Элементы многомерной геометрии (дисциплина по выбору 2 курс, бакалавры математики).

6 сентября 2013 г.

Литература.
1. Кириченко В.Ф. и др. Геометрия в 2-х томах Т1., Москва, Академия, 2012.
2. С.А. Франгулов и др. Сборник задач по геометрии. Москва, Просвещение, 2002.
3. Н.И.Гусева, Н.С.Денисова, О.Ю.Тесля Сборник задач по геометрии Часть 1, Москва, Кнорус, 2012.

§ 1. Векторные пространства.

1.1. Воспоминания из первого курса.

В начале первого курса мы ввели понятие вектора. Напомним как он был построен. Находясь в обычном пространстве, мы рассматриваем всевозможные отрезки. Указывая начало и конец отрезка, мы получаем направленный отрезок (конец направленного отрезка мы обозначаем стрелкой). У направленного отрезка есть две основные характеристики: длина и направление. Используя эти две характеристики, все направленные отрезки мы можем разбить на группы (математики говорят – классы эквивалентности): каждая группа содержит все направленные отрезки одинаковой длины и направления. Каждая группа (класс эквивалентности) мы назвали вектором. Другими словами, вектор – это множество направленных отрезков, любые два из которых имеют одинаковую длину и направление.

Для векторов изначально были введены две операции: сложение двух векторов (правило треугольника) и умножение вектора на число. По сути это два алгоритма, которые позволяют в первом случае по двум векторам однозначно построить третий вектор (сумму), а во втором случае по числу и вектору однозначно построить еще один вектор (произведение вектора на число). Введенные операции обладают следующими восемью свойствами:

1. Коммутативность сложения
   $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Ассоциативность сложения
   $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. Существование нуль-вектора $\vec{0}$ (его представители – это нулевые направленные отрезки, то есть точки). Этот вектор обладает следующим свойством:
   $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

4. Существование противоположного вектора для любого вектора $\vec{a}$. Напомним, что противоположный вектор для вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ получался так: $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. Противоположный вектор для вектора $\vec{a}$ обладает свойством $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

5. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, λ,μ – произвольные вещественные числа.

6. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$, λ,μ – произвольные вещественные числа.

7. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, λ – произвольное вещественное число.

8. $1\vec{a}=\vec{a}$.

Оказывается, что не только для векторов – классов эквивалентности направленных отрезков – можно ввести операции сложения и умножения на вещественное число, удовлетворяющие перечисленным восьми свойствам. Например, аналогичные построения можно провести для матриц, функций, многочленов и других объектов. Чтобы в каждом из этих случаев не проводить доказательства, поступают так: рассматривают множество объектов (не интересуясь, что это за объекты), говорят, что на этом множестве задано две операции – сложение двух объектов и умножение объекта на вещественное число – (опять-таки не вдаваясь в подробности в то, как эти операции действуют). Другими словами, упомянутые операции произвольны, но должны удовлетворять восьми условиям, которые перечислены выше. Эти условия называются аксиомами. Далее, с помощью законов логики из аксиом выводятся следствия и строится теория. Такой подход к построению теории называется *аксиоматическим.* Объекты множества будем называть векторами, а само множество с введенными операциями – векторным пространством. Если мы будем брать конкретные объекты в множестве (например, матрицы или классы эквивалентности направленных отрезков), то будем говорить, что мы рассматриваем пример векторного пространства (или, как еще говорят, модель).

Перейдем к строгим определениям.

1.2. Понятие векторного пространства, примеры, простейшие свойства.

Пусть V – непустое множество произвольной природы. Будем называть множество V *векторным (или линейным) пространством*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ставит в соответствие элемент $\vec{z} \in V$, называемый *суммой векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$* и обозначаемый $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $\vec{x} \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $\vec{y} \in V$, называемый *произведением вектора $\vec{x}$ на число* λ и обозначаемый $\vec{y} = \lambda\vec{x}$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность);

2^0. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $\vec{0} \in V$, такой что для любого элемента $\vec{x} \in V$ выполняется $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (элемент $\vec{0}$ называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $\vec{x} \in V$ существует элемент $-\vec{x} \in V$, такой что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (элемент $-\vec{x}$ называется *противоположным* элементу $\vec{x}$);

5^0. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$;

6^0. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$;

7^0. $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$;

8^0. $1\vec{x} = \vec{x}$,

где $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства.* Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на вещественное число.*

Замечание 1.1. Заметим, что при введении понятия векторного пространства мы абстрагируемся не только от вида элементов множества V, но и от конкретного вида отображений суммы векторов и произведения вектора на число. Нужно только выполнение 8 аксиом векторного пространства.

Договоримся обозначать векторы малыми латинскими буквами со стрелкой сверху, если речь идет об абстрактном векторном пространстве. В конкретных примерах векторных пространств мы будем следовать традициям обозначений элементов этих множеств, если это не приводит к недоразумениям.

Замечание 1.2. В каждом векторном пространстве нуль-вектор единственен. Действительно, если $\vec{0}$ и $\vec{0}_1$ – нуль-векторы, то с одной стороны по аксиоме 3^0 векторного пространства $\vec{0} + \vec{0}_1 = \vec{0}$. С другой стороны, по той же аксиоме $\vec{0}_1 + \vec{0} = \vec{0}_1$. Так как по аксиоме 1^0 имеем $\vec{0} + \vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}$, то $\vec{0}_1 = \vec{0}$.

Пример 1.1. Естественно, что первый пример векторного пространства – это множество классов эквивалентности направленных отрезков, которое было построено в начале первого курса. Мы будем называть это векторное пространство *геометрическим векторным пространством* и обозначать V^3.

Пример 1.2. Обозначим через $M_{2,2}$ множество $2 \times 2-$ матриц. Докажем, что это множество является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число, введенных в курсе алгебры.

Напомним, что сумма двух матриц и произведение матрицы на число определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}; \quad \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Докажем, что выполняется аксиома 1^0 векторного пространства. Остальные аксиомы доказываются аналогично.

Пусть даны две матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. По определению суммы матриц и свойству сложения вещественных чисел получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что нуль-вектором будет нулевая матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, так как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Какой вид будет иметь противоположный элемент для матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$?

Итак, множество всех $2 \times 2-$ матриц образует векторное пространство относительно операций (1.1).

Пример 1.3. Рассмотрим в качестве множества V множество всех положительных вещественных чисел $\mathbb{R}^{+}$. Договоримся обозначать положительное вещественное число малой латинской буквой со стрелкой, если мы его рассматриваем как элемент векторного пространства V, и той же малой латинской буквой без стрелки, если оно рассматривается как вещественное число в обычном смысле.

Рассмотрим произвольные элементы $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Определим их сумму следующим образом: $\vec{a} + \vec{b} = a \cdot b$, то есть сумма элементов из V есть их обычное произведение как вещественных чисел. Произведение элемента $\vec{a} \in V$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ определим как $\lambda\vec{a} = a^{\lambda}$, то есть чтобы найти произведение элемента $\vec{a} \in V$ и вещественного числа λ, нужно число a возвести в степень λ.

Проверим, что в этом случае выполняются все 8 аксиом векторного пространства. В самом деле, $\vec{a} + \vec{b} = a \cdot b = b \cdot a = \vec{b} + \vec{a}$, то есть выполняется 1^0. Аналогично доказывается 2^0. Число 1 является нуль-вектором $\vec{0}$ в V, так как для любого $\vec{a} \in V$ получим $\vec{a} + \vec{0} = a \cdot 1 = a = \vec{a}$.

Возьмем произвольный элемент $\vec{a} \in V$ и найдем для него противоположный $-\vec{a}$. По аксиоме 4^0 должно выполняться равенство $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, то есть $a(-\vec{a}) = 1$, то есть $-\vec{a} = \frac{1}{a}$. Итак, противоположным к элементу $\vec{a}$ будет число $\frac{1}{a}$.

Остальные аксиомы легко проверяются с использованием свойств степени вещественного числа (проверьте самостоятельно).

Итак, множество положительных вещественных чисел со введенными операциями является векторным пространством.

Разностью векторов $\vec{x} \in V$ и $\vec{y} \in V$ называется вектор $\vec{z} = \vec{x} + (-1)\vec{y}$. Обозначение $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$.

Свойства векторного пространства.

1^0. Для любого вектора $\vec{a} \in V$ имеем $0\vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in V$ – произвольный вектор. Тогда по аксиомам векторного пространства получим $\vec{a} + 0\vec{a} = (1+0)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a}$. Таким образом, получим $0\vec{a} + \vec{a} = \vec{a}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{b}$. Тогда для любого $\vec{b}$

$$0\vec{a} + \vec{b} = 0\vec{a} + (\vec{b} + \vec{a} - \vec{a}) = 0\vec{a} + \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{b}.$$

Тогда по аксиоме 3^0 векторного пространства $0\vec{a} = \vec{0}$. □

2^0. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то равенство верно по свойству 1^0.

Если $\alpha \neq 0$, то рассмотрим произвольный вектор $\vec{b} \in V$. Тогда существует вектор $\vec{a} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$. По аксиомам векторного пространства получим $\vec{b} + \alpha\vec{0} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{0} = \alpha(\vec{a} + \vec{0}) = \alpha\vec{a} = \vec{b}$. По аксиоме 3^0 векторного пространства получим, что $\alpha\vec{0} = \vec{0}$. □

3^0. Для любого вектора $\vec{a} \in V$ имеем $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $(-1)\vec{a} = \vec{0}$ по свойству 2^0. С другой стороны, $-\vec{0} = \vec{0}$, так как $\vec{0} + \vec{0} = (1+1)\vec{0} = 2\vec{0} = \vec{0}$. Итак, в этом случае доказываемое равенство верно.

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} + (-1)\vec{a} = (1-1)\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$. Тогда по аксиоме 4^0 векторного пространства $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. □

4^0. Если $\alpha\vec{a} = \vec{0}$, то $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то все доказано. Если $\alpha \neq 0$, то умножим обе части равенства $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ на число $\frac{1}{\alpha}$. Тогда по аксиомам векторного пространства и свойству 2^0 получим $\vec{a} = \vec{0}$. □

Суммой k векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in V$ называется вектор $\vec{b} = (\ldots(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \ldots + \vec{a}_k)$. В силу аксиомы 2^0 векторного пространства скобки в сумме k векторов можем не писать и обозначать $\vec{b} = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_k$.

Задачи.

1. Обозначим через $M_{m,n}$ множество $m\times n-$ матриц. Докажите, что это множество является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число, введенных в курсе алгебры.

2. Пусть V – множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Определим операции сложения и умножения на вещественное число следующим образом:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

   где $f, g \in V$ – произвольные функции на $[a,b]$, $x \in [a,b]$. Докажите, что V является векторным пространством.

3. Пусть V – множество направленных отрезков плоскости, имеющих общее начало. Сложение элементов из V определим по правилу параллелограмма, а умножение так: длина направленного отрезка изменяется в $|\lambda|$ раз, направление сохраняется, если $\lambda \geq 0$ и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$. Будет ли множество V векторным пространством?

4. Пусть $\angle AOB$ – произвольный угол на плоскости. Пусть V – множество направленных отрезков с началом в точке O и концами во внутренних точках угла $\angle AOB$. Сложение и умножение на вещественное число определяется так же как и в предыдущей задаче. Будет ли такое множество векторным пространством?

§ 2. Линейная зависимость и независимость векторов.

2.1. Опять воспоминания первого курса.

Вернемся к векторам геометрического векторного пространства. Каждый вектор получал упорядоченную тройку чисел – координат этого вектора. Операции с векторами сводились к операциям с тройками этих чисел, что существенно упрощало решение задач. Чтобы ввести координаты вектора, нужно было выбрать базис и разложить вектор по нему. Получающиеся коэффициенты – это и есть координаты вектора. Что такое базис? Это минимальная система векторов, по которой раскладывается любой вектор геометрического векторного пространства. В данном случае это три некомпланарных вектора. Если бы мы взяли компланарные векторы (то есть векторы параллельные одной плоскости), то не смогли бы разложить вектора, не параллельные этой плоскости. Можно было бы взять больше, чем три вектора, но, во-первых, зачем усложнять себе жизнь (чем больше объектов, тем сложнее с ними работать), и, во-вторых, координаты вектора относительно базиса тогда были бы определены не однозначно. Итак, базис – это минимальная по количеству система векторов, по которой можно разложить любой вектор геометрического векторного пространства. В результате этого вектор получает набор координат. Данную конструкцию мы перенесем (с необходимыми изменениями) на случай произвольного векторного пространства.

2.2. Определения и свойства линейной зависимости векторов.

Пусть V – произвольное векторное пространство. Рассмотрим векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ и числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}$. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ называется вектор $\vec{b} = \alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n$.

Система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (*)$$

Если равенство $(*)$ выполняется только в случае, когда $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$, то система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно независимой*. Векторы линейно зависимой системы называются *линейно зависимыми*, а линейно независимой системы – *линейно независимыми*.

Свойства линейно зависимых систем векторов.

1^0. Система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор этой системы представим в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

Доказательство. 1. Пусть данные векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. Тогда по определению линейно зависимых векторов имеем

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.1}$$

причем среди чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ хотя бы одно число отлично от нуля. Пусть это число α^1 (для остальных чисел доказательство аналогично). Тогда разделим обе части равенства (2.1) на α^1 и запишем его в виде

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha^2}{\alpha^1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha^n}{\alpha^1}\vec{a}_n$$

Если обозначить $-\frac{\alpha^2}{\alpha^1} = \beta^1, \ldots, -\frac{\alpha^n}{\alpha^1} = \beta^{n-1}$, то последнее равенство примет вид

$$\vec{a}_1 = \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n$$

то есть вектор $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

2. Пусть вектор $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов (для других векторов доказательство аналогично), то есть $\vec{a}_1 = \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n$. Тогда это равенство можно записать в виде

$$(-1)\vec{a}_1 + \beta^1 \vec{a}_2 + \ldots + \beta^{n-1} \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{2.2}$$

Мы видим, что среди коэффициентов линейной комбинации, стоящей в левой части (2.2), первый коэффициент -1 отличен от нуля. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы по определению линейно зависимых векторов. □

Следствие 2.1. *Пусть система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in V$ линейно независима, а система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}) \in V$ линейно зависима. Тогда вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.*

Доказательство. Так как система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a})$ линейно зависима, то по определению существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \alpha \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n + \alpha \vec{a} = \vec{0} \tag{2.3}$$

Если $\alpha = 0$ равно нулю, то мы получаем равенство $\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n \vec{a}_n = \vec{0}$, в котором хотя бы одно из чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ не равно нулю. Это означает, что система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ линейно зависима. Мы пришли к противоречию с условием, а значит, $\alpha \neq 0$. Тогда, как в доказательстве свойства 1^0, мы можем представить вектор $\vec{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. □

Пусть дана система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in V$. Любое непустое подмножество этой системы векторов называется *подсистемой* данной системы векторов.

2^0. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$. Если какая-либо подсистема векторов этой системы линейно зависима, то линейно зависима и вся система векторов.

Доказательство. Пусть линейно зависимы первые k векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ $(k \leq n)$ этой системы. Если это не так, то мы можем перенумеровать векторы таким образом, чтобы линейно зависимыми оказались первые k векторов. Тогда по определению линейной зависимости векторов существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, и верно равенство $\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k \vec{a}_k = \vec{0}$. Добавим в это равенство нулевые слагаемые. Очевидно, что при этом оно останется верным. В результате получим

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k \vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.4}$$

Итак, существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^k, 0, \ldots, 0$, не равные нулю одновременно (отлично от нуля какое-то из чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$), и верно равенство (2.4). По определению линейной зависимости векторов это означает, что система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима. □

3^0. Если система векторов содержит $\vec{0}$, то она линейно зависима.

Доказательство. Докажите самостоятельно, используя равенство $1\vec{0} + 0\vec{a}_1 + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$. □

Будем называть пару линейно зависимых векторов *коллинеарными.* Из свойства 1^0 линейно зависимых векторов следует, что векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ будут являться коллинеарными тогда и только тогда, когда существует число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Пример 2.1. Рассмотрим векторное пространство $M_{2,2}$ (см. пример 1.2). Докажем, что матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы.

Действительно, составим их линейную комбинацию с произвольными коэффициентами α^1, α^2, α^3, α^4 и приравняем ее нуль-вектору.

$$\alpha^1 E_1 + \alpha^2 E_2 + \alpha^3 E_3 + \alpha^4 E_4 = \vec{0} \tag{2.5}$$

Напомним, что в векторном пространстве $2 \times 2-$ матриц $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (см. Пример 1.2). Тогда с учетом определения операций сложения матриц и умножения на число из (2.5) получим

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению равенства матриц получим $\alpha^1 = 0$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$ и $\alpha^4 = 0$. Итак, равенство (2.5) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = 0$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$ и $\alpha^4 = 0$. По определению линейной независимости векторов это означает, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 линейно независимы.

2.3. Базис. Размерность векторного пространства.

Добавим к 8 аксиомам векторного пространства еще две аксиомы, которые называются *аксиомами размерности.*

9^0. В векторном пространстве V существует линейно независимая система из n векторов.

10^0. В векторном пространстве V любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.

Векторное пространство V, которое удовлетворяет аксиомам 9^0, 10^0, называется *$n-$ мерным векторным пространством* и обозначается V^n. Число n называется *размерностью* векторного пространства V^n.

Базисом $n-$ мерного векторного пространства V^n называется упорядоченная линейно независимая система векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из V^n, такая что любой вектор $\vec{x} \in V^n$ представим в виде линейной комбинации $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n$. Упорядоченная система вещественных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$ называется *координатами вектора* $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Будем говорить в этом случае, что *вектор* $\vec{x}$ *раскладывается по базису* $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Теорема 2.1. *Любое $n-$ мерное векторное пространство V^n обладает базисами и каждый из них содержит n векторов.*

Доказательство. Пусть $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – линейно независимая система векторов в V^n. Она существует в силу аксиомы 9^0. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in V^n$. Тогда по аксиоме 10^0 система векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x})$ линейно зависима. По следствию 2.1 получим, что вектор $\vec{x}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Тогда по определению E – базис.

Докажем, что любой базис векторного пространства V^n имеет n векторов. Если количество векторов системы A больше n, то она содержит подсистему $\tilde{A}$ из $n+1$ вектора. Эта подсистема $\tilde{A}$ линейно зависима по аксиоме 10^0. Тогда по свойству 2^0 линейно зависима и вся система векторов A. Следовательно, A не может быть базисом по определению.

Пусть дана система векторов $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ в V^n, где $(k < n)$. Предположим, что A – базис. Тогда мы можем разложить векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ по базису A:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = e_1^1\vec{a}_1 + \ldots + e_1^k\vec{a}_k; \\ &\ldots \\ &\vec{e}_n = e_n^1\vec{a}_1 + \ldots + e_n^k\vec{a}_k; \end{aligned} \tag{2.6}$$

Приравняем линейную комбинацию векторов $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ нуль-вектору

$$\alpha^1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{e}_n = \vec{0} \tag{2.7}$$

и подставим в (2.7) равенства (2.6). Тогда с учетом аксиом векторного пространства получим

$$(\alpha^1 e_1^1 + \ldots + \alpha^n e_n^1)\vec{a}_1 + \ldots + (\alpha^1 e_1^k + \ldots + \alpha^n e_n^k)\vec{a}_k = \vec{0}$$

В силу линейной независимости векторов базиса A получим однородную систему k линейных уравнений с n неизвестными $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ $(k < n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^1 e_1^1 + \ldots + \alpha^n e_n^1 = 0 \\ \ldots \\ \alpha^1 e_1^k + \ldots + \alpha^n e_n^k = 0 \end{array} \right. .$$

Из алгебры известно, что такая система уравнений имеет решения, в которых хотя бы одно из $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ не равно нулю. Рассмотрим одно из таких решений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Для него верно равенство (2.7). Тогда по определению линейно зависимой системы векторов получим, что векторы системы E линейно зависимы. Мы пришли к противоречию с тем, что E – базис. Таким образом, количество векторов базиса V^n не может быть меньше n.

Итак, все базисы векторного пространства V^n должны иметь n векторов. □

Следствие 2.2. *Любая линейно независимая система n векторов в $n-$ мерном векторном пространстве является базисом.*

Пример 2.2. Покажем, что система матриц E_1, E_2, E_3, E_4 является базисом векторного пространства $2 \times 2-$ матриц (см. пример 1.2). Мы уже доказали (см. пример 2.1), что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 являются линейно независимыми. Нам осталось доказать, что любая $2 \times 2-$ матрица представима в виде линейной комбинации E_1, E_2, E_3, E_4. Рассмотрим произвольную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По определению сложения матриц и умножения матрицы на число получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

Таким образом, по определению система матриц (E_1, E_2, E_3, E_4) является базисом векторного пространства всех $2 \times 2-$ матриц, а значит, размерность этого пространства равна 4.

Пример 2.3. Приведем пример векторного пространства, которое не является $n-$ мерным векторным пространством. Рассмотрим множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов от x с вещественными коэффициентами. Нетрудно проверить, что это множество будет векторным пространством относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на число, введенных в курсе алгебры. Но для любого $n \in \mathbb{N}$ система многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ будет линейно независима (докажите самостоятельно). Таким образом, аксиома 10^0 не выполняется, а значит, множество $\mathbb{R}[x]$ не является $n-$ мерным векторным пространством.

Задачи.

1. Докажите, что в геометрическом векторном пространстве V^3 а) система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны; б) система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны; в) система из четырех и более векторов всегда линейно зависима.

2. Докажите, что любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

3. В геометрическом векторном пространстве V^3 приведите примеры линейно зависимых систем векторов, которые содержат хотя бы одну линейно независимую подсистему векторов.

§ 3. Координаты векторов в базисе. Формулы перехода.

3.1. Координаты векторов.

Лемма 3.1. *Пусть в векторном пространстве V^n фиксирован базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Координаты любого вектора $\vec{a} \in V$ в данном базисе определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a} \in V^n$ имеет два набора координат $(a^1, \ldots, a^n)$ и $(b^1, \ldots, b^n)$ в базисе E. По определению координат вектора это означает, что

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + \ldots + a^n\vec{e}_n; \quad \vec{a} = b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n.$$

Вычтем из первого равенства второе и используем аксиомы векторного пространства (§ 1.): $(a^1 - b^1)\vec{e}_1 + \ldots + (a^n - b^n)\vec{e}_n = \vec{0}$. В силу линейной независимости базисных векторов получим $a^1 - b^1 = 0, \ldots, a^n - b^n = 0$, то есть $a^1 = b^1, \ldots, a^n = b^n$. □

Следствие 3.1. *Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.*

Теорема 3.1. *Пусть дан базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства V^n, произвольные векторы $\vec{x}(x^1, \ldots, x^n)$, $\vec{y}(y^1, \ldots, y^n) \in V^n$ и произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$(\vec{x} + \vec{y})(x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n); \quad (\lambda\vec{x})(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству такой же теоремы первого курса. Проведите рассуждения самостоятельно. □

Замечание 3.1. В дальнейшем нам часто придется использовать суммы от 1 до некоторого фиксированного числа. Будем обозначать сумму следующим образом:

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i\vec{a}_i$$

Чтобы еще сократить запись, договоримся, что по одинаковым верхнему и нижнему индексам производится суммирование от 1 до этого числа:

$$\alpha^i\vec{a}_i = \alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n.$$

Индекс, обозначающий суммирование, называется *индексом суммирования.* Индекс суммирования можно обозначать любой буквой. Например, $\alpha^i\vec{a}_i \equiv \alpha^j\vec{a}_j \equiv \alpha^k\vec{a}_k = \ldots$. Введенная договоренность об обозначении суммирования называется *правилом суммирования Эйнштейна.*

Заметим, что для того чтобы иметь возможность использовать правило суммирования Эйнштейна, в определении координат вектора мы пишем номер координаты сверху.

Также договоримся о сокращенной записи систем равенств. Пусть дана система равенств

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = b_1^1\vec{a}_1 + \ldots + b_1^n\vec{a}_n \\ \ldots \\ \vec{b}_m = b_m^1\vec{a}_1 + \ldots + b_m^n\vec{a}_n. \end{cases}$$

Будем записывать такую систему в виде $\vec{b}_p = b_p^i\vec{a}_i$, $(i = 1, \ldots, n; p = 1, \ldots, m)$. Индекс, не являющийся индексом суммирования, называется *свободным индексом.* В данном примере индекс p является свободным индексом. При использовании свободного индекса будем указывать, в каких пределах он изменяется.

С помощью координат векторов можно выяснить, является ли система векторов линейно зависимой или линейно независимой.

Теорема 3.2. *Пусть дана система векторов $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \in V^n$. Заменим вектор $\vec{a}_m$ $(m = 1, \ldots, k)$ этой системы на вектор $\vec{b}_m = \alpha^m\vec{a}_m + \sum_{i=1, i\neq m}^{k} \alpha^i\vec{a}_i$, где α^i $(i = 1, \ldots, k)$ – произвольные числа, $\alpha^m \neq 0$ и обозначим полученную систему векторов*
$B_m = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{m-1}, \vec{b}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k)$. Система векторов A линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов B_m.

Доказательство. 1. Пусть A – линейно независимая система векторов. Докажем, что система векторов $B_1 = (\vec{b}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$ линейно независима. Для остальных векторов $\vec{b}_m$ $(m = 2, \ldots, k)$ доказательство аналогично. Пусть

$$\lambda^1\vec{b}_1 + \lambda^2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda^k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Так как по условию $\vec{b}_1 = \alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k$, получим $\lambda^1(\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k) + \lambda^2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda^k\vec{a}_k = \vec{0}$ или

$$\lambda^1\alpha^1\vec{a}_1 + (\lambda^1\alpha^2 + \lambda^2)\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda^1\alpha^k + \lambda^k)\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Так как система векторов A линейно независима, получим

$$\begin{cases} \lambda^1\alpha^1 = 0 \\ \lambda^1\alpha^2 + \lambda^2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda^1\alpha^k + \lambda^k = 0 \end{cases}$$

Так как $\alpha^1 \neq 0$, то $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^k = 0$. Итак, система векторов B_1 линейно независима.

2. Обратно, пусть линейно независима система векторов B_1. Докажем, что линейно независима система векторов A. Пусть

$$\lambda^1\vec{a}_1 + \lambda^2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda^k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Так как по условию $\vec{b}_1 = \alpha^1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k$, получим $\lambda^1(\frac{1}{\alpha^1}\vec{b}_1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha^k}{\alpha^1}\vec{a}_k) + \lambda^2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda^k\vec{a}_k = \vec{0}$ или

$$\frac{\lambda^1}{\alpha^1}\vec{b}_1 + (\lambda^2 - \frac{\lambda^1\alpha^2}{\alpha^1})\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda^k - \frac{\lambda^1\alpha^k}{\alpha^1})\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Аналогично пункту 1 с учетом линейной независимости векторов системы B_1 получим, что $\lambda^1 = \ldots = \lambda^k = 0$, то есть система векторов A линейно независима. □

Следствие 3.2. *Система векторов A линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система векторов B_m.*

Замечание 3.2. Пусть дан базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства V^n и векторы $\vec{a}_1(a_1^1, \ldots, a_1^n)$, …, $\vec{a}_k(a_k^1, \ldots, a_k^n) \in V$. Запишем координаты этих векторов по строкам в матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ & \ldots & \\ a_k^1 & \ldots & a_k^n \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду по известному из алгебры алгоритму. Согласно теореме 3.1 в строках последней матрицы будут стоять координаты векторов, которые мы обозначим $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$. Если среди этих векторов есть хотя бы один нуль-вектор, то по свойству 3^0 линейно зависимых систем векторов (§ 1.) это означает, что векторы $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ линейно зависимы, следовательно, по следствию 3.2 линейно зависимы векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$. Если среди векторов $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ нет ни одного нуль-вектора, то такая система векторов линейно независима (докажите самостоятельно аналогично примеру 2.1). Тогда по теореме 3.2 векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы.

Пример 3.1. Пусть дано 4-мерное векторное пространство V^4, базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ в V^4 и векторы $\vec{a}_1(1, 0, -1, 2)$, $\vec{a}_2(1, 1, 0, -2)$, $\vec{a}_3(3, 1, -2, 2)$. Выясним, является ли система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимой.

Запишем координаты данных векторов по столбцам в матрицу и приведем эту матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили в последней матрице нулевую строку, а значит, $\vec{b}_3 = \vec{0}$ и система векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ линейно зависима. Тогда линейно зависима и исходная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Теорема 3.3. *Пусть в векторном пространстве V^n даны базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и векторы $\vec{a}_i(a_i^1, \ldots, a_i^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы A, составленной из их координат, равен нулю.*

Доказательство. Если среди векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ есть хотя бы один нулевой вектор, то утверждение очевидно. Пусть $\vec{a}_i \neq \vec{0}$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

1. Пусть векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. Тогда по определению линейной зависимости векторов (§ 1.) существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что $\alpha^i\vec{a}_i = \vec{0}$. По теореме 3.1 из этого следует, что система уравнений

$$\alpha^i a_i^j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^1 a_1^1 + \ldots + \alpha^n a_n^1 = 0 \\ \ldots \\ \alpha^1 a_1^n + \ldots + \alpha^n a_n^n = 0 \end{array} \right. . \tag{3.1}$$

имеет ненулевое решение $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. Из алгебры известно, что в этом случае $\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ & \ldots & \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$, то есть $|A| = 0$.

2. Пусть определитель $|A| = 0$. Тогда система уравнений (3.1) имеет ненулевое решение, а значит, существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, не равные нулю одновременно, такие что $\alpha^i\vec{a}_i = \vec{0}$. Это по определению означает, что векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. □

3.2. Формулы перехода от одного базиса к другому.

Пусть даны два базиса $E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ векторного пространства V. Обозначим координаты векторов $\vec{a}_i$ в базисе E через $(C_i^1, \dots, C_i^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, то есть $\vec{a}_i = C_i^j \vec{e}_j$. Пусть $\vec{x} \in V^n$ – произвольный вектор в V^n. Обозначим его координаты в базисе E через $(x^1, \dots, x^n)$, а в базисе A через $(y^1, \dots, y^n)$. Найдем равенства, связывающие координаты вектора $\vec{x}$ в базисах E и A.

По определению координат вектора (§ 1.) имеем $\vec{x} = y^i \vec{a}_i = y^i (C_i^j \vec{e}_j) = (y^i C_i^j) \vec{e}_j$, то есть вектор $\vec{x}$ имеет в базисе E координаты $(y^i C_i^1, \dots, y^i C_i^n)$. В силу леммы 3.1 получим $x^1 = y^i C_i^1$, …, $x^n = y^i C_i^n$. Таким образом,

$$x^j = C_i^j y^i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^1 = C_1^1 y^1 + \ldots + C_n^1 y^n \\ \ldots \\ x^n = C_1^n y^1 + \ldots + C_n^n y^n \end{array} \right. , \tag{3.2}$$

$i, j = 1, \dots, n$. Эти равенства называются *формулами перехода от базиса E к базису A*.

Задачи.

1. Пусть в векторном пространстве V заданы векторы $\vec{a}(1, 0, 1, 2)$, $\vec{b}(1, 1, -1, 0)$, $\vec{c}(2, 1, 0, 2)$. Определить размерность V. Выяснить, являются ли данные векторы линейно независимыми. Если нет, то найти среди них наибольшую линейно независимую подсистему и дополнить ее до какого-либо базиса векторного пространства V.

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *кососимметрической*, если $c = -b$. Найдите какой-либо базис векторного пространства всех кососимметрических матриц. Определите размерность этого векторного пространства.

3. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *симметрической*, если $c = b$. Найдите какой-либо базис векторного пространства всех симметрических матриц. Определите размерность этого векторного пространства.

4. Пусть V – это множество многочленов от одной переменной степени, не большей n. Найдите базис и определите размерность этого векторного пространства.

5. Будет ли система многочленов $(x - 1, x + 1, x^2 + 1)$ базисом векторного пространства многочленов степени, не большей 2? Если да, то найти координаты многочлена $x^2 + 2x + 1$ в этом базисе.

6. Запишите формулы перехода от базиса $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ векторного пространства матриц 2×2 к базису $\tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в базисе $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{E}_4)$.

§ 4. Векторные подпространства.

Пусть даны векторное пространство V и его непустое подмножество L. Будем говорить, что L называется *векторным (или линейным) подпространством векторного пространства V*, если
1) для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in L$ их сумма $\vec{x} + \vec{y} \in L$;
2) для любого вектора $\vec{x} \in L$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ произведение $\alpha \vec{x} \in L$.

Очевидно, что для векторного подпространства выполняются аксиомы $1^0 - 8^0$ векторного пространства (§ 1.), а значит, оно является векторным пространством. Если кроме того для L выполняются аксиомы 9^0, 10^0 для некоторого числа k, то векторное подпространство L является $k-$ мерным векторным пространством. Будем говорить в этом случае, что L есть *$k-$ мерное векторное подпространство векторного пространства V*.

Пример 4.1. Легко видеть, что множества $\{\vec{0}\}$ и V^n являются векторными подпространствами в V^n. Положим по определению, что $\{\vec{0}\}$ является 0-мерным векторным пространством.

Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – произвольные векторы векторного пространства V. *Линейной оболочкой векторов* $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ называется множество всех векторов $\vec{x} = \alpha^p \vec{a}_p$ $(p = 1, \dots, k)$, где $\alpha^p \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Обозначение $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$.

Теорема 4.1. *Линейная оболочка векторов $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ является $m-$ мерным векторным подпространством в V, где $m \le k$.*

Доказательство. Пусть $\vec{x},\vec{y} \in L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ – произвольные элементы. По определению линейной оболочки имеем $\vec{x} = \alpha^p\vec{a}_p$, $\vec{y} = \beta^p\vec{a}_p$ $(p = 1,\dots,k)$. Тогда $\vec{x}+\vec{y} = \alpha^p\vec{a}_p + \beta^p\vec{a}_p = (\alpha^p+\beta^p)\vec{a}_p$, то есть $\vec{x}+\vec{y} \in L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$. Аналогично проверяется второе условие из определения векторного подпространства. Таким образом, $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ является векторным подпространством по определению.

Если $\vec{a}_1 = \ldots = \vec{a}_k = \vec{0}$, то $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k) = \{\vec{0}\}$ и размерность такой линейной оболочки равна 0 (см. пример 4.1). Если хотя бы один из векторов $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ отличен от $\vec{0}$, то аналогично замечанию 3.2 построим систему векторов $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k$. Среди этих векторов хотя бы один отличен от $\vec{0}$. Обозначим через m количество ненулевых векторов этой системы. Без ограничения общности предположим, что $\vec{b}_1 \ne \vec{0},\dots,\vec{b}_m \ne \vec{0}$. Из определения линейной оболочки векторов следует, что $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k) = L(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m)$. Так как система векторов $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m$ линейно независима, она является базисом линейной оболочки $L(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m)$, а значит, и совпадающей с ней, линейной оболочки $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$. Таким образом, размерность векторного подпространства $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ равна m. □

Следствие 4.1. *Размерность линейной оболочки $L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ равна рангу матрицы, составленной из координат векторов $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$.*

Теорема 4.2. *Пусть $L \ne \{\vec{0}\}$ – произвольное векторное подпространство $n-$ мерного векторного пространства V^n. Тогда в L существует базис из k векторов $(k \le n)$.*

Доказательство. Так как $L \ne \{\vec{0}\}$, то существует вектор $\vec{a}_1 \in L$, $\vec{a}_1 \ne \vec{0}$. В силу свойства 4^0 векторных пространств (§ 1.) система, состоящая из одного вектора $\vec{a}_1$ будет линейно независимой. Если любая система, состоящая из двух векторов, принадлежащих L будет линейно зависимой, то будут выполняться аксиомы 9^0, 10^0 $n-$ мерного векторного пространства и L будет 1-мерным векторным подпространством. Система, состоящая из одного вектора $(\vec{a}_1)$ будет базисом L.

Если существует вектор $\vec{a}_2 \in L$, такой что система векторов $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ линейно независима, а любая система из трех векторов – линейно зависима, то L будет 2-мерным векторным пространством. При этом пара $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ будет базисом L и так далее. Этот процесс конечен, так как для векторного пространства V^n любая система из $n+1$ вектора линейно зависима. Таким образом, в L максимально может быть n линейно независимых векторов, следовательно, в L существует базис, содержащий не более n векторов. □

Теорема 4.3. *Любое векторное подпространство $L \ne \{\vec{0}\}$ векторного пространства V^n является линейной оболочкой любого своего базиса.*

Доказательство. Пусть L – векторное подпространство векторного пространства V^n. Рассмотрим произвольный базис $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ векторного подпространства L. Тогда по определению базиса для любого вектора $\vec{x} \in L$ получим $\vec{x} = x^p\vec{e}_p$ $(p = 1,\dots,k)$, то есть $\vec{x} \in L(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$. Обратно, пусть $\vec{x} \in L(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$. Тогда $\vec{x} = x^p\vec{e}_p$, следовательно, $\vec{x} \in L$ по определению векторного подпространства. Таким образом, $L = L(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$. □

Пусть $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ – базис векторного пространства V^n. Рассмотрим систему r линейных однородных уравнений, среди которых $(n-k)$ линейно независимых

$$b^p_i x^i = 0\,(p = 1,\dots,r) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^1_1x^1 + \ldots + b^1_nx^n = 0 \\ \ldots \\ b^r_1x^1 + \ldots + b^r_nx^n = 0. \end{cases} \quad . \tag{4.1}$$

Обозначим через $\vec{x}$ вектор, для которого координаты $(x^1,\dots,x^n)$ являются решением системы уравнений (4.1). Из курса алгебры известно, что множество L всех таких векторов образует $k-$ мерное векторное подпространство векторного пространства V^n.

Чтобы определить базис L, нужно найти фундаментальную систему решений для (4.1).

Пример 4.2. Пусть дано векторное пространство V^5, базис $E = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_5)$ в нем и векторное подпространство L, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + x^2 + x^3 - x^5 = 0 \\ 2x^3 - x^4 = 0 \\ 2x^2 - x^5 = 0 \end{cases} .$$

Найдем базис и размерность этого векторного подпространства. Для этого решим систему уравнений методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, в системе 3 линейно независимых уравнения, а значит, размерность векторного подпространства равна 5-3=2.

Найдем базис этого подпространства. Мы получили, что $x^1 = \frac{1}{2}(x^5 - x^4)$, $x^2 = \frac{1}{2}x^5$, $x^3 = \frac{1}{2}x^4$. Запишем фундаментальную систему решений:

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
-1	0	1	2	0
1	1	0	0	2

Итак, базис L состоит из двух векторов $\vec{a}_1(-1,0,1,2,0)$, $\vec{a}_2(1,1,0,0,2)$.

Пусть L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства векторного пространства V. Обозначим $L \cap \tilde{L}$ их пересечение.

Теорема 4.4. *Пересечение векторных подпространств является векторным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in L \cap \tilde{L}$ – произвольные векторы. Тогда $\vec{x} + \vec{y} \in L$, $\vec{x} + \vec{y} \in \tilde{L}$, так как L и $\tilde{L}$ являются векторными подпространствами. Тогда $\vec{x} + \vec{y} \in L \cap \tilde{L}$.

Второе условие из определения векторного подпространства проверяется аналогично.

Таким образом, пересечение двух векторных подпространств является векторным подпространством. □

Пусть L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства векторного пространства V. Обозначим множество всех векторов $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} \in L$, $\vec{y} \in \tilde{L}$ через $L + \tilde{L}$ и назовем *суммой векторных подпространств* L и $\tilde{L}$.

Теорема 4.5. *Сумма векторных подпространств является векторным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in L + \tilde{L}$ – произвольные векторы. Тогда $\vec{z}_1 = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$, $\vec{z}_2 = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \tilde{L}$. Складывая последние два равенства, получим $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2)$, где $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L$, $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in \tilde{L}$, так как L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства. Таким образом, $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in L + \tilde{L}$.

Второе условие из определения векторного подпространства проверяется аналогично.

Итак, $L + \tilde{L}$ является векторным подпространством по определению. □

Обозначим k, ℓ, s, I размерности векторных подпространств L, $\tilde{L}$, $L + \tilde{L}$, $L \cap \tilde{L}$ соответственно. Из курса алгебры известно, что

$$k + \ell = s + I \tag{4.2}$$

Задачи.

1. Пусть L_1, L_2 – произвольные векторные подпространства векторного пространства V. Докажите, что их объединение не является векторным подпространством.

3 10.2; 10.3; 10.6+найти базис;

§ 5. Линейные формы.

Пусть V^n – n– мерное векторное пространство. Рассмотрим отображение $u : V^n \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $\vec{x} \in V^n$ ставит в соответствие число $\alpha \in \mathbb{R}$. Если это отображение удовлетворяет условиям:
1) $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$;
2) $u(\alpha\vec{x}) = \alpha u(\vec{x})$
для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то отображение u называется *линейным отображением* или *линейной формой* или *ковектором.* Первое условие называется *аддитивностью*, а второе – *однородностью* отображения u. Вещественное число $u(\vec{x})$ называется *значением линейного отображения u на векторе $\vec{x}$.*

Условия аддитивности и однородности эквивалентны (докажите самостоятельно) выполнению условия

$$u(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha u(\vec{x})+\beta u(\vec{y})$$

для любых $\vec{x},\vec{y}\in V^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Оно называется *линейностью* отображения u.

Пример 5.1. Рассмотрим отображение $0:V^n\to\mathbb{R}$, заданное формулой $0(\vec{x})=0$ для любого вектора $\vec{x}$. Докажем, что это отображение линейно. В самом деле, для любых $\vec{x},\vec{y}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получим $0(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=\alpha 0(\vec{x})+\beta 0(\vec{y})$. Таким образом, условие линейности выполняется и отображение 0 является линейным.

Обозначим множество всех линейных отображений $u:V^n\to\mathbb{R}$ через V^*. Введем в этом множестве операции сложения линейных отображений и умножения линейного отображения на число по формулам:

$$(u+v)(\vec{x})=u(\vec{x})+v(\vec{x});\quad (\lambda u)(\vec{x})=\lambda(u(\vec{x}))$$

для любых $u,v\in V^*$, $\vec{x}\in V^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Лемма 5.1. *Введенные операции корректны, то есть $u+v$ и λu являются линейными отображениями.*

Доказательство. По определению операций сложения и свойству линейности получим $(u+v)(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=u(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})+v(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha u(\vec{x})+\beta u(\vec{y})+\alpha v(\vec{x})+\beta v(\vec{y})=\alpha(u(\vec{x})+v(\vec{x}))+\beta(u(\vec{y})+v(\vec{y}))=\alpha((u+v)(\vec{x}))+\beta((u+v)(\vec{y}))$. Таким образом, сумма отображений u и v является линейным отображением, то есть принадлежит V^*. Аналогично доказывается, что произведение линейного отображения на число также является линейным отображением (докажите самостоятельно). □

Теорема 5.1. *Множество V^* линейных отображений $u:V^n\to\mathbb{R}$ со введенными операциями сложения и умножения на число является векторным пространством.*

Доказательство. Нам нужно проверить выполнение 8 аксиом векторного пространства. Проверим, например, аксиому 1^0. Остальные проверяются аналогично.

Для любых $u,v\in V^*$, $\vec{x}\in V^n$ по определению суммы линейных отображений и свойствам сложения вещественных чисел получим $(u+v)(\vec{x})=u(\vec{x})+v(\vec{x})=v(\vec{x})+u(\vec{x})=(v+u)(\vec{x})$. Итак, мы получили, что $(u+v)(\vec{x})=(v+u)(\vec{x})$ для любого вектора $\vec{x}$. Так как два отображения $u+v$ и $v+u$ принимают одно и тоже значение на любом векторе $\vec{x}\in V^n$, то эти отображения равны по определению равенства отображений.

Заметим, что нуль-вектором в векторном пространстве V^* будет отображение $0:V\to\mathbb{R}$, построенное в примере 5.1. Докажите самостоятельно, что $u+0=u$ для любого $u\in V^*$.

Пусть $u\in V^*$ – произвольный элемент. Тогда через $(-u):V^n\to\mathbb{R}$ обозначим отображение, действующее по формуле $(-u)(\vec{x})=-(u(\vec{x}))$. Аналогично лемме 5.1 доказывается, что отображение $(-u)$ будет линейно, а значит, будет принадлежать множеству V^*. Докажите самостоятельно, что $u+(-u)=0$.

Итак, все 8 аксиом векторного пространства выполняются, а значит, множество V^* является векторным пространством. □

Пример 5.2. Пусть V^n – $n-$ мерное векторное пространство, $E=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ – произвольный базис V^n. Рассмотрим отображения $e^i:V^n\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$, которые каждому вектору $\vec{x}\in V$ ставят в соответствие его $i-$ ю координату в базисе E, то есть $e^i(\vec{x})=x^i$. В силу теоремы 3.1 эти отображения будут линейными. В самом деле, для любых $\vec{x},\vec{y}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получим $e^i(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha x^i+\beta y^i=\alpha e^i(\vec{x})+\beta e^i(\vec{y})$.

Найдем значения линейных отображений $e^1,\dots,e^n$ на векторах базиса E. Так как координаты вектора $\vec{e}_1(1,0,\dots,0)$, то $e^1(\vec{e}_1)=1$. Аналогично получим $e^2(\vec{e}_1)=0$, …, $e^n(\vec{e}_1)=0$. Рассматривая аналогичным образом остальные векторы базиса E, получим, что

$$e^i(\vec{e}_j)=\begin{cases}1, \text{ если } i=j;\\ 0, \text{ если } i\neq j.\end{cases}$$

Правую часть этого равенства обозначают δ^i_j и называют *дельтой Кронекера (первого порядка).*

Теорема 5.2. *Система линейных отображений $(e^1,\dots,e^n)$ является базисом векторного пространства V^*, а значит, V^* является $n-$ мерным векторным пространством.*

Доказательство. Докажем, что система $(e^1, \dots, e^n)$ линейно независима. Рассмотрим линейные отображения e^i $(i = 1, \dots, n)$, построенные в примере 5.2. Докажем, что система $(e^1, \dots, e^n)$ линейно независима. Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 e^1 + \ldots + \alpha_n e^n = 0 \tag{5.1}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. В левой и правой частях этого равенства стоят линейные отображения. Подействуем ими на вектор $\vec{e}_1$ базиса E (см. пример 5.2. В результате получим $\alpha_1 e^1(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n e^n(\vec{e}_1) = 0(\vec{e}_1)$, то есть $\alpha_1 = 0$. Аналогично, действуя обеими частями равенства (5.1) на остальные вектора базиса E, получим $\alpha_2 = 0$, …, $\alpha_n = 0$. Таким образом, система линейных отображений $(e^1, \dots, e^n)$ является линейно независимой и содержит n элементов, то есть аксиома 9^0 выполняется.

Докажем, что любое линейное отображение можно представить в виде линейной комбинации линейных отображений $(e^1, \dots, e^n)$. Рассмотрим произвольное линейное отображение u. Тогда для любого вектора $\vec{x} \in V^n$ по определению базиса (§ 1.) и свойству линейности получим $u(\vec{x}) = u(x^i \vec{e}_i) = x^i u(\vec{e}_i) = u(\vec{e}_i) e^i(\vec{x})$ (см. замечание 3.1). Обозначим числа $u(\vec{e}_i) = u_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда $u = u_i e^i$, то есть любое линейное отображение u является линейной комбинацией линейных отображений $(e^1, \dots, e^n)$.

Итак, система $(e^1, \dots, e^n)$ является базисом V^* по определению. □

Базис $(e^1, \dots, e^n)$ пространства V^* называется *дуальным базисом* векторного пространства V. Числа u_i, введенные в доказанной теореме называются *компонентами линейной формы* u в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Мы получили, что относительно дуального базиса координаты линейной формы совпадают с ее компонентами. В произвольном базисе это, вообще говоря, не верно.

Задачи.

1. Рассмотрим векторное пространство 2×2 матриц с базисом $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите значение линейной формы E^4 дуального базиса на матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – его ортонормированный базис. Докажите, что дуальный базис (u, v, w) будет задаваться формулами

$$u(\vec{x}) = \vec{x}\vec{i}; \quad v(\vec{x}) = \vec{x}\vec{j}; \quad w(\vec{x}) = \vec{x}\vec{k}.$$

3. $*$ Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – его базис, для которого $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 1$, а углы между парами этих векторов равны 60^0. Докажите, что

$$e^1(\vec{x}) = \tfrac{3}{2}\vec{x}\vec{e}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_3; \quad e^2(\vec{x}) = -\tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_1 + \tfrac{3}{2}\vec{x}\vec{e}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_3; \quad e^3(\vec{x}) = -\tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{x}\vec{e}_2 + \tfrac{3}{2}\vec{x}\vec{e}_3.$$

4. Будет ли линейной формой на векторном пространстве V^4 отображение, ставящее в соответствие каждому вектору сумму всех его координат в данном базисе? Если да, то найти координаты этой формы в дуальном базисе. Запишите формулу, по которой действует линейная форма, имеющая в дуальном базисе координаты $(1, 2, 3, 4)$.

5. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство, $\vec{a}$ – ненулевой фиксированный вектор. Рассмотрим отображение $u(\vec{x}) = \frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$. Докажите, что отображение u является линейной формой. Найдите ее координаты в дуальном базисе ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Какие будут координаты этой формы в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 1$, а углы между парами этих векторов равны 60^0?

§ 6. Билинейные формы.

Билинейная форма – это обобщение скалярного произведения геометрического векторного пространства.

Пусть V^n – $n-$ мерное векторное пространство. *Билинейной формой* называется отображение $g : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, то есть

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z}); \quad g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z}),$$

для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Число $g(\vec{x}, \vec{y})$ будем называть *значением билинейной формы g на векторах $\vec{x}, \vec{y}$.*

Билинейная форма g называется *симметрической*, если $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V^n$.

Пример 6.1. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Тогда скалярное произведение векторов определяет симметрическую билинейную форму $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ по формуле $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Пусть $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – произвольный базис V^n, g – произвольная билинейная форма. Обозначим значения билинейной формы g на векторах $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ базиса E через g_{ij}, то есть $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Составим из этих чисел матрицу G: первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца. Матрица G называется *матрицей билинейной формы* g. Ранг матрицы G называется *рангом* билинейной формы g.

Лемма 6.1. *Ранг билинейной формы не зависит от выбора базиса, а значит, определен корректно.*

Доказательство. Пусть дан еще один базис $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Обозначим матрицу билинейной формы g в этом базисе через $\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij})$. Обозначим координаты векторов $\vec{a}_i$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$ в базисе E через $(C_i^1, \ldots, C_i^n)$, то есть $\vec{a}_i = C_i^k \vec{e}_k$. Тогда $\tilde{g}_{ij} = g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = g(C_i^k \vec{e}_k, C_j^l \vec{e}_l) = C_i^k C_j^l g(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = C_i^k C_j^l g_{kl}$. Итак,

$$\tilde{g}_{ij} = C_i^k g_{kl} C_j^l. \tag{6.1}$$

Договоримся записывать координаты векторов базиса A в матрицу по столбцам. Тогда получим матрицу $C = (C_j^i)$, в которой верхний индекс обозначает номер строки матрицы C, а нижний индекс – номер столбца. Учитывая правило умножения матриц, получим из (6.1)

$$\tilde{G} = C^T G C,$$

где C^T – транспонированная матрица для C. Так как векторы базиса A линейно независимы, матрицы C и C^T не вырождены. Из алгебры известно, что при умножении матрицы на невырожденную матрицу ранг не изменяется. Таким образом, ранг матрицы $\tilde{G}$ равен рангу матрицы G, а значит, ранг билинейной формы не зависит от выбора базиса. □

Теорема 6.1. *Пусть дан произвольный базис* $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *в* V *и матрица* $G = (g_{ij})$ *билинейной формы* g*. Тогда*

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j,$$

где $\vec{x}(x^1, \ldots, x^n)$, $\vec{y}(y^1, \ldots, y^n)$.

Доказательство. По определению координат вектора имеем $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$. В силу свойства линейности g по обоим аргументам получим $g(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j) = x^i y^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} x^i y^j$. □

Пример 6.2. Пусть g – произвольная билинейная форма. Фиксируем произвольный базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства V^n. Очевидно, что $\vec{0}(0, \ldots, 0)$. Обозначим $\vec{y}(y^1, \ldots, y^n)$. Тогда $g(\vec{0}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n g_{ij} \cdot 0 \cdot y^j = 0$.

Пример 6.3. Пусть даны V^2 – 2-мерное векторное пространство, базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и матрица $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ билинейной формы g в нем. Определим ранг билинейной формы g и вычислим ее значение на векторах $\vec{x}(1, 1)$ и $\vec{y}(-1, 1)$.

Как известно из курса алгебры, чтобы определить ранг матрицы, нужно привести ее к ступенчатому виду. Тогда количество ненулевых строк будет равно рангу матрицы. Матрица G уже приведена к ступенчатому виду, а значит, ее ранг и ранг соответствующей билинейной формы равен 2. Вычислим значение $g(\vec{x}, \vec{y})$, используя теорему 6.1: $g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = g_{11} x^1 y^1 + g_{12} x^1 y^2 + g_{21} x^2 y^1 + g_{22} x^2 y^2 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.

Будем говорить, что векторы $\vec{a}, \vec{b} \in V^n$ сопряжены относительно симметрической билинейной формы g, если $g(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Пусть дано произвольное $k-$ мерное векторное подпространство L^k $n-$ мерного векторного пространства V^n $(2 \leq k \leq n)$. Базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ векторного подпространства L называется *базисом сопряженных векторов относительно симметрической билинейной формы* g, если вектора базиса E попарно сопряжены относительно g.

Теорема 6.2. *В любом* $k-$ *мерном векторном подпространстве* L^k *векторного пространства* V *существует базис сопряженных векторов.*

Доказательство. 1. Пусть для любого вектора $\vec{a} \in L^k$ $g(\vec{a},\vec{a}) = 0$. Докажем, что в этом случае любой базис будет базисом сопряженных векторов. Действительно, пусть $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ – произвольный базис. Для любого вектора $\vec{e}_i+\vec{e}_j$, $i\neq j$; $i,j=1,\dots,k$ получим $g(\vec{e}_i+\vec{e}_j,\vec{e}_i+\vec{e}_j)=0$. В силу линейности и симметричности билинейной формы g получим $g(\vec{e}_i,\vec{e}_i)+2g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)+g(\vec{e}_j,\vec{e}_j)=0$, то есть $g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=0$ для любых различных $i,j=1,\dots,k$. Таким образом, $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ является базисом сопряженных векторов.

2. Пусть существует вектор $\vec{a}\in L^k$, такой что $g(\vec{a},\vec{a})\neq 0$. Тогда согласно примеру 6.2 $\vec{a}\neq\vec{0}$. Докажем теорему методом математической индукции.

Пусть $k=2$. Тогда по теореме 4.2 в векторном подпространстве L^2 существует базис $A=(\vec{a},\vec{b})$, где $g(\vec{a},\vec{a})\neq 0$. Используя базис A построим базис $E=(\vec{a},\vec{e}_2)$ сопряженных векторов. Пусть

$$\vec{e}_2=\vec{b}-\lambda\vec{a}. \tag{6.2}$$

Найдем число λ, такое что $g(\vec{a},\vec{e}_2)=0$. С учетом (6.2)имеем $0=g(\vec{a},\vec{e}_2)=g(\vec{b},\vec{a})-\lambda g(\vec{a},\vec{a})$, то есть $\lambda=\frac{g(\vec{b},\vec{a})}{g(\vec{a},\vec{a})}$. Непосредственно проверяется, что для такого λ $g(\vec{a},\vec{e}_2)=0$. Итак, для векторного подпространства L^2 базис сопряженных векторов существует.

Пусть базис сопряженных векторов существует для любого векторного подпространства L^{k-1}. Докажем, что такой базис существует для векторного подпространства L^k. Рассмотрим произвольный базис $A=(\vec{a},\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_k)$ в пространстве L^k, где $g(\vec{a},\vec{a})\neq 0$. Рассмотрим множество L векторов $\vec{x}\in L^k$, таких что $g(\vec{x},\vec{a})=0$. Пусть в базисе A вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(x^1,\dots,x^k)$. Тогда множество L задается уравнением $g(x^1\vec{a}+x^2\vec{a}_2+\ldots+x^k\vec{a}_k,\vec{a})=0$ или $g_{11}x^1+g_{12}x^2+\ldots+g_{1k}x^k=0$. Так как $g_{11}=g(\vec{a},\vec{a})\neq 0$, то это линейное однородное уравнение. Тогда (§ 4.) L является $(k-1)-$ мерным векторным подпространством в L^k. По предположению индукции для него существует базис $(\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_k)$ сопряженных векторов.

Докажем, что система векторов $E=(\vec{a},\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_k)$ будет базисом сопряженных векторов для векторного подпространства L^k.

Предположим, что система векторов E линейно зависима. Так как система векторов $(\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_k)$ – линейно независима, по следствию 2.1 получим $\vec{a}=a^2\vec{e}_2+\ldots+a^k\vec{e}_k$, то есть $\vec{a}$ принадлежит L^{k-1}. Следовательно, $g(\vec{a},\vec{a})=0$, что противоречит выбору вектора $\vec{a}$. Таким образом, система векторов E линейно независима, а значит, по следствию 2.2 является базисом векторного подпространства L^k. Очевидно, что это базис сопряженных векторов. □

Задачи.

1. Пусть g – билинейная форма. Докажите, что $g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z},\vec{w})=\alpha g(\vec{x},\vec{w})+\beta g(\vec{y},\vec{w})+\gamma g(\vec{z},\vec{w})$ для любых $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{w}\in V$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

2. Докажите, что билинейная форма является симметрической тогда и только тогда, когда ее матрица симметрическая.

3. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Обозначим через g скалярное произведение векторов в V^3. Найдите матрицу билинейной формы g в 1) ортонормированном базисе; 2) в базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, где $|\vec{e}_1|=a$, $|\vec{e}_2|=b$, $|\vec{e}_3|=c$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\gamma$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\alpha$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=\beta$.

3 10.10; 10.12;

§ 7. Аффинное пространство.

Построим многомерное обобщение нашего окружающего трехмерного пространства.

7.1.

Пусть дано $n-$ мерное векторное пространство V^n и непустое множество $\mathscr{A}$ произвольной природы. Зададим отображение

$$\sigma:\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to V^n$$

удовлетворяющее двум условиям:
1) для любого элемента $X\in\mathscr{A}$ и любого вектора $\vec{p}\in V^n$ существует единственный элемент $Y\in\mathscr{A}$, такой что $\sigma(X,Y)=\vec{p}$;
2) для любых элементов $X,Y,Z\in\mathscr{A}$

$$\sigma(X,Y)+\sigma(Y,Z)=\sigma(X,Z).$$

В этом случае будем называть множество $\mathscr{A}$ $n-$ *мерным аффинным пространством*, его элементы – *точками*, а условия, которым удовлетворяет отображение σ, – *аксиомами аффинного пространства.* Векторное пространство V^n называется *пространством трансляций* аффинного пространства $\mathscr{A}$.

Замечание 7.1. 1. Договоримся обозначать $\sigma(X,Y)=\overrightarrow{XY}$.
2. Договоримся обозначать точки большими латинскими буквами, если речь идет об абстрактном аффинном пространстве. В конкретных примерах аффинных пространств мы будем следовать традициям обозначений элементов этих множеств, если это не приводит к недоразумениям.

Пример 7.1. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Обозначим через E^3 точечное пространство, рассмотренное в главе 1. Отображение σ определяется следующим образом: любой паре точек $X,Y\in E^3$ ставится в соответствие направленный отрезок $\overline{XY}$, который однозначно определяет вектор $\overrightarrow{XY}\in V^3$. Тогда первая аксиома аффинного пространства для ненулевого вектора $\vec{p}$ выполняется в силу леммы **??** (Глава 1), а для нуль-вектора она очевидна. Вторая аксиома является правилом треугольника, а значит, выполняется в V^3. Таким образом, множество E^3, с введенным отображением σ, является аффинным пространством.

Теорема 7.1. *Любое $n-$ мерное векторное пространство V^n является $n-$ мерным аффинным пространством с пространством трансляций V^n.*

Доказательство. Пусть $\vec{x},\vec{y}$ – произвольные точки из V^n. Зададим отображение $\sigma: V^n\times V^n\to V^n$ по формуле $\sigma(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}-\vec{x}$.

Проверим, что для отображения σ выполняются обе аксиомы аффинного пространства.

Рассмотрим произвольную точку $\vec{x}\in V^n$ и произвольный вектор $\vec{p}\in V^n$. Пусть $\vec{y}=\vec{x}+\vec{p}$. Тогда $\sigma(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}-\vec{x}=\vec{x}+\vec{p}-\vec{x}=\vec{p}$. Если существует еще одна точка $\vec{y}_1\in V^n$, такая что $\sigma(\vec{x},\vec{y}_1)=\vec{p}$, то $\vec{y}_1-\vec{x}=\vec{p}$. Так как $\vec{y}-\vec{x}=\vec{p}$, то, вычитая из первого равенства второе получим $\vec{y}_1=\vec{y}$. Таким образом, точка $\vec{y}\in V^n$ единственна, а значит, первая аксиома аффинного пространства выполняется.

Пусть $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^n$ – произвольные точки. Тогда с учетом аксиом векторного пространства получим $\sigma(\vec{x},\vec{y})+\sigma(\vec{y},\vec{z})=\vec{y}-\vec{x}+\vec{z}-\vec{y}=\vec{z}-\vec{y}=\sigma(\vec{y},\vec{z})$. □

Пример 7.2. Векторное пространство $2\times 2-$ матриц (см. примеры 1.2, 2.2) является еще и 4-мерным аффинным пространством.

Свойства аффинных пространств.

1^0. Для любой точки $A\in\mathscr{A}$ имеем $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Доказательство. Во второй аксиоме аффинного пространства положим $X=Y=A$. Тогда получим $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AZ}$. По аксиоме 3^0 векторного пространства (§ 1.) получим, что $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. □

2^0. Если $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, то $A=B$.

Доказательство. Так как по свойству 1^0 $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, по первой аксиоме аффинного пространства получим $B=A$. □

Следствие 7.1. *Если для некоторой точки $A\in\mathscr{A}$ имеем $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AY}$, то $X=Y$.*

3^0. Для любых точек $A,B\in\mathscr{A}$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Доказательство. Во второй аксиоме аффинного пространства положим $X=Z=A$, $Y=B$. Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Так как по свойству 1^0 аффинных пространств $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, по аксиоме 4^0 векторного пространства получим, что $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. □

Будем называть *фигурой* любое множество точек из аффинного пространства $\mathscr{A}$. Рассмотрим несколько примеров фигур в аффинном пространстве.

Пусть даны две различные точки $A,B\in\mathscr{A}$. *Отрезком* называется множество всех точек $X\in\mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, $0\le t\le 1$. Обозначение $[AB]$. Точки A и B называются *концами отрезка* $[AB]$, а остальные точки отрезка называются *внутренними точками отрезка* $[AB]$.

Простым отношением трех точек A,B,C, принадлежащих аффинному пространству $\mathscr{A}$ называется число λ, такое что $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. Обозначение (AB,C).

Серединой отрезка $[AB]$ называется точка C, такая что простое отношение $(AB,C)=1$.

Пусть дана точка $A \in \mathscr{A}$ и вектор $\vec{a} \in V$. *Лучом с началом в точке A и направляющем вектором $\vec{a}$* называется множество всех точек $X \in \mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX} = t\vec{a}$ для любого числа $t \geq 0$. Точка A называется *началом луча.* Обозначение h или $[AB)$, где B – точка принадлежащая лучу.

Углом называется пара различных лучей $[AB)$ и $[AC)$ с общим началом A. Обозначение $\angle BAC$.

Пусть дана линейно независимая система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ в пространстве трансляций V^n аффинного пространства $\mathscr{A}$ и точка $A_0 \in \mathscr{A}$. *$k-$ симплексом* называется множество всех точек $X \in \mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + \ldots + t^k\vec{a}_k$, $t^1 \geq 0, \ldots, t^k \geq 0$, $t^1 + \ldots + t^k \leq 1$. Обозначим через A_1 точку $k-$ симплекса, получающуюся при $t^1 = 1$, $t^2 = 0, \ldots, t^k = 0$; через A_2 точку $k-$ симплекса, получающуюся при $t^1 = 0$, $t^2 = 1, \ldots, t^k = 0$; и так далее. Наконец, обозначим A_k точку, для которой $t^1 = 0$, $t^2 = 0, \ldots, t^k = 1$. Точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ называются *вершинами* $k-$ симплекса. Будем обозначать $k-$ симплекс следующим образом: $A_0A_1 \ldots A_k$. Отрезки $[A_iA_j]$, $i \neq j$; $i, j = 0, \ldots, k$ называются *ребрами* $k-$ симплекса.

Пример 7.3. Выясним, чем является 1-симплекс. По определению получим, что 1-симплекс – это множество всех точек аффинного пространства $\mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1$, $t^1 \geq 0$, $t^1 \leq 1$. По определению это множество является отрезком с концами A_0 и A_1.

Будем называть 2-симплекс *треугольником*, а его ребра – *сторонами.*

Пусть дана линейно независимая система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ в пространстве трансляций V^n аффинного пространства $\mathscr{A}$ и точка $A_0 \in \mathscr{A}$. *$k-$ параллелепипедом* называется множество всех точек $X \in \mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + \ldots + t^k\vec{a}_k$, $0 \leq t^1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t^k \leq 1$. Если $t^i = 0$ или 1 для любого $i = 1, \ldots, k$, то соответствующая точка X называется *вершиной* $k-$ параллелепипеда. Отрезок $[XY]$, где X, Y – вершины $k-$ параллелепипеда, называется *ребром* $k-$ параллелепипеда, если $\overrightarrow{XY} = \vec{a}_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, k$.

Договоримся обозначать вершины $k-$ параллелепипеда, отличные от A_0, следующим образом: $A_{j_1 \ldots j_r}$, если $\overrightarrow{A_0A_{j_1\ldots j_r}} = \vec{a}_{j_1} + \ldots + \vec{a}_{j_r}$; $r, j_1, \ldots, j_r = 1, \ldots, k$, $j_1 < \ldots < j_r$. $k-$ параллелепипед будем обозначать, перечисляя его вершины, $A_0A_1 \ldots A_{12\ldots k}$. Отрезок $[A_0A_{1\ldots k}]$ и отрезки $[A_{j_1\ldots j_r}A_{j_{r+1}\ldots j_k}]$, где $j_1, \ldots, j_k$ составляют перестановку чисел $1, \ldots, k$, называются *диагоналями* $k-$ параллелепипеда.

Очевидно, что 1-параллелепипед – это отрезок $[A_0A_1]$.

Будем называть 2-параллелепипед *параллелограммом*, а его ребра – *сторонами.* Согласно введенной договоренности параллелограмм будет обозначаться $A_0A_1A_2A_{12}$. Отрезки $[A_0A_{12}]$ и $[A_1A_2]$ являются диагоналями параллелограмма.

7.2.

Пусть дана произвольная точка $O \in \mathscr{A}$ и произвольный базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ в пространстве трансляций V^n. Множество $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется *аффинной системой координат* в аффинном пространстве $\mathscr{A}$. Точка O называется *началом* аффинной системы координат I.

Рассмотрим произвольную точку $M \in \mathscr{A}$. Назовем вектор $\overrightarrow{OM}$ *радиус-вектором* точки M. Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называются *координатами* точки M в аффинной системе координат $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Обозначение $M(x^1, \ldots, x^n)$, где $\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n$.

Теорема 7.2. *Пусть даны $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – произвольная аффинная система координат, $A, B \in \mathscr{A}$ – произвольные точки. Обозначим их координаты $A(a^1, \ldots, a^n)$, $B(b^1, \ldots, b^n)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(b^1 - a^1, \ldots, b^n - a^n)$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.*

Доказательство. По определению координат точки имеем $\overrightarrow{OA} = a^1\vec{e}_1 + \ldots + a^n\vec{e}_n$, $\overrightarrow{OB} = b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n$. Тогда по второй аксиоме аффинного пространства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -a^1\vec{e}_1 - \ldots - a^n\vec{e}_n + b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n = (b^1 - a^1)\vec{e}_1 + \ldots + (b^n - a^n0\vec{e}_n$. По определению координат вектора (§ 1.) это означает, что $\overrightarrow{AB}(b^1 - a^1, \ldots, b^n - a^n)$. □

7.3.

Пусть даны две аффинные системы координат $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и $II = (O', \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Обозначим координаты точки O' в системе координат I через $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, а координаты векторов $\vec{a}_i$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ через $(C_i^1, \ldots, C_i^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$. По определению координат точки и вектора это означает, что

$$\overrightarrow{OO'} = x_0^i\vec{e}_i; \quad \vec{a}_i = C_i^j\vec{e}_j. \tag{7.1}$$

Пусть произвольная точка $M \in \mathscr{A}$ имеет координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в системе координат I и $(y^1, \ldots, y^n)$ в системе координат II. Получим равенства, которые связывают между собой координаты точки M в системах координат I и II.

По определению координат точки имеем

$$\overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i; \quad \overrightarrow{O'M} = y^i\vec{a}_i, \tag{7.2}$$

$i, j = 1, \dots, n$. По второй аксиоме аффинного пространства получим $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Подставим в это равенство выражения (7.1) и (7.2): $x^i\vec{e}_i = y^i\vec{a}_i + x_0^i\vec{e}_i$ или $x^i\vec{e}_i = y^iC_i^j\vec{e}_j + x_0^i\vec{e}_i$. Так как индекс суммирования обозначается любой буквой, в первой группе слагаемых правой части предыдущего равенства поменяем местами индексы суммирования i и j: $x^i\vec{e}_i = y^jC_j^i\vec{e}_i + x_0^i\vec{e}_i$. Теперь мы можем воспользоваться аксиомами векторного пространства (§ 1.): $(x^i - y^jC_j^i - x_0^i)\vec{e}_i = \vec{0}$. В силу линейной независимости базисных векторов (§ 1.), получим

$$x^i = C_j^iy^j + x_0^i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1 = C_1^1y^1 + C_2^1y^2 + \ldots + C_n^1y^n + x_0^1; \\ \ldots \\ x^n = C_1^ny^1 + C_2^ny^2 + \ldots + C_n^ny^n + x_0^n. \end{cases} \tag{7.3}$$

Эти равенства называются *формулами перехода от аффинной системы координат I к аффинной системе координат II*.

Пусть дана произвольная аффинная система координат I и формулы вида (7.3), для которых определитель $|C| \neq 0$, $C = (C_j^i)$. Тогда однозначно определяется аффинная система координат $II = (O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, где $O'(x_0^1, \dots, x_0^n)$, $\vec{a}_i(C_i^1, \dots, C_i^n)$, и (7.3) будут формулами перехода от I к II.

Замечание 7.2. Формулы перехода от системы координат $I = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к системе координат $II = (O', \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, то есть при переходе от системы координат I к системе координат II меняется только начало системы координат, имеют вид: $x^1 = y^1 + x_0^1, \dots, x^n = y^n + x_0^n$.

Задачи.

1. Докажите, что отрезки $[AB]$ и $[BA]$ совпадают.

2. Докажите, что луч и отрезок являются частями прямой.

3. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны две точки A, B и дано вещественное число λ, отличное от -1. Докажите, что существует единственная точка C, такая что простое отношение $(AB, C) = \lambda$.

4. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и три точки $A(a^1, \dots, a^n)$, $B(b^1, \dots, b^n)$, $C(c^1, \dots, c^n)$, такие что их простое отношение $(AB, C) = \lambda$. Докажите, что
$$c^1 = \tfrac{a^1 + \lambda b^1}{1+\lambda}; \quad \ldots \quad c^n = \tfrac{a^n + \lambda b^n}{1+\lambda}.$$

5. Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и две точки $A(a^1, \dots, a^n)$, $B(b^1, \dots, b^n)$. Докажите, что координаты $(c^1, \dots, c^n)$ середины C отрезка $[AB]$ вычисляются по формулам
$$c^1 = \tfrac{a^1 + b^1}{2}; \quad \ldots \quad c^n = \tfrac{a^n + b^n}{2}$$

6. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (§ 7.).

7. Докажите, что диагонали 4-параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
   Решение. Пусть дан 4-параллелепипед $A_0A_1 \ldots A_{1234}$. Его диагоналями будут являться отрезки $[A_0A_{1234}]$, $[A_{12}A_{34}]$, $[A_{13}A_{24}]$, $A_{14}A_{23}]$, $[A_1A_{234}]$, $[A_2A_{134}]$, $[A_3A_{124}]$, $[A_4A_{123}]$.

   Докажем, что диагонали $[A_0A_{1234}]$ и $[A_{12}A_{34}]$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим аффинную систему координат $(A_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. По определению 4-параллелепипеда (см. § 7.) имеем
$$\overrightarrow{A_0A_{1234}} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4; \quad \overrightarrow{A_0A_{12}} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2; \quad \overrightarrow{A_0A_{34}} = \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

   Тогда $A_0(0,0,0,0)$, $A_{1234}(1,1,1,1)$, $A_{12}(1,1,0,0)$, $A_{34}(0,0,1,1)$. По формуле $(*)$ найдем координаты середины O отрезка $[A_0A_{1234}]$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Аналогично координаты середина $\tilde{O}$ отрезка $[A_{12}A_{34}]$ имеет координаты $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Так как координаты точек O и $\tilde{O}$ совпадают, то совпадают и сами точки.

   Для остальных диагоналей 4-параллелепипеда доказательство аналогично.

8. Докажите, что диагонали n- параллелепипеда пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам.

9. Докажите, что для геометрического векторного пространства V^3 2-симплекс – это объединение треугольника и его внутренних точек; 3-симплекс – это объединение тетраэдра и его внутренних точек.

10. Докажите, что для геометрического векторного пространства V^3 2-параллелепипед – это объединение параллелограмма и его его внутренних точек.

§ 8. $k-$ плоскости в аффинном пространстве.

Пусть $\mathscr{A}$ – $n-$ мерное аффинное пространство, V^n – его пространство трансляций. Фиксируем векторное подпространство L^k в векторном пространстве V^n $(k \geq 1)$ и точку $A \in \mathscr{A}$. *$k-$ плоскостью* (или *многомерной плоскостью*), проходящей через точку A и имеющей направляющее подпространство L^k, называется множество всех точек X аффинного пространства $\mathscr{A}$, таких что $\overrightarrow{AX} \in L^k$. Обозначение $\sigma = [A, L^k]$. Число k будем называть *размерностью $k-$ плоскости.*

Замечание 8.1. Легко показать (докажите самостоятельно), что определение $k-$ плоскости корректно, то есть не зависит от выбора точки A, принадлежащей этой плоскости.

1-плоскость называется *прямой.* Из определения $k-$ плоскости следует, что направляющее подпространство прямой одномерно, а значит, однозначно определяется любым своим ненулевым вектором. Любой ненулевой вектор направляющего подпространства прямой называется *направляющим вектором прямой.* Таким образом, любая прямая однозначно задается любой своей точкой и направляющим вектором.

$(n-1)-$ плоскость называется *гиперплоскостью.*

Пусть M – произвольная точка $k-$ плоскости $\sigma = [A, L^k]$. Обозначим $(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_k)$ произвольный базис векторного подпространства L^k. Тогда по определению $k-$ плоскости $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AM} \in L^k$, то есть существуют числа $t^1, \ldots, t^k \in \mathbb{R}$, такие что

$$\overrightarrow{AM} = t^1\vec{p}_1 + \ldots + t^k\vec{p}_k. \tag{8.1}$$

Это равенство называется *векторным параметрическим* уравнением $k-$ плоскости. Величины $t^1, \ldots, t^k$ называются *параметрами.*

Заметим, что количество параметров в векторном параметрическом уравнении плоскости равно размерности этой плоскости.

Фиксируем в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ аффинную систему координат $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Обозначим координаты точки $A(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, координаты векторов $\vec{p}_a(p_a^1, \ldots, p_a^n)$, $a = 1, \ldots, k$ и координаты точки $M(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда (8.1) с учетом теоремы 3.1 и следствия 3.1 получим систему

$$x^i = x_0^i + p_a^i t^a; (i = 1, \ldots, n; a = 1, \ldots, k) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1 = x_0^1 + p_1^1 t^1 + \ldots + p_k^1 t^k \\ \ldots \\ x^n = x_0^n + p_1^n t^1 + \ldots + p_k^n t^k \end{cases} \tag{8.2}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* $k-$ плоскости.

Пусть направляющее подпространство L^k $k-$ плоскости σ задано системой линейно независимых линейных однородных уравнений (§ 4.)

$$a_i^\alpha p^i = 0, \tag{$*$}$$

$\alpha = 1, \ldots, n-k$, $i = 1, \ldots, n$, где $(p^1, \ldots, p^n)$ обозначают координаты произвольного вектора. Тогда произвольная точка $M(x^1, \ldots, x^n)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AM} \in L^k$, то есть координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ удовлетворяют системе уравнений $(*)$, то есть $a_i^\alpha(x^i - x_0^i) = 0$. Обозначим числа $(-a_i^\alpha x_0^i) = b^\alpha$. Тогда последняя система уравнений примет вид

$$a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0 \, (i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, n-k) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n + b^1 = 0 \\ \ldots \\ a_1^{n-k} x^1 + \ldots + a_n^{n-k} x^n + b^{n-k} = 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Эти уравнения называются *системой общих уравнений* $k-$ плоскости σ.

Теорема 8.1. *Пусть $I = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – произвольная аффинная система координат в аффинном пространстве $\mathscr{A}$. Тогда любая совместная линейно независимая система линейных уравнений*

$$a_i^\alpha x^i + b^\alpha = 0 \tag{8.4}$$

$(i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, n-k)$ *является системой общих уравнений* $k-$ *плоскости* σ*, направляющее подпространство* L^k *которой задается системой уравнений*

$$a_i^\alpha p^i = 0 \tag{8.5}$$

относительно базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$*).*

Доказательство. Так как система (8.4) совместна, у нее существует решение $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Обозначим через A точку с координатами $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в системе координат I. Система уравнений (8.5) задает $k-$ мерное векторное подпространство (§ 4.), которое обозначим L^k. Тогда точка A и векторное подпространство L^k определяют плоскость σ. Система ее общих уравнений имеет вид (8.3), то есть совпадает с системой уравнений (8.4). Таким образом, (8.4) задает плоскость σ. □

Задачи.

1. Докажите, что любая $k-$ плоскость является $k-$ мерным аффинным пространством.
2. 3. 10.34; 10.35; 10.37; 10.40 – 10.44;

§ 9. Взаимное расположение двух многомерных плоскостей.

Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ даны две плоскости: $k-$ плоскость $\sigma_k = [A, L^k]$ и $\ell-$ плоскость $\sigma_\ell = [B, L^\ell]$ $(k \leq \ell)$. Обозначим пересечение $L^k \cap L^\ell$ через L^I. Согласно доказанному в § 4. это множество является $I-$ мерным векторным подпространством.

Будем говорить, что две многомерные плоскости *совпадают*, если они совпадают как множества точек. Обозначение $\sigma_\ell = \sigma_k$.

Будем говорить, что *$\ell-$ плоскость σ_ℓ содержится в $k-$ плоскости σ_k*, если они не совпадают и любая точка $\ell-$ плоскости σ_ℓ принадлежит $k-$ плоскости σ_k. Обозначение $\sigma_\ell \subset \sigma_k$.

Будем говорить, что *$\ell-$ плоскость σ_ℓ пересекается с $k-$ плоскостью σ_k*, если ни одна из них не содержит другую и эти плоскости имеют общие точки.

Если плоскости σ_k и σ_ℓ не имеют общих точек, то возможны следующие случаи:
1) направляющие подпространства L^ℓ и L^k имеют общим только нуль-вектор. Тогда плоскости σ_k и σ_ℓ называются *скрещивающимися.*
2) направляющее подпространство L^k содержится в L^ℓ. Тогда плоскости σ_k и σ_ℓ называются *абсолютно параллельными* (или, короче, *параллельными*).
3) направляющие подпространства L^ℓ и L^k пересекаются по векторному подпространству L^I, $0 < I < k$. Тогда плоскости σ_k и σ_ℓ называются *частично параллельными*, а число I называется *индексом параллельности.*

Теорема 9.1. *Пусть плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются и их направляющие подпространства имеют общим только нуль-вектор. Тогда плоскости σ_k и σ_ℓ имеют единственную общую точку.*

Доказательство. Так как пересечение плоскостей σ_k и σ_ℓ не пусто, то существует хотя бы одна точка A, принадлежащая им. Докажем, что других общих точек они не имеют. Предположим противное. Пусть существует еще одна точка B, принадлежащая обеим плоскостям. Тогда по определению многомерной плоскости (§ 8.) ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит и направляющему подпространству L^k, и направляющему подпространству L^ℓ, то есть их пересечение содержит ненулевой вектор. Это противоречит условию, а значит, плоскости σ_k и σ_ℓ имеют единственную общую точку. □

Теорема 9.2. *Пусть плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются и их направляющие подпространства пересекаются по векторному подпространству L^I, $I \neq 0$. Тогда плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются по $I-$ плоскости σ_I.*

Доказательство. Так как плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются, они имеют хотя бы одну общую точку. Обозначим ее A. Тогда данные плоскости могут быть заданы как $\sigma_k = [A, L^k]$, $\sigma_\ell = [A, L^\ell]$. Рассмотрим $I-$ плоскость $\sigma_I = [A, L^I]$. Нам нужно доказать, что

$$\sigma_k \cap \sigma_\ell = \sigma_I.$$

Пусть $M \in \sigma_I$ – произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{AM} \in L^I$, а значит, $\overrightarrow{AM} \in L^k$ и $\overrightarrow{AM} \in L^\ell$. Откуда по определению многомерной плоскости получим, что $M \in \sigma_k$ и $M \in \sigma_\ell$, то есть $\sigma_I \subset \sigma_k \cap \sigma_\ell$.

Обратно, пусть $M \in \sigma_k \cap \sigma_\ell$ – произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{AM} \in L^k \cap L^\ell$, то есть $\overrightarrow{AM} \in L^I$, а значит, $M \in \sigma_I$. Таким образом, $\sigma_k \cap \sigma_\ell \subset \sigma_I$. □

Обозначим L^s сумму векторных подпространств L^k и L^ℓ (§ 4.).

Теорема 9.3. *Плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются тогда и только тогда, когда для любой точки $A \in \sigma_k$ и любой точки $B \in \sigma_\ell$ вектор $\overrightarrow{AB} \in L^s$.*

Доказательство. Пусть пересечение плоскостей σ_k и σ_ℓ не пусто. Тогда существует точка $M \in \sigma_k \cap \sigma_\ell$, а значит, плоскости можно задать как $\sigma_k = [M, L^k]$, $\sigma_\ell = [M, L^\ell]$.

Рассмотрим произвольную точку $A \in \sigma_k$ и произвольную точку $B \in \sigma_\ell$. Тогда $\overrightarrow{AM} \in L^k$, следовательно, $\overrightarrow{AM} \in L^s$. Аналогично получим $\overrightarrow{MB} \in L^s$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \in L^s$.

Обратно, пусть для любой точки $A \in \sigma_k$ и любой точки $B \in \sigma_\ell$ следует, что $\overrightarrow{AB} \in L^s$. Докажем, что существует точка M, принадлежащая обеим плоскостям σ_k и σ_ℓ. По определению суммы подпространств получим, что $\overrightarrow{AB} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p} \in L^k$, $\vec{q} \in L^\ell$. По первой аксиоме аффинного пространства (§ 7.) для точки A и вектора $\vec{p}$ существует единственная точка $P \in \mathscr{A}$, такая что $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$. Аналогично для точки B и вектора $-\vec{q}$ существует точка $Q \in \mathscr{A}$, такая что $\overrightarrow{BQ} = -\vec{q}$. По определению многомерной плоскости (§ 8.) получим, что $P \in \sigma_k$, $Q \in \sigma_\ell$.

Нам осталось доказать, что точки P и Q совпадают. Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{p} + \vec{q} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BQ}$, то $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ}$. Тогда по первой аксиоме аффинного пространства (§ 7.) $P = Q$. Эта точка является общей для плоскостей σ_k и σ_ℓ, так как по доказанному $P \in \sigma_k$, $Q \in \sigma_\ell$. $\square$

Пусть даны две плоскости $\sigma_k = [A, L^k]$ и $\sigma_\ell = [B, L^\ell]$. Обозначим $I = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ – произвольный базис в L^k; $II = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_\ell)$ – произвольный базис L^ℓ. Теоремы 9.1, 9.2, 9.3 позволяют определит взаимное расположение данных плоскостей следующим образом:

1. Запишем координаты векторов базисов I и II по строкам в одну матрицу C и определим ее ранг. Это число s.
2. Вычислим индекс параллельности по формуле (4.2).
3. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и допишем строкой в матрицу C. Обозначим полученную матрицу через $\tilde{C}$. Определим ранг $\tilde{C}$. Если ранг $\tilde{C}$ равен рангу C, то система, состоящая из вектора $\overrightarrow{AB}$ и векторов базисов I, II, линейно зависима, то есть $\overrightarrow{AB} \in L^s$, а значит, по теореме 9.3 плоскости σ_k и σ_ℓ пересекаются. Если при этом индекс параллельности $I = 0$, то плоскости пересекаются в точке. Если индекс параллельности больше 0, то плоскости могут совпадать ($k = \ell = I$) (см. задачи к главе 6), одна из плоскостей содержит другую ($I = k$)(см. задачи к главе 6) или пересекаться по $I-$ плоскости ($I < k$).

Если ранг матрицы $\tilde{C}$ на единицу больше ранга матрицы C, то $\overrightarrow{AB} \notin L^s$ и плоскости σ_k и σ_ℓ не имеют общих точек. Если при этом индекс параллельности $I = 0$, то плоскости являются скрещивающимися. Если индекс параллельности $I = k$, то плоскости являются абсолютно параллельными. Если $0 < I < k$, то плоскости являются частично параллельными с индексом параллельности I.

Пример 9.1. Пусть в 6-мерном аффинном пространстве даны многомерные плоскости $\sigma_k = [A, L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)]$ и $\sigma_\ell = [B, L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)]$, где $A(1,1,2,4,0,0)$, $B(1,1,2,-1,0,0)$, $\vec{a}_1(2,-1,0,1,-2,1)$, $\vec{a}_2(0,0,-1,1,1,0)$, $\vec{b}_1(1,1,-1,0,1,1)$, $\vec{b}_2(2,-1,-1,2,-1,1)$, $\vec{b}_3(1,-2,0,2,1,0)$. Выясним их взаимное расположение.

Заметим, что базис направляющего подпространства плоскости σ_k состоит из двух векторов, а значит, ее размерность $k = 2$. Аналогично получаем, что $\ell = 3$.

Вычислим размерность суммы направляющих подпространств данных плоскостей. Составим матрицу из координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили, что ранг матрицы равен 4, то есть $s = 4$. Вычислим индекс параллельности по формуле (4.2): $I = k + \ell - s = 2 + 3 - 4 = 1$.

По теореме 7.2 получим $\overrightarrow{AB}(0,0,0,-5,0,0)$. Тогда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 5, то есть он увеличился на единицу. Согласно теореме 9.3 данные плоскости не имеют общих точек. Так как $I = 1 < k$, то плоскости σ_k и σ_ℓ частично параллельны с индексом параллельности $I = 1$.

Задачи.

1. 3. 10.46; 10.48.
2. Докажите, что две гиперплоскости в аффинном пространстве могут либо совпадать, либо быть параллельными, либо пересекаться по $(n-2)$- плоскости.
3. Пусть даны две плоскости σ_k и σ_ℓ в $n-$ аффинном пространстве, причем $k+\ell \geq n$. Докажите, что данные плоскости не могут быть скрещивающимися.
4. Пусть две многомерные плоскости σ_k и σ_ℓ $(k \leq \ell)$ имеют хотя бы одну общую точку. Докажите, что они совпадают тогда и только тогда, когда $I = k = \ell$. Докажите, что плоскость σ_k содержится в плоскости σ_ℓ тогда и только тогда, когда $I = k \neq \ell$.

§ 10. Евклидово векторное пространство.

Пусть дано $n-$ мерное векторное пространство V^n. Симметрическая билинейная форма g (§ 6.) называется *положительно определенной*, если для любого вектора $\vec{x} \in V^n$ имеем $g(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$. При этом $g(\vec{x},\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Пример 10.1. Скалярное произведение в геометрическом векторном пространстве V^3 задает положительно определенную билинейную форму (см. пример 6.1).

Пара (V^n, g), где g – положительно определенная билинейная форма, V^n – $n-$ мерное векторное пространство, называется *$n-$ мерным евклидовым векторным пространством* (или, короче, *евклидовым векторным пространством*). Билинейная форма g называется *евклидовой метрикой (или евклидовой структурой)* на V^n.

Пусть (V^n, g) – евклидово векторное пространство. Вещественное число

$$|\vec{x}| = \sqrt{g(\vec{x},\vec{x})} \tag{10.1}$$

называется *длиной вектора* $\vec{x} \in V^n$.

Заметим, что длина нуль-вектора равна 0 (см. пример 6.2).

Число $\angle(\vec{x},\vec{y})$, задаваемое формулой

$$\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{g(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} \tag{10.2}$$

называется *углом между ненулевыми векторами* $\vec{x} \in V^n$ и $\vec{y} \in V^n$.

Лемма 10.1. *Число* $\frac{g(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ *принадлежит отрезку* $[-1,1]$*, а значит корректно определяет угол между векторами.*

Доказательство. В силу положительной определенности метрики g получим $g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq 0$. По свойствам линейности и симметричности g получим $\frac{g(\vec{x},\vec{x})}{|\vec{x}|^2} \pm 2g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) + \frac{g(\vec{y},\vec{y})}{|\vec{y}|^2} \geq 0$. Тогда по формуле (10.1) имеем $2 \pm 2g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq 0$, то есть $g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \leq 1$ и $g(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) \geq -1$. □

Будем называть два ненулевых вектора $\vec{a}, \vec{b} \in V^n$ ортогональными, если угол между ними $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Положим по определению, что нуль-вектор ортогонален любому вектору.

Базис $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется *ортонормированным*, если все векторы базиса E попарно ортогональны и их длины равны 1. Если вектора базиса E только попарно ортогональны, то базис называется *ортогональным.*

Теорема 10.1. *В любом евклидовом векторном пространстве* (V^n, g) *существуют ортонормированные базисы.*

Доказательство. Согласно теореме 6.2 в векторном пространстве V^n существует базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ сопряженных векторов, то есть $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Рассмотрим базис $I = (\vec{a}_1 = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \ldots, \vec{a}_n = \frac{\vec{e}_n}{|\vec{e}_n|})$. Тогда $|\vec{a}_i| = |\frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}| = \sqrt{g(\frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}, \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|})} = \sqrt{\frac{g(\vec{e}_i,\vec{e}_i)}{|\vec{e}_i|^2}} = \sqrt{\frac{|\vec{e}_i|^2}{|\vec{e}_i|^2}} = 1$, для любого $i = 1, \ldots, n$.

Кроме того, $g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = g(\frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}, \frac{\vec{e}_j}{|\vec{e}_j|}) = \frac{1}{|\vec{e}_i||\vec{e}_j|} g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Таким образом, базис I является ортонормированным по определению. □

Теорема 10.2. *Пусть в евклидовом векторном пространстве* (V^n, g) *даны ортонормированный базис* $I = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *и векторы* $\vec{a}(a^1, \dots, a^n)$, $\vec{b}(b^1, \dots, b^n)$. *Тогда*

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^n)^2}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a^1b^1 + \ldots + a^nb^n}{\sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^n)^2}\sqrt{(b^1)^2 + \ldots + (b^n)^2}}; \tag{10.3}$$

Доказательство. По определению координат вектора (§ 1.) имеем $\vec{a} = a^i\vec{e}_i$, $\vec{b} = b^j\vec{e}_j$. Тогда $g(\vec{a}, \vec{b}) = g(a^i\vec{e}_i, b^j\vec{e}_j) = a^ib^jg(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a^1b^1 + \ldots + a^nb^n$, так как по определению ортонормированного базиса

$$g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, \text{если } \ i = j; \\ 0, \text{если } \ i \neq j \end{cases}$$

Аналогично получим $|\vec{a}| = \sqrt{g(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{g(a^i\vec{e}_i, a^j\vec{e}_j)} = \sqrt{a^ia^jg(\vec{e}_i, \vec{e}_j)} = \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^n)^2}$.

Наконец, согласно (10.2) получим $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{g(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a^1b^1 + \ldots + a^nb^n}{\sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^n)^2}\sqrt{(b^1)^2 + \ldots + (b^n)^2}}$. □

Будем говорить, что вектор $\vec{x}$ евклидова векторного пространства V *ортогонален векторному подпространству* L^k, если он ортогонален любому вектору $\vec{y} \in L^k$. Множество всех векторов из V, ортогональных векторному подпространству L^k, называется *ортогональным дополнением векторного подпространства* L^k и обозначается $(L^k)^\perp$.

Задачи.

1. 2. 23.12; 23.17;
2. 2. 23.19;
3. 2. 23.13; 23.14; 23.15.
4. Пусть (V, g) – евклидово векторное пространство. Докажите, что два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно g.
5. Пусть в n-мерном евклидовом векторном пространстве (V, g) дана система векторов $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$, сопряженных относительно g. Докажите, что эта система векторов линейно независима.

§ 11. Евклидово (точечное) пространство.

Аффинное пространство $\mathscr{A}$ называется $n-$ *мерным евклидовым пространством* (или, короче, *евклидовым пространством*), если его пространство трансляций является евклидовым векторным пространством.

Пусть $\mathscr{A}$ – евклидово пространство. Рассмотрим $A, B \in \mathscr{A}$ – произвольные точки. *Расстоянием* между точками A и B называется число

$$AB = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}.$$

Длиной отрезка $[AB]$ (см. § 7.) называется расстояние между его концами. Обозначение AB.

Пусть $\angle AOB$ – произвольный угол в $\mathscr{A}$ (см. § 7.). *Величиной угла* $\angle AOB$ называется число $\widehat{AOB}$, такое что

$$\cos \widehat{AOB} = \cos \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Докажите самостоятельно, что определение величины угла не зависит от выбора направляющих векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лучей $[OA)$ и $[OB)$ соответственно.

Приведем примеры фигур евклидова пространства.

Угол (см. § 7.) называется *прямым*, если его величина равна $\frac{\pi}{2}$. Треугольник (см. § 7.) называется *прямоугольным*, если один из его углов прямой.

В евклидовом пространстве верен аналог теоремы Пифагора.

Теорема 11.1. *Пусть в евклидовом пространстве* $\mathscr{A}$ *дан прямоугольный треугольник* ABC *с прямым углом* C. *Тогда*

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

□ По определению длины отрезка получим $AB^2 = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = g(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) + 2g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + g(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}) = AC^2 + CB^2$. Здесь мы воспользовались линейностью и симметричностью g, а также тем, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ ортогональны, а значит, $g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 0$. ■

$k-$ параллелепипед (см. 7.) называется $k-$ *кубом*, если векторы $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ попарно перпендикулярны и их длины равны.

В частности, 2-куб будем называть *квадратом*.

Пример 11.1. Пусть дан 4-куб $A_0A_1\dots A_{1234}$, длина ребра которого равна 1. Перечислим все его диагонали (см. § 7.): $[A_0A_{1234}]$, $[A_1A_{234}]$, $[A_2A_{134}]$, $[A_3A_{124}]$, $[A_4A_{123}]$, $[A_{12}A_{34}]$, $[A_{13}A_{14}]$, $[A_{14}A_{23}]$. Вычислим, например, длину диагонали $[A_{12}A_{34}]$.

Рассмотрим базис $(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$. Он будет ортонормированным. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{A_{12}A_{34}}$ в этом базисе. Имеем $\overrightarrow{A_{12}A_{34}} = \overrightarrow{A_{12}A_0} + \overrightarrow{A_0A_{34}} = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$, то есть $\overrightarrow{A_{12}A_{34}}(-1,-1,1,1)$. Так как базис ортонормированный, мы можем применить теорему 10.2: $A_{12}A_{34} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2+1^2} = 2$.

Задачи.

1. Докажите, что диагонали квадрата равны и перпендикулярны друг другу(см. § 11.).

2. Найдите величины углов между диагоналями 4-куба.
   Ответ: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$.

3. Будем называть симплекс *правильным*, если все его ребра равны между собой. Найдите углы между ребрами правильного n-симплекса.

4. Дан 4-симплекс $A_0A_1A_2A_3$ в евклидовом точечном пространстве $\mathscr{A}^4$. Вычислите расстояние от середины ребра A_0A_1 до центра тяжести противоположной грани $A_2A_3A_4$, если известны длины ребер, выходящих из вершины A_0 и углы между ними. Чему равно это расстояние в случае правильного симплекса с длиной ребра 1?

5. Дан 4-симплекс $A_0A_1A_2A_3$ в евклидовом точечном пространстве $\mathscr{A}^4$. Вычислить расстояние от центра тяжести грани $A_0A_1A_2$ до центра тяжести грани $A_0A_3A_4$, если известны длины ребер, выходящих из вершины A_0 и углы между ними.

6. Найдите угол между ребром правильного n-мерного симплекса и высотой, опущенной из конца этого ребра.