Пример 5.5. Напомним, что для произвольного многообразия Вайсмана-Грея определены форма Ли по формуле (5.57) и вектор Ли по формуле (5.58). Мы получили формулу, связывающую компоненты вектора Ли на пространстве расслоения A-реперов и компоненты виртуального тензора (5.59). Запишем ее еще раз.

$$\xi_b = \tfrac{-2}{n-1} B_{cb}{}^c \quad \xi^b = \tfrac{-2}{n-1} B^{cb}{}_c.$$

Вторая формула получается из первой комплексным сопряжением.

Используя формулы (5.103), вычислим как связаны между собой компоненты векторов Ли ξ и $\tilde{\xi}$ почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$. Имеем

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}_b \circ \psi) = (e^f \circ \pi)(\frac{-2}{n-1} \tilde{B}_{cb}{}^c \circ \psi) = \frac{-2}{n-1}(e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{cb}{}^c \circ \psi) = \frac{-2}{n-1}(B_{cb}{}^c + \beta_c \delta_b^c - \beta_b \delta_c^c) =$$
$$= \frac{-2}{n-1}(B_{cb}{}^c + \beta_b - n\beta_b) = \xi_b + 2\beta_b.$$

Таким образом,

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}_b \circ \psi) = \xi_b + 2\beta_b.$$

Чтобы получить вторую группу компонент вектора Ли $\tilde{\xi}$, комплексно сопряжем полученное равенство (для тренировки самостоятельно проведите для этих компонент рассуждения аналогичные предыдущим)

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}^b \circ \psi) = \xi^b + 2\beta^b.$$

Замечание 5.10. Для дальнейших расчетов нам нужно будет разобраться с формой β. Так как β является тензорным полем типа (1,0) по основной теореме тензорного анализа ее компоненты β_i на пространстве расслоения всех реперов удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\beta_i - \beta_j \theta_i^j = \beta_{i,j} \omega^j,$$

где $\{\beta_{i,j}\}$ – система функций на пространстве расслоения всех реперов, являющаяся компонентами ковариантного дифференциала формы β в римановой связности ∇ метрики g.

Аналогично примеру 5.2 перекидываем это равенство на пространство расслоения A-реперов и расписываем возможные случаи для индекса i.

1. Пусть $i = a$. Тогда

   $$d\beta_a - \beta_b \theta_a^b - \beta_{\hat{b}} \theta_a^{\hat{b}} = \beta_{a,b} \omega^b + \beta_{a,\hat{b}} \omega^{\hat{b}}.$$

   Воспользуемся задачей 5.2.

   $$d\beta_a - \beta_b \theta_a^b - \beta^b(-B_{bc}{}^d \omega_d + C_{bcd} \omega^d) = \beta_{a,b} \omega^b + \beta_{a,}{}^b \omega_b. \tag{5.104}$$

   Здесь мы ввели обозначения $\beta^b = \beta_{\hat{b}}$, $\beta_{a,}{}^b = \beta_{a,\hat{b}}$, и как всегда $\omega^{\hat{b}} = \omega_b$. Заметим, что 1-форма $d\beta_a - \beta_b \theta_a^b$ раскладывается по 1-формам ω^b, ω_b (см. последнее равенство). Введем обозначение

   $$d\beta_a - \beta_b \theta_a^b = \beta_{ab} \omega^b + \beta_a{}^b \omega_b$$

   и подставим его в (5.104).

   $$\beta_{ab} \omega^b + \beta_a{}^b \omega_b + \beta^b B_{ba}{}^d \omega_d - \beta^b C_{bad} \omega^d = \beta_{a,b} \omega^b + \beta_{a,}{}^b \omega_b.$$

   В силу линейной независимости базисных форм имеем

   $$\beta_{a,b} = \beta_{ab} - \beta^d C_{dab}; \quad \beta_{a,}{}^b = \beta_a{}^b + \beta^d B_{da}{}^b. \tag{5.105}$$

2. Для $i = \hat{a}$ рассуждения аналогичны (проведите самостоятельно). В результате получим

$$d\beta^a + \beta^b\theta^a_b = \beta^{ab}\omega_b + \beta^a{}_b\omega^b$$

и

$$\beta^{a,b} = \beta^{ab} - \beta_d C^{dab}; \quad \beta^a{}_{,b} = \beta^a{}_b + \beta_d B^{da}{}_b, \tag{5.106}$$

где $\beta^a{}_{,b} = \beta_{\hat{a},b}$, $\beta^{a,b} = \beta_{\hat{a},\hat{b}}$ – обозначения.

Далее, так как форма β точная, то есть $\beta = df$, получим $d\beta = 0$. Из курса Многомерная дифференциальная геометрия (I) мы знаем, что для 1-формы ω имеет место равенство $d\omega = -Alt\nabla\omega$. Записывая это равенство для формы β в компонентах, мы получим $0 = \beta_{[i,j]}$, то есть

$$\beta_{a,b} = \beta_{b,a}; \quad \beta_{a,}{}^b = \beta^b_{,a}.$$

С учетом формул (5.105) и (5.106) из этого получим

$$\beta_{[ab]} = \beta^d C_{dab}; \quad \beta_a{}^b - \beta^b{}_a = \beta_d B^{db}{}_a - \beta^d B_{da}{}^b.$$

В частности, для многообразий Вайсмана-Грея $C_{abc} = B_{abc}$. Тогда последняя пара формул примет вид

$$\beta_{[ab]} = \beta^d B_{dab}; \quad \beta_a{}^b - \beta^b{}_a = \beta_d B^{db}{}_a - \beta^d B_{da}{}^b.$$

Задача 5.23. Докажите, что для произвольного почти эрмитова многообразия имеют место соотношения

$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{\xi}_a{}^b \circ \psi) = \xi_a{}^b + 2\beta_a{}^b - \beta^b\xi_a + \xi_c\beta^c\delta^b_a - 2\beta^b\beta_a + 2\beta^c\beta_c\delta^b_a;$$
$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{\xi}_{ab} \circ \psi) = \xi_{ab} + 2\beta_{ab} - \xi_a\beta_b - \xi_b\beta_a - 4\beta_a\beta_b;$$

$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{\xi}^a{}_b \circ \psi) = \xi^a{}_b + 2\beta^a{}_b - \beta_b\xi^a + \xi^c\beta_c\delta^a_b - 2\beta_b\beta^a + 2\beta_c\beta^c\delta^a_b;$$
$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{\xi}^{ab} \circ \psi) = \xi^{ab} + 2\beta^{ab} - \xi^a\beta^b - \xi^b\beta^a - 4\beta^a\beta^b;$$

$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{B}_{abcd} \circ \psi) = B_{abcd} - B_{dbc}\beta_a - B_{adc}\beta_b - B_{abd}\beta_c - B_{abc}\beta_d;$$
$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{B}_{abc}{}^d \circ \psi) = B_{abc}{}^d + B_{fbc}\beta^f\delta^d_a + B_{afc}\beta^f\delta^d_b + B_{abf}\beta^f\delta^d_c - B_{abc}\beta^d;$$

$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{B}^{abcd} \circ \psi) = B^{abcd} - B^{dbc}\beta^a - B^{adc}\beta^b - B^{abd}\beta^c - B^{abc}\beta^d;$$
$$(e^{2f} \circ \pi)(\tilde{B}^{abc}{}_d \circ \psi) = B^{abc}{}_d + B^{fbc}\beta_f\delta^a_d + B^{afc}\beta_f\delta^b_d + B^{abf}\beta_f\delta^c_d - B^{abc}\beta_d;$$

Решение. Докажем первые два равенства. Остальные докажите самостоятельно аналогичным образом.

Рассмотрим дифференциальные уравнения (5.75), которым удовлетворяют компоненты вектора Ли $\tilde{\xi}$ почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$

$$d\tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_b\tilde{\theta}^b_a = \tilde{\xi}_{ab}\tilde{\omega}^b + \tilde{\xi}_a{}^b\tilde{\omega}_b.$$

Применим к обеим частям этого равенства отображение ψ^*

$$d(\tilde{\xi}_a \circ \psi) - (\tilde{\xi}_b \circ \psi)\psi^*\tilde{\theta}^b_a = (\tilde{\xi}_{ab} \circ \psi)\psi^*\tilde{\omega}^b + (\tilde{\xi}_a{}^b \circ \psi)\psi^*\tilde{\omega}_b \tag{5.107}$$

Используем формулы, полученные в примере 5.5. Выразим из них $\tilde{\xi}_a \circ \psi$ и подставим в (5.107)

$$d((e^{-f} \circ \pi)(\xi_a + 2\beta_a)) - (e^{-f} \circ \pi)(\xi_b + 2\beta_b)(\theta^b_a + \beta_a\omega^b - \beta^b\omega_a) = (\tilde{\xi}_{ab} \circ \psi)(e^f \circ \pi)\omega^b + (\tilde{\xi}_a{}^b \circ \psi)(e^f \circ \pi)\omega_b \tag{5.108}$$

Преобразуем первое слагаемое

$$d((e^{-f} \circ \pi)(\xi_a + 2\beta_a)) = (e^{-f} \circ \pi)(-d(f \circ \pi))(\xi_a + 2\beta_a)) = (e^{-f} \circ \pi)(-\beta)(\xi_a + 2\beta_a)) =$$
$$= (e^{-f} \circ \pi)(-\beta_i\omega^i)(\xi_a + 2\beta_a)) = (e^{-f} \circ \pi)(-\beta_b\omega^b - \beta^b\omega_b)(\xi_a + 2\beta_a))$$

Вернемся к (5.108), умножим обе части равенства на $(e^f \circ \pi)$, подставим преобразованное слагаемое, воспользуемся (5.75) и замечанием 5.10.

$$(d\xi_a - \xi_b\theta^b_a) + 2(d\beta_a - \beta_b\theta^b_a) - \beta_b(\xi_a + 2\beta_a)\omega^b + \beta^b(\xi_a + 2\beta_a)\omega_b - \beta_a(\xi_b + 2\beta_b)\omega^b + \beta^f(\xi_f + 2\beta_f)\delta^b_a\omega_b =$$
$$= (\tilde{\xi}_{ab} \circ \psi)(e^{2f} \circ \pi)\omega^b + (\tilde{\xi}_a{}^b \circ \psi)(e^{2f} \circ \pi)\omega_b$$

$$\xi_a{}^b\omega_b + \xi_{ab}\omega^b + 2\beta_a{}^b\omega_b + 2\beta_{ab}\omega^b - \beta_b(\xi_a + 2\beta_a)\omega^b + \beta^b(\xi_a + 2\beta_a)\omega_b - \beta_a(\xi_b + 2\beta_b)\omega^b + \beta^f(\xi_f + 2\beta_f)\delta^b_a\omega_b =$$
$$= (\tilde{\xi}_{ab} \circ \psi)(e^{2f} \circ \pi)\omega^b + (\tilde{\xi}_a{}^b \circ \psi)(e^{2f} \circ \pi)\omega_b$$

Пользуясь линейной независимостью базисных 1-форм, получаем требуемые равенства. □

§ 5.16. Отображения присоединенных G-структур для многообразий Вайсмана-Грея.

16.1. Конформная инвариантность класса многообразий Вайсмана-Грея.

А. Грей и Л. Хервелла доказали, что класс многообразий Вайсмана-Грея является конформно инвариантным, то есть если почти эрмитово многообразие $\mathscr{M} = (M, J, g)$ принадлежит классу многообразий Вайсмана-Грея, то и почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}} = (M, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$ принадлежит этому же классу.

Мы докажем этот факт другим методом. Пусть почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ является многообразием Вайсмана-Грея. Согласно результатам § 5.10. это означает, что его структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, а виртуальный тензор примитивен. В виде равенств этот критерий можно записать следующим образом:

$$B^{[abc]} = B^{abc}; \quad B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c.$$

Выясним, удовлетворяют ли этому критерию структурный и виртуальный тензоры почти эрмитова многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$. Согласно формулам (5.103) получим

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{[abc]} \circ \psi) = B^{[abc]} = B^{abc} = (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi).$$

Откуда получаем, что

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{[abc]} \circ \psi) = (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi).$$

Так как функция $(e^f \circ \pi)$ ни в одной точке $p \in P$ не обращается в нуль, на нее можно сократить. Так как ψ является биекцией, из равенства

$$\tilde{B}^{[abc]} \circ \psi(p) = \tilde{B}^{abc} \circ \psi(p),\ p \in P$$

будет следовать равенство

$$\tilde{B}^{[abc]}(\tilde{p}) = \tilde{B}^{abc}(\tilde{p})$$

для любой точки $\tilde{p} \in \tilde{P}$, то есть для любого A-репера присоединенной G-структуры многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$, то есть в более привычной записи

$$\tilde{B}^{[abc]} = \tilde{B}^{abc}.$$

Таким образом, первое условие из критерия многообразия Вайсмана-Грея выполняется. Проверим выполнение второго условия из критерия. Аналогичным образом получаем

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = \frac{1}{2}(\xi^a\delta^b_c - \xi^b\delta^a_c) + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c =$$
$$= \frac{1}{2}((e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}^a \circ \psi)\delta^b_c - 2\beta^a\delta^b_c - (e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}^b \circ \psi)\delta^a_c + 2\beta^b\delta^a_c) + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c =$$
$$= (e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}^{[a}\delta^{b]}_c \circ \psi).$$

Тогда аналогично предыдущему тождеству из критерия получим $\tilde{B}^{ab}{}_c = \tilde{\xi}^{[a}\delta^{b]}_c$, то есть выполняется второе условие из критерия многообразия Вайсмана-Грея.

Итак, почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}}$ является многообразием Вайсмана-Грея.

16.2. Локально конформно приближенно келеровы многообразия.

Рассмотрим многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$. Обозначим $B = B^{abc}B_{abc}$ полную свертку компонент структурного тензора этого многообразия. Очевидно, что если два A-репера p и q принадлежат одному слою $\pi^{-1}(m)$, то $B(p) = B(q)$. Следовательно, B можно рассматривать как функцию на M, которая каждой точке m ставит в соответствие значение функции B в репере $p = (m, \varepsilon_i)$ с вершиной в данной точке m. Функция B принимает только неотрицательные значения, так как в силу комплексной сопряженности B_{abc} и B^{abc} получаем

$$B = B^{abc}B_{abc} = B_{abc}\bar{B}_{abc} = |B_{abc}|^2.$$

Функция B равна нулю тогда и только тогда когда все функции B_{abc} обращаются в нуль. Пусть $m \in M$ – произвольная точка, в которой функция B отлична от нуля. Так как эта функция гладкая, значит, в частности, она является непрерывной, следовательно, существует окрестность точки m, в которой эта функция отлична от нуля. Сужение почти комплексной структуры J и метрического тензора g на эту окрестность задает на ней структуру почти эрмитова многообразия. До конца этого пункта будем работать с такими почти эрмитовыми многообразиями.

Заметим, что для четырехмерных многообразий Вайсмана-Грея функции B_{abc} и B^{abc} тождественно равны нулю, так как различных значений для индексов всего два: 1 и 2. Тогда у функций B_{abc} и B^{abc}

всегда найдутся два одинаковых индекса. В силу кососимметричности этих функций по любой паре индексов они всегда равны нулю. Например, $B_{112} = -B_{112}$, следовательно, $B_{112} = 0$. Таким образом, для четырехмерных многообразий Вайсмана-Грея функция B всегда тождественно равна нулю.

Пусть дано многообразие Вайсмана-Грея размерности выше четырех. Фиксируем точку m, в которой функция B отлична от нуля, возьмем некоторую окрестность этой точки, в которой функция B по-прежнему отлична от нуля, и рассмотрим функцию $f = ln\sqrt{B}$. Очевидно, что она положительна в любой точке окрестности точки m. Рассмотрим конформное преобразование почти эрмитовой структуры, которое задается функцией f. Будем называть такие конформные преобразования *каноническими.* Для канонического преобразования с учетом формул (5.103) имеем

$$\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = (e^{-2f} \circ \pi)B = e^{-2ln\sqrt{B}} \circ \pi)B = (B^{-1})B = 1.$$

Здесь идет отождествление $B\circ\pi$ и B, то есть мы пользуемся тем, что функция B может быть рассмотрена и как функция на P и как функция на M.

Итак, мы получаем, что в окрестности каждой точки m многообразия M, в которой функция B отлична от нуля, многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$ может каноническим конформным преобразованием быть преобразовано в многообразие Вайсмана-Грея для которого функция $\tilde{B}$ будет константой, равной 1.

Получим следствия из этого результата. Продифференцируем тождество $\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 1$ внешним образом.

$$d\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}d\tilde{B}_{abc} = 0 \tag{5.109}$$

и воспользуемся дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_{abc} - \tilde{B}_{dbc}\tilde{\theta}^d_a - \tilde{B}_{adc}\tilde{\theta}^d_b - \tilde{B}_{abd}\tilde{\theta}^d_c &= \tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d;\\ d\tilde{B}^{abc} + \tilde{B}^{dbc}\tilde{\theta}^a_d + \tilde{B}^{adc}\tilde{\theta}^b_d + \tilde{B}^{abd}\tilde{\theta}^c_d &= \tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d; \end{aligned} \tag{5.110}$$

Выразим $d\tilde{B}_{abc}$ и $d\tilde{B}^{abc}$ и подставим в (5.109)

$$\begin{aligned} &(\tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d - \tilde{B}^{dbc}\tilde{\theta}^a_d - \tilde{B}^{adc}\tilde{\theta}^b_d - \tilde{B}^{abd}\tilde{\theta}^c_d)\tilde{B}_{abc}+\\ &\qquad + \tilde{B}^{abc}(\tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d - \tilde{B}_{dbc}\tilde{\theta}^d_a - \tilde{B}_{adc}\tilde{\theta}^d_b - \tilde{B}_{abd}\tilde{\theta}^d_c) = 0. \end{aligned}$$

Приведем подобные, переобозначая, где это необходимо индексы суммирования

$$(\tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d)\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}(\tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d) = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм получим два комплексно сопряженных равенства, из которых нам нужно будет одно.

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc}{}^d = 0. \tag{5.111}$$

Напомним, что для любого многообразия Вайсмана-Грея верны тождества (см. формулы (5.11.) и теорему 5.5)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{abc}{}^d &= -\frac{1}{2}\tilde{\xi}^d\tilde{B}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^h\tilde{B}_{h[ab}\delta^d_{c]} + \tilde{\xi}_{[ab}\delta^d_{c]};\\ \tilde{B}^{a[bcd]} &+ \tilde{B}^{a[b}{}_h\tilde{B}^{cd]h} = 0. \end{aligned} \tag{5.112}$$

Подставим (5.112) в (5.111)

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^d\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{h[ab}\delta^d_{c]} + \tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ab}\delta^d_{c]} = 0.$$

Учтем, что $\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 1$ и раскроем альтернации

$$\begin{aligned} &\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^d + \frac{1}{6}(\tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hab}\delta^d_c + \tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hbc}\delta^d_a + \tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hca}\delta^d_b)+\\ &\qquad + \frac{1}{3}(\tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ab]}\delta^d_c + \tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[bc]}\delta^d_a + \tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ca]}\delta^d_b) = 0. \end{aligned}$$

Избавимся от дельт.

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^d + \frac{1}{6}(\tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abd}\tilde{B}_{hab} + \tilde{\xi}^h\tilde{B}^{dbc}\tilde{B}_{hbc} + \tilde{\xi}^h\tilde{B}^{adc}\tilde{B}_{hca}) + \frac{1}{3}(\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]} + \tilde{B}^{dbc}\tilde{\xi}_{[bc]} + \tilde{B}^{adc}\tilde{\xi}_{[ca]}) = 0.$$

Приведем подобные, переобозначая индексы суммирования.

$$\tilde B^{abcd}\tilde B_{abc} - \frac{1}{2}\tilde\xi^d + \frac{1}{2}\tilde\xi^h\tilde B^{abd}\tilde B_{hab} + \tilde B^{abd}\tilde\xi_{[ab]}) = 0.$$

Выразим из этого равенства $\tilde\xi^d$.

$$\tilde\xi^d = 2\tilde B^{abcd}\tilde B_{abc} + \tilde\xi^h\tilde B^{abd}\tilde B_{hab} + 2\tilde B^{abd}\tilde\xi_{[ab]}). \tag{5.113}$$

Свернем второе соотношение из (5.112) с B_{abc}

$$\frac{1}{3}\left(\tilde B^{abcd}\tilde B_{abc} + \tilde B^{acdb}\tilde B_{abc} + \tilde B^{adbc}\tilde B_{abc}\right) +$$
$$+\frac{1}{6}\left((\tilde\xi^a\delta^b_f - \tilde\xi^b\delta^a_f)\tilde B^{cdf}\tilde B_{abc} + (\tilde\xi^a\delta^c_f - \tilde\xi^c\delta^a_f)\tilde B^{dbf}\tilde B_{abc} + (\tilde\xi^a\delta^d_f - \tilde\xi^d\delta^a_f)\tilde B^{bcf}B_{abc})\right) = 0$$

Заменяя, где нужно, индексы суммирования и суммируя дельты, получим

$$\frac{1}{3}(\tilde B^{abcd}\tilde B_{abc} + 2\tilde B^{adbc}\tilde B_{abc}) +$$
$$+\frac{1}{6}(\tilde\xi^a\tilde B^{cdb}\tilde B_{abc} - \tilde\xi^d\tilde B^{cda}\tilde B_{abc} + \tilde\xi^a\tilde B^{dbc}\tilde B_{abc} - \tilde\xi^c\tilde B^{dba}\tilde B_{abc} + \tilde\xi^a\tilde B^{bcd}\tilde B_{abc} - \tilde\xi^d\tilde B^{bca}\tilde B_{abc}) = 0.$$

Учитывая, что $\tilde B^{abc}\tilde B_{abc} = 1$, получим

$$\frac{1}{3}\tilde B^{abcd}\tilde B_{abc} + \frac{2}{3}\tilde B^{adbc}\tilde B_{abc} + \frac{5}{6}\tilde\xi^a\tilde B^{bcd}\tilde B_{abc} - \frac{1}{6}\tilde\xi^d = 0$$

Выразим из этого равенства $B^{abcd}B_{abc}$ и подставим в (5.113)

$$-4\tilde B^{adbc}\tilde B_{abc} - 4\tilde\xi^a\tilde B^{bcd}\tilde B_{abc} + 2\tilde B^{abd}\tilde\xi_{[ab]} = 0. \tag{5.114}$$

Вернемся опять ко второму соотношению из (5.112) и свернем его с B_{bcd}.

$$\frac{1}{3}(\tilde B^{abcd}\tilde B_{bcd} + \tilde B^{acdb}\tilde B_{bcd} + \tilde B^{adbc}\tilde B_{bcd}) +$$
$$+\frac{1}{6}((\tilde\xi^a\delta^b_f - \tilde\xi^b\delta^a_f)\tilde B^{cdf}\tilde B_{bcd} + (\tilde\xi^a\delta^c_f - \tilde\xi^c\delta^a_f)\tilde B^{dbf}\tilde B_{bcd} + (\tilde\xi^a\delta^d_f - \tilde\xi^d\delta^a_f)\tilde B^{bcf}\tilde B_{bcd}) = 0.$$

После преобразований учетом $\tilde B^{bcd}\tilde B_{bcd} = 1$ получим

$$\tilde B^{abcd}\tilde B_{bcd} + \frac{1}{2}\tilde\xi^a - \frac{1}{2}\tilde\xi^b\tilde B^{acd}\tilde B_{bcd} = 0.$$

Выразим $\tilde B^{abcd}\tilde B_{bcd}$, заменим свободный индекс a на индекс d и подставим в (5.114).

$$-2\tilde\xi^d + 2\tilde\xi^a\tilde B_{dbc}\tilde B_{abc} - 4\tilde\xi^a\tilde B^{bcd}\tilde B_{abc} + 2\tilde B^{abd}\tilde\xi_{[ab]} = 0$$

или, окончательно,

$$\tilde\xi^d = (\tilde\xi_{[ab]} - \tilde\xi^d\tilde B_{fab})\tilde B^{abd}. \tag{5.115}$$

Итак, мы получаем, что в некоторой окрестности точки $m \in M$ многообразия Вайсмана-Грея, в которой функция B отлична от нуля, оно допускает конформное преобразование (а именно, каноническое конформное преобразование), которое переводит его в многообразие Вайсмана-Грея, для которого выполняется соотношение (5.115).

Задача 5.24**.** Используя соотношение (5.115) покажите, что для каждой точки $m \in M$ многообразия Вайсмана-Грея, в которой функция B отлична от нуля, существует окрестность, в которой выполняется равенство

$$B\xi^d + 2B^{abcd}B_{abc} + 3\xi^c B_{cab}B^{abd} = 0. \tag{5.116}$$

Заметим, что в правой части формулы (5.115) в скобках стоит левая часть равенства из критерия многообразия Вайсмана-Грея класса C_1. Используя эту формулу, мы сейчас докажем, что любое шестимерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_1, то есть оно локально конформно преобразуемо к приближенно келерову многообразию.

Пусть $\mathscr{M}$ – шестимерное многообразие Вайсмана-Грея. Фиксируем точку $m \in M$, такую что в этой точке функция B отлична от нуля. Тогда существует некоторая окрестность точки m, в которой функция B по-прежнему отлична от нуля. Как мы уже знаем, комплексификация касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes T_m(M)$ распадается в прямую сумму векторных подпространств $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ и $(D_J^{-\sqrt{-1}})_m$. При этом отображение

$$\sigma : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to (D_J^{\sqrt{-1}})_m,$$

задаваемое формулой $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})$, является проектором на подпространство $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$. Его сужение на касательное пространство $T_m(M)$, рассматриваемое как комплексное векторное пространство, является изоморфизмом $\mathbb{C}-$ линейных пространств. В частности, комплексная размерность пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ равна 3. Если $(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}, \varepsilon_{\hat{3}})$ – произвольный $A-$ репер, а $(m, u^1, u^2, u^3, u^{\hat{1}}, u^{\hat{2}}, u^{\hat{3}})$ – дуальный репер, то векторы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ образуют базис пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$, а ковекторы (u^1, u^2, u^3) – дуальный базис. Тогда пространство 3-ковекторов на $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ одномерно и любой 3-ковектор пропорционален 3-ковектору $u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$. В частности, для структурного тензора C получаем $(\sigma C)_m = \lambda u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$. Следовательно,

$$B_{abc} = \lambda \varepsilon_{abc}; \quad B^{abc} = \bar{\lambda} \varepsilon^{abc} \tag{5.117}$$

где ε_{abc}, ε^{abc} – символ Кронекера 3-го порядка. Напомним, что символ Кронеккера третьего порядка равен нулю, если среди чисел a, b, c есть хотя бы два одинаковых, равен 1, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ является четной и равен -1, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ является нечетной.

Теорема 5.11. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_0.*

Доказательство. В случае 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея критерий класса C_0 (5.86) примет вид

$$B^{123d} = -\xi^d B^{123} = -\xi^d \bar{\lambda}. \tag{5.118}$$

и формулы комплексно сопряженные. Проверим, что он выполняется для любого 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея.

Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$ структуры многообразия Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$, такая что $B(p) = 0$. Так как $B = 6B^{123}B_{123}$, получим $B^{123}(p) = B_{123}(p) = 0$ и в силу (??) $B^{123d} = 0$. Следовательно, критерий класса C_0 выполняется.

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Тогда согласно задаче 5.24 существует окрестность U точки $m = \pi(p)$, для которой выполняется (5.116). Подставим в это равенство (5.117)

$$\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{abc} + 2B^{abcd}\lambda\varepsilon_{abc} + 3\xi^c\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{cab}\varepsilon^{abd} = 0. \tag{5.119}$$

Вычислим отдельно каждое слагаемое.

В дельте Кронеккера 3-го порядка мы получим нуль, если в ней есть хотя бы два одинаковых индекса. Так как индексы a, b, c могут принимать лишь три различные значения $1, 2, 3$, ненулевыми будут дельты Кронеккера ε_{abc} со всевозможными перестановками чисел $1, 2, 3$. Так как дельта Кронеккера является кососимметрическим объектом, то есть меняет знак при перестановке любых двух индексов, получим

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{312}\varepsilon^{312} + \varepsilon_{213}\varepsilon^{213} + \varepsilon^{321}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} = 6\varepsilon_{123}\varepsilon^{123} = 6.$$

Далее, аналогичным образом получаем

$$2B^{abcd}B_{abc} = 2B^{abcd}\lambda\varepsilon_{abc} = 12B^{123d}\lambda.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} 3\xi^c\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{cab}\varepsilon^{abd} = 3\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon_{1ab}\varepsilon^{abd} + \xi^2\varepsilon_{2ab}\varepsilon^{abd} + \xi^3\varepsilon_{3ab}\varepsilon^{abd}) = 3\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon_{123}\varepsilon^{23d} + \xi^1\varepsilon_{132}\varepsilon^{32d} + \xi^2\varepsilon_{213}\varepsilon^{13d} + \\ + \xi^2\varepsilon_{231}\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon_{312}\varepsilon^{12d} + \xi^3\varepsilon_{321}\varepsilon^{321}) = 6\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon^{23d} + \xi^2\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon^{12d}). \end{aligned}$$

Подставим все полученные результаты в (5.119) и сократим на λ, так как $\lambda \neq 0$.

$$6\bar{\lambda}\xi^d + 12B^{123d} + 6\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon^{23d} + \xi^2\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon^{12d}) = 0.$$

Перебирая возможные значения для d (это 1,2,3), получим (5.118). □

Теорема 5.12. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея является многообразием класса C_1, то есть локально конформно приближенно келеровым многообразием.*

Доказательство. Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$ структуры 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея, для которой $B = 0$. Тогда выполняется критерий класса C_1 в силу результата задачи 5.16.

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Как мы видели выше для некоторой окрестности U точки $\pi(p)$ имеем многообразие Вайсмана-Грея $(U, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, для которого $1 = \tilde{B}$. Тогда получим

$$\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 6\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123}.$$

Следовательно,

$$\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123} = \frac{1}{6} \tag{5.120}$$

Распишем соотношение (5.115) для различных значений индекса d с учетом (5.120). Пусть $d = 1$. Тогда

$$\tilde{\xi}^1 = 2\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{231} - 2\xi^1\tilde{B}_{123}\tilde{B}^{231} = 2\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{231} - \frac{1}{3}\xi^1.$$

Приводя подобные, получим

$$\tilde{\xi}^1 = \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{123}. \tag{5.121}$$

Аналогичным образом получаем два других соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 &= \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[31]}\tilde{B}^{123} && (5.122)\\ \tilde{\xi}^3 &= \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[12]}\tilde{B}^{123} \end{aligned}$$

Продифференцируем внешним образом (5.121), подставим выражения для внешних дифференциалов функций ξ^1 и B^{123} и воспользуемся линейной независимостью базисных форм (проведите подробные вычисления самостоятельно). В результате получим

$$\tilde{\xi}^{1d} = \frac{3}{2}(\tilde{\xi}_{[23]}{}^{d}\tilde{B}^{123} + \tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{123d}).$$

Подставим в это соотношение формулу из задачи 5.18 и используем теорему 5.11 (а именно, формулу (5.118)). Тогда для $d = 2$ получим

$$\tilde{\xi}^{12} - \frac{1}{4}\tilde{\xi}^{21} = -\frac{3}{2}\tilde{\xi}^1\tilde{\xi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}_3\tilde{B}^{123} \tag{5.123}$$

Дифференцируя третье соотношение (5.122) аналогичным образом, получим

$$\tilde{\xi}^{21} - \frac{1}{4}\tilde{\xi}^{12} = -\frac{3}{2}\tilde{\xi}^1\tilde{\xi}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\xi}_3\tilde{B}^{123} \tag{5.124}$$

Вычитая из (5.123) (5.124) и комплексно сопрягая, получим

$$\tilde{\xi}_{[12]} = \frac{2}{5}\tilde{\xi}^3\tilde{B}_{123}.$$

Подставляя полученное тождество в (5.122), получим $\tilde{\xi}^3 = 0$.

Аналогично получаем, что $\tilde{\xi}^1 = 0$ и $\tilde{\xi}^2 = 0$. Таким образом, многообразие $(U, J, \tilde{g})$ является приближенно келеровым (см. классификацию почти эрмитовых многообразий). Следовательно, исходное многообразие $\mathscr{M}$ является локально конформно приближенно келеровым многообразием.

Известно, что класс локально конформно приближенно келеровых многообразий в размерности выше 4 совпадает с классом многообразий Вайсмана-Грея класса C_1. Откуда мы получаем, что исходное шестимерное многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$ принадлежит классу C_1. □

6. Приложения.

§ 6.1. Голоморфная секционная кривизна почти эрмитова многообразия.

1.1. Определение постоянной голоморфной секционной кривизны.

Напомним, что для для каждой точки m риманова многообразия (M, g) определено понятие секционной кривизны в направлении двумерной площадки L^2. Это число $K_m(L^2)$, которое вычисляется по следующей формуле

$$K_m(L^2) = \frac{R_m(X,Y)Y,X)}{g_m(X,X)g_m(Y,Y) - g_m(X,Y)^2},$$

где X, Y – базис двумерной площадки (двумерного векторного пространства) L^2, R – тензор Римана-Кристоффеля.

Пусть $\mathscr{M} = (M, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитово многообразие размерности $2n > 2$. Фиксируем произвольную точку $m \in M$. Тогда среди двумерных площадок касательного пространства $T_m(M)$ выделяются площадки L^2, инвариантные относительно структурного эндоморфизма J, то есть $J_m(L^2) \subset L^2$. Они называются *голоморфными площадками.*

Лемма 6.1. *Пусть $m \in M$ – произвольная фиксированная точка. Тогда голоморфные площадки L^2 в точке m это в точности двумерные векторные пространства вида $\mathcal{L}(X, J_mX)$, где $X \in T_m(M)$ – произвольный ненулевой вектор, $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку векторов.*

Доказательство. Пусть X – произвольный ненулевой вектор голоморфной площадки L^2. В силу инвариантности L^2 вектор J_mX также принадлежит L^2. Кроме того, как мы знаем (см. курс Многомерная диф.геометрия часть1) векторы X И J_mX являются линейно независимыми, а значит, образуют базис векторного пространства L^2, следовательно, $L^2 = \mathcal{L}(X, J_mX)$.

Обратно, рассмотрим двумерное векторное пространство $\mathcal{L}(X, J_mX)$. Тогда для любого вектора $Y \in \mathcal{L}(X, J_mX)$ имеем

$$J_mY = J_m(aX + bJ_mX) = aJ_mX + bJ_m^2X = aJ_mX - bX = (-b)X + aJ_mX \in \mathcal{L}(X, J_mX),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – координаты вектора Y в базисе (X, J_mX). Таким образом, мы получаем, что $\mathcal{L}(X, J_mX)$ инвариантно относительно структурного эндоморфизма J, а значит, является голоморфной площадкой. □

Голоморфной секционной кривизной, короче *HS-кривизной*, *почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$ в точке m в направлении вектора X* называется секционная кривизна в точке m в направлении двумерной голоморфной площадки $L^2 = \mathcal{L}(X, J_mX)$. Обозначение $H_m(L^2)$ или $H_m(X)$. Другими словами, вещественное число $H_m(X)$ определяется по формуле

$$H_m(X) = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{g_m(X,X)g_m(J_mX, J_mX) - g_m(X, J_mX)^2} = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{g_m(X,X)^2} = \\ = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{||X||^4}.$$

Здесь мы воспользовались согласованностью метрики g с почти комплексной структурой J, ортогональностью векторов X и J_mX относительно метрики g и определением нормы вектора $||X||^2 = g_m(X, X)$.

Почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ называется *многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны* (короче, *точечно постоянной HS-кривизны*), если для любой точки $m \in M$ вещественное число $H_m(X)$ не зависит от выбора вектора X и обозначается $H(m)$. В этом случае мы получаем гладкую функцию $H(m)$ на многообразии M. Если к тому же функция $H(m)$ является константой, то $\mathscr{M}$ называется *многообразием глобально постоянной голоморфной секционной кривизны.* В классе почти эрмитовых многообразий точечное постоянство и глобальное постоянство голоморфной секционной кривизны не эквивалентны. Пример многообразия, которое имеет точечную, но не постоянную голоморфную секционную кривизну был построен Греем и Ванхекке. Однако эквивалентность обоих понятий имеет место в некоторых подклассах почти эрмитовых многообразий. Например, в классе келеровых многообразий точечное и глобальное постоянство секционной кривизны эквивалентно. Келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны называются *комплексными пространственными формами.* Известна полная классификация комплексных пространственных форм (Hawley, Igusa). А именно, верна теорема

Теорема 6.1. *Любая комплексная пространственная форма размерности выше двух, локально голоморфно изометрична одному из следующих многообразий*

1. *комплексному проективному пространству* $\mathbb{C}P^n$, *если* $H > 0$;
2. *комплексному евклидову пространству* $\mathbb{C}^n$, *если* $H = 0$;
3. *комплексному гиперболическому пространству* $\mathbb{C}H^n$, *если* $H < 0$.

1.2. Критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны.

Пусть почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ размерности $2n > 2$ (случай двумерного многообразия рассматривался в классической дифференциальной геометрии). Пусть оно имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну c. Это гладкая функция на многообразии M, для которой имеет место равенство
$$g(R(X,JX)JX,X) = cg(X,X)^2, \tag{6.1}$$
где $X \in \mathfrak{X}(M)$, R – тензор Римана-Кристоффеля (то есть тензор кривизны римановой связности). Это равенство является критерием точечного постоянства голоморфной секционной кривизны. Запишем этот критерий на пространстве присоединенной G-структуры.

Рассмотрим правую часть равенства (6.1):
$$g(X,X) = g(X,X) = g_{ij}X^iX^j = g_{\hat{a}b}X^{\hat{a}}X^b + g_{a\hat{b}}X^aX^{\hat{b}} = \delta^a_bX_aX^b + \delta^b_aX^aX_b = 2X^aX_a.$$

Тогда $g(X,X)^2 = 4(X^aX_a)(X^bX_b)$. Введем в рассмотрение симметричную дельту Кронеккера второго порядка
$$\tilde{\delta}^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c.$$

Тогда
$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{ab}_{cd}X_aX_bX^cX^d = \delta^a_c\delta^b_dX_aX_bX^cX^d + \delta^a_d\delta^b_cX_aX_bX^cX^d = \\ = (X_aX^a)(X_bX^b) + (X_aX^a)(X_bX^b) = 2(X_aX^a)^2 = \frac{1}{2}g(X,X)^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть равенства (6.1):
$$\begin{aligned}g(R(X,JX)JX,X) = R_{ijk\ell}X^k(JX)^\ell X^i(JX)^j = R_{abcd}X^c(JX)^dX^a(JX)^b + \\ + R_{\hat{a}bcd}X^c(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b + R_{a\hat{b}cd}X^c(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}} + R_{ab\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^b + \\ + R_{abc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^b + R_{\hat{a}\hat{b}cd}X^c(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}} + R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b + \\ + R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b + R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}} + R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}} + \\ + R_{ab\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^b + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}} + R_{\hat{a}\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}} + \\ + R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}} + R_{\hat{a}b\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое и воспользуемся матрицей компонент структурного эндоморфизма J.
$$\begin{aligned}R_{abcd}X^c(JX)^dX^a(JX)^b = R_{abcd}X^c(J^d_iX^i)X^a(J^b_jX^j) = R_{abcd}X^c(J^d_fX^f)X^a(J^b_hX^h) = \\ = R_{abcd}X^c(\sqrt{-1}\delta^d_fX^f)X^a(\sqrt{-1}\delta^b_hX^h) = -R_{abcd}X^cX^dX^aX^b\end{aligned}$$

В силу кососимметричности тензора Римана-Кристоффеля по первой паре индексов, переобозначая индексы суммирования a и b, получим
$$R_{abcd}X^cX^dX^aX^b = R_{bacd}X^cX^dX^bX^a = -R_{abcd}X^cX^dX^aX^b,$$

то есть $R_{abcd}X^cX^dX^bX^a = 0$. Аналогичным образом во всех слагаемых, где индексы первой или второй пары индексов тензора Римана-Кристоффеля однотипны (оба без крышки или оба с крышкой), мы получим нули. Таким образом, сумма из 16 слагаемых превращается в сумму из четырех слагаемых
$$\begin{aligned}g(R(X,JX)JX,X) = R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b + R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b + R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}} + \\ + R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}} = -R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}X^dX^{\hat{a}}X^b + R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^cX^{\hat{d}}X^{\hat{a}}X^b + R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}X^dX^aX^{\hat{b}} - \\ - R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^cX^{\hat{d}}X^aX^{\hat{b}} = 4R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}}\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы переобозначили индексы суммирования и воспользовались свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля.

Итак, на пространстве присоединенной G-структуры критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны (6.1) принимает вид

$$(R_{\hat{a}bc\hat{d}} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc})X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}} = 0.$$

Обозначим $R_{\hat{a}bc\hat{d}} = R^a{}_{bc}{}^d$ и введем в рассмотрение отображение

$$H : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{C} \otimes C^\infty(M),$$

заданное формулой (здесь $\mathfrak{X}(M)$ рассматривается как комплексное линейное пространство с умножением на мнимую единицу по формуле $\sqrt{-1}X = JX$)

$$H(X,Y,Z,W) = (R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc})X^bY^cZ_aW_d, \tag{6.2}$$

где $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Задача 6.1**.** Докажите, что отображение H обладает следующими свойствами

1. отображение H аддитивно по каждому аргументу;
2. отображение H $\mathbb{C}$-однородно по первым двум аргументам и $\mathbb{C}$-антиоднородно по двум последним, то есть

$$\sqrt{-1}H(X,Y,Z,W) = H(JX,Y,Z,W) = H(X,JY,Z,W) = -H(X,Y,JZ,W) = \\ = -H(X,Y,Z,JW).$$

3. отображение H симметрично по первой и второй паре аргументов, то есть

$$H(X,Y,Z,W) = H(Y,X,Z,W); \quad H(X,Y,Z,W) = H(X,Y,W,Z);$$

4. $H(X,Y,Z,W) = \overline{H(Z,W,X,Y)}$;
5. $H(X,X,X,X) = 0$.

Проведем стандартную процедуру поляризации для равенства

$$H(X,X,X,X) = 0 \tag{6.3}$$

Так как это равенство верно для любого векторного поля X, оно верно для векторного поля $X+Y$, где X и Y также произвольные векторные поля на многообразии M. Получим

$$0 = H(X+Y,X+Y,X+Y,X+Y) = H(X,X,X,X) + H(Y,Y,Y,Y) + 2H(X,X,X,Y) + \\ + 2H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) + H(X,X,Y,Y) + H(Y,Y,X,X) + \\ + 2H(Y,Y,Y,X) + 2H(X,Y,Y,Y) = 0.$$

Тогда с учетом равенства (6.3) получим

$$2H(X,X,X,Y) + 2H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) + H(X,X,Y,Y) + H(Y,Y,X,X) + \\ + 2H(Y,Y,Y,X) + 2H(X,Y,Y,Y) = 0.$$

Так как это равенство верно для любого векторного поля X, оно верно для векторного поля JX.

$$2H(JX,JX,JX,Y) + 2H(JX,Y,JX,JX) + 4H(JX,Y,JX,Y) + H(JX,JX,Y,Y) + \\ + H(Y,Y,JX,JX) + 2H(Y,Y,Y,JX) + 2H(JX,Y,Y,Y) = 0.$$

Воспользуемся результатами задачи 6.1:

$$2\sqrt{-1}H(X,X,X,Y) - 2\sqrt{-1}H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) - H(X,X,Y,Y) - H(Y,Y,X,X) - \\ - 2\sqrt{-1}H(Y,Y,Y,X) + 2\sqrt{-1}H(X,Y,Y,Y) = 0.$$

Аналогичным образом, заменяя Y на JY, получим

$$\begin{aligned}&-2\sqrt{-1}H(X,X,X,Y)+2\sqrt{-1}H(X,Y,X,X)+4H(X,Y,X,Y)-H(X,X,Y,Y)-H(Y,Y,X,X)+\\&\qquad+2\sqrt{-1}H(Y,Y,Y,X)-2\sqrt{-1}H(X,Y,Y,Y)=0.\end{aligned}$$

Сложим последние два равенства

$$4H(X,Y,X,Y)-H(X,X,Y,Y)-H(Y,Y,X,X)=0. \tag{6.4}$$

Заменяя X на $X+Z$ и используя (6.4), получим

$$\begin{aligned}&4(H(Z,Y,X,Y)+H(X,Y,Z,Y))-(H(X,Z,Y,Y)+H(Z,X,Y,Y))-\\&\qquad-(H(Y,Y,Z,X)+H(Y,Y,X,Z))=0.\end{aligned}$$

Заменим Y на JY и используем задачу 6.1:

$$\begin{aligned}&4(H(Z,Y,X,Y)+H(X,Y,Z,Y))+(H(X,Z,Y,Y)+H(Z,X,Y,Y))+\\&\qquad+(H(Y,Y,Z,X)+H(Y,Y,X,Z))=0.\end{aligned}$$

Сложим последние два равенства:

$$H(Z,Y,X,Y)+H(X,Y,Z,Y)=0.$$

Заменим Y на $Y+W$:

$$H(Z,Y,X,W)+H(Z,W,X,Y)+H(X,Y,Z,W)+H(X,W,Z,Y)=0.$$

Наконец, заменяя Z на JZ получим

$$H(Z,Y,X,W)+H(Z,W,X,Y)-H(X,Y,Z,W)-H(X,W,Z,Y)=0.$$

Складываем последние два равенства

$$H(Z,Y,X,W)+H(Z,W,X,Y)=0.$$

Заменяя W на JW и складывая, получим, что $H(Z,W,X,Y)=0$ для любых $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$. С учетом (6.2) получим

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)}-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=0. \tag{6.5}$$

Обратно, если выполняется равенство (6.5), то, очевидно, что почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну. Таким образом, получаем критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны почти эрмитова многообразия на пространстве присоединенной G-структуры.

Теорема 6.2. *Почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну тогда и только тогда, когда выполняется равенство (6.5).*

1.3. Многообразия Вайсмана-Грея точечно постоянной гомолорфной секционной кривизны.

Пусть теперь почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ является многообразием Вайсмана-Грея. Напомним, что для многообразий Вайсмана-Грея компонента $R^a{}_{bc}{}^d\equiv R_{\hat{a}bc\hat{d}}$ вычисляется по формуле

$$R_{\hat{a}bc\hat{d}}=A^{ad}_{bc}-B^{adf}B_{fbc}+B^{af}{}_cB_{fb}{}^d.$$

Тогда критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны примет вид

$$A^{(ad)}_{(bc)}-B^{(ad)f}B_{f(bc)}+B^{(a|f|}{}_{(c}B_{|f|b)}{}^{d)}-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=0. \tag{6.6}$$

Так как функции B_{abc}, B^{abc} кососимметричны по любой паре индексов, $B^{(ad)f}B_{f(bc)}=0$.

Разберемся со слагаемым $A^{(ad)}_{(bc)}$. Имеем

$$A^{ad}_{bc}=A^{(ad)}_{[bc]}+A^{[ad]}_{(bc)}+A^{(ad)}_{(bc)}+A^{[ad]}_{[bc]}.$$

Напомним, что при выводе второй группы структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея мы получили два тождества

$$A^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^{c} = 0; \quad A^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_{c} = 0.$$

Из этих формул мы можем найти $A^{(ad)}_{[bc]}$, $A^{[ad]}_{(bc)}$, $A^{[ad]}_{[bc]}$:

$$\begin{aligned} &A^{(ad)}_{[bc]} = -B^{(ad)}{}_{[bc]} - B^{(a|f|}{}_{[b}B_{c]f}{}^{d)}; \quad A^{[ad]}_{(bc)} = -B_{(bc)}{}^{[ad]} - B_{(b|f|}{}^{[a}B^{d]f}{}_{c)};\\ &A^{[ad]}_{[bc]} = -B^{[ad]}{}_{[bc]} - B^{[a|f|}{}_{[b}B_{c]f}{}^{d]}; \end{aligned}$$

Задача 6.2. Докажите, что $B_{(bc)}{}^{ad} = B^{(ad)}{}_{bc} = 0$ и $B^{[ad]}{}_{bc} = B^{ad}{}_{bc}$.

Подставляя все полученные равенства в (6.6) и приводя подобные, получим

$$A^{ad}_{bc} - B^{af}{}_{c}B_{bf}{}^{d} + B^{ad}{}_{[bc]} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = 0.$$

Это критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны для многообразия Вайсмана-Грея.

§ 6.2. Ассоциированные расслоения.

Пусть дано главное расслоение $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ и многообразие F, на котором группа Ли G действует слева. Определим действие группы G на декартовом произведении $P \times F$ следующим образом

$$(p, v)g \in P \times F \to (pg, g^{-1}v) \in P \times F,\ g \in G.$$

Это правое действие. Пространство орбит относительно этого действия обозначим $E = Orb_G(P \times F)$. Отображение проекции $\pi : (p, v) \in P \times F \to m = \pi(p) \in M$ определяет проекцию на множестве E по формуле

$$\pi_E : u \in E \to m = \pi_E(u) = \pi(p),\ (p, v) \in u.$$

Определение корректно (то есть не зависит от выбора элемента (p, v) в классе u), так как все точки одного слоя главного расслоения $\mathscr{B}$ проектируются в одну и ту же точку $m \in M$ базы M. Множество $\pi_E^{-1}(m)$ называется слоем в E над m. Поскольку главное расслоение $\mathscr{B}$ локально тривиально, каждая точка $m \in M$ имеет окрестность U, такую что существует гладкое отображение $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$. Зададим отображение $F'_U : \pi_E^{-1}(U) \to F$ по формуле

$$F'_U((p, v)G) = F_U(p)v.$$

Это отображение не зависит от выбора представителя класса $(p, v)G$. Действительно, пусть взят другой представитель $(pg, g^{-1}v)$. Тогда пользуясь тем, что действие группы Ли G на F левое, получим

$$F_U(pg)(g^{-1}v) = F_U(p)g(g^{-1}v) = F_U(p)(gg^{-1})v = F_U(p)v.$$

Отображение F'_U является гладким как композиция таковых. Определим отображение $\psi'_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$ по формуле

$$\psi'_U((p, v)G) = (\pi_E((p, v)G), F'_U((p, v)G) = (\pi(p), F_U(p)v).$$

Покажем, что отображение ψ'_U является биекцией. Сначала проверяем инъективность. Пусть $(p, v)G$ и $(\tilde{p}, \tilde{v})G$ из E – произвольные элементы. Пусть $\psi'_U((p, v)G) = \psi'_U((\tilde{p}, \tilde{v})G)$, то есть $(\pi(p), F_U(p)v) = (\pi(\tilde{p}), F_U(\tilde{p})\tilde{v})$. Из того, что $\pi(p) = \pi(\tilde{p})$ получаем, что p и $\tilde{p}$ принадлежат одному слою, то есть существует элемент $g \in G$, такой, что $\tilde{p} = pg$. Из равенства вторых элементов пар получим

$$F_U(p)v = F_U(\tilde{p})\tilde{v} = F_u(pg)\tilde{v} = F_U(p)(g\tilde{v}).$$

Так как действие свободно, $v = g\tilde{v}$ или $\tilde{v} = g^{-1}v$, то есть классы $(p, v)G$ и $(\tilde{p}, \tilde{v})G$ совпадают. Итак, отображение ψ'_U инъективно. Сюръективность очевидна. Следовательно, отображение ψ'_U биекция. С ее помощью вносим во множество E топологию, требуя, чтобы отображение ψ'_U было гомеоморфизмом.

Гладкая структура на E будет задаваться картами следующего вида. Области карт $\pi_E^{-1}(U)$, где U – области карт на многообразии M. Картирующие отображения строятся так: точка $(p, v)G$ из $\pi_E^{-1}(U)$ с помощью отображения ψ'_U переводится в пару (m, v) из $U \times F$. Так как U – это область карты на многообразии M, у точки m есть координаты. Аналогично второй элемент пары v как элемент гладкого многообразия F попадает к какую-то карту и там обеспечивается координатами. В результате исходный элемент $(p, v)G$ получает $dim\, M + dim\, F$ координат. Таким образом, мы определили гладкую структуру на E.

Система (E, M, G, F, π_E) называется *ассоциированным расслоением* для главного расслоения (P, M, G, π).

Пример 6.1**.** Покажем, что касательное расслоение (TM, π, M) можно получить как ассоциированное расслоение для главного расслоения всех вещественных реперов.

Рассмотрим главное расслоение всех вещественных реперов $\mathscr{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ и арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ в качестве многообразия F. Будем рассматривать элементы $\mathbb{R}^n$ как столбцы. Тогда левое действие полной линейной группы на $\mathbb{R}^n$ будет выглядеть как умножение матрицы из $GL(n, \mathbb{R})$ на столбец из $\mathbb{R}^n$. Классы

$$(p, v)GL(n, \mathbb{R}) = \{(pg, g^{-1}v), g \in G\}$$

состоят из пар, где первый элемент pg – это репер, который получен из репера p с помощью матрицы g, то есть g – матрица перехода от p к pg. Тогда v – это координаты вектора в репере p, а $g^{-1}v$ – координаты того же вектора в репере pg. Это согласуется с формулами преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому. Таким образом, мы можем отождествить класс $(p, v)GL(n, \mathbb{R})$ (элемент пространства E ассоциированного расслоения) с касательным вектором в точке $m = \pi(p)$.

Литература:

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Одесса, 2013.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, Новокузнецк, 1999.
3. Бишоп Р.Л., Р.Дж. Криттенден Геометрия многообразий., Мир, 1967.