Краткое руководство к действию по многомерной дифференциальной геометрии.

10 июня 2014 г.

Глава 1. Тензорный анализ (продолжение).

§1.1. Оператор внешнего дифференцирования.

Пусть дано гладкое n-мерное многообразие M. Рассмотрим его алгебру Грассмана $\Lambda_*(M)$. Напомним, что в этой алгебре определены операции сложения, умножения на гладкую функцию и операция внешнего умножения. Определим в ней еще одну операцию $d : \Lambda_*(M) \to \Lambda_*(M)$, которая каждой внешней r-форме $\omega \in \Lambda_r(M)$, $r = 1, \dots$ ставит в соответствие $(r+1)$-форму по формуле

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{r+1}))+\\ +\textstyle\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта операция называется *операцией внешнего дифференцирования*, а отображение d называется *оператором внешнего дифференцирования*. Результат действия оператора d на внешнюю форму называется *внешним дифференциалом* этой формы. Напомним, что квадратными скобками обозначается коммутатор векторных полей (см. курс Анализ на многообразиях). Если $r = 0$, то определим отображение $d : \Lambda_0(M) \equiv C^\infty(M) \to \Lambda_1(M)$ по формуле

$$df(X) = X(f),\ f \in C^\infty(M). \tag{1.2}$$

Нам нужно доказать корректность определения, то есть убедиться в том, что отображение $d\omega$ является полилинейным и кососимметрическим. Для случая $r = 0$ корректность очевидна. Мы проведем доказательство для двух частных случаев. В основном с ними приходится встречаться при написании диссертаций.

Пример 1.1. Докажем корректность определения в случае $r = 1$. В этом случае формула (1.1) примет вид

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]), \tag{1.3}$$

где ω – 1-форма, X, Y – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Обратите внимание, что здесь векторные поля выступают как дифференцирования алгебры гладких функций.

Нам нужно доказать линейность отображения $d\omega$ по двум аргументам. Мы докажем линейность по первому аргументу (линейность по второму аргументу доказывается аналогично). Разделим свойство линейности на две части: аддитивность и однородность.

Пусть X, Y, Z – произвольные векторные поля. Тогда

$$\begin{aligned}d\omega(X+Y, Z) = (X+Y)(\omega(Z)) - Z(\omega(X+Y)) - \omega([X+Y, Z]) = X(\omega(Z)) + Y(\omega(Z)) - Z(\omega(X))-\\ - Z(\omega(Y)) - \omega([X, Z]) - \omega([Y, Z]) = d\omega(X, Z) + d\omega(Y, Z).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением суммы двух векторных полей, аддитивностью векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций и аддитивностью коммутатора векторных полей.

Докажем однородность относительно умножения на гладкую функцию. Пусть X, Y – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$, f – произвольная гладкая функция на M. Тогда

$$\begin{aligned}d\omega(fX, Y) = (fX)(\omega(Y)) - Y(\omega(fX)) - \omega([fX, Y]) = fX(\omega(Y)) - Y(f)\omega(X) - fY(\omega(X)) - \omega(f[X, Y]-\\ - Y(f)X) = f(d\omega)(X, Y).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой для коммутатора векторных полей

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X,$$

которая была доказана в курсе Анализ на многообразиях. Также мы использовали $C^\infty(M)$- линейность 1-формы и правило Лейбница.

Докажем, что $d\omega$ принадлежит модулю $\Lambda_2(M)$, то есть является внешней 2-формой. Для этого нужно доказать, что значение $d\omega$ меняет знак на противоположный при любой перестановке пары аргументов. Так как у $d\omega$ только два аргумента, нам достаточно доказать, что $d\omega(X,Y) = -d\omega(Y,X)$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Имеем

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = -(Y(\omega(X)) - X(\omega(Y)) - \omega([Y,X])) = -d\omega(Y,X).$$

Здесь мы воспользовались антикоммутативностью скобки Ли.

Итак, мы показали, что для любой 1-формы ω ее внешний дифференциал является внешней 2-формой.

Задача 1.1. Покажите, что для любой 2-формы Ω ее внешний дифференциал вычисляется по формуле

$$d\Omega(X,Y,Z) = X(\Omega(Y,Z)) - Y(\Omega(X,Z)) + Z(\Omega(X,Y)) - \Omega([X,Y],Z) + \Omega([X,Z],Y) - \Omega([Y,Z],X).$$

Аналогично примеру 1.1 докажите, что отображение $d\Omega$ является $C^\infty(M)$-линейным по каждому аргументу и, кроме того, является кососимметричным тензорным полем (согласно доказанному в курсе Анализ на многообразиях для этого достаточно показать, что тензорное поле $d\Omega$ меняет знак при перестановке любой пары аргументов).

Задача 1.2. Постарайтесь доказать корректность определения внешнего дифференциала в общем случае.

Мы перейдем к изучению свойств оператора внешнего дифференцирования.

Теорема 1.1. *Оператор внешнего дифференцирования обладает следующими свойствами:*

(d1) $d(\Lambda_r(M)) \subset \Lambda_{r+1}(M)$, $r = 0, 1, 2, \dots$;

(d2) $d \circ d = 0$;

(d3) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta$, $\omega \in \Lambda_r(M)$, $\theta \in \Lambda_*(M)$.

Доказательство. Свойство $(d1)$ следует непосредственно из определения (а точнее из доказательства корректности определения).

Докажем свойство $(d2)$ для 1-формы ω. Так как $d(d\omega)$ – 3-форма, имеем согласно формуле (1.3)

$$\begin{gathered}d(d\omega)(X,Y,Z) = X(d\omega(Y,Z)) - Y(d\omega(X,Z)) + Z(d\omega(X,Y)) - d\omega([X,Y],Z) + d\omega([X,Z],Y) - d\omega([Y,Z],X) = \\ X(Y(\omega(Z)) - Z(\omega(Y)) - \omega([Y,Z])) - Y(X(\omega(Z)) - Z\omega(X) - \omega([X,Z])) + Z(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])) - \\ -[X,Y](\omega(Z)) + Z\omega([X,Y]) + \omega([[X,Y],Z]) + [X,Z](\omega(Y)) - Y(\omega([X,Z]) - \omega([[X,Z],Y]) - [Y,Z](\omega(X)) + X(\omega([Y,Z]) + \\ + \omega([[Y,Z],X]) = 0\end{gathered}$$

Здесь мы воспользовались тождеством Якоби для скобки Ли векторных полей. Общий случай доказывается аналогичным образом. Постарайтесь провести рассуждения самостоятельно.

Наконец, посмотрим на принцип доказательства свойства $(d3)$. Мы также как и предыдущее свойство не будем доказывать его в общем виде, а посмотрим частный случай $\omega, \theta \in \Lambda_1(M)$, то есть докажем, что для 1-форм ω и θ имеем место равенство

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta.$$

Используя определение внешнего произведения форм (см. курс Анализ на многообразиях), получим для левой части $(d3)$

$$\begin{gathered}d(\omega\wedge\theta)(X,Y,Z) = X(\omega\wedge\theta(Y,Z)) - Y(\omega\wedge\theta(X,Z)) + Z(\omega\wedge\theta(X,Y)) - \omega\wedge\theta([X,Y],Z) + \omega\wedge\theta([X,Z],Y) - \\ - \omega\wedge\theta([Y,Z],X) = X(\omega(Y)\theta(Z) - \omega(Z)\theta(Y)) - Y(\omega(X)\theta(Z) - \omega(Z)\theta(X)) + Z(\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)) - \\ - \omega([X,Y])\theta(Z) + \omega(Z)\theta([X,Y]) + \omega([X,Z])\theta(Y) - \omega(Y)\theta([X,Z]) - \omega([Y,Z])\theta(X) + \omega(X)\theta([Y,Z])\end{gathered}$$

Применяя правило Лейбница к первым трем слагаемым, а затем группируя слагаемые и применяя формулу (1.3), получим

$$d(\omega\wedge\theta)(X,Y,Z) = d\omega(X,Y)\theta(Z) + d\omega(Y,Z)\theta(X) + d\omega(Z,X)\theta(Y) - \omega(X)d\theta(Y,Z) - \omega(Y)d\theta(Z,X) - \omega(Z)d\theta(X,Y). \tag{1.4}$$

Рассмотрим правую часть равенства $(d3)$. Применяя определение внешнего произведения форм, получим

$$\begin{gathered}(d\omega\wedge\theta - \omega\wedge d\theta)(X,Y,Z) = \frac{1}{2!}(d\omega\otimes\theta(X,Y,Z) + d\omega\otimes\theta(Y,Z,X) + d\omega\otimes\theta(Z,X,Y) - d\omega\otimes\theta(Y,X,Z) - d\omega\otimes\theta(Z,Y,X) - \\ - d\omega\otimes\theta(X,Z,Y) - \omega\otimes d\theta(X,Y,Z) - \omega\otimes d\theta(Y,Z,X) - \omega\otimes d\theta(Z,X,Y) + \omega\otimes d\theta(Y,X,Z) + \omega\otimes d\theta(Z,Y,X) + \\ + \omega\otimes d\theta(X,Z,Y))\end{gathered}$$

Используя определение тензорного умножения и кососимметричность 2-форм $d\omega$ и $d\theta$, получим в точности (1.4). $\square$

Замечание 1.1. Полное доказательство теоремы 1.1 можно найти в первом томе монографии Кобаяси, Номидзу Основы дифференциальной геометрии. Правда, принцип доказательства там иной нежели мы рассмотрели. Кроме того, формулы, задающие операцию внешнего умножения и оператор внешнего дифференцирования, имеют другие коэффициенты.

Задача 1.3. Докажите формулу ($d3$) а) для функции и 1-формы; б) для функции и 2-формы.

Пример 1.2. При построении натурального базиса в модуле $\mathfrak{X}^*(U)$ локальной карты (U,φ) мы ввели в рассмотрение 1-формы $dx^i = x^i \circ r_\varphi$, где r_φ – реперное отображение карты (U,φ), $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – отображение, ставящее в соответствие набору из n вещественных чисел его i-й элемент. Здесь dx^i только обозначение. Выясним как оно связано с оператором внешнего дифференцирования. Рассмотрим функцию $x^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$. Тогда из определения тензорного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. Анализ на многообразиях) и формулы (1.2) получим

$$d(x^i \circ \varphi)(X) = \frac{\partial (x^i \circ \varphi)}{\partial x^j} X^j = \delta^i_j dx^j(X) = dx^i(X),$$

где $(dx^1, \ldots, dx^n)$ – натуральный базис модуля $\mathfrak{X}^*(U)$, X – произвольное векторное поле из $\mathfrak{X}(U)$. Таким образом, мы получаем, что 1-формы dx^i натурального базиса – это внешние дифференциалы функций $x^i \circ \varphi$.

Задача 1.4. Докажите, что в локальной карте (U,φ) имеет место формула

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

для любой гладкой на M функции f. В левой части этого равенства стоит сужение 1-формы df на область локальной карты.

Пример 1.3. Пусть на многообразии M фиксирована связность ∇ без кручения (см. Анализ на многообразиях). Тогда для любой 1-формы ω определен ковариантный дифференциал $\nabla\omega$. Это тензорное поле типа $(2,0)$. Выясним как связаны между собой тензорные поля $\nabla\omega$ и $d\omega$.

Напомним, что ковариантный дифференциал 1-формы определяется по формуле

$$(\nabla\omega)(X,Y) = \nabla_Y(\omega)X,$$

где ∇_X – оператор ковариантного дифференцирования, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Оператор ковариантного дифференцирования удовлетворяет правилу Лейбница, а значит, применяя оператор ∇_Y к функции $\omega(X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, получим

$$Y(\omega(X)) = \nabla_Y(\omega)X + \omega(\nabla_Y X). \tag{1.5}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\nabla_Y(f) = Y(f)$ для любой гладкой функции f на многообразии M. Меняя X и Y местами в формуле (1.5), получим

$$X(\omega(Y)) = \nabla_X(\omega)Y + \omega(\nabla_X Y). \tag{1.6}$$

Вычитая из (1.6) формулу (1.5), получим

$$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X + \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X). \tag{1.7}$$

Здесь мы воспользовались линейностью 1-формы ω. Так как связность ∇ без кручения, то есть ее тензор кручения тождественно равен нулю, то

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7) и учитывая формулу (1.3), получим

$$d\omega(X,Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X \tag{1.9}$$

или в других обозначениях

$$d\omega = -2Alt(\nabla\omega).$$

Задача 1.5. Получите формулу, связывающую внешний дифференциал $d\Omega$ 2-формы Ω и ковариантный дифференциал $\nabla\Omega$ этой формы. Здесь ∇ – произвольная связность без кручения.

Ответ: $d\Omega(X,Y,Z) = \nabla_X(\Omega)(Y,Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z,X) + \nabla_Z(\Omega)(X,Y)$.

Пример 1.4. Найдем компоненты 2-формы $d\omega$ в натуральном базисе, если известны компоненты $\{\omega_i\}$ формы ω.

По определению компонент и формуле (1.3) получим

$$(d\omega)_{ij} = d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) - \omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что коммутатор векторных полей натурального базиса равен нулю (см. Анализ на многообразиях).

Задача 1.6. Выразите компоненты $(d\Omega)_{ijk}$ 3-формы $d\Omega$ через компоненты Ω_{ij} 2-формы Ω.

Ответ: $(d\Omega)_{ijk} = \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x^k}$.

§1.2. Дифференциал и антиувлечение гладкого отображения.

2.1. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно. Напомним, что отображение

$$\phi : M \to N$$

называется *гладким*, если для любой пары соответствующих точек $p \in M$ и $\phi(p) \in N$ существует пара локальных карт (U, φ) и (V, ψ), содержащих соответственно эти точки, такая что отображение

$$\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

является гладким отображением областей евклидовых пространств.

В точке $p \in M$ определено касательное пространство $T_p(M)$ к многообразию M, а в точке $\phi(p)$ определено касательное пространство $T_{\phi(p)}(N)$ к многообразию N. Оказывается, что гладкое отображение ϕ многообразий порождает отображение указанных касательных пространств, а именно, возникает отображение

$$(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N),$$

которое задается формулой

$$(\phi_*)_p(\xi)(f) = \xi(f \circ \phi), \tag{1.10}$$

где $\xi \in T_p(M)$ – произвольный вектор, $f \in C^\infty(N)$ – произвольная функция. Построенное отображение называется *дифференциалом отображения* ϕ в точке p.

Замечание 1.2. Здесь касательный вектор рассматривается как инфинитазимальное дифференцирование (см. курс Анализ на многообразиях). Следовательно, чтобы доказать корректность определения дифференциала отображения в точке, нужно показать, что отображение $(\phi_*)_p(\xi) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ является инфинитазимальным дифференцированием, то есть $\mathbb{R}$-линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Проведите рассуждения самостоятельно.

Предложение 1.1 **.** *Отображение $(\phi_*)_p$ является $\mathbb{R}$-линейным отображением.*

Доказательство. Докажем однородность. Аддитивность доказывается аналогично (докажите самостоятельно).

Пусть $\xi \in T_p(M)$ – произвольный вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Имеем

$$(\phi_*)_p(\lambda\xi)(f) = (\lambda\xi)(f \circ \phi) = \lambda(\xi(f \circ \phi)) = (\lambda(\phi_*)_p(\xi))(f).$$

Откуда получаем

$$(\phi_*)_p(\lambda\xi) = \lambda(\phi_*)_p(\xi).$$

□

Предложение 1.2 **.** *Пусть даны гладкие многообразия M, N, L и дана пара гладких отображений*

$$\phi : M \to N; \quad \psi : N \to L.$$

Тогда для любой точки $p \in M$, для которой определена композиция $\psi \circ \phi$ имеем

$$(\psi_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p = ((\psi \circ \phi)_*)_p.$$

Доказательство. По определению дифференциала отображения для любого вектора $\xi \in T_p(M)$ и любой функции $f \in C^\infty(L)$ имеем

$$((\psi_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p\xi)(f) = ((\phi_*)_p\xi)(f \circ \psi) = \xi(f \circ (\psi \circ \phi)) = (((\psi \circ \phi)_*)_p\xi)(f).$$

□

Пример 1.5. Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M \to N$ гладких многообразий. Покажем, что для любой точки $p \in M$

$$((\phi_*)_p)^{-1} = ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}. \tag{1.11}$$

Чтобы доказать соотношение (1.11), нам нужно показать, что

$$((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p = (\phi_*)_p \circ ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} = id.$$

Докажем первое равенство. Второе докажите самостоятельно. Пусть $\xi \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор, f – произвольная гладкая функция на M. С учетом предложения 1.2 имеем

$$\left(((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p(\xi)\right)(f) = \xi(f \circ \phi^{-1} \circ \phi) = \xi(f).$$

Так как равенство верно для любой функции и любого вектора, мы получаем требуемый результат.

Найдем формулу для вычисления дифференциала отображения в паре соответствующих локальных карт. Пусть дано отображение $\phi : M \to N$, фиксируем точку $p \in M$. Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки p , а (V, ψ) – локальная карта с координатами $(y^1, \dots, y^m)$ в окрестности точки $\phi(p)$. Найдем значения отображения $(\phi_*)_p$ на векторах натурального базиса касательного пространства $T_p(M)$ карты (U, φ). Имеем для любой $f \in C^\infty(N)$

$$(\phi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ \phi) \equiv \left.\frac{\partial(f \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} =$$

$$= \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j}\right|_{\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi(p)} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)} (f).$$

Здесь мы применили правило дифференцирования сложной функции и учли, что отображение $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ областей евклидовых пространств задается функциями $y^j = y^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, m$. Итак, для векторов натуральных базисов касательных пространств $T_p(M)$ и $T_{\phi(p)}(M)$ мы получили соотношение

$$(\phi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}. \tag{1.12}$$

Здесь $\left(\left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right)$ – матрица Якоби отображения ϕ в точке p.

Пусть теперь $\xi \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Тогда раскладывая его по векторам натурального базиса $\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ и используя формулу (1.12), получим

$$(\phi_*)_p\xi = (\phi_*)_p \left(\xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \xi^i (\phi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \xi^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}.$$

Здесь мы также воспользовались $\mathbb{R}$-линейностью дифференциала отображения ϕ. Итак, мы получаем, что в соответствующих локальных картах отображение $(\phi_*)_p$ задается формулой

$$(\phi_*)_p\xi = \xi^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}. \tag{1.13}$$

Как мы знаем, на касательные векторы мы можем смотреть не только как на инфинитазимальные дифференцирования, но и как на классы гладких соприкасающихся путей. Запишем дифференциал гладкого отображения, используя описание касательных векторов как классов эквивалентности гладких путей.

Пусть $\xi = [\gamma] \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Рассмотрим все отображения вида $\phi \circ \gamma : I \to N$. Очевидно, что все такие гладкие пути имеют одинаковые значения в точке 0 и одинаковые первые производные в нуле. Следовательно, все они принадлежат одному классу эквивалентности гладких соприкасающихся в точке $\phi(p)$ путей, то есть образуют касательный вектор из касательного пространства $T_{\phi(p)}(N)$. Обозначим этот вектор через η, то есть $\eta = [\phi \circ \gamma]$. В результате мы получим соответствие $\xi \to \eta$, которое обозначим через τ. Наша ближайшая задача – доказать, что отображение τ совпадает с отображением $(\phi_*)_p$. Для этого нам нужно показать, что $\eta = (\phi_*)_p\xi$.

Пусть касательный вектор ξ в локальной карте (U, φ) имеет координаты ξ^i, а вектор η в локальной карте (V, ψ) имеет координаты η^i. Напомним, что координаты касательных векторов определяются по формуле

$$\xi^i = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^i(t) \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^i \circ \varphi \circ \gamma(t);$$

$$\eta^i = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} y^i(t) \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} y^i \circ \psi \circ \phi \circ \gamma(t).$$

Имеем

$$\eta = \eta^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} y^i \circ \psi \circ \phi \circ \gamma(t) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (y^i \circ \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t)) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} =$$

$$= \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^j \circ \varphi \circ \gamma(t) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} = \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \xi^j \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)}$$

Сравнивая полученный результат с формулой (1.13), убеждаемся, что $\eta = (\phi_*)_p \xi$. Обратите внимание, что в полученном равенстве и формуле (1.13) индексы суммирования обозначены по-разному, но переобозначив $i \to j$ и $j \to i$ в одной из формул (индексы суммирования могут обозначаться любой буквой), мы получим полное совпадение формул.

Договоримся обозначать касательный вектор

$$\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^i \circ \varphi \circ \gamma(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

через

$$\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t). \tag{1.14}$$

В этих обозначениях дифференциал $(\phi_*)_p$ запишется в следующем виде

$$(\phi_*)_p \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) \right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi \circ \gamma(t). \tag{1.15}$$

Здесь мы использовали то, что $(\phi_*)_p \xi = \eta$.

Замечание 1.3. Формулу (1.15) можно обобщить на случай касательного вектора к кривой γ, заданного в ее произвольной точке q (пусть этой точке соответствует значение параметра $t = \tau$, то есть $q = \gamma(\tau)$). Касательный вектор $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t)$ определен в точке $q = \gamma(\tau)$, следовательно, на него будет действовать отображение $(\phi_*)_{\gamma(\tau)}$. Тогда равенство (1.15) примет вид

$$(\phi_*)_{\gamma(\tau)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \gamma(t) \right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \phi \circ \gamma(t).$$

Пример 1.6. Пусть на n-мерном гладком многообразии фиксирована локальная карта (U, φ). Найдем образы векторных полей натурального базиса этой карты при отображении $(\varphi_*)_p$.

Рассмотрим вектор $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ как класс эквивалентности соприкасающихся путей $[\gamma]$. Как мы видели в курсе Анализ на многообразиях этому классу принадлежит путь γ, который в локальной карте задается уравнениями $x^i = x_0^i + \delta_j^i t$, где $i, j = 1, \ldots, n$. Чтобы найти образ вектора $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$, нам нужно найти вектор $\eta_j = [\varphi \circ \gamma]$, то есть записать его уравнения в карте многообразия $\mathbb{R}^n$. Так как на $\mathbb{R}^n$ локальная карта $(\mathbb{R}^n, id)$, то в ней отображение $id \circ \varphi \circ \gamma$ имеет вид $x^i = x_0^i + \delta_j^i t$. Дифференцируя эти уравнения по t и находя значения полученных производных в нуле, мы убеждаемся, что у вектора η координаты в натуральном базисе карты $(\mathbb{R}^n, id)$ имеют вид (δ_j^i). Это вектор ε_j стандартного базиса $\mathbb{R}^n$. Итак, мы получаем, что

$$(\varphi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \varepsilon_i.$$

Пример 1.7. Пусть на n-мерном гладком многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ). Рассмотрим реперное отображение $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что оно каждому касательному вектору ставит в соответствие набор его координат в натуральном базисе. Докажем, что реперное отображение в точке p совпадает с дифференциалом картирующего отображения φ в этой же точке, то есть

$$r_\varphi = (\varphi_*)_p. \tag{1.16}$$

Имеем с учетом примера 1.6

$$(\varphi_*)_p(\xi) = (\varphi_*)_p \left(\xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \xi^i \varepsilon_i = (\xi^1, \ldots, \xi^n) = r_\varphi(\xi).$$

где $\xi \in T_p(M)$. Здесь мы воспользовались линейностью дифференциала отображения ϕ.

2.2. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно и дано гладкое отображение $\phi : M \to N$. Фиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим r-ковектор α, принадлежащий векторному пространству $\mathfrak{T}^0_r(T_{\phi(p)}(N))$. Определим отображение

$$\phi^*_{\phi(p)} : \mathfrak{T}^0_r(T_{\phi(p)}(N)) \to \mathfrak{T}^0_r(T_p(M))$$

по формуле

$$\phi^*_{\phi(p)}(\alpha)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \alpha((\phi_*)_p\xi_1, \ldots, (\phi_*)_p\xi_r), \tag{1.17}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_r \in T_p(M)$. Отображение $\phi^*_{\phi(p)}$ называется *антиувлечением* r-ковекторов в точке $\phi(p)$.

Из $\mathbb{R}$-линейности дифференциала отображения следует, что отображение $\phi^*_{\phi(p)}(\alpha)$ является $\mathbb{R}$-линейным по каждому аргументу, то есть представляет из себя r-ковектор, следовательно, введенное определение антиувлечения отображения корректно.

Задача 1.7. Пусть $\phi : M \to N$ – диффеоморфизм. Докажите, что

$$(\phi^*_{\phi(p)})^{-1} = (\phi^{-1})^*_p.$$

Указание. Воспользуйтесь идеей доказательства и результатом примера 1.5.

2.3. Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M \to N$ гладких многообразий. Тогда для отображений

$$(\phi_*)_p : T_P(M) \to T_{\phi(p)}(N); \quad \phi^*_{\phi(p)} : T^*_{\phi(p)}(N) \to T^*_p(M)$$

существуют обратные отображения (см. пример 1.5 и задачу 1.7). Будем обозначать их через $\phi^*_{\phi(p)}$ и $(\phi_*)_p$ и называть *антиувлечением векторов* и *увлечением ковекторов*, соответственно.

Определим отображения увлечения и антиувлечения для тензоров произвольного типа. Пусть $p \in M$ – произвольная фиксированная точка. Определить отображение

$$(\phi_*)_p : \mathfrak{T}^s_r(T_p(M)) \to \mathfrak{T}^s_r(T_{\phi(p)}(N))$$

по формуле

$$(\phi_*)_p(t)(\xi_1, \ldots, \xi_r, u^1, \ldots, u^s) = t(\phi^*_{\phi(p)}\xi_1, \ldots, \phi^*_{\phi(p)}\xi_r, \phi^*_{\phi(p)}u^1, \ldots, \phi^*_{\phi(p)}u^s),$$

где t – произвольный тензор в точке p многообразия M, $\xi_1, \ldots, \xi_r \in T_{\phi(p)}(N)$ – произвольные касательные векторы, $u^1, \ldots, u^s \in T^*_{\phi(p)}(N)$. Будем называть построенное отображение *увлечением тензоров типа* (r, s).

Аналогичным образом построим отображение *антиувлечения тензоров типа* (r, s), а именно, отображение

$$\phi^*_{\phi(p)} : \mathfrak{T}^s_r(T_{\phi(p)}(N)) \to \mathfrak{T}^s_r(T_p(M))$$

по формуле

$$\phi^*_{\phi(p)}(t)(\xi_1, \ldots, \xi_r, u^1, \ldots, u^n) = t((\phi_*)_p\xi_1, \ldots, (\phi_*)_p u^1, \ldots, (\phi_*)_p u^s),$$

где t – произвольный тензор в точке $\phi(p)$ многообразия N, $\xi_1, \ldots, \xi_r \in T_p(M)$ – произвольные касательные векторы, $u^1, \ldots, u^s \in T^*_p(M)$ – произвольные ковекторы.

§1.3. ϕ-связанные векторные поля. Антиувлечение r-форм.

3.1. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно и дано гладкое отображение $\phi : M \to N$.

Определение 1.1. Векторные поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ называются ϕ-связанными, если для любой гладкой функции $f \in C^\infty(N)$ имеем

$$X(f \circ \phi) = Y(f) \circ \phi. \tag{1.18}$$

Теорема 1.2. *Векторные поля X и Y ϕ-связаны тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in M$ имеем*

$$(\phi_*)_p X_p = Y_{\phi(p)}.$$

Доказательство. Пусть f – произвольная гладкая функция на многообразии N. Тогда для любой точки $p \in M$ имеем

$$X(f \circ \phi)(p) = Y(f) \circ \phi(p) \quad \Leftrightarrow \quad X_p(f \circ \phi) = Y_{\phi(p)}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\phi_*)_p X_p(f) = Y_{\phi(p)}(f).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразия) и формулой (1.10) из определения дифференциала отображения. $\square$

В силу теоремы 1.2 ϕ-связанные векторные поля X и Y принято обозначать $Y = \phi_* X$. При этом векторное поле Y называется *увлечением* векторного поля X при отображении ϕ.

Замечание 1.4. Пусть дано гладкое отображение $\phi : M \to N$ и векторное поле X на многообразии M. Если существует ϕ-связанное с ним векторное поле $\phi_* X$, то оно единственно. Действительно, в каждой точке $\phi(p)$ многообразия N значение векторного поля $\phi_* X$ определяется так: $(\phi_* X)(\phi(p)) = (\phi(p), (\phi_*)_p X_p)$.

Если для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ определено его увлечение $\phi_* X$, то будем говорить, что задано *отображение* $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ *увлечения векторных полей.*

Предложение 1.3 . *Пусть даны векторные поля $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Обозначим через Y_1, Y_2 векторные поля на N, ϕ-связанные с векторными полями X_1, X_2 соответственно, то есть $Y_1 = \phi_* X_1$ и $Y_2 = \phi_* X_2$. Тогда*

$$[Y_1, Y_2] = \phi_*[X_1, X_2],$$

где квадратные скобки, как всегда, обозначают коммутатор векторных полей (скобка Ли).

Доказательство. По определению 1.1 имеем

$$X_1(f \circ \phi) = Y_1(f) \circ \phi; \quad X_2(f \circ \phi) = Y_2(f) \circ \phi.$$

Тогда по определению скобки Ли получим

$$[X_1, X_2](f \circ \phi) = X_1(X_2(f \circ \phi)) - X_2(X_1(f \circ \phi)) = X_1(Y_2(f) \circ \phi) - X_2(Y_1(f) \circ \phi) = Y_1(Y_2(f)) \circ \phi - Y_2(Y_1(f)) \circ \phi = \\ = [Y_1, Y_2](f) \circ \phi.$$

Откуда по определению 1.1 получим требуемую формулу. □

Замечание 1.5. Предложение 1.3 можно сформулировать и другим образом. Пусть $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, причем существуют ϕ-связанные с ними векторные поля $\phi_* X_1$ и $\phi_* X_2$. Тогда существует векторное поле $\phi_*[X_1, X_2]$, которое ϕ-связано с векторным полем $[\phi_* X_1, \phi_* X_2]$, причем

$$\phi_*[X_1, X_2] = [\phi_* X_1, \phi_* X_2]. \tag{1.19}$$

Условие существования векторных полей $\phi_* X_1$ и $\phi_* X_2$ здесь существенно. Действительно, так как отображение ϕ не обязано быть инъективным, оно может две разные точки p_1 и p_2 из многообразия M перевести в одну точку q многообразия N. Тогда в точке q будут определены два вектора с помощью отображения $(\phi_*)_{p_1}$ и $(\phi_*)_{p_2}$. Эти векторы в общем случае различны и какой брать в ϕ-связанное векторное поле не понятно.

Задача 1.8. Пусть даны гладкие отображения $\phi : M \to N$ и $\psi : N \to L$. Докажите, что для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$, для которого определены векторные поля $(\psi \circ \phi)_* X$ и $\psi_* \circ \phi_* X$, имеет место соотношение

$$(\psi \circ \phi)_*(X) = \psi_* \circ \phi_*(X).$$

Решение. Воспользуемся определением ϕ-связанных векторных полей:

$$((\psi \circ \phi)_* X)(f) \circ (\psi \circ \phi) = X((f \circ \psi) \circ \phi) = (\phi_* X)(f \circ \psi) \circ \phi = (\psi_*(\phi_* X))(f) \circ \psi \circ \phi.$$

Откуда получаем требуемое равенство. □

3.2. Пусть $\phi : M \to N$ – гладкое отображение.

Определение 1.2. Пусть $\omega \in \Lambda_r(N)$, $r = 1, \ldots$ – произвольная r-форма. Тогда на многообразии M определена r-форма $\phi^*(\omega)$ следующей формулой

$$\phi^*(\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\phi_* X_1, \ldots, \phi_* X_r) \circ \phi,$$

где $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Форма $\phi^*\omega$ называется *антиувлечением* формы ω.

Для функции $f \in C^\infty(N)$ как гладкой 0-формы положим по определению

$$\phi^* f = f \circ \phi.$$

Задача 1.9. Пусть даны гладкие отображения $\phi : M \to N$ и $\psi : N \to L$. Докажите, что

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

Замечание 1.6. Определение 1.2 сформулировано для r-формы, рассматриваемой как полилинейное отображение. Если мы будем рассматривать форму как сечение векторного расслоения тензоров типа $(r,0)$, то определение антиувлечения запишется в виде

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1,\dots,\xi_r)=\omega_{\phi(p)}((\phi_*)_p\xi_1,\dots,(\phi_*)_p\xi_r),$$

где $p\in M$ – произвольная точка, $\xi_1,\dots,\xi_r\in T_p(M)$ – произвольные касательные векторы. Для получения этой формулы мы воспользовались заданием тензорного поля типа (r,s) как полилинейного отображения (см. Анализ на многообразиях) и теоремой 1.2. Из полученной формулы легко видеть, что антиувлечение r-формы ω и антиувлечение r-ковектора (см. § 1.2.) связаны следующим соотношением

$$(\phi^*\omega)_p=\phi^*_{\phi(p)}(\omega_{\phi(p)}). \tag{1.20}$$

Теорема 1.3. *Отображение антиувлечения обладает следующими свойствами*

$$1)\ \phi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\phi^*(\omega_1)\wedge\phi^*(\omega_2);$$
$$2)\ \phi^*(d\omega)=d(\phi^*\omega), \tag{1.21}$$

где ω,ω_1 – произвольные r-формы, ω_2 – произвольная s-форма.

Доказательство. Проверим первую формулу. Воспользуемся определениями внешнего умножения, альтернации (см. Анализ на многообразиях) и антиувлечения.

$$\phi^*(\omega_1\wedge\omega_2)(X_1,\dots,X_{r+s})=(\omega_1\wedge\omega_2)(\phi_*X_1,\dots,\phi_*X_{r+s})\circ\phi=(\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)(\omega_1\otimes\omega_2)(\phi_*X_{\sigma(1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r+s)}))\circ\phi=$$

$$=\left(\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)\omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r)})\omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r+s)})\right)\circ\phi.$$

С другой стороны,

$$(\phi^*\omega_1)\wedge(\phi^*\omega_2)(X_1,\dots,X_{r+s})=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)(\phi^*\omega_1)\otimes(\phi^*\omega_2)(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r+s)})=$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)(\phi^*\omega_1)(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r)})(\phi^*\omega_2)(X_{\sigma(r+1)},\dots,X_{\sigma(r+s)})=$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)(\omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r)})\circ\phi)(\omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r+s)})\circ\phi)=$$

$$=\left(\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\varepsilon(\sigma)\omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r)})\omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)},\dots,\phi_*X_{\sigma(r+s)})\right)\circ\phi$$

Чтобы доказать второе равенство, докажем сначала вспомогательную формулу.

$$X((\phi^*\omega)(Y_1,\dots,Y_r))=(\phi_*X)(\omega(\phi_*Y_1,\dots,\phi_*Y_r))\circ\phi, \tag{1.22}$$

где $\omega\in\Lambda_r(N)$, $X,Y_1,\dots,Y_r\in\mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля.

По определению отображения антиувлечения и ϕ-связанных векторных полей получим

$$X((\phi^*\omega)(Y_1,\dots,Y_r))=X(\omega(\phi_*Y_1,\dots,\phi_*Y_r)\circ\phi)=(\phi_*X)(\omega(\phi_*Y_1,\dots,\phi_*Y_r))\circ\phi.$$

Наконец, докажем второе равенство из утверждения теоремы. По определению внешнего дифференциала формы (1.1), формуле (1.22) и определению отображения антиувлечения получим

$$d(\phi^*\omega)(X_1,\dots,X_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i((\phi^*\omega)(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{r+1}))+$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\phi^*\omega)([X_i,X_j],\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\phi_*X_i)(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{r+1}))\circ\phi+$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\phi_*[X_i,X_j],\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,\phi_*X_{r+1})\circ\phi.$$

Здесь символом $\hat{X}_i$ обозначены отсутствующие аргументы. С другой стороны,

$$\phi^*(d\omega)(X_1,\ldots,X_{r+1}) = (d\omega)(\phi_*X_1,\ldots,\phi_*X_{r+1})\circ\phi = \left(\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\phi_*X_i)(\omega(\phi_*X_1,\ldots,\phi_*\hat{X}_i,\ldots,\phi_*X_{r+1})\circ\phi+\right.$$

$$\left.+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\phi_*X_i,\phi_*X_j],\ldots,\phi_*\hat{X}_i,\ldots,\phi_*\hat{X}_j,\ldots,\phi_*X_{r+1})\right)\circ\phi.$$

Наконец, чтобы убедиться, что мы получили одно и тоже, воспользуемся предложением 1.3 . Теорема полностью доказана. □

Задача 1.10. Проведите доказательство теоремы 1.3 в случаях 1) 1-формы и 2-формы, 2) 2-формы.

Замечание 1.7. Пусть $\phi : M \to N$ – диффеоморфизм. Как мы видели выше, для него определены отображения $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ увлечения векторных полей и отображение $\phi^* : \Lambda_r(N) \to \Lambda_r(M)$ антиувлечения r-форм. Можно показать, что в случае диффеоморфизма отображения ϕ_* и ϕ^* обратимы. Обозначим $(\phi_*)^{-1} = \phi^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ и назовем это отображение отображением *антиувлечения векторных полей.* Обозначим $(\phi^*)^{-1} = \phi_* : \Lambda_r(M) \to \Lambda_r(N)$ и назовем это отображение *отображением увлечения r-форм.*

Эти отображения позволяют определить отображения увлечения и антиувлечения для тензоных полей любого типа (r,s) следующим образом. *Отображение увлечения*

$$\phi_* : \mathfrak{T}^s_r(M) \to \mathfrak{T}^s_r(N)$$

по формуле

$$(\phi_*t)(X_1,\ldots,X_r,\omega^1,\ldots,\omega^s) = t(\phi^*X_1,\ldots,\phi^*X_r,\phi^*\omega^1,\ldots,\phi^*\omega^s)\circ\phi^{-1},$$

где $X_1,\ldots,X_r \in \mathfrak{X}(N)$, $\omega^1,\ldots,\omega^s \in \mathfrak{X}^*(N)$. *Отображение антиувлечения*

$$\phi^* : \mathfrak{T}^s_r(N) \to \mathfrak{T}^s_r(M)$$

по формуле

$$(\phi^*t)(X_1,\ldots,X_r,\omega^1,\ldots,\omega^s) = t(\phi_*X_1,\ldots,\phi_*X_r,\phi_*\omega^1,\ldots,\phi_*\omega^s)\circ\phi,$$

где $X_1,\ldots,X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^1,\ldots,\omega^s \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Задача 1.11. Пусть t – тензорное поле типа (r,s). Докажите, что

$$(\phi_*t)_{\phi(p)} = (\phi_*)_p t_p.$$

Решение. Проведем доказательство для тензорного поля типа (1,1). Общий случай аналогичен, но содержит большее число аргументов. По определению увлечения тензорного поля имеем

$$(\phi_*t)(X,\omega) = t(\phi^*X,\phi^*\omega)\circ\phi^{-1},$$

где $X \in \mathfrak{X}(N)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$. В обеих частях этого равенства стоят функции на многообразии N. Вычислим их значения в точке $\phi(p)$. По определению тензорного поля как полилинейного отображения получим

$$(\phi_*t)_{\phi(p)}(X_{\phi(p)},\omega_{\phi(p)}) = t_p((\phi^*X)_p,(\phi^*\omega)_p). \tag{1.23}$$

Как мы знаем, $(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}$ (см. формулу (**??**)). Получим аналогичную формулу для вектора $(\phi^*X)_p$. По определению антиувлечения векторных полей получим $\phi^*X = (\phi_*)^{-1}X$. В обеих частях равенства стоят векторные поля на многообразии M. Посмотрим на них как на сечения и вычислим их значения в точке p:

$$(\phi^*X)_p = ((\phi_*)^{-1}X)_p.$$

Из тождества $\psi_*\circ\phi_* = (\psi\circ\phi)_*$ легко видеть, что $(\phi_*)^{-1} = (\phi^{-1})_*$. Тогда

$$(\phi^*X)_p = ((\phi_*)^{-1}X)_p = ((\phi^{-1})_*X)_p =$$

Применяем критерий ϕ-связанных векторных полей (см. теорему 1.2)

$$= ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}X_{\phi(p)} =$$

Из формулы $((\psi\circ\phi)_*) = (\psi_*)_{\phi(p)}\circ(\phi_*)_p$ вытекает, что $((\phi_*)_p)^{-1} = ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}$. Применяем эту формулу в цепочке равенств

$$= ((\phi_*)_p)^{-1}X_{\phi(p)} = \phi^*_{\phi(p)}X_{\phi(p)}.$$

Здесь мы использовали определение антиувлечения векторов. Итак, мы получаем вспомогательную формулу

$$(\phi^* X)_p = \phi^*_{\phi(p)} X_{\phi(p)}. \tag{1.24}$$

Возвращаемся к равенству (1.23) с учетом (1.24) и (**??**):

$$(\phi_* t)_{\phi(p)}(X_{\phi(p)}, \omega_{\phi(p)}) = t_p((\phi^* X)_p, (\phi^*\omega)_p) = t_p(\phi^*_{\phi(p)} X_{\phi(p)}, \phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}) = (\phi_*)_p t_p(X_{\phi(p)}, \omega_{\phi(p)}),$$

то есть $(\phi_* t)_{\phi(p)}(X_{\phi(p)}, \omega_{\phi(p)}) = (\phi_*)_p t_p(X_{\phi(p)}, \omega_{\phi(p)})$. Так как это равенство верно для любого вектора и ковектора в точке $\phi(p)$, мы получаем требуемое равенство. □

§1.4. Подмногообразия гладкого многообразия.

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, а N – гладкое многообразие размерности m.

Гладкое отображение $\phi : M \to N$ называется *регулярным в точке* $p \in M$, если его дифференциал $(\phi_*)_p$ невырожден в этой точке, то есть ядро отображения $(\phi_*)_p$ нулевое. Отображение ϕ называется *регулярным*, если оно регулярно в каждой точке из M.

Замечание 1.8**.** При регулярном отображении $(\phi_*)_p$ размерность образа $(\phi_*)_p(T_p(M))$ равна размерности $T_p(M)$. В частности, из этого следует, что если размерность многообразия N меньше размерности многообразия M, то отображение ϕ не может быть регулярным.

Теорема 1.4**.** *Пусть $m \geq n$. Гладкое отображение ϕ является регулярным в точке p тогда и только тогда, когда в паре локальных карт (U, φ) и (V, ψ), содержащих точку p и точку $\phi(p)$ соответственно, его матрица Якоби в точке $\varphi(p)$ имеет ранг n.*

Доказательство. Пусть отображение ϕ в указанной паре локальных карт задается уравнениями

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \quad \dots, \quad y^m = y^m(x^1, \dots, x^n).$$

Пусть вектор ξ принадлежит ядру отображения $(\phi_*)_p$. Тогда $(\phi_*)_p \xi = 0$. Напомним, что для отображение $(\phi_*)_p$ в паре соответствующих локальных карт имеет место формула (см. (1.13))

$$(\phi_*)_p \xi = \xi^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)},$$

где $\xi \in T_p(N)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Откуда получаем в силу линейной независимости векторов натурального базиса, что

$$\xi^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = 0. \tag{1.25}$$

Это система из m линейных уравнений с n неизвестными ξ^i. Мы получаем, что вектор ξ принадлежит ядру отображения $(\phi_*)_p$ тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют системе (1.25). Если предположить, что отображение ϕ регулярно в точке p, то система уравнений (1.25) должна иметь только нулевое решение. Это имеет место тогда и только тогда, когда матрица этой системы имеет ранг n. А она есть ни что иное как матрица Якоби отображения ϕ в точке $\varphi(p)$.

Обратно, если матрица Якоби имеет ранг n, то система (1.25) имеет единственное решение, причем оно является нулевым, а значит, ядро отображения $(\phi_*)_p$ нулевое. □

Пример 1.8**.** Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}^4$. Как мы видели в курсе Анализ на многообразиях, арифметические пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$ являются гладкими многообразиями. Каждое из них покрывается одной картой: $(\mathbb{R}^2, id)$ и $(\mathbb{R}^4, id)$ соответственно. Обозначим координаты в первом случае через x^1, x^2, а во втором y^1, y^2, y^3, y^4. Зададим отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ следующим образом:

$$y^1 = \cos x^1; \quad y^2 = \sin x^1; \quad y^3 = \cos x^2; \quad y^4 = \sin x^2.$$

Выясним, является ли это отображение регулярным. Согласно теореме 1.4 нам нужно вычислить матрицу Якоби:

$$\begin{pmatrix} -\sin x^1 & \cos x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x^2 & \cos x^2 \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби является вырожденной если $\sin x^1 = 0, \cos x^1 = 0$ или $\sin x^2 = 0, \cos x^2 = 0$. Таких точек в $\mathbb{R}^2$ нет, и значит, отображение ϕ будет регулярным в каждой точке из $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.12**.** Пусть отображение $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ задано уравнениями $y^1 = x, y^2 = x^2$, где x – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$, (y^1, y^2) – координаты в карте $(\mathbb{R}^2, id)$. Выясните, является ли отображение ϕ регулярным.

Ответ. Да.

Задача 1.13. Пусть дано отображение $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ по формуле $y = x^2$, где x – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$ первого многообразия $\mathbb{R}^1$, y – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$ второго многообразия $\mathbb{R}^1$. Выясните, будет ли отображение ϕ регулярным.

Ответ. Нет.

Наложение различных условий на отображение ϕ позволяет ввести следующие определения. Пусть M и N – гладкие многообразия, $\phi : M \to N$ – гладкое отображение.

Пара (M, ϕ) называется *погруженным в N подмногообразием*, если отображение ϕ регулярно. При этом отображение ϕ называется *погружением* или *иммерсией*.

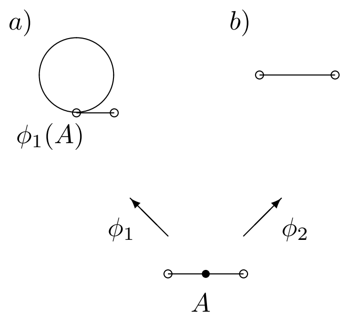
Пара (M, ϕ) называется *подмногообразием* в N, если отображение ϕ регулярно и инъективно.

Пара (M, ϕ) называется *вложенным в N подмногообразием*, если отображение ϕ является регулярным, инъективным и открытым отображением на образ $\phi(M)$ (с топологией, индуцированной многообразием N). При этом отображение ϕ называется *вложением*.

Замечание 1.9. Разберемся более подробно с последним определением. Во-первых, заметим, что гладкие многообразия имеют структуру топологического пространства, а значит, для них определены такие топологические понятия как непрерывное и открытое отображения. Так как отображение ϕ является гладким, то оно, в частности, непрерывно (в смысле математического анализа), а значит, непрерывно в смысле топологии (прообраз любого открытого множества из N открыт в M). Напомним, что отображение ϕ называется открытым, если образ любого открытого множества из M открыт в N. Кроме того, по условию определения вложения, ϕ является биекцией на свой образ $\phi(M)$. Таким образом, отображение $\phi : M \to \phi(M)$ является гомеоморфизмом.

Чтобы увидеть разницу между определениями подмногообразия и вложенного подмногообразия, рассмотрим два примера.

Пусть даны два гладких отображения интервала $(0,1)$ (это гладкое многообразие с гладкой структурой, задаваемой картой $((0,1), id)$) на многообразие $\mathbb{R}^2$.



Образы этих отображений изображены на рисунках $a)$ и $b)$. Второе отображение легко задать аналитически: $id : (0,1) \to \mathbb{R}^2$. Очевидно, оно является гладким. Первое отображение также является гладким, но его аналитическое задание несколько сложнее и мы не будем его приводить. Рассмотрим случай $a)$. Прикинем по картинке будет ли это отображение регулярным. В каждой точке интервала касательное пространство имеет размерность 1 (его можно представить себе в виде прямой). Отображение $((\phi_1)_*)_p$, $p \in (0,1)$ переводит касательное пространство (прямую) в точке p в касательное пространство в точке $\phi_1(p)$ многообразия $\phi_1((0,1))$. Как мы видим на рисунке, в каждой точке многообразия $\phi_1(M)$ существует касательное пространство и оно одномерно (его также можно представлять себе как прямую). Таким образом, отображение $((\phi_1)_*)_p$ оставляет размерность касательного пространства той же, а значит, является регулярным.

Очевидно, что отображение ϕ_1 является инъективным. Следовательно, пара $((0,1), \phi_1)$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^2$.

Выясним, будет ли оно вложенным подмногообразием. Как мы видели выше для этого отображение ϕ_1 должно устанавливать взаимно однозначное соответствие между открытыми множествами многообразия $(0,1)$ и многообразия $\phi_1((0,1))$ с индуцированной топологией из $\mathbb{R}^2$. Вспомним, что открытыми множествами на интервале $(0,1)$ будут всевозможные интервалы и их всевозможные объединения. На $\mathbb{R}^2$ открытыми множествами будут открытые круги и их всевозможные объединения. Если мы возьмем пересечение таких множеств с множеством $\phi_1((0,1))$, то получим открытые множества на $\phi_1((0,1))$, индуцированные топологией $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим произвольный интервал (ε, a) на $(0,1)$ $(\varepsilon > 0)$, содержащий точку A. Это открытое множество в многообразии $(0,1)$. Его образом при отображении ϕ_1 будет "искривленный интервал"I, содержащий точку $\phi_1(A)$. Если предположить, что пара $((0,1), \phi_1)$ является вложенным подмногообразием (то есть отображение ϕ_1 должно быть гомеоморфизмом), то I должно быть открытым множеством в топологии, индуцированной на $\phi_1((0,1))$. Это противоречит тому, что любое открытое множество, содержащее точку $\phi_1(A)$, должно содержать интервал вида $(\phi(0), \phi(\varepsilon))$.

Итак, мы получаем, что пара $((0,1), \phi_1)$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, но не является вложенным подмногообразием.

Легко видеть, что пара $((0,1), \phi_2)$ является вложенным подмногообразием.

Задача 1.14. Каким многообразием будет пара $(\mathbb{R}^2, \phi)$ из примера 1.8?

§1.5. Распределения и интегрируемость.

5.1. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие.

Распределением на M называется подмодуль D модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ (то есть подмножество, которое замкнуто относительно сложения векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию).

Распределение D называется *r-мерным*, если

1. существует упорядоченная система векторных полей $(E_1, \dots, E_r)$ в D, такая что для любого $X \in D$ имеем $X = f^i E_i$, $i = 1, \dots, r$, $f^i \in C^\infty(M)$, причем в каждой точке из M вектора этих векторных полей линейно независимы, либо

2. на многообразии M существует атлас, в каждой карте (U, φ) которого сужение $D|_U = \{X|_U,\ X \in D\}$ упорядоченную систему векторных полей $(E_1, \dots, E_r)$ в $D|_U$, таких что для любого $Y \in D|_U$ имеем $Y = f^i E_i$, $i = 1, \dots, r$, $C^\infty(U)$, причем в каждой точке из U вектора этих векторных полей линейно независимы.

В первом случае будем называть систему $(E_1, \dots, E_r)$ базисом распределения D, а во втором случае – *локальным базисом распределения* D. В первом случае распределение D называется *параллелизуемым.* Многообразие M называется *параллелизуемым*, если параллелизуем модуль $\mathfrak{X}(M)$, то есть в нем существует глобальный базис. Карты, указанного в определении атласа, называются *допустимыми картами* распределения D.

Пример 1.9**.** Рассмотрим векторное поле X на гладком многообразии M. Пусть векторное поле X отлично от нулевого векторного поля, то есть векторного поля, которое каждой точке p многообразия M ставит в соответствие пару $(p, 0)$, где 0 – нуль вектор касательного пространства $T_p(M)$. Пусть D будет множеством векторных полей вида fX, где f – всевозможные гладкие функции на M. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно сложения векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию, то есть является распределением на многообразии M.

Рассмотрим два случая:

1) Для любой точки $p \in M$ значение векторного поля $X(p)$ отлично от пары $(p, 0)$. Другими словами, векторное поле X не обращается в нуль ни в одной точке из M. Тогда распределение D будет одномерным и параллелизуемым. Действительно, базисом этого распределения будет векторное поле X (оно определено на всем многообразии M). При этом в каждой точке $p \in M$ вектор X_p отличен от нуля, а значит, линейно независим.

2) Пусть существует точка $p \in M$, такая, что $X_p = 0$, то есть векторное поле X принимает значение $(p, 0)$ в этой точке. В этом случае распределение D не будет одномерным. Докажем это от противного. Пусть оно одномерно. Тогда существует атлас на M, удовлетворяющий определению r-мерного (в нашем случае $r = 1$) распределения. Возьмем карту, которая содержит точку p. Тогда должно существовать векторное поле Y на U, такое что Y_p линейно независимый вектор, то есть вектор отличный от нуля. Но так как $Y \in D$, имеем $Y(p) = f(p)X(p)$, то есть $Y_p = f(p)X_p = 0$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, распределение D не будет одномерным.

Замечание 1.10**.** Задать r-мерное распределение мы можем еще так. В каждой точке p многообразия M выберем векторное подпространство D_p (его еще называют площадкой) в касательном пространстве $T_p(M)$. При этом потребуем, чтобы при изменении точки площадки менялись гладким образом. Последняя фраза дает хорошее наглядное представление о распределении, но не является строгим математическим требованием. Сформулируем его в более строгой форме: многообразие M допускает атлас, в каждой карте которого существует система векторных полей $(X_1, \dots, X_r)$, таких что каждая площадка D_p является линейной оболочкой векторов $(X_1)_p, \dots, (X_r)_p$.

5.2. *Кораспределением* на M называется подмодуль $\mathbf{C}$ модуля $\mathfrak{X}^*(M)$. Кораспределение называется *r-мерным*, если

1. существует система $(\omega^1, \dots, \omega^r) \subset \mathbf{C}$, такая что каждая 1-форма $\omega \in \mathbf{C}$ представима в виде $\omega = f_i \omega^i$, $f_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, \dots, r$, причем в каждой точке из M ковекторы этих форм $(\omega^1, \dots, \omega^r)$ линейно независимы, либо

2. на многообразии M существует атлас, в каждой карте (U, φ) которого для сужения $\mathbf{C}|_U = \{\omega|_U,\ \omega \in \mathbf{C}\}$ существует система $(\omega^1, \dots, \omega^r) \subset \mathbf{C}|_U$, такая что каждая 1-форма $\omega \in \mathbf{C}|_U$ представима в виде $\omega = f_i \omega^i$, $f_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \dots, r$, причем в каждой точке из U ковекторы $((\omega^1)_p, \dots, (\omega^r)_p)$ этих 1-форм линейно независимы.

Систему 1-форм $(\omega^1, \dots, \omega^r)$ будем называть *(локальным) базисом* кораспределения $\mathbf{C}$.

Пример 1.10**.** Пусть D – распределение на M. Рассмотрим множество $\mathbf{C}_D$ 1-форм ω, таких что $\omega(X) = 0$ для любого $X \in D$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно операций сложения и умножения на гладкую функцию, а значит, является подмодулем модуля $\mathfrak{X}^*(M)$, то есть является кораспределением на M. Это кораспределение называется *кораспределением, ассоциированным распределению* D.

Теорема 1.5**.** *Пусть дано r-мерное распределение D. Тогда, ассоциированное ему кораспределение $\mathbf{C}_D$ имеет размерность $n - r$, где n – размерность многообразия M.*

Доказательство. Так как распределение D имеет размерность r, то существует локальный базис $(E_1, \dots, E_r)$ этого распределения для каждой карты (U, φ) некоторого атласа многообразия M. Дополним этот базис до базиса $(E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_n)$ модуля $\mathfrak{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ – дуальный базис модуля $\mathfrak{X}^*(U)$. Рассмотрим произвольную 1-форму $\omega \in \mathfrak{X}^*(U)$. Тогда ее можно разложить по базису 1-форм

$$\omega = a_\alpha \omega^\alpha,\ a_\alpha = \omega(E_\alpha) \in C^\infty(U),\ \alpha = 1, \dots, n.$$

Здесь мы воспользовались тем, что координаты формы в дуальном базисе совпадают с ее компонентами. Тогда $\omega \in \mathbf{C}_D$ тогда и только тогда, когда $\omega(X) = 0$ для любого векторного поля $X \in D$, в частности, для векторных полей базиса D получим

$$a_i = \omega(E_i) = 0,\ i = 1, \dots, r.$$

Итак, каждая форма $\omega \in \mathbf{C}_D$ имеет вид

$$\omega = a_{r+1}\omega^{r+1} + \ldots + a_n \omega^n. \tag{1.26}$$

По определению кораспределения (замкнутость относительно операций сложения и умножения на функцию) любая 1-форма вида (1.26) принадлежит кораспределению $\mathbf{C}_D$. Итак, мы показали, что кораспределение $\mathbf{C}_D$ состоит из форм вида (1.26). Так как формы $(\omega^{r+1}, \dots, \omega^n)$ линейно независимы, они образуют локальный базис модуля $\mathbf{C}_D$, а значит, его размерность равна $n - r$. □

Локальный базис ассоциированного кораспределения называется *системой Пфаффа* r-мерного распределения.

С помощью системы Пфаффа легко отлавливать векторные поля, принадлежащие распределению D. Пусть индексы i, j принимают значения от 1 до r; индексы a, b, c принимают значения от $r+1$ до n. Тогда имеет место

Лемма 1.1**.** *Пусть $\{\omega^a\}$ – система Пфаффа распределения D. Векторное поле X, заданное на гладком многообразии M, принадлежит распределению D тогда и только тогда, когда $\omega^a(X) = 0$ для всех $a = r+1, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть векторное поле X принадлежит распределению D. Так как формы ω^a принадлежат ассоциированному кораспределению, получаем $\omega^a(X) = 0$.

Обратно, пусть дано гладкое векторное поле X. Как в теореме 1.5 рассмотрим локальный базис $\{E_i\}$, дополним его до локального базиса $\{E_i, E_a\}$ модуля $\mathfrak{X}(M)$. Тогда в дуальном базисе $\{\omega^j, \omega^b\}$ формы $\{\omega^b\}$ являются локальным базисом ассоциированного кораспределения, то есть системой Пфаффа распределения D.

Разложим векторное поле X по базису $\{E_i, E_a\}$: $X = X^i E_i + X^a E_a$. Фиксируем произвольный индекс b и подействуем на обе части равенства формой ω^b. Тогда

$$0 = \omega^b(X) = X^i \omega^b(E_i) + X^a \omega^b(E_a) = 0 + X^a \delta^b_a = X^b.$$

Таким образом, векторное поле X имеет вид $X = X^i E_i$, то есть раскладывается по локальному базису распределения, а значит, принадлежит ему.

□

5.3. Распределение D называется *инволютивным*, для любых векторных полей $X, Y \in D$ их коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит D.

Как мы видели в предыдущем пункте, с каждым r-мерным распределением D связано ассоциированное кораспределение $\mathbf{C}_D$. Оказывается инволютивность распределения D может быть сформулирована в терминах его кораспределения $\mathbf{C}_D$, а именно в терминах системы Пфаффа.

Пусть индексы i, j принимают значения от 1 до r; индексы a, b, c принимают значения от $r + 1$ до n; индексы α, β принимают значения от 1 до n. Тогда мы можем сформулировать следующий критерий инволютивности r-мерного распределения в терминах его системы Пфаффа.

Теорема 1.6. *r-мерное распределение D с системой Пфаффа $\{\omega^a\}$ инволютивно тогда и только тогда, когда в каждой допустимой карте существуют 1-формы $\{\omega^a_b\}$, такие, что*

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b. \tag{1.27}$$

Эти $(n-r)$ уравнений называются структурными уравнениями распределения D.

Доказательство. Пусть распределение D является инволютивным. Фиксируем допустимую карту распределения D и рассмотрим локальный базис $\{E_i\}$ распределения D в этой карте, для которого дуальным будет данная система Пфаффа. Дополним базис $\{E_i\}$ до локального базиса $\{E_i, E_a\} \equiv \{E_\alpha\}$ модуля $\mathfrak{X}(M)$. Тогда система Пфаффа $\{\omega^a\}$ дополнится до локального базиса $\{\omega^i, \omega^a\} \equiv \{\omega^\beta\}$ модуля $\mathfrak{X}^*(M)$, который будет дуален базису $\{E_\alpha\}$, то есть $\omega^\beta(E_\alpha) = \delta^\alpha_\beta$.

Рассмотрим 2-форму $d\omega^a$. Она может быть разложена по базису 2-форм

$$\{\omega^\alpha \wedge \omega^\beta,\, \alpha < \beta\} \equiv \{\omega^i \wedge \omega^j,\, i < j, \omega^i \wedge \omega^b, \omega^b \wedge \omega^c, b < c\}$$

в виде

$$d\omega^a = \Omega^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \Omega^a_{ib}\omega^i \wedge \omega^b + \Omega^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c. \tag{1.28}$$

Как мы знаем из курса Анализ на многообразиях коэффициенты разложения формы $d\omega^a$ по базису $\{\omega^\alpha \wedge \omega^\beta,\, \alpha < \beta\}$ совпадают с ее компонентами в базисе $\{E_\alpha\}$

$$\Omega^a_{\alpha\beta} = d\omega^a(E_\alpha, E_\beta).$$

Покажем, что в разложении (1.28) коэффициент $\Omega^a_{ij} = 0$. Действительно, вспомним формулу для внешнего дифференциала 1-формы (1.3):

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

и применим ее к форме $d\omega^a$ и векторным полям E_i, E_j:

$$\Omega^a_{ij} = d\omega^a(E_i, E_j) = E_i(\omega^a(E_j)) - E_j(\omega^a(E_i)) - \omega^a([E_i, E_j]).$$

Вспоминаем, что система $\{E_i\}$ была базисом распределения D, следовательно, векторные поля E_i, E_j принадлежат D. Форма ω^a принадлежит кораспределению $\mathbf{C}_D$, а значит, обнуляется на любом векторном поле из D, в частности, на векторных полях E_i и E_j. Таким образом, первые два слагаемых в крайне правой части равенства равны нулю. Третье слагаемое равно нулю, так как распределение D инволютивно, а значит, скобка Ли $[E_i, E_j]$ также принадлежит D и на ней обнуляется ω^a. Таким образом, мы показали, что $\Omega^a_{ij} = 0$.

Возвращаемся к равенству (1.28). Оно примет вид

$$d\omega^a = \Omega^a_{ib}\omega^i \wedge \omega^b + \Omega^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c = \Omega^a_{ib}\omega^i \wedge \omega^b - \Omega^a_{bc}\omega^c \wedge \omega^b = (\Omega^a_{ib}\omega^i - \Omega^a_{bc}\omega^c) \wedge \omega^b.$$

Если мы обозначим $\Omega^a_{ib}\omega^i - \Omega^a_{bc}\omega^c = \omega^a_b$, то получим требуемые уравнения.

Обратно, пусть для r-мерного распределения D его система Пфаффа $\{\omega^a\}$ удовлетворяет уравнениям (1.27). Опять разложим 2-форму $d\omega^a$ по базису в виде (1.28)

$$d\omega^a = \Omega^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \Omega^a_{ib}\omega^i \wedge \omega^b + \Omega^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c = \Omega^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + (\Omega^a_{ib}\omega^i - \Omega^a_{bc}\omega^c) \wedge \omega^b \tag{1.29}$$

и сравним это разложение с (1.27): $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b$. Так как формы ω^i и ω^b линейно независимы, формы ω^i нельзя представить в виде линейной комбинации форм ω^b. Тогда первое слагаемое в выражении (1.29) должно быть равно нулю. Следовательно, в силу линейной независимости базисных форм $\omega^i \wedge \omega^j$, $i < j$ получим, что $\Omega^a_{ij} = 0$. Вспомним, что

$$0 = \Omega^a_{ij} = d\omega^a(E_i, E_j) = E_i(\omega^a(E_j)) - E_j(\omega^a(E_i)) - \omega^a([E_i, E_j]) = 0 - 0 - \omega^a([E_i, E_j]).$$

Итак, мы получаем, что $\omega^a([E_i, E_j]) = 0$. Согласно лемме 1.1 получаем, что $[E_i, E_j]$ принадлежит распределению D. Тогда для любых векторных полей $X, Y \in D$ получаем (с учетом свойств скобки Ли)

$$[X,Y] = [X^iE_i, Y] = X^i[E_i, Y] - Y(X^i)E_i = X^i[E_i, Y^jE_j] - Y(X^i)E_i = X^i(Y^j[E_i, E_j] + E_i(Y^j)E_j) - Y(X^i)E_i.$$

Это линейная комбинация векторных полей, принадлежащих D, следовательно $[X,Y] \in D$, то есть распределение D инволютивно по определению. $\square$

5.4. Пусть D – r-мерное распределение на многообразии M.

Вложенное подмногообразие (N,ϕ) многообразия M называется *интегральным многообразием распределения* D, если $\mathfrak{X}(\phi(N)) \subset D|_{\phi(N)}$ и называется *интегральным многообразием максимальной размерности*, если $\mathfrak{X}(\phi(N)) = D|_{\phi(N)}$. Распределение называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

Замечание 1.11. Интегральное многообразие распределения D мы можем определить в других терминах. Опять берем вложенное подмногообразие (N,ϕ) и требуем, чтобы для любой точки $p \in N$ имело место включение $(\phi_*)_p(T_p(N)) \subset D_{\phi(p)}$. Аналогично, интегральное многообразие будем интегральным многообразием максимальной размерности, если $(\phi_*)_p(T_p(N)) = D_{\phi(p)}$.

В заключение сформулируем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 1.7. *(Фробениуса). Распределение на гладком многообразии вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

§1.6. Локальные потоки на многообразиях.

Простейшими примерами распределений служат одномерные распределения. Мы построили пример одномерного распределения на многообразии M: $D = \{fX, f \in C^\infty(M)\}$ (см. пример 1.9). Рассмотрим его подробнее.

Лемма 1.2. *Распределение D является инволютивным.*

Доказательство. Пусть $Y, Z \in D$ – произвольные векторные поля распределения D. Тогда

$$[Y,Z] = [fX, gX] = fg[X,X] + fX(g)X - gX(f)X = (fX(g) - gX(f))X.$$

Мы видим, что векторное поле $[Y,Z]$ есть произведение функции на векторное поле X, следовательно принадлежит распределению D. Тогда распределение D инволютивно по определению. □

По теореме Фробениуса мы получаем, что распределение D является вполне интегрируемым. Интегральными многообразиями (с необходимостью) максимальной размерности являются 1- мерные подмногообразия, то есть кривые $\gamma : I \to M$.

Пример 1.11. Рассмотрим интегральные кривые $\gamma : I \to M_0$ распределения D. Из определения интегрального многообразия следует, что касательные векторы этих кривых в точках p принадлежат площадкам D_p распределения D. Оказывается, что среди таких кривых есть кривая, касательный вектор в каждой точке которой совпадает с касательным вектором X_p, задаваемым векторным полем X. Такая кривая называется *интегральной кривой векторного поля* X. Доказать это утверждение нам поможет математический анализ. Чтобы принять его помощь, мы должны как всегда уйти в локальные карты.

Пусть (U,φ) – локальная карта на многообразии M с координатами $(x^1,\dots,x^n)$ в окрестности некоторой фиксированной точки $p \in M$. Пусть в этой карте точка p имеет координаты $(x_0^1,\dots,x_0^n)$, то есть $\varphi(p) = (x_0^1,\dots,x_0^n)$. Разложим векторное поле X по натуральному базису этой карты

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $X^i = X^i(x^1,\dots,x^n)$ – гладкие на U функции, которые в каждой точке q выдают координаты вектора X_q. Потребуем от кривой γ, чтобы она проходила через точку p, причем точке p соответствовало значение параметра $t = 0$, то есть $\gamma(0) = p$. Кроме того, в каждой точке $q \in \gamma(I) \cap U$ касательный вектор к кривой γ должен совпадать с вектором X_q. Эти два условия нужно записать через координаты в локальной карте. Пусть кривая γ в локальной карте задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$. Тогда первое условие примет вид:

$$x^i(0) = x_0^i.$$

Запишем второе условие в координатах. Возьмем произвольную точку q и вычислим в ней координаты ξ^i касательного вектора к кривой γ в этой точке. Пусть точке q соответствует значение параметра $t = \tau$. Тогда

$$\xi^i = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} x^i(t).$$

Так как точка q изменяется, то обычно условие $t = \tau$ не пишут, а записывают так

$$\xi^i(t) = \frac{d}{dt} x^i(t).$$

Левая часть этого равенства говорит нам, что мы двигаемся по кривой γ и касательный вектор к ней меняется при этом движении. Как он меняется, говорит правая часть равенства.

Вспомним, что для записи второго условия, нам нужно потребовать, чтобы касательный вектор ξ в каждой точке q совпадал с вектором X_q. Это требование примет вид

$$\frac{d}{dt}x^i(t) = X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)).$$

Обычно в этом равенстве t не пишут. Тогда объединяя оба требования, мы получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \ldots, x^n) \\ x^i(0) = x_0^i. \end{array} \right. \tag{1.30}$$

Тогда наша задача формулируется следующим образом: существует ли решение системы (1.30) и если да, то единственно ли оно. Математический анализ дает ответ: система (1.30) является задачей Коши и она всегда имеет единственное решение.

Нетрудно показать, что кривая γ не зависит от выбора локальной карты. Тогда на язык геометрии ответ математического анализа переводится так: для каждой точки $p \in M$ и каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует окрестность точки p, такая что в ней существует интегральная кривая векторного поля X.

Пример 1.11 приводит нас к формулировке следующей теоремы.

Теорема 1.8. *Задание векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию гладкого отображения*

$$\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \to M,$$

где $(-t(p), t(p))$ – некоторый интервал вещественной прямой $\mathbb{R}$, $p \in M$ – произвольная точка. Отображение Φ_X однозначно определяется свойствами

$$\Phi_X(p, 0) = p; \quad \tfrac{d}{dt}\Phi_X(p,t) = X_{\Phi_X(p,t)}. \tag{1.31}$$

Здесь p – произвольная фиксированная точка.

Доказательство. Пусть дано векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Как мы видели в примере 1.11 оно определяет (независимо от выбор локальной карты) в окрестности каждой точки p кривую γ. Если фиксирована локальная карта (U, φ) в окрестности точки p, то кривая γ в этой карте задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$. Обозначим ε_i стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда положим по определению

$$\Phi_X(p,t) = \varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i), \tag{1.32}$$

где $p \in U$ – произвольная точка, параметр t принимает значения в интервале, для которого задача Коши имеет решение. Мы возьмем часть этого интервала вида $(-t(p), t(p))$. Упоминание точки p в обозначении этого интервала показывает, что он зависит от начальной точки, в окрестности которой мы работаем.

В силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий вектор-функция $x(t) = x^i(t)\varepsilon_i$ гладко зависит от переменных $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, а значит, отображение Φ_X гладко зависит от всех аргументов.

Докажем, что построенное отображение (1.32) удовлетворяет свойствам (1.31). Имеем

$$\Phi(p, 0) = \varphi^{-1}(x^i(0)\varepsilon_i) = \varphi^{-1}(x_0^1, \ldots, x_0^n) = p.$$

Таким образом, первое условие выполняется. Проверим второе условие. Фиксируем произвольное τ и вычислим

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \Phi_X(p,t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i) = \varphi_*^{-1} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} (x^i(t)\varepsilon_i) = \varphi_*^{-1}\left(\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} x^i(t)\right)\varepsilon_i\right) =$$
$$= \varphi_*^{-1}(X^i(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau))\varepsilon_i) = r_\varphi^{-1}(X^1(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)), \ldots, X^n(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau))) = X_{\Phi_X(p,\tau)}.$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.15), (1.30) и (1.16).

Так как соотношения (1.31) являются бескоординатным аналогом задачи Коши, а задача Коши однозначно определяет вектор-функцию $\gamma(t)$, то условия (1.31) однозначно определяют отображение Φ_X.

Пусть теперь дано отображение Φ_X, удовлетворяющее условиям (1.31). Покажем, что эти условия позволяют однозначно определить значение векторного поля X в каждой точке p. Имеем

$$X_p = X_{\Phi(p,0)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_X(p,t).$$

Таким образом, векторное поле X однозначно определяется по отображению Φ_X. □

Отображение $\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \to M$, построенное выше, называется *локальным потоком*, порожденным векторным полем X.

Как мы доказали, если Φ_X – локальный поток на многообразии M, то фиксируя точку $p \in M$ мы получим гладкую кривую (интегральную кривую векторного поля X с началом в точке p)

$$\gamma(t) : (-t(p), t(p)) \to M,$$

определяемую формулой

$$\gamma(t) = \Phi_X(p, t).$$

Из теоремы 1.8 следует, что эта кривая однозначно определяется условиями

$$1)\, \gamma(0) = p; \quad 2)\, \tfrac{d\gamma(t)}{dt} = X_{\gamma(t)}. \tag{1.33}$$

Локальные потоки обладают следующими свойствами

Теорема 1.9. *Во введенных обозначениях*

$$1)\, \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t_2) = \Phi_X(p, t_1 + t_2);$$
$$2)\, \Phi_{cX}(p, t) = \Phi_X(p, ct)$$

для всех $t_1, t_2, t, c \in \mathbb{R}$*, для которых имеют смысл обе части тождеств.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $p \in M$.

1) Зафиксируем число t_1 и положим $t_2 = t$. Введем обозначения

$$\alpha(t) = \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t); \quad \beta(t) = \Phi_X(p, t_1 + t).$$

Докажем, что оба отображения удовлетворяют условиям (1.33). Так как условия (1.33) однозначно определяют интегральную кривую, из этого мы получим, что $\alpha(t) = \beta(t)$, а значит, выполняется первое тождество.

Проверяем условия (1.33). Имеем

$$\alpha(0) = \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), 0) = \Phi_X(p, t_1) = \beta(0),$$

то есть начало у каждой из кривых одно и то же $\Phi_X(p, t_1)$.

Для второго условия имеем

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t) = X_{\Phi_X(\Phi_X(p,t_1),t)} = X_{\alpha(t)},$$

то есть $\alpha(t)$ – интегральная кривая векторного поля X. С другой стороны, обозначим $t + t_1 = \tau$. Тогда

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{d\beta(\tau(t))}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}\Phi_X(p, \tau) = X_{\Phi_X(p,\tau)} = X_{\beta(t)},$$

то есть $\beta(t)$ – интегральная кривая того же векторного поля X. Итак, $\alpha(t) = \beta(t)$. Теперь отпускаем точку p и получаем требуемое равенство.

Второе тождество доказывается аналогично (докажите самостоятельно. Здесь будет начало в точке p и векторное поле cX). □

Теорема 1.10. *Пусть* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *– произвольное векторное поле,* $\varphi : M \to M$ *– диффеоморфизм. Тогда*

$$\Phi_{\varphi_* X}(p, t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t).$$

Доказательство. Принцип доказательства такой же как и в теореме 1.9. Фиксируем произвольную точку $p \in M$ и обозначим левую и правую части доказываемого тождества $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно. Имеем

$$\alpha(0) = \Phi_{\varphi_* X}(p, 0) = p;\ \beta(0) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, 0) = \varphi \circ \varphi^{-1}p = p.$$

Итак, начала у интегральных кривых $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ совпадают. Докажем, что они являются интегральными кривыми одного и того же векторного поля. Имеем

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{dt}\Phi_{\varphi_* X}(p, t) = (\varphi_* X)_{\Phi_{\varphi_* X}(p,t)} = (\varphi_* X)_{\alpha(t)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \frac{d}{dt}\varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t) = \varphi_* \frac{d}{dt}\Phi_X(\varphi^{-1}p, t) = \varphi_*(X_{\Phi_X(\varphi^{-1}p,t)}) = (\varphi_* X)_{\varphi\circ\Phi_X(\varphi^{-1}p,t)} = (\varphi_* X)_{\beta(t)}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 1.2. Таким образом, $\alpha(t) = \beta(t)$. Отпускаем точку p и получаем требуемое тождество. □

Пусть Φ_X – локальный поток, порожденный векторным полем X. Фиксируем вещественное число t_0 и определим отображение

$$F_{t_0} : M_{t_0} \to M$$

по формуле

$$F_{t_0}(p) = \Phi_X(p, t_0),$$

где $M_{t_0} = \{p \in M \, |t(p)| > |t_0|\}$. Нетрудно видеть, что M_{t_0} – открытое подмногообразие в M и отображение F_{t_0} гладко.

По теореме 1.8 и теореме 1.9 получим

$$1) \, F_0 = id; \quad 2) F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2},$$

причем последнее равенство справедливо при всех вещественных t_1, t_2, для которых имеют смысл обе части равенства. В частности, из этого следует, что для каждого отображения F_{t_0} существует обратное $(F_{t_0})^{-1} = F_{-t_0}$. Таким образом, отображение F_{t_0} диффеоморфизмом открытого подмногообразия.

Семейство $\{F_t\}$, $t \in \mathbb{R}$ диффеоморфизмов открытых подмногообразий M_t называется *локальной группой диффеоморфизмов* многообразия M.

Особый интерес представляет случай, когда существует такое число t_0, что $M_{t_0} = M$. В этом случае можно доказать, что отображение Φ_X определено на всем многобразии $M \times \mathbb{R}$. При этом отображение Φ_X называется *глобальным потоком* на многообразии M. Интегральные траектории векторного поля X определены на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Такие векторные поля называются *полными*, а локальные группы диффеоморфизмов, которые они порождают называются *глобальными группами диффеоморфизмов.*

Замечание 1.12**.** Вообще говоря, на многообразии могут существовать как полные, так и не полные векторные поля. Но если многообразие компактно, то любое векторное поле на нем полно.

С помощью локальной группы диффеоморфизмов, мы можем выяснить геометрический смысл определения векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций

Теорема 1.11**.** *Пусть M – гладкое многообразие, $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле, $\{F_t\}$ – соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем*

$$X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t - f).$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $p \in M$. Пусть (U, φ) – локальная карта в окрестности точки p с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Имеем

$$X(f)(p) = X_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p (X_p)^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p \frac{dx^i}{dt}\bigg|_{t=0} \equiv \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \frac{dx^i}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f\circ\varphi^{-1}(x^1(t), \ldots, x^n(t))) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f\circ\varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\circ\Phi_X(p,t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\circ F_t(p) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f\circ F_t(p) - f\circ F_0(p)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f\circ F_t(p) - f(p))$$

и это верно для любой точки $p \in M$. В третьем равенстве этой цепочки мы воспользовались определением касательного вектора как класса соприкасающихся путей и в качестве представителя этого класса мы выбрали интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку p. Она действительно находится в этом классе соприкасающихся путей, так как в точке p касательный вектор к интегральной кривой совпадает с вектором X_p. Также здесь мы воспользовались определением координат вектора в карте, правилом дифференцирования сложной функции, формулой (1.32) и определением производной. □

§1.7. Дифференцирование Ли.

Основная трудность построения инвариантного дифференциального исчисления на многообразии заключается в невозможности внутренним образом отождествить касательные пространства к многообразию в различных его точках, а следовательно, внутренним образом определить параллельный перенос геометрических объектов из одной точки многообразия в другую. Эту трудность можно обойти, фиксируя на многообразии некоторые дополнительные структуры. В курсе Анализ на многообразиях мы в качестве такой структуры брали связность. Здесь мы посмотрим простейшую возможность такого рода, а именно фиксируем на многообразии векторное поле X и опишем способ переноса геометрических объектов из одной точки в другую.

Пусть M – гладкое многообразие, X – векторное поле на M, $\{F_t\}$ – соответствующая ему локальная группа диффеоморфизмов многообразия M, T – тензорное поле типа (r,s) на M. *Производной Ли* тензорного поля T в направлении векторного поля X называется тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ на M, которое в каждой точке $p \in M$ определяется по формуле

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p\right). \tag{1.34}$$

Напомним, что звездочка обозначает операцию увлечения тензора (в той точке, в которой определен тензор) под действием диффеоморфизма F_{-t} (см. § 1.3.).

Отображение $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(M)$, сопоставляющее тензорному полю T тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ называется *оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля* X, а результат действия отображения $\mathcal{L}_X$ на тензорном поле T называется *производной Ли* тензорного поля T.

Используя результат задачи 1.11, формулу (1.34) можно записать в следующем виде

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(((F_{-t})_* T)_p - T_p\right) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T - T\right)\right)_p.$$

Так как это равенство верно для любой точки p, получаем

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T - T\right). \tag{1.35}$$

Здесь звездочка обозначает операцию увлечения тензорных полей.

Рассмотрим свойства оператора дифференцирования Ли.

Теорема 1.12. *Пусть X – векторное поле на многообразии M. Тогда*

$$1)\, \mathcal{L}_X T \in \mathfrak{T}^s_r(M),\ \forall T \in \mathfrak{T}^s_r(M);$$
$$2)\, C^{(a)}_{(b)} \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ C^{(a)}_{(b)};$$
$$3)\, \mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_X T_2);\ T_1 \in \mathfrak{T}^s_r(M);\ T_2 \in \mathfrak{T}^q_p(M);$$
$$4)\, \mathcal{L}_X Y = [X, Y],\ X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$
$$5)\, \mathcal{L}_X f = X(f),\ f \in C^\infty(M).$$

Доказательство. Свойство 1) непосредственно следует из формулы (1.35).

Свойства 2) и 3) доказываются аналогично соответствующим свойствам ковариантной производной.

Докажем свойство 4). Рассмотрим отображение $F_t(p)$. В локальной карте (U,φ) оно задается следующим образом. Обозначим координаты точки p в этой карте через (x^i). Тогда точка $F_t(p)$ имеет координаты $x^i(t)$, где $x^i = x^i(t)$ – параметрические уравнения интегральной кривой векторного поля X, проходящей через точку p. Другими словами, отображение $F_t(p)$ задается соответствием $x^i \to x^i(t)$. Фиксируем произвольную точку p и разложим функции, стоящие в правой части параметрических уравнений интегральной кривой векторного поля X в ряд Тейлора по t:

$$x^i(t) = x^i(0) + \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} (t-0) + ()(t-0)^2 + \ldots$$

Заметим, что $x^i(0) = x^i$ – координаты точки p; $\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = X^i(x^1,\ldots,x^n)$, так как $x^i = x^i(t)$ – это уравнения интегральной кривой векторного поля X. Скобки перед t^2 обозначают некоторый числовой коэффициент, который нас не интересует, остальные слагаемые будут содержать множитель t степени больше 2. Теперь отпускаем точку p и получаем, что отображение $F_t(p)$ задается так:

$$x^i \to x^i + tX^i(x^1,\ldots,x^n) + ()t^2 + \ldots, \tag{1.36}$$

где переменными являются $x^1,\ldots,x^n$. В формуле (1.34) стоит отображение $F_{-t}(p)$. Очевидно, что оно задается следующим образом

$$x^i \to x^i - tX^i(x^1,\ldots,x^n) + ()t^2 + \ldots.$$

Далее, нам нужно вычислить дифференциал этого отображения в точке $F_t(p)$, применить его к вектору $Y_{F_t(p)}$ и вычесть вектор Y_p. Воспользуемся формулой (1.13) для вычисления дифференциала отображения в локальных картах.

$$(F_{-t})_* Y_{F_t(p)} - Y_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^i}{\partial x^j}t + ()t^2 + \ldots\right)_{\varphi(F_t(p))} Y^j_{F_t(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p - Y_p.$$

Делим на t и раскрываем скобки.

$$\frac{(F_{-t})_* Y_{F_t(p)} - Y_p}{t} = \frac{Y^i_{F_t(p)} - Y^i_p}{t} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p - \left.\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(F_t(p))} Y^j_{F_t(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + ()t + \dots .$$

При $t \to 0$ получим $\left.\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(F_t(p))} Y^j_{F_t(p)} \to \left.\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} Y^j_p$, $()t \to 0$ и дальнейшие слагаемые также стремятся к нулю. Вычислим предел первого слагаемого. Заметим, что Y^i – координаты векторного поля Y – это гладкие функции на области карты. Разложим эти функции в ряд Тейлора в точке p Сейчас точка p – произвольная фиксированная и сейчас ее координаты мы будем обозначать x^i_0, оставив обозначения x^i для координат бегающей точки, от которой зависят функции Y^i. Тогда

$$Y^i(x^1, \dots, x^n) = Y^i(x^1_0, \dots, x^n_0) + \left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (x^j - x^j_0) + ()(x^j - x^j_0)^2 + \dots .$$

Вычислим значения этих функций в точке $F_t(p)$. Ее координаты задаются формулой (1.36). Подставим их в последнее выражение, учитывая, что координаты точки p сейчас обозначены x^i_0.

$$Y^i_{F_t(p)} \equiv Y^i(F_t(p)) = Y^i(x^1_0, \dots, x^n_0) + \left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (x^j_0 + tX^j(x^1_0, \dots, x^n_0) + ()t^2 + \dots - x^j_0) + \dots =$$

$$= Y^i_p + \left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} tX^j_p + \dots$$

Многоточием обозначены слагаемые, которые содержат множителем t как минимум во второй степени. Тогда

$$\frac{Y^i_{F_t(p)} - Y^i_p}{t} = \frac{1}{t}\left(\left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} tX^j_p + \dots\right) = \left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} X^j_p + ()t + \dots$$

При $t \to 0$ получаем $\frac{Y^i_{F_t(p)} - Y^i_p}{t} \to \left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} X^j_p$. Собираем полученные результаты вместе.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* Y_{F_t(p)} - Y_p\right) = \left(\left.\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} X^j_p - \left.\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} Y^j_p\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = [X, Y]_p.$$

Здесь мы воспользовались формулой для вычисления скобки Ли в координатах, взяв значения обеих частей равенства в точке p (см. курс Тензорный анализ). Так как последнее равенство верно для любой точки p, мы получаем $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Докажем свойство 5). Воспользуемся формулой (1.35) для функции f.

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((F_{-t})_* f - f)$$

Нам нужно интерпретировать понятие увлечение функции f отображением F_{-t}. Положим по определению $(F_{-t})_* f = (F^*_{-t})^{-1} f$. Тогда

$$(F_{-t})_* f = (F^*_{-t})^{-1} f = (F^{-1}_{-t})^* f = F^*_t f = f \circ F_t.$$

Учитывая теорему **??**, получим

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((F_{-t})_* f - f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t - f) = X(f).$$

□

Замечание 1.13. Перечисленные в теореме 1.12 свойства оператора дифференцирования Ли позволяют вычислить производную Ли для любого тензорного поля. Кроме того, эти свойства являются определяющими для оператора дифференцирования Ли, то есть любое дифференцирование алгебры тензорных полей, удовлетворяющее этим свойствам, совпадает с дифференцированием Ли.

Пример 1.12. В качестве примера найдем производную Ли для 1-формы ω. Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем

$$\omega(Y) = \omega_i Y^i = (\omega \otimes Y)^i_i = C^{(1)}_{(1)}(\omega \otimes Y).$$

Получаем тождество

$$\omega(Y) = C^{(1)}_{(1)}(\omega \otimes Y). \tag{1.37}$$

Применим к нему оператор дифференцирования Ли $\mathcal{L}_X$ и воспользуемся свойствами из теоремы 1.12.

$$X(\omega(Y)) = C^{(1)}_{(1)}(\mathcal{L}_X\omega)\otimes Y + C^{(1)}_{(1)}\omega\otimes(\mathcal{L}_X Y)$$

Опять воспользуемся формулой (1.37), чтобы перейти от сверток к упрощенному виду.

$$X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega([X,Y]).$$

Итак, мы получаем

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]).$$

Запишем полученное тождество в координатах. Фиксируем локальную карту, разложим векторное поле X по натуральному базису, а вместо векторного поля Y подставим $\frac{\partial}{\partial x^j}$.

$$(\mathcal{L}_X\omega)_i = (\mathcal{L}_X\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) - \omega\left(\left[X^j\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right) = \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}X^j - \omega\left(X^j\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right] - \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) =$$
$$= \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}X^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\omega_j.$$

Здесь мы учли, что $\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = 0$. Итак, получаем

$$(\mathcal{L}_X\omega)_i = \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}X^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\omega_j.$$

Пример 1.13**.** Пусть на многообразии M фиксирована связность ∇ без кручения. Выразим компоненты 1-формы $\mathcal{L}_X\omega$ через компоненты ковариантного дифференциала формы ω и векторного поля X.

Воспользуемся формулой (**??**). Так как связность ∇ не имеет кручения, получаем, что $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Также используем формулу (см. (**??**))

$$\nabla_X(\omega)Y = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

Тогда получим

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) + \omega(\nabla_Y X) = \nabla_X(\omega)(Y) + \omega(\nabla_Y X).$$

Итак, мы получаем

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega)(Y) + \omega(\nabla_Y X).$$

Подставим в это тождество вместо векторного поля Y базисное векторное поле $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда получим

$$(\mathcal{L}_X\omega)_i = (\nabla_X(\omega))_i + \omega\left(\nabla X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) =$$

Воспользуемся определение ковариантного дифференциала (см. (**??**))

$$= \omega_{i,j}X^j + \omega\left(X^j{}_{,i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_{i,j}X^j + \omega_j X^j{}_{,i}.$$

Итак, мы показали, что $(\mathcal{L}_X\omega)_i = \omega_{i,j}X^j + \omega_j X^j{}_{,i}$.

Задача 1.15**.** Вычислите производную Ли для эндоморфизма L. Запишите полученное тождество в компонентах.

Ответ: $(\mathcal{L}_X L)(Y) = [X, L(Y)] - L([X,Y])$; $(\mathcal{L}_X L)^t_j = \frac{\partial L^t_j}{\partial x^k}X^k - L^k_j\frac{\partial X^t}{\partial x^k} + L^t_k\frac{\partial X^k}{\partial x^j}$.

Задача 1.16**.** Пусть на многообразии M фиксирована связность ∇ без кручения. Выразите компоненты тензорного поля $\mathcal{L}_X L$ через компоненты ковариантного дифференциала L и векторного поля X.

Замечание 1.14**.** Если мы определим для тензорного поля $T \in \mathfrak{T}^s_r(M)$ отображение $\mathcal{L}$ по формуле

$$(\mathcal{L}T)(X, X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = (\mathcal{L}_X T)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s),$$

то в отличие от случая ковариантного дифференцирования, мы не получим тензорного поля типа $(r+1, s)$, так как введенное отображение не будет $C^\infty(M)$ линейным по аргументу X.

Замечание 1.15**.** Выясните, будет ли отображение $\mathcal{L}$ из замечания 1.14 аддитивным, $\mathbb{R}$-линейным по аргументу X?

Указание: начните исследование с векторных полей.

Задача 1.17. Докажите, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ верно равенство

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

Задача 1.18. Пусть на многообразии M задана риманова метрика g. Докажите, что $\mathcal{L}_X(g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$, где ∇ – риманова связность метрики g. Запишите эту формулу в компонентах ковариантного дифференциала векторного поля X. Выведите аналогичную формулу для произвольной связности.

Для решения следующего ряда задач, нам потребуется еще одно определение.

Определение 1.3. Пусть дано нечетномерное гладкое многообразие M. Тройка тензорных полей (Φ, η, ξ) на M, где Φ – эндоморфизм модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$, η – 1-форма, ξ – векторное поле на M, которая удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= -id + \eta \otimes \xi; \\ \eta(\xi) &= 1; \\ \Phi(\xi) &= 0; \\ \eta \circ \Phi &= 0; \end{aligned} \tag{1.38}$$

называется *почти контактной структурой* на M. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная структура, называется *почти контактным многообразием.*

Задача 1.19. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M. Докажите, что

$$(\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) + (\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi)\xi. \tag{1.39}$$

Запишите это тождество в компонентах.

Решение. Напомним сведения из курса Анализ на многообразиях, касающиеся связности без кручения. Мы знаем, что это связность, для которой тензор кручения тождественно равен нулю, следовательно,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0. \tag{1.40}$$

Кроме того, оператор ковариантного дифференцирования удовлетворяет правилу Лейбница, перестановочен со свертками и на функции действует по формуле $\nabla_X f = X(f)$. Применяя эти свойства легко получить следующую формулу (мы уже получали ее в курсе Анализ на многообразиях)

$$\nabla_X(\Phi Y) = \nabla_X(\Phi)(Y) + \Phi(\nabla_X Y). \tag{1.41}$$

Напомним ее вывод. По определению эндоморфизма ΦY – это векторное поле. С помощью тензорных операций оно выражается следующим образом (если забыли, то посчитайте как в курсе Анализ на многообразиях через компоненты)

$$\Phi Y = C^{(2)}_{(1)}(\Phi \otimes Y). \tag{1.42}$$

Применим к этому равенству оператор ∇_X.

$$\nabla_X(\Phi Y) = C^{(2)}_{(1)}(\nabla_X(\Phi) \otimes Y + \Phi \otimes \nabla_X Y)) = C^{(2)}_{(1)}(\nabla_X(\Phi) \otimes Y) + C^{(2)}_{(1)}(\Phi \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\Phi)(Y) + \Phi(\nabla_X Y).$$

Перейдем теперь от воспоминаний к нашей задаче. Принцип действия с производной Ли такой же как с ковариантной производной. Поэтому опять нашей печкой, от которой танцуем, является равенство (1.42). Теперь мы применяем к нему оператор дифференцирования Ли и пользуемся перестановочностью со сверткой и правилом Лейбница.

$$(\mathcal{L}_\xi \Phi X) = C^{(2)}_{(1)}((\mathcal{L}_\xi \Phi) \otimes X + \Phi \otimes \mathcal{L}_\xi X)) = C^{(2)}_{(1)}(\mathcal{L}_\xi(\Phi) \otimes X) + C^{(2)}_{(1)}(\Phi \otimes \mathcal{L}_\xi X) = \mathcal{L}_\xi(\Phi)(X) + \Phi([\xi, X]).$$

Здесь мы также использовали то, что $\mathcal{L}_\xi X = [\xi, X]$. В результате получаем

$$[\xi, \Phi X] = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi([\xi, X]). \tag{1.43}$$

Применяя в (1.43) формулу (1.40), избавимся от скобок Ли.

$$\nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X}\xi = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi).$$

Подставим в это равенство (1.41) с нужными нам аргументами.

$$\nabla_\xi(\Phi)X + \Phi(\nabla_\xi X) - \nabla_{\Phi X}\xi = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi(\nabla_\xi X) - \Phi(\nabla_X \xi).$$

Здесь мы также воспользовались аддитивностью эндоморфизма Φ. Таким образом, получаем

$$\nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi = (\mathcal{L}_\xi\Phi)(X) - \Phi(\nabla_X\xi). \tag{1.44}$$

Нам осталось избавиться от слагаемых $-\nabla_{\Phi X}\xi$ и $\Phi(\nabla_X\xi)$. Для этого запишем условие $\Phi(\xi) = 0$ из определения почти контактной структуры с помощью тензорных операций

$$C^{(2)}_{(1)}(\Phi\otimes\xi) = 0$$

и применим к нему оператор ∇_X. Опуская, знакомые нам промежуточные выкладки, получим

$$\nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_X\xi) = 0. \tag{1.45}$$

Из этого равенства сразу же выражается слагаемое $\Phi(\nabla_X\xi) = -\nabla_X(\Phi)\xi$. Чтобы получить соотношение для второго слагаемого, во-первых, заменим в равенстве (1.45) $X \to \Phi X$.

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_{\Phi X}\xi) = 0,$$

во-вторых, подействуем на полученное соотношение эндоморфизмом Φ и применим первое условие из определения почти контактной структуры.

$$\Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) - \nabla_{\Phi X}\xi + \eta(\nabla_{\Phi X}\xi)\xi = 0.$$

Наконец, применяя оператор $\nabla_{\Phi X}$ к тождеству (второе условие из определения почти контактной структуры)

$$\eta(\xi) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C^{(1)}_{(1)}(\eta\otimes\xi) = 1,$$

получим

$$\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi + \eta(\nabla_{\Phi X}\xi) = 0.$$

Собирая последние тождества вместе, мы получим выражение для второго слагаемого

$$\nabla_{\Phi X}\xi = \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) - (\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi)\xi.$$

Теперь подставим оба слагаемые в (1.44) и окончательно получим соотношение (1.39).

Наконец, в компонентах оно примет вид

$$(\mathcal{L}_\xi\Phi)^i_k = \Phi^i_{k,j}\xi^j - \Phi^i_{j,k}\xi^j - \Phi^i_j\Phi^j_{r,t}\Phi^t_k\xi^r + \eta_{j,t}\Phi^t_k\xi^j\xi^i.$$

□

Задача 1.20. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M. Докажите, что

$$(\mathcal{L}_\xi\eta)(X) = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi.$$

Запишите это тождество в компонентах.

Решение. Начнем работать с производной Ли. Применим к функции $\eta(X)$ оператор дифференцирования Ли $\mathcal{L}_\xi$ и воспользуемся правилом Лейбница (здесь мы уже мысленно заменяем $\eta(X)$ на $C^{(1)}_{(1)}(\eta\otimes\xi)$ и после дифференцирования возвращаемся обратно).

$$\mathcal{L}_\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) + \eta(\mathcal{L}_\xi X).$$

Далее, пользуемся свойствами 4) и 5) из теоремы 1.12.

$$\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) + \eta([\xi, X]).$$

Используя (1.40), избавляемся от скобки Ли

$$\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_X\xi). \tag{1.46}$$

Чтобы выразить левую часть равенства (1.46) через ковариантные производные, применим оператор ковариантного дифференцирования ∇_ξ к функции $\eta(X)$.

$$\xi(\eta(X)) = \nabla_\xi(\eta)X + \eta(\nabla_\xi X)$$

и подставим то, что получилось, в (1.46).

$$\nabla_\xi(\eta)X + \eta(\nabla_\xi X) = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_X\xi)$$

или

$$\nabla_\xi(\eta)X = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) - \eta(\nabla_X\xi).$$

Нам осталось найти слагаемое $-\eta(\nabla_X\xi)$. Для этого применим оператор ∇_X к тождеству $\eta(\xi) = 1$. Получим

$$\nabla_X(\eta)\xi + \eta(\nabla_X\xi) = 0.$$

Тогда подставляя полученный результат в предпоследнюю формулу, получим требуемое тождество.

Наконец, в компонентах получим

$$(\mathcal{L}_\xi\eta)_i = \eta_{i,j}\xi^j - \eta_{j,i}\xi^j.$$

□

Задача 1.21. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M. Докажите, что

$$(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_Y(\Phi)X).$$

Запишите полученное тождество в компонентах.

Решение. Применим оператор дифференцирования Ли $\mathcal{L}_{\Phi X}$ к функции $\eta(Y)$.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) + \eta([\Phi X, Y]).$$

Воспользуемся тем, что связность не имеет кручения.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X}Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi X)).$$

Используем правило Лейбница для ковариантного дифференцирования

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X}Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi)X) - \eta(\Phi(\nabla_Y X))$$

Так как по определению почти контактной структуры $\eta \circ \Phi = 0$, окончательно получим

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X}Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi)X)$$

Теперь применим к функции $\eta(Y)$ оператор ковариантного дифференцирования $\nabla_{\Phi X}$.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_{\Phi X}Y)$$

Вычтем последнее тождество из предпоследнего.

$$(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - \nabla_{\Phi X}(\eta)Y - \eta(\nabla_Y(\Phi)X) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, в компонентах получим

$$(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)_i = \eta_{i,j}\Phi^j_k X^k + \eta_k\Phi^k_{j,i}X^j.$$

□

Глава 2. Элементы теории групп Ли.

§2.1. Группы Ли.

Определение 2.1. *Группой Ли* называется гладкое многообразие G, множество точек которого наделено структурой (абстрактной) группы, причем групповая операция и операция взятия симметричного элемента являются гладкими.

Замечание 2.1. Нетрудно проверить, что условие гладкости групповых операций равносильно гладкости отображения $\varphi : G \times G \to G$, заданного формулой

$$\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}.$$

Это замечание позволит нам при работе с конкретными примерами групп Ли проверять гладкость не двух, а одного отображения.

Пример 2.1. Простейшим примером группы Ли может служить арифметическое векторное пространство

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}.$$

На $\mathbb{R}^n$ мы уже построили структуру гладкого многообразия (см. курс Анализ на многообразиях). Из алгебры хорошо известно, что $\mathbb{R}^n$ является (абстрактной) группой относительно операции сложения. Взятие симметричного элемента в данном случае называется взятием противоположного элемента.

Гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$ покрывается одной картой $(\mathbb{R}^n, id)$ и в ней отображение φ (см. замечание 2.1) задается следующим образом

$$z^i = x^i - y^i,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $z = \varphi(x, y) = x - y$. Очевидно, что функции, задающие отображение φ являются гладкими, следовательно, гладкое многообразие $\mathbb{R}^n$, на котором операция $+$ определяет структуру абстрактной группы, является группой Ли.

Пример 2.2. Этот пример будет основным для нас. Пусть $M_{n,n}$ – полная матричная алгебра. Рассмотрим множество $n \times n$- матриц с ненулевым определителем и обозначим это множество так.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{(g_{ij}) \in M_{n,n},\ det(g_{ij}) \neq 0\}.$$

Операция умножения матриц вводит в это множество структуру абстрактной группы. Взятие симметричного элемента называется здесь взятием обратного.

Так как полная матричная алгебра $M_{n,n}$ может быть отождествлена с арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^{n^2}$, то она имеет структуру гладкого многообразия. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n^2}$, а значит, имеет индуцированную гладкую структуру из $M_{n,n}$. Итак, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие, а именно, открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Для доказательства того, что $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли, нам осталось проверить гладкость групповой операции и гладкость взятия обратного. Для этого нужна локальная карта на $GL(n, \mathbb{R})$. Так как гладкая структура $GL(n, \mathbb{R})$ индуцирована $\mathbb{R}^{n^2}$, то все многообразие покрывается одной локальной картой $(GL(n, \mathbb{R}), id)$. Напомним, что для построения локальных карт индуцированной гладкой структуры нужно взять локальную карту $\mathbb{R}^{n^2}$ и пересечь ее область с множеством $GL(n, \mathbb{R})$. Картирующее отображение получается из картирующего отображения карты на $\mathbb{R}^{n^2}$ сужением на множество $GL(n, \mathbb{R})$ (см. курс Анализ на многообразиях).

Запишем в локальной карте операцию умножения матриц. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – произвольные матрицы из $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда по правилу умножения матриц получим

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

где $(c_i j) = C = A \cdot B$. Очевидно, что полученные функции бесконечно дифференцируемы как по a_{ik}, так и по b_{kj}, а значит, операция умножения является гладкой.

По правилу вычисления элементов h_{ij} обратной матрицы A^{-1} для матрицы $A = (a_{ij})$, известного из алгебры, получим

$$h_{ij} = \frac{1}{detA} A_{ji},$$

где A_{ji} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Так как определитель $detA$ и алгебраические дополнения A_{ji} являются многочленами элементов матрицы A, полученные функции являются бесконечно дифференцируемыми по a_{ij}, следовательно, отображение взятия обратного элемента является гладким.

Итак, мы показали, что множество $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли. Она называется *полной линейной группой порядка* n.

Пример 2.3. Рассмотрим множество

$$O(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}),\ g \cdot g^T = I_n\},$$

где g^T – транспонированная матрица (строки матрицы g являются столбцами матрицы g^T), $I_n = (\delta^i_j)$ – единичная матрица порядка n. Это множество также является группой Ли и называется *ортогональной группой порядка* n.

Группа Ли

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{g \in O(n, \mathbb{R}),\ detg = 1\}$$

называется *специальной ортогональной группой порядка* n.

Пример 2.4. Пусть дано n-мерное векторное пространство V. Рассмотрим множество всех $\mathbb{R}$-линейных отображений $L : V \to V$. Это множество обозначается $End\,V$ и называется *алгеброй эндоморфизмов* векторного пространства V (структуру ассоциативной алгебры с единицей в этом множестве задают стандартные операции сложения отображений, умножения отображения на вещественное число и операция композиции). В этом множестве выделяется подмножество обратимых линейных отображений. Оно обозначается $Aut\,V$ и называется *группой автоморфизмов* векторного пространства V. Структура абстрактной группы задается операцией композиции.

Оказывается, что на множестве $Aut\,V$ существует и структура группы Ли. Так как $Aut\,V$ является векторным пространством, то на нем определена стандартная гладкая структура векторного пространства, а значит, $Aut\,V$ – гладкое многообразие. Если фиксировать в V базис, то операция композиции и взятия обратного элемента сведется к умножению матриц и взятию обратной матрицы, соответственно. Эти операции гладкие, а значит, $Aut\,V$ является группой Ли.

§2.2. Алгебры Ли.

Определение 2.2. (Вещественной) *алгеброй Ли* называется (вещественное) векторное пространство $\mathfrak{g}$, в котором фиксирована бинарная билинейная операция

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикоммутативность);

2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби),

где $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Пример 2.5. Модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ гладкого многообразия M относительно скобки Ли является алгеброй Ли.

Пример 2.6. Всякое вещественное векторное пространство V является алгеброй Ли относительно коммутатора, заданного формулой $[X, Y] = 0$, $X, Y \in V$. Такая алгебра Ли называется *абелевой алгеброй Ли.*

Пример 2.7. Полная матричная алгебра $M_{n,n}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \tag{2.1}$$

где $A, B \in M_{n,n}$, точка обозначает обычное матричное умножение. Эта алгебра Ли называется *полной матричной алгеброй Ли.*

Пример 2.8. Обозначим множество всех линейных отображений вещественного векторного пространства V обозначим через $End\,V$. Это вещественное векторное пространство относительно сложения отображений и умножения на вещественное число. В этом множестве также может быть введена операция коммутирования по формуле

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

где $f, g \in End\,V$, $\circ$ – композиция отображений. Эта операция превращает векторное пространство $End\,V$ в алгебру Ли.

Пусть G – группа Ли. Будем групповую операцию G как абстрактной группы обозначать либо точкой, либо писать две буквы рядом. При этом будем называть эту операцию умножением.

Фиксируем произвольный элемент $g \in G$. Операция умножения в группе G определяет два отображения

$$L_g : G \to G; \quad R_g : G \to G$$

по формулам

$$L_g(h) = gh; \quad R_g(h) = hg,\ h \in G$$

соответственно. Так как операция умножения гладкая, то введенные отображения также являются гладкими. Они называются *отображением левого сдвига* и *отображением правого сдвига на элемент g*, соответственно.

Теорема 2.1. *Отображения L_g и R_g обладают следующими свойствами:*

1) $L_g \circ L_h = L_{gh}$;
2) $R_g \circ R_h = R_{hg}$;
3) L_g, R_g *являются диффеоморфизмами,*

где $g, h \in G$ – произвольные элементы.

Доказательство. Докажем первое тождество (второе докажите самостоятельно). Для любого элемента $p \in G$ по определению отображения левого сдвига получим

$$L_g \circ L_h(p) = L_g(hp) = g(hp) = (gh)p = L_{gh}(p).$$

Здесь мы также воспользовались ассоциативностью операции умножения в группе G.

Докажем, что L_g является диффеоморфизмом. Для этого достаточно доказать, что $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Существование обратного показывает, что L_g биекция, а то, что обратное отображение само является левым сдвигом показывает, что оно является гладким. Имеем

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}(gh) = h.$$

Это верно для любого элемента $h \in G$, следовательно, $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Аналогично доказывается, что $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$. Таким образом, получим $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. $\square$

Так как L_g является диффеоморфизмом, для любого векторного поля X на G существует L_g-связанное с ним векторное поле (см. § 1.3.) $(L_g)_*X \in \mathfrak{X}(G)$.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если оно совпадает с L_g-связанным с ним векторным полем для любого элемента $g \in G$, то есть

$$(L_g)_*X = X, \, \forall g \in G.$$

Теорема 2.2. *Совокупность $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует вещественное векторное пространство, канонически изоморфное касательному пространству $T_e(G)$ к группе Ли G в единице e этой группы. В частности, $dim\, \mathfrak{g} = dim\, G$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{g}$ является подмножеством вещественного векторного пространства $\mathfrak{X}(G)$ гладких векторных полей группы Ли G, то нам достаточно доказать, что $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно операций сложения своих элементов и умножения на вещественное число. Это легко следует из $\mathbb{R}$-линейности отображения увлечения векторных полей (см. § 1.3.).

Построим изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ вещественных векторных пространств. Зададим отображение β формулой

$$\beta(X) = X_e, \, X \in \mathfrak{g},$$

то есть каждому левоинвариантному векторному полю X (оно рассматривается как гладкое сечение касательного расслоения) поставим его значение в единице e группы G. Из определения суммы и произведения на число гладких сечений (см. курс Анализ на многообразиях) легко видеть, что β является гомоморфизмом:

$$\beta(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)_e = (\lambda X + \mu Y)(e) = \lambda X_e + \mu Y_e = \lambda\beta(X) + \mu\beta(Y),$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Инъективность β следует из того, что ядро гомоморфизма β нулевое. В самом деле, пусть $X \in ker\, \beta$. Тогда $\beta(X) = X_e = 0$. Так как X – левоинвариантное (L_g-связано с самим собой), то согласно теореме 1.2 получим

$$((L_g)_*)_e X_e = X_{L_g(e)} = X_g.$$

С другой стороны, так как дифференциал $((L_g)_*)_e$ отображения является $\mathbb{R}$-линейным (см. предложение 1.1), получим

$$((L_g)_*)_e X_e = ((L_g)_*)_e(0) = 0.$$

Итак, значение векторного поля X в любой точке $g \in G$ равно нулю, то есть $X_g = 0$ для любой точки $g \in G$. Следовательно, равно нулю само векторное поле X. Итак, мы показали, что ядро отображения β нулевое.

Покажем, что отображение β сюръективно. Пусть $\xi \in T_e(G)$ – произвольный касательный вектор. Построим семейство векторов

$$X = \{X_g \in T_g(G), \, X_g = ((L_g)_*)_e \xi\}. \tag{2.2}$$

В результате мы получим отображение $X : G \to TG$, где TG – тотальное пространство касательного расслоения. Чтобы доказать, что X является (гладким) векторным полем на многообразии G, нам нужно проверить, что в паре соответствующих карт это отображение задается гладкими функциями. Напомним, что первые n функций гладки тривиальным образом $(y^i = x^i)$, $i = 1, \ldots, n$, а вторые n функций $y^{j+n} = X^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$ суть координаты касательных векторов X_g. Для них и нужно доказать гладкую зависимость от координат $(x^1, \ldots, x^n)$ точки g.

Фиксируем локальную карту (U, φ) в окрестности единицы e группы Ли G, причем пусть e имеет в этой карте координаты $(0, \ldots, 0)$. Предположим, что элемент g принадлежит области U. Пусть операция умножения в карте (U, φ) задается функциями

$$z^i = \mu^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где $i = 1, \ldots, n$. Здесь $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ – координаты первого сомножителя, $(x^1, \ldots, x^n)$ – координаты второго сомножителя, через $(z^1, \ldots, z^n)$ обозначены координаты произведения. Так как операция умножения является гладкой, функции z^i имеют частные производные любого порядка по переменным $\tilde{x}^1, \ldots, x^n$.

Обозначим координаты точки g в данной карте через $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Так как точка g у нас зафиксирована, это набор из n вещественных чисел. Тогда отображение левого сдвига L_g будет задаваться функциями

$$z^i = \mu^i(x_0^1, \ldots, x_0^n, x^1, \ldots, x^n),$$

где переменными будут являться только $x^1, \ldots, x^n$. Тогда дифференциал отображения $((L_g)_*)_e$ будет задаваться матрицей Якоби (см. (1.12)

$$\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)\bigg|_e = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0).$$

Следовательно, если вектор ξ имеет в локальной карте (U, φ) координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ (это вещественные числа), то координаты $(X_g)^i(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ вектора X_g будут выражаться по формуле

$$(X_g)^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x_0^1, \ldots, x_0^n, 0, \ldots, 0)\xi^j.$$

Теперь отпустим точку g. Тогда ее координаты будут меняться. В связи с этим сотрем нули в обозначении ее координат. Тогда получим функции

$$X^i(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\xi^j.$$

Эти функции являются гладкими.

Напомним, что мы предполагали, что точка g принадлежит окрестности единицы. Пусть теперь точка h принадлежит некоторой карте (V, ψ), не содержащей единицу. Из определения системы векторов X имеем

$$X_h = ((L_h)_*)_e\xi = ((L_h)_*)_e((L_{g^{-1}})_*)_g X_g = ((L_{hg^{-1}})_*)_g X_g.$$

Тогда если в фиксированной точке $g(g^1, \ldots, g^n) \in V$ вектор X_g уже построен, то в произвольной точке $h \in V$ аналогично предыдущему получим

$$X^i(h) = (X_h)^i(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\right)(x^1, \ldots, x^n, g^1, \ldots, g^n)(X_g)^j.$$

Они являются гладкими функциями.

Итак, мы показали, что координаты векторов X_g семейства (2.2) гладко зависят от координат точки g, а значит, X является (гладким) векторным полем. Нам осталось показать, что оно является левоинвариантным. Фиксируем произвольную точку $g \in G$. Тогда для произвольной точки $h \in G$ имеем

$$((L_g)_*)_h X_h = ((L_g)_*)_h((L_h)_*)_e\xi = ((L_g \circ L_h)_*)_e\xi = (L_{gh})_*\xi = X_{gh} = X_{L_g(h)}.$$

Здесь мы воспользовались предложением 1.2 . Тогда по теореме 1.2 получим $(L_g)_*X = X$, то есть векторное поле X является левоинвариантным. □

Замечание 2.2. Обратите внимание, что модуль всех гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$ в общем случае не имеет глобального базиса (даже если брать коэффициенты разложения из алгебры гладких функций), а векторное пространство левоинвариантных векторных полей имеет глобальный базис (коэффициенты разложения по такому базису – вещественные числа). Примером такого базиса может служить, например, прообраз натурального базиса касательного пространства $T_e(G)$.

Теорема 2.3. *Векторное пространство $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей является алгеброй Ли.*

Доказательство. Так как левоинвариантные векторные поля принадлежат модулю гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$, то для них определена скобка Ли (см. курс Анализ на многообразиях). Она удовлетворяет условиям $\mathbb{R}$-билинейности, антикоммутативности и тождеству Якоби. Следовательно, нам осталось проверить, что множество $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно скобки Ли. Имеем с учетом (1.19)

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторных полей X и Y. □

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных полей группы Ли G называется *присоединенной алгеброй Ли* или *алгеброй Ли группы Ли G*.

Замечание 2.3. Структуру алгебры Ли можно ввести и в касательном пространстве $T_e(G)$ в единице группы. Для этого используем построенный в теореме 2.2 изоморфизм β векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$. Для того чтобы $T_e(G)$ было алгеброй Ли, там не хватает коммутатора для касательных векторов этого пространства, то есть билинейного отображения

$$[\cdot,\cdot] : T_e(G) \times T_e(G) \to T_e(G),$$

удовлетворяющего свойству антикоммутативности и тождеству Якоби. Определим это отображение так. Для любых касательных векторов $\xi, \eta \in T_e(G)$ положим

$$[\xi, \eta] = \beta[\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

При этом отображение β^{-1} будет изоморфизмом алгебр Ли $T_e(G)$ и $\mathfrak{g}$, так как

$$\beta^{-1}[\xi, \eta] = [\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

Итак, мы видим, что алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$ изоморфны, а значит, могут быть отождествлены.

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ имеет дуальное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ (см. курс Тензорная алгебра). Элементы $\mathfrak{g}^*$ называются *формами Маурера-Картана.*

Задача 2.1. Докажите, что для форм Маурера-Картана имеет место формула

$$(L_g)^*\omega = \omega,$$

где $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $g \in G$ – произвольный элемент. Напомним, что звездочка у отображения обозначает антиувлечение ковекторов (см.§ 1.3.).

Следствие 2.1. Так как $((L_g)^*)^{-1} = (L_g)_*$ (см.§ 1.3.), из задачи 2.1 получим

$$(L_g)_*\omega = \omega,$$

то есть формы Маурера-Картана являются *левоинвариантными.*

Замечание 2.4. Обратите внимание, что хотя формы Маурера-Картана мы называем формами, но умножать на гладкие функции не можем. Формы Маурера-Картана умножаются только на вещественные числа. При этом если мы будем действовать формой Маурера-Картана на левоинвариантное векторное поле, то в результате получим вещественное число! Это следует из того, что $\mathfrak{g}$ является векторным пространством, а значит, на нем строятся тензоры как полилинейные отображения во множество вещественных чисел.

Далее, векторное пространство $\mathfrak{g}$ стандартным образом (см. курс Тензорная алгебра) порождает тензорную алгебру $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$.

Задача 2.2. Докажите, что тензоры тензорной алгебры $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ являются *левоинвариантными*, то есть для любого $t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ и любого элемента $g \in G$ имеем

$$(L_g)_*t = t.$$

Здесь имеет место замечание, аналогичное замечанию 2.4, то есть, действуя левоинвариантными тензорными полями на набор аргументов из $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, мы получим вещественное число.

Пусть дана группа Ли G размерности n и ее присоединенная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что размерность $\mathfrak{g}$ совпадает с размерностью G (теорема 2.2), а значит, равна n. Рассмотрим произвольный базис $(E_1, \ldots, E_n)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. По определению алгебры Ли (замкнутость относительно операции коммутирования) левоинвариантное векторное поле $[E_i, E_j]$ должно принадлежать $\mathfrak{g}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$, а значит, его можно разложить по базису $(E_1, \ldots, E_n)$, причем коэффициентами будут служить вещественные числа:

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k. \tag{2.3}$$

Коэффициенты $\{C_{ij}^k\}$ называются *структурными константами алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, а соотношения (2.3) называются *контравариантными структурными уравнениями группы Ли.*

Задача 2.3. Найдем закон преобразования структурных констант $\{C_{ij}^k\}$ при переходе от одного базиса $(E_1, \ldots, E_n)$ к другому базису $(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$.

Решение. Отступая от многолетних традиций, обозначим матрицу перехода от базиса $(E_1, \dots, E_n)$ к базису $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ через $A = (A^i_j)$, $i, j = 1, \dots, n$, то есть

$$\tilde{E}_i = A^j_i E_j. \tag{2.4}$$

Так как мы работаем с векторным пространством, элементами матрицы A служат вещественные числа.

По определению структурных констант имеем

$$[\tilde{E}_i, \tilde{E}_j] = \tilde{C}^k_{ij} \tilde{E}_k.$$

Подставим в это равенство (2.4):

$$[A^k_i E_k, A^t_j E_t] = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k E_p.$$

Так как коммутатор является $\mathbb{R}$-линейным отображением по каждому аргументу, учитывая (2.3), получим

$$A^k_i A^t_j C^p_{kt} E_p = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k E_p.$$

В силу линейной независимости E_p получим

$$A^k_i A^t_j C^p_{kt} = \tilde{C}^k_{ij} A^p_k$$

или

$$\tilde{C}^s_{ij} = A^k_i A^t_j (A^{-1})^s_p C^p_{kt}.$$

Это тензорный закон преобразования. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры, система чисел $\{C^k_{ij}\}$ задает тензор типа (2,1) на векторном пространстве $\mathfrak{g}$. □

Замечание 2.5**.** Напомним, что в § 1.1. мы ввели оператор внешнего дифференцирования d для алгебры Грассмана $\Lambda(M) \equiv \Lambda(\mathfrak{X}(M))$ гладкого многообразия M. Для алгебры Грассмана $\Lambda(\mathfrak{g})$ этот оператор "в лоб"не применим, так как он умеет дифференцировать $C^\infty(G)$-линейные отображения вида

$$\Omega : \mathfrak{X}(G) \times \ldots \times \mathfrak{X}(G) \to C^\infty(G),$$

а в алгебре Грассмана $\Lambda(\mathfrak{g})$ находятся $\mathbb{R}$-линейные отображения вида

$$\Omega : \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}.$$

Мы поступим следующим образом: определим отображение $d : \Lambda(\mathfrak{g}) \to \Lambda(\mathfrak{g})$ по той же формуле (1.1), что и оператор внешнего дифференцирования. В нашем случае эта формула существенно упростится, так как результат действия формы из $\Lambda(\mathfrak{g})$ на наборе своих аргументов – это константа (вещественное число), а действие векторного поля на константе дает нуль. Тогда формула (1.1) примет вид

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}),$$

где ω – r-ковектор, то есть элемент из $\Lambda_r(\mathfrak{g})$. В частности, для форм Маурера-Картана эта формула примет вид

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]),\ X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что введенное отображение d удовлетворяет всем свойствам, рассмотренным в § 1.1.. Поэтому мы будем это отображение также называть *оператором внешнего дифференцирования.*

Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ – дуальный базис для базиса $(E_1, \dots, E_n)$. По формулам (2.5), (2.3) получим

$$d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\omega^k(C^m_{ij} E_m) = -C^m_{ij} \omega^k(E_m) = -C^m_{ij} \delta^k_m = -C^k_{ij}.$$

Итак, мы получили, что компоненты 2-формы $d\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{T}^0_2(\mathfrak{g})$ равны $-C^k_{ij}$. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры в векторном пространстве $\mathfrak{T}^0_2(\mathfrak{g})$ существует канонический базис $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$. Он хорош тем, что коэффициенты разложения тензоров из $\mathfrak{T}^0_2(\mathfrak{g})$ по этому базису совпадают с их компонентами, то есть

$$d\omega^k = -C^k_{ij} \omega^i \otimes \omega^j.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор альтернации Alt. Тогда согласно формулам (**??**) и (**??**) получим

$$d\omega^k = -C^k_{ij} Alt(\omega^i \otimes \omega^j) = -\frac{1!1!}{2!} C^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j.$$

Следовательно,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j. \tag{2.6}$$

Эти уравнения называются *ковариантными структурными уравнениями Маурера-Картана* или, просто, *уравнениями Маурера-Картана группы Ли G.*

§2.3. Полная линейная группа.

В качестве примера общих понятий, изложенных в § 2.2., рассмотрим полную линейную группу $GL(n,\mathbb{R})$. Мы найдем ее алгебру Ли и вычислим уравнения Маурера-Картана.

Мы уже знаем, что группа Ли $GL(n,\mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности n^2. Ее атлас состоит из одной локальной карты $(GL(n,\mathbb{R}),\varphi)$, где картирующее отображение $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ ставит в соответствие каждой матрице $A = (a^i_j) \in GL(n,\mathbb{R})$ в соответствие набор ее элементов, выписанных в строку (например, берем строки матрицы A и записываем их в одну строку). Так как координат в этой карте n^2, их удобнее обозначать через (g^i_j), где $i, j = 1,\dots,n$, верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца в матрице. Тогда координатные функции, которые ставят в соответствие матрице ее (i,j)-й элемент будем обозначать теми же символами

$$g^i_j : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ g^i_j(A) = a^i_j.$$

Обозначим алгебру Ли группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ и докажем, что она изоморфна полной матричной алгебре Ли $M_{n,n}$. Для этого нам нужно построить изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Зададим отображение

$$\varkappa : T_e(GL(n,\mathbb{R})) = T_e(M_{n,n}) \to M_{n,n}$$

по формуле

$$(a^i_j) = (\xi(g^i_j)) \equiv ((dg^i_j)_e(\xi)), \tag{2.7}$$

где $\xi \in T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ – произвольный элемент, a^i_j – элементы матрицы $A = \varkappa(\xi)$, $e = I_n$ – единичная матрица. Это отображение линейно, так как

$$\varkappa(\lambda\xi + \mu\eta) = ((\lambda\xi + \mu\eta)(g^i_j)) = \lambda(\xi(g^i_j)) + \mu(\eta(g^i_j)) = \lambda\varkappa(\xi) + \mu\varkappa(\eta),$$

где $\xi, \eta \in T_e(M_{n,n})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то есть $\varkappa$ является гомоморфизмом.

Докажем биективность отображения $\varkappa$. Пусть $\xi \in ker\, \varkappa$ – произвольный элемент из ядра отображения $\varkappa$. Тогда ему соответствует нулевая матрица

$$0 = \varkappa(\xi) = (\xi(g^i_j)),$$

то есть $\xi(g^i_j) = (dg^i_j)_e(\xi) = 0$ для любых $i, j = 1,\dots,n$. Так как $(dg^i_j)_e$ – ковекторы натурального базиса (см. пример 1.2), мы получаем, что все координаты вектора ξ равны нулю, то есть $\xi = 0$. Таким образом, отображение $\varkappa$ является инъективным.

Сюръективность отображения $\varkappa$ следует из того, что размерности векторных пространств $T_e(M_{n,n})$ и $M_{n,n}$ равны.

Итак, мы показали, что построенное отображение $\varkappa$ будет изоморфизмом векторных пространств. Тогда отображение

$$\gamma = \varkappa \circ \beta : \mathfrak{g} \to M_{n,n}$$

будет изоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Нам осталось показать, что отображение γ будет изоморфизмом алгебр Ли, то есть будет сохранять коммутатор, то есть

$$\gamma[X,Y] = [\gamma(X),\gamma(Y)],\ X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}).$$

Для этого нам потребуются вспомогательные формулы.

Лемма 2.1. *Пусть $g, h \in GL(n,\mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Тогда в принятых обозначениях*

$$1)\, g^i_j \circ L_g = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j;\quad 2)\, Y(g^i_j) = \textstyle\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j).$$

Доказательство. Так как $g, h \in GL(n,\mathbb{R})$, они являются матрицами. Применим правило умножения матриц

$$(g^i_j \circ L_g)(h) = g^i_j(gh) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j(h).$$

В силу произвола в выборе элемента h получим первую формулу. Тогда, учитывая ее, получим

$$(Y(g^i_j))(g) = Y_g(g^i_j) = (((L_g)_*)_e)(Y_e))(g^i_j) = Y_e(g^i_j \circ L_g) = Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k(g) g^k_j) = \sum_{k=1}^n g^i_k(g) Y_e(g^k_j).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразиях), левоинвариантностью векторного поля Y и определением дифференциала отображения. Так как это равенство верно для любого элемента $g \in G$, то получим требуемое соотношение. □

Теорема 2.4. *Отображение* $\gamma : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to M_{n,n}$ *является изоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Заметим, что $\gamma(X)$ – это матрица. Обозначим ее элементы через $\gamma(X)^i_j$. Напомним, что первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца. Тогда из определения отображения γ получим

$$\gamma(X)^i_j = (\varkappa(X_e))^i_j = X_e(g^i_j).$$

Тогда получим

$$\gamma([X,Y])^i_j = [X,Y]_e(g^i_j) = ([X,Y](g^i_j))(e) = ((X\circ Y - Y\circ X)(g^i_j))(e) = (X(Y(g^i_j)) - Y(X(g^i_j)))(e) =$$

$$= X_e(Y(g^i_j)) - Y_e(X(g^i_j)) = X_e(\sum_{k=1}^n g^i_k Y_e(g^k_j)) - Y_e(\sum_{k=1}^n g^i_k X_e(g^k_j)) = \sum_{k=1}^n \left(X_e(g^i_k)Y_e(g^k_j) - Y_e(g^i_k)X_e(g^k_j)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \gamma(X)^i_k\gamma(Y)^k_j - \sum_{k=1}^n \gamma(Y)^i_k\gamma(X)^k_j = ((\gamma(X)\cdot\gamma(Y)) - \gamma(Y)\gamma(X))^i_j = [\gamma(X),\gamma(Y)]^i_j,$$

Итак, отображение γ сохраняет коммутатор, следовательно, является изоморфизмом алгебр Ли. □

Пример 2.9. Обозначим $\{e^i_j\}$ стандартный базис матричной алгебры $M_{n,n}$. В матрице e^i_j на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Напомним, что атлас на гладком многообразии $GL(n,\mathbb{R})$ состоит из одной карты с координатами (g^i_j). Картирующее отображение это карты каждой матрице ставит в соответствие совокупность элементов этой матрицы, выписанных в одну строчку. Тогда натуральный базис этой карты будет $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right\}$. Найдем образы векторов $\left\{\frac{\partial}{\partial g^i_j}\Big|_e\right\}$ при отображении $\varkappa$.

Используем формулу (2.7):

$$\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial g^i_j}\Bigg|_e\right)^k_\ell = (dg^k_\ell)_e\left(\frac{\partial}{\partial g^i_j}\Bigg|_e\right) = \delta^i_\ell\delta^k_j = (e^i_j)^k_\ell,$$

то есть $\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial g^i_j}\Big|_e\right) = e^i_j$.

Вычислим уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$. Фиксируем в полной матричной алгебре $M_{n,n}$ стандартный базис $\{e^i_j\}$, $i,j=1,\dots,n$, состоящий из матриц e^i_j, у которых на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит 1, а все остальные компоненты нулевые. В виде равенства это запишется в виде

$$(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell\delta^k_j.$$

Здесь индекс k обозначает номер строки, а индекс ℓ – номер столбца.

Этот базис порождает базис $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Обозначим дуальный базис через $\{\omega^i_j\}$. Он характеризуется тем, что

$$\omega^k_\ell(E^i_j) = \delta^i_\ell\delta^k_j.$$

Запишем уравнения Маурера-Картана в нашем случае. Вспомним их общий вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b\wedge\omega^c,$$

где $a,b,c = 1,\dots,n = dimG$. В этих уравнениях есть один свободный индекс a, который нумерует уравнения, а также есть два индекса суммирования b,c, которые говорят о принадлежности коэффициента C^a_{bc} соответствующему произведению $\omega^b\wedge\omega^c$. В нашем случае каждая форма нумеруется двумя индексами. Тогда свободными будут два индекса, нумерующие уравнения. Они будут стоять у форм дэ омега и у коэффициентов C. Также нам потребуются индексы для суммирования по две штуки на каждую омегу. Эти индексы должны также присутствовать в коэффициенте C и показывать, что по ним происходит суммирование. В результате получим

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2}C^{i\ell t}_{jkr}\omega^k_\ell\wedge\omega^r_t. \tag{2.8}$$

Структурные константы $C^{i\ell t}_{jkr}$ определяются уравнениями

$$[E^\ell_k, E^t_r]C^{p\ell t}_{qkr}E^q_p.$$

Подействуем на обе части этого уравнения изоморфизмом γ^{-1}. Так как γ^{-1} – изоморфизм алгебр Ли, получим

$$[e^\ell_k, e^t_r] = C^{p\ell t}_{qkr}e^q_p \tag{2.9}$$

(см. формулу (2.3)). Найдем из этих уравнений структурные константы. Для этого вычислим компоненты матриц, стоящих в левой и правой частях этого равенства. Расписываем левую часть равенства (2.9).

$$[e_k^\ell, e_r^t]_j^i = (e_k^\ell)_p^i (e_r^t)_j^p - (e_r^t)_p^i (e_k^\ell)_j^p = \delta_p^\ell \delta_k^i \delta_j^t \delta_r^p - \delta_p^t \delta_r^i \delta_j^\ell \delta_k^p = \delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell.$$

Расписываем правую часть равенства (2.9).

$$\left(C_{qkr}^{p\ell t} e_p^q\right)_j^i = C_{qkr}^{p\ell t} \delta_j^q \delta_p^i = C_{jkr}^{i\ell t}.$$

Итак, мы получили

$$C_{jkr}^{i\ell t} = \delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell.$$

Наконец, подставим полученный результат в (2.8):

$$d\omega_j^i = -\frac{1}{2}(\delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell)\omega_\ell^k \wedge \omega_t^r = -\frac{1}{2}(\omega_r^i \wedge \omega_j^r - \omega_j^t \wedge \omega_t^i) = -\omega_r^i \wedge \omega_j^r.$$

Мы заменили индекс суммирования t во втором слагаемом на индекс r и привели подобные. Итак, уравнения Маурера-Картана для полной линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ в стандартном базисе $E_j^i = \gamma^{-1}(e_j^i)$ имеют вид

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

Замечание 2.6. Нетрудно показать, что алгебра эндоморфизмов $End\,V$ векторного пространства V является алгеброй Ли группы Ли автоморфизмов $Aut\,V$ этого векторного пространства относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1,\ L_1, L_2 \in End\,V.$$

Для этого нужно фиксировать базис в V. Тогда элементы из группы $Aut\,V$ могут быть отождествлены с матрицами группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, а элементы из $End\,V$ с матрицами полной матричной алгебры $M_{n,n}$. Откуда следует, что алгебра эндоморфизмов является присоединенной алгеброй Ли группы Ли $Aut\,V$.

§2.4. Гомоморфизмы групп Ли и алгебр Ли.

Определение 2.3. Отображение $\varphi : G \to H$ групп Ли называется *гомоморфизмом групп Ли*, если

(1) отображение φ является гладким;

(2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),\ x, y \in G$.

В частности, если группа H является группой Ли автоморфизмов $Aut\,V$ некоторого векторного пространства V, то гомоморфизм групп Ли называется *линейным представлением группы Ли G*. Гомоморфизм групп Ли, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли.* Изоморфизм группы Ли на себя называется *автоморфизмом группы Ли.*

Определение 2.4. Отображение $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Ли называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если

(1) отображение ϕ является линейным;

(2) $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}$.

Гомоморфизм алгебр Ли, являющийся биекцией, называется *изоморфизмом алгебр Ли.*

Если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является алгеброй эндоморфизмов $End\,V$ некоторого векторного пространства V, то гомоморфизм алгебр Ли ϕ называется *линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$*.

Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\varphi(e) = \tilde{e},$$

где e – единица группы Ли G, $\tilde{e}$ – единица группы Ли H. Этот результат мы можем взять из алгебры (свойство гомоморфизма абстрактных групп). Тогда дифференциал $(\varphi_*)_e$ отображения φ является линейным отображением касательных пространств $T_e(G)$ и $T_{\tilde{e}}(H)$ (см. § 1.2.). Это отображение задает $\mathbb{R}$-линейное отображение присоединенных алгебр Ли

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

по формуле

$$\phi = (\tilde{\beta})^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta, \tag{2.10}$$

где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$, $\tilde{\beta} : \mathfrak{h} \to T_{\tilde{e}}(H)$ – изоморфизмы векторных пространств, построенные в теореме 2.2.

Записав формулу (2.10) в виде

$$\tilde{\beta} \circ \phi = (\varphi_*)_e \circ \beta,$$

получим, что отображение ϕ однозначно задается формулой

$$(\phi(X))_{\tilde{e}} = (\varphi_*)_e(X_e),\ X \in \mathfrak{g}. \tag{2.11}$$

Теорема 2.5. *Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда*

(1) для любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{g}$ векторные поля X и $\phi(X)$ являются φ-связанными;

(2) $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Из определения гомоморфизма групп Ли получим, что для любых элементов $g, h \in G$ имеет место равенство

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

Откуда получим, что

$$\varphi(L_g(h)) = L_{\varphi(g)}(\varphi(h)).$$

Так как это верно для любого $h \in G$, получим

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi, \forall g \in G. \tag{2.12}$$

Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Нам нужно доказать, что векторные поля X и $\tilde{X} \equiv \phi(X)$ будут φ -связанными. Согласно теореме 1.2 нам нужно доказать для этого, что

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g.$$

Имеем

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} \tilde{X}_{\tilde{e}} = \left((L_{\varphi(g)})_*\right)_{\tilde{e}} (\varphi_*)_e X_e = ((L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*)_e (X_e) = ((\varphi \circ L_g)_*)_e (X_e) = (\varphi_*)_g \circ ((L_g)_*)_e (X_e) = \\ = (\varphi_*)_g (X_g)$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторного поля $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$, формулой (2.11), свойством композиции дифференциалов, формулой (2.12) и левоинвариантностью векторного поля $X \in \mathfrak{g}$. Итак, мы показали, что векторные поля $X \in \mathfrak{g}$ и $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ являются φ-связанными.

Далее, нам нужно показать, что линейное отображение ϕ присоединенных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ будет гомоморфизмом алгебр Ли. Здесь осталось доказать, что ϕ сохраняет коммутатор, то есть

$$\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Как мы доказали, векторные поля X и ϕX являются φ-связанными, то есть $\phi X = \varphi_* X$. Аналогично для векторного поля Y. Тогда согласно предложению 1.3 векторное поле $[\phi X, \phi Y]$ будет φ-связано с векторным полем $[X, Y]$, то есть

$$[\phi X, \phi Y] = \varphi_*[X, Y].$$

С другой стороны, как показано выше, векторное поле $[X, Y]$ φ-связано с векторным полем $\phi[X, Y]$, то есть

$$\phi[X, Y] = \varphi_*[X, Y].$$

Откуда получаем требуемое соотношение. □

§2.5. Подгруппы Ли. Однопараметрические подгруппы Ли и экспоненциальное отображение.

5.1. Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G, если она является подмногообразием гладкого многообразия G, то есть отображение φ является регулярным и инъективным.

Определение 2.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Векторное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно замкнуто относительно коммутатора, то есть для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Пример 2.10. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G. Докажем, что отображение

$$\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

их присоединенных алгебр Ли является изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{h}$ и $\phi(\mathfrak{h})$. Так как отображение φ регулярно (то есть его дифференциал в каждой точке инъективен), отображение ϕ, связанное с отображением φ_* по формуле (2.11), также будет инъективным, следовательно, будет являться биекцией на образ. Кроме того, в теореме 2.5 мы доказали, что оно будет гомоморфизмом алгебр Ли. Итак, отображение ϕ является изоморфизмом алгебр Ли.

5.2. *Однопараметрической подгруппой* группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $g : \mathbb{R} \to G$, где $(\mathbb{R}, +)$ – аддитивная группа Ли, построенная в примере 2.1.

Другими словами, гладкое отображение $g : \mathbb{R} \to G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G, если для любых вещественных чисел t_1, t_2 имеем

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2).$$

Замечание 2.7. Так как однопараметрическая подгруппа $g(t)$ является, в частности, гомоморфизмом абстрактных групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(G, \cdot)$, то она переводит нейтральный элемент в нейтральный, то есть $g(0) = e$.

Лемма 2.2. *Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – ненулевое левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Тогда порожденный им локальный поток Φ_X на гладком многообразии G (см. § 1.6.) обладает следующими свойствами*

(1) $\Phi_X(\Phi_X(a, t_1), t_2) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;

(2) $\Phi_{\lambda X}(a, t) = \Phi_X(a, \lambda t)$;

(3) $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$,

где $a, b \in G$, $\lambda, t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первые два свойства суть общие свойства локальных потоков, которые были доказаны в теореме 1.9.

Докажем третье свойство. Рассмотрим интегральную кривую $g(t) = \Phi_X(a, t)$ векторного поля X с началом в точке $a \in G$ и кривую $L_b g(t)$. Докажем, что кривая $L_b g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) = X_{\gamma(t)}; \\ \gamma(0) = b \cdot a. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} L_b g(t) = (L_b)_* \frac{dg(t)}{dt} = (L_b)_*(X_{g(t)}) = X_{L_b g(t)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.15); тем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X; левоинвариантностью векторного поля X и теоремой 1.2. Обратите внимание, что мы не ставим у дифференциала отображения точку, в которой он берется. Это связано с громоздкостью такой записи. Везде, где стоит дифференциал, берется та точка, в которой определен стоящий далее вектор.

Кроме того, очевидно, $L_b g(0) = b \cdot g(0) = b \cdot a$. С другой стороны, кривая $\tilde{g}(t) = \Phi_X(b \cdot a, t)$ является интегральной кривой того же поля X с началом в точке $b \cdot a$. Следовательно, кривые $L_b g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ совпадают, то есть $b \cdot \Phi_X(a, t) = \Phi_X(b \cdot a, t)$. □

Теорема 2.6. *Всякое левоинвариантное векторное поле на группе Ли полно. При этом его интегральная кривая с началом в единице группы является однопараметрической подгруппой.*

Доказательство. Пусть дано левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G. Нам нужно доказать, что локальный поток Φ_X, определяемый этим векторным полем определен на всем многообразии $G \times \mathbb{R}$ (см. § 1.6.). Для этого мы сначала определим локальный поток в некоторой окрестности единицы и для некоторого интервала для t, а затем, определим его для всех t и левыми сдвигами разнесем по всей группе G.

Пусть определен локальный поток $\Phi(e, t)$ для точек некоторой окрестности e и для значений t в некотором интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Покажем, что этот поток можно определить для любого t из этого интервала и любого элемента $a \in G$. Действительно, по третьему свойству из леммы 2.2 получим

$$\Phi_X(a, t) = a \cdot \Phi_X(e, t).$$

Так как определена правая часть равенства, определена и левая часть равенства.

Покажем теперь, что локальный поток можно определить для любого вещественного числа t. Опять воспользуемся леммой 2.2. Очевидно, что для любого t существует такое натуральное число n, что число $\frac{t}{n}$ будет принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а значит, для $\frac{t}{n}$ локальный поток будет определен. Тогда

$$\Phi_X(a, t) = \Phi_X(a, n \cdot \frac{t}{n}) = \Phi_X(e, \underbrace{\frac{t}{n} + \ldots + \frac{t}{n}}_{n\,\text{раз}}) = \Phi_X(\ldots(\Phi_X(a, \frac{t}{n}), \frac{t}{n})\ldots).$$

Каждый локальный поток в скобках правой части равенства определен, следовательно, определен и локальный поток в левой части равенства.

Итак, отображение Φ_X определено на многообразии $G \times \mathbb{R}$,а значит, векторное поле X полно.

Обозначим $g(t) = \Phi_X(e,t)$ – это интегральная кривая векторного поля X с началом в точке e. Нам нужно доказать, что она является однопараметрической подгруппой группы Ли G. Во-первых, заметим, что это отображение вида $g : \mathbb{R} \to G$, определенное на всей числовой прямой. Во-вторых, имеем

$$g(t_1+t_2) = \Phi_X(e, t_1+t_2) = \Phi_X(\Phi_X(e,t_1), t_2) = \Phi_X(e,t_1)\cdot\Phi_X(e,t_2) = g(t_1)\cdot g(t_2).$$

Здесь мы воспользовались свойствами (1) и (3) леммы 2.2, то есть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G по определению. □

Теорема 2.7. *Всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля на этой группе Ли с началом в единице группы.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G. По сути это гладкая кривая, а значит, имеет смысл говорить о касательных векторах к этой кривой в ее точках. Пусть

$$\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t)$$

касательный вектор к $g(t)$ в точке $g(0) = e$ (см. замечание 2.7 и договоренность (1.14)). На касательный вектор ξ в единице группы G мы можем подействовать изоморфизмом β^{-1} (см. теорему 2.2) и получить левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, то есть $X = \beta^{-1}(\xi)$. Докажем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X. Имеем для произвольного фиксированного вещественного числа t_1

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} g(t) = \left.\frac{d}{d(t-t_1)}\right|_{t-t_1=0} g((t-t_1)+t_1) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(\tau+t_1) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(t_1)\cdot g(\tau) = ((L_{g(t_1)})_*)_e \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} g(\tau) =$$
$$= ((L_{g(t_1)})_*)_e \xi = X_{g(t_1)}.$$

Здесь мы воспользовались определением однопараметрической подгруппы, формулой (1.15) и левоинвариантностью векторного поля X (то есть тем, что $X_g = ((L_g)_*)_e \xi$).

Итак, кривая $g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} g(t) = X_{g(t)}; \\ g(0) = e, \end{cases}$$

следовательно, она будет интегральной кривой построенного левоинвариантного векторного поля X. □

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на группе Ли G и множеством однопараметрических подгрупп группы Ли G. Оно сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическую подгруппу $g(t)$, являющуюся интегральной кривой этого векторного поля с началом в единице группы. Эта однопараметрическая подгруппа однозначно определена условиями

$$1)\ \left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t) = X_e; \quad 2)\ g(0) = e. \tag{2.13}$$

Элемент X присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, порождающий однопараметрическую подгруппу указанным образом, называется *генератором* этой однопараметрической подгруппы.

Определение 2.6. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. *Экспоненциальным отображением* называется отображение

$$exp : \mathfrak{g} \to G,$$

определяемое соотношением

$$exp\, X = \Phi(e, 1).$$

Теорема 2.8. *Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы Ли G с генератором $X \in \mathfrak{g}$ допускает представление*

$$g(t) = exp(tX).$$

Доказательство. Учитывая свойство (2) леммы 2.2, получим

$$g(t) = \Phi_X(e,t) = \Phi_{tX}(e,1) = exp(tX).$$

□

Следующую теорему мы примем без доказательства.

Теорема 2.9. *Отображение* $exp : \mathfrak{g} \to G$ *является гладким отображением относительно канонической гладкой структуры векторного пространства на* $\mathfrak{g}$. *Более того, существует окрестность* $U_0(\mathfrak{g})$ *нуля в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *и окрестность* $U_e(G)$ *единицы в группе Ли* G, *такие что экспоненциальное отображение* exp *будет диффеоморфизмом этих окрестностей.*

Окрестности $U_0(\mathfrak{g})$ и $U_e(G)$ из теоремы 2.9 называются *нормальными окрестностями.*

Нам потребуется еще одна теорема из теории групп Ли, которую мы примем без доказательства.

Теорема 2.10. *Пусть* $\varphi : H \to G$ *– гомоморфизм групп Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\phi=\varphi_*|_{\mathfrak{h}}} & \mathfrak{g} \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G, \end{array}$$

где $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{h}$ *– алгебры Ли групп Ли* G *и* H *соответственно.*

В частности, если $\varphi : G \to G$ *– гомоморфизм группы Ли* G *на себя, то коммутативную диаграмму можно записать в виде*

$$\varphi \circ exp = exp \circ \phi.$$

Глава 3. Главные расслоения.

§3.1. Действие группы на многообразии.

Говорят, что группа (абстрактная) G *действует на множестве* M *слева*, если задан гомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h),\ g, h \in G.$$

Аналогичным образом, говорят, что группа G *действует на множестве* M *справа*, если задан антигомоморфизм

$$\varphi : G \to G_M$$

в группу G_M преобразований множества M, то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(h) \circ \varphi(g),\ g, h \in G.$$

Предложение 3.1 . *Задание гомоморфизма* φ *равносильно заданию отображения* $\Phi : G \times M \to M$, *обладающего свойствами*

1) $\Phi(e, m) = m$;
2*a*) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$ *для левого действия*;
2*b*) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m)$ *для правого действия*;

Доказательство. Рассмотрим случай левого действия (правое действие рассматривается аналогичным образом). Пусть дано левое действие группы G на множестве M, то есть задан гомоморфизм φ. Зададим отображение Φ формулой

$$\Phi(g, m) = \varphi_g(m),\ g \in G, m \in M.$$

Докажем, что отображение Φ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\Phi(e, m) = \varphi_e(m)$. По свойству гомоморфизма групп имеем $\varphi_e = id$, а значит, $\Phi(e, m) = m$ и первое свойство доказано. Во-вторых, имеем

$$\Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) = \varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m).$$

Здесь мы воспользовались определением левого действия. Итак, отображение Φ обладает обладает обоими свойствами.

Обратно, пусть задано отображение Φ, удовлетворяющее указанным свойствам. Тогда определим отображение $\varphi : G \to G_M$ по формуле

$$\varphi(g)(m) \equiv \varphi_g(m) = \Phi(g, m),$$

то есть по той же самой формуле, но прочитанной справа налево. Проверим, что отображение φ является гомоморфизмом (абстрактных) групп. Имеем

$$\varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m) = \Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_g(m).$$

Здесь мы воспользовались вторым свойством отображения Φ. □

Отображение Φ называется *действием группы G на множестве M*, а гомоморфизм φ называется *представлением группы G на множестве M*.

Если представление φ инъективно, то оно называется *точным*, а соответствующее действие называется *эффективным*.

Пример 3.1. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Это группа относительно операции умножения комплексных чисел. Множество G можно изобразить как окружность с центром в некоторой фиксированной точке O, которая принята за начало системы координат. Обозначим плоскость, в которой лежит эта окружность, через σ.

Рассмотрим множество поворотов плоскости σ на всевозможные направленные углы вокруг точки O. Это группа. Обозначим ее G_σ^R. Очевидно, что группа поворотов G_σ^R является подгруппой группы G_σ преобразований плоскости σ.

Построим отображение $\varphi : G \to G_\sigma$ следующим образом. Пусть $z \in G$ – произвольное комплексное число. Его можно представить в виде $z = e^{i\psi}$, где $-\pi < \psi \leq \pi$. Тогда комплексному числу $z = e^{i\psi}$ поставим в соответствие поворот R_O^ψ вокруг точки O на угол ψ. Докажем, что отображение φ задает левое (одновременно являющееся и правым) действие группы G на множестве точек плоскости σ. Для комплексных чисел $z_1 = e^{i\psi_1}, z_2 = e^{i\psi_2} \in G$ имеем

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(e^{i(\psi_1+\psi_2)}) = R_O^{\psi_1+\psi_2} = R_O^{\psi_1} \circ R_O^{\psi_2}.$$

Итак, отображение φ является гомоморфизмом, следовательно, задает левое действие. Почему действие будет также и правым?

Проверим, будет ли это действие эффективным. Для этого нам нужно проверить, будет ли гомоморфизм φ инъективным. Пусть $z = e^{i\psi} \in Ker\,\varphi$, то есть $\varphi(z) = id \equiv R_O^0$. Тогда $\psi = 0$ и $z = 1$. Итак, отображение φ является инъективным, а действие группы G эффективным.

Замечание 3.1. В случае эффективного действия группы G элемент $g \in G$ можно отождествлять с его образом φ_g. Тогда можно записать, что $(gh)m = g(hm)$ для левого действия и $(gh)m = h(gm)$ для правого действия. Здесь $g, h \in G$, $m \in M$. Отметим, что для правого действия удобнее принять запись $\varphi_g(m) = mg$. Тогда условие антигомоморфности отображение φ будет записано в виде $m(gh) = (mg)h$. Чем и обусловлено название "правое действие".

Задача 3.1. Пусть на множестве M задано эффективное левое (правое) действие группы G. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ имеем $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

Доказательство. Так как φ_g – это элемент группы преобразований множества M, он является биекцией, а значит, обратим. Докажем, что $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id$. Равенство $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id$ докажите самостоятельно. Имеем для любой точки $m \in M$ (используя определение левого действия)

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(m) = \varphi_{g^{-1}g}(m) = \varphi_e(m) = id(m) = m.$$

□

Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g(x) = y$.

Пример 3.2. Действие группы G из примера 3.1 не является транзитивным. Действительно, рассмотрим две точки плоскости σ, принадлежащие различным концентрическим окружностям с центром в точке O. Тогда не существует поворота, переводящего одну точку во вторую.

Пример 3.3. Возьмем в качестве G группу $\mathbb{R}^2$ с операцией сложения. В качестве множества M возьмем множество точек плоскости σ и фиксируем на ней аффинную систему координат. Тогда отображение φ, ставящее в соответствие каждой паре чисел (a, b) параллельный перенос на вектор с координатами (a, b) в базисе фиксированной системы координат будет задавать левое (и одновременно правое действие) группы $\mathbb{R}^2$ на множестве точек плоскости σ (докажите самостоятельно). Это действие будет транзитивным, так как для любых двух точек x, y плоскости существует параллельный перенос, переводящий одну точку во вторую. Возьмем координаты вектора этого параллельного переноса. Это будет элемент g группы $\mathbb{R}^2$, для которого $\varphi_g(x) = y$. Таким образом, группа $\mathbb{R}^2$ действует на плоскости транзитивно.

Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если из того, что для элемента $g \in G$ существует точка $m \in M$, такая что $\varphi_g m = m$, следует $g = e$. Как всегда e – единица группы.

Замечание 3.2. Определение эффективного действия мы можем сформулировать в другом виде: действие называется эффективным, если для элемента $g \in G$ и любого элемента $m \in M$ равенство $\varphi_g m = m$ влечет $g = e$.

Сравнивая определения эффективного и свободного действия, получаем, что любое свободное действие эффективно.

Обратное, вообще говоря, не верно. Действие из примера 3.1 является эффективным, но не свободным, так как точка O является неподвижной точкой не только тождественного преобразования.

Пусть группа G действует на множестве M. Тогда любая точка $m \in M$ порождает отображение

$$\sigma_m : G \to M,$$

сопоставляя каждому элементу $g \in G$ точку

$$\sigma_m(g) = \varphi_g(m).$$

Определение 3.1. Образ отображения σ_m называется *орбитой* точки m относительно действия группы G и обозначается $Orb(m)$.

Пример 3.4. В примере 3.1 орбитами группы G будут концентрические окружности с центром в точке O.

Задача 3.2. Докажите, что $Orb(m) = M$ тогда и только тогда, когда действие транзитивно.

Лемма 3.1. *Если действие свободно, то отображение $\sigma_m : G \to M$ является биекцией на соответствующую орбиту.*

Доказательство. Нам нужно доказать инъективность отображения σ_m. Пусть для некоторых точек $g_1, g_2 \in G$ имеем $\sigma_m(g_1) = \sigma_m(g_2)$. Тогда согласно определению отображения σ_m получим

$$\varphi_{g_1}(m) = \varphi_{g_2}(m). \tag{3.1}$$

Так как действие свободно, а значит, эффективно, гомоморфизм φ инъективен, следовательно, обратим. Умножим обе части равенства 3.1 слева на $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. Так как $\varphi_{g_2}^{-1} = \varphi_{g_2^{-1}}$, получим $\varphi_{g_2^{-1}} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. По определению левого действия это равносильно $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(m) = m$. Так как действие свободно, $g_2^{-1}g_1 = e$, то есть $g_1 = g_2$.

Итак, мы показали, что для свободного действия отображение $\sigma_m : G \to Orb(m)$ является биекцией. □

Из леммы непосредственно следует

Теорема 3.1. *Если группа G действует на множестве M свободно, то M распадается в дизъюнктивное объединение орбит, находящихся в биективном соответствии с группой G.* □

Пример 3.5. Рассмотрим группу G из примера 3.1 и множество точек плоскости σ без точки O. Тогда на множестве $\sigma \setminus \{O\}$ группа G действует свободно и это множество распадается в дизъюнктивное объединение концентрических окружностей с центром в точке O. Каждая такая окружность является орбитой действия группы G.

Определение 3.2. Пусть G – группа Ли, φ – ее гомоморфизм как абстрактной группы в группу $Diff\, M$ диффеоморфизмов гладкого многообразия M. Говорят, что *G гладко действует на многообразии M*, если действие $\Phi : G \times M \to M$ является гладким отображением.

Пример 3.6. Пусть G – r-мерная группа Ли, $\varphi : G \to Aut\, V$ – ее представление, то есть гомоморфизм в группу Ли $Aut\, V$ некоторого n-мерного линейного пространства V.

Фиксируем локальную карту (U, ψ) на группе Ли G с координатами $(x^1, \dots, x^r)$, а также глобальную карту на V, порожденную базисом $b = (e_1, \dots, e_n)$. Этот базис порождает базис, а значит и глобальную карту в векторном пространстве $\mathfrak{T}^1_1(V)$ тензоров типа (1,1), а именно, базис $(e^i_j = e^i \otimes e_j)$. Здесь как всегда $(e^1, \dots, e^n)$ – дуальный базис для b.

В этой паре карт гомоморфизм φ задается гладкими функциями (по определению гомоморфизма групп Ли § 2.4.)

$$t^i_j = t^i_j(x^1, \dots, x^r);\ i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда действие $\Phi : G \times V \to V$ группы G на векторном пространстве V задается в этих картах уравнениями

$$\tilde{X}^i = t^i_j(x^1, \dots, x^n) X^j,$$

где $(X^1, \dots, X^n)$ – координаты вектора $X \in V$ в базисе b. Следовательно, отображение Φ является гладким, так как существуют непрерывные частные производные по переменным $x^1, \dots, x^r$ и $X^1, \dots, X^n$.

Вывод: всякое линейное представление группы Ли порождает ее гладкое действие в соответствующем линейном пространстве.

Особенно важным частным случаем линейного представления группы Ли является так называемое *присоединенное представление.* Здесь в качестве векторного пространства берется ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 3.7. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, то есть множество левоинвариантных векторных полей на группе G. Группа Ли G действует на себя слева посредством так называемых *внутренних автоморфизмов*. Именно, любой элемент $a \in G$ порождает отображение $A_a : G \to G$ по формуле

$$A_a(x) = axa^{-1},\ x \in G.$$

Это отображение является гомоморфизмом, так как

$$A_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = A_a(x)A_a(y),\ x, y \in G.$$

Более того, $A_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, где L_a – это левый сдвиг на элемент a, $R_{a^{-1}}$ – правый сдвиг на элемент a^{-1}. Тогда отображение A_a будет диффеоморфизмом как композиция таковых (см. теорему 2.1). Следовательно, отображение A_a является изоморфизмом группы Ли G.

Далее, имеем для любых $a, b \in G$

$$A_a \circ A_b(x) = A_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = A_{ab}(x),\ x \in G.$$

Тогда отображение $A : G \to Aut(G) \subset G_G$, определенное формулой

$$A(g) = A_g$$

является гомоморфизмом групп. Так как групповые операции гладки, отображение A будет гладким, следовательно, отображение A является представлением группы Ли G на себе. Само действие $\Phi : G \times G \to G$ задается формулой

$$\Phi(g, x) = A_g(x) = gxg^{-1}.$$

Пусть $g \in G$ – фиксированный элемент и $A_g : G \to G$ – внутренний автоморфизм. Его дифференциал $((A_g)_*)_e : T_e(G) \to T_e(G)$ в единице e группы будет изоморфизмом касательных пространств (см. теорема **??**). Тогда отображение

$$Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$$

будет автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ – канонический изоморфизм (см. теорему 2.2). Определим отображение

$$Ad : G \to Aut\,\mathfrak{g}$$

по формуле $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$. Это отображение будет гомоморфизмом групп Ли. Действительно,

$$Ad(gh) = \beta^{-1} \circ ((A_{gh})_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g \circ A_h)_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ ((A_h)_*)_e \circ \beta = Ad(g) \circ Ad(h).$$

Таким образом, отображение Ad является линейным представлением группы G на ее алгебре Ли. Это представление называется *присоединенным представлением* группы Ли.

Рассмотрим дифференциал отображения Ad в единице e группы G:

$$(Ad_*)_e : T_e(G) \to T_{id}(Aut\,\mathfrak{g}).$$

Касательное пространство $T_{id}(Aut\,\mathfrak{g})$ изоморфно алгебре Ли группы Ли $Aut\,\mathfrak{g}$. Канонический изоморфизм обозначим $\tilde{\beta}$. Как мы знаем (см. замечание 2.6), алгебра Ли группы Ли $Aut\,\mathfrak{g}$ – это алгебра эндоморфизмов $End\,\mathfrak{g}$. Таким образом, определено отображение

$$ad = \tilde{\beta}^{-1} \circ (Ad_*)_e \circ \beta : \mathfrak{g} \to End\,\mathfrak{g}.$$

Можно показать, что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли, а значит, линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себе (см. определение 2.4). Это представление также называется *присоединенным представлением.*

Кроме того, имеет место формула

$$ad_X Y = [X, Y],$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad_X = ad(X) \in End\,\mathfrak{g}$, квадратные скобки обозначают коммутатор левоинвариантных векторных полей в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 3.8. Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех базисов V. На этом множестве определено действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Именно, пусть $b = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathfrak{B}$ – произвольный базис. Положим для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\varphi_g(b) = \Phi(g, b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n}).$$

В силу невырожденности матрицы g, векторы $\varepsilon_i = g_i^j e_j$ будут линейно независимы, а значит, будут образовывать базис в V. Следовательно, $\varphi_g(b) \in \mathfrak{B}$. Очевидно, что отображение φ_g – биекция, то есть преобразование множества $\mathfrak{B}$, то есть $\varphi_g \in G_{\mathfrak{B}}$.

Выясним, какое это действие: правое или левое. Пусть $g, h \in GL(n,\mathbb{R})$ – произвольные элементы. Тогда

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = \varphi_h(\varphi_g(e_1,\dots,e_n)) = \varphi_h(g_1^{i_1}e_{i_1},\dots,g_n^{i_n}e_{i_n}) = (h_1^{j_1}g_{j_1}^{i_1}e_{i_1},\dots,h_n^{j_n}g_{j_n}^{i_n}e_{i_n}) \tag{3.2}$$

По правилу записи матрицы перехода от одного базиса к другому (именно ею является матрица g) верхний индекс обозначает номер координаты вектора нового базиса. Эти координаты записываются в столбец матрицы перехода, следовательно, верхний индекс нумерует строки матрицы g. Тогда нижний индекс нумерует столбцы. Вернемся к последнему базису в 3.2. По правилу умножения матриц (строка на столбец) в первом сомножителе должны меняться номера столбцов, то есть нижние индексы. В нашем случае первой матрицей является матрица g, а вторым сомножителем является матрица h. Возвращаясь к цепочке равенств 3.2, получим

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = ((gh)_1^{i_1}e_{i_1},\dots,(gh)_n^{i_n}e_{i_n}) = \varphi_{gh}(b).$$

Итак, $\varphi_h \circ \varphi_g = \varphi_{gh}$, то есть действие правое.

Так как для любых двух базисов всегда существует матрица перехода от одного к другому, то действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ является транзитивным. Кроме того, оно свободно, так как только единичная матрица не меняет базис.

Действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ позволяет ввести на множестве $\mathfrak{B}$ базисов векторного пространства V структуру гладкого многообразия и превратить действие Φ в гладкое действие на гладком многообразии $\mathfrak{B}$.

Чтобы построить гладкую структуру на $\mathfrak{B}$ нам потребуется внести туда топологию и построить атлас. Начнем с карт атласа. Фиксируем базис $b_0 \in \mathfrak{B}$. Тогда возникает отображение

$$\sigma_{b_0} : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{B},$$

определенное формулой $\sigma_{b_0}(g) = \varphi_g(b_0)$, то есть каждой матрице g оно ставит в соответствие базис, в которых переходит b_0 под действием этой матрицы. Очевидно, что это биекция, следовательно, существует обратное отображение $\psi = \sigma_{b_0}^{-1}$, которое сопоставляет каждому базису $b \in \mathfrak{B}$ матрицу перехода $C(b_0, b)$ от базиса b_0 к базису b. Внесем во множество $\mathfrak{B}$ топологию, потребовав, чтобы отображение ψ было гомеоморфизмом, то есть открытыми множествами в $\mathfrak{B}$ назовем полные прообразы открытых множеств в $GL(n,\mathbb{R})$ при отображении ψ. Можно показать, что эта топология не зависит от выбора базиса b_0, то есть если выбрать другой фиксированный базис β_0, то множество множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{b_0}^{-1}$, будет совпадать с множеством множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{\beta_0}^{-1}$.

Тогда пара $(\mathfrak{B}, \psi)$ будет глобальной картой на топологическом пространстве $\mathfrak{B}$. Эта карта каждому базису ставит в соответствие матрицу перехода от базиса b_0 к нему. Это n^2 вещественных чисел, следовательно, размерность многообразия $\mathfrak{B}$ будет n^2.

Легко видеть, что глобальные карты, определяемые базисами b_0 и β_0, гладко связаны, а значит, определяют одну и ту же гладкую структуру. Итак, мы построили гладкую структуру на множестве базисов $\mathfrak{B}$.

Покажем, что относительно этой гладкой структуры действие группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ будет гладким. Фиксируем глобальную карту $(\mathfrak{B}, \psi)$, порожденную базисом b_0. Нам нужно убедиться, что функции, задающие отображение

$$\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$$

в картах $(GL(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}, id \times \psi)$ и $(\mathfrak{B}, \psi)$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем аргументам. Рассмотрим произвольный базис $b \in \mathfrak{B}$. Пусть в карте $(\mathfrak{B}, \psi)$ он имеет координаты $(x_j^i) = X$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису b. Для любого элемента $g \in GL(n,\mathbb{R})$ обозначим координаты базиса $\Phi(g, b) \equiv bg$ в карте $(\mathfrak{B}, \psi)$ через $(\tilde{x}_j^i) = \tilde{X}$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису bg. Тогда

$$\tilde{X} = \psi(bg) = C(b_0, bg) = C(b_0, b)g = Xg.$$

Переходя к элементам матриц, получим

$$\tilde{x}_j^i = x_k^i g_j^k.$$

В этих формулах переменными являются как x_k^i, так и g_j^k. Очевидно, что правые части формул имеют частные производные любого порядка, следовательно, отображение Φ гладко.

Итак, группа Ли $GL(n,\mathbb{R})$ гладко, свободно и транзитивно действует на n^2-мерном гладком многообразии $\mathfrak{B}$.

Пример 3.9. Пусть X – полное векторное поле без особенностей на гладком многообразии M (например, левоинвариантное векторное поле на группе Ли, либо векторное поле на любом компактном многообразии). Задание такого векторного поля равносильно заданию глобальной однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$ многообразия или глобального потока $\Phi_X(p,t) = F_t(p)$ (см. § 1.6.). При этом $\Phi_X : \mathbb{R} \times M \to M$ – гладкое отображение и $F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}$. Следовательно, глобальный поток задает гладкое действие (оно будет и левым и правым, так как группа Ли $\mathbb{R}$ коммутативна) группы $\mathbb{R}$ на многообразии M. Это действие не транзитивно (для многообразий размерности большей 1). Орбитами этого действия будут интегральные кривые векторного поля X.

Пусть на многообразии M действует группа Ли G. Это действие порождает на многообразии M отношение эквивалентности: будем говорить, что точки $x, y \in M$ эквивалентны, если существует элемент $g \in G$, такой что $y = \varphi_g(x)$. Очевидно, что элементы фактормножества по этому отношению эквивалентности являются орбитами действия группы Ли G. Полученное фактормножество обозначается $Orb(M)$. Если действие группы Ли гладкое, то на этом множестве вводится фактортопология. Однако, гладкой структуры на нем, вообще говоря, не индуцируется. Имеет место лишь следующее

Предложение 3.2 **.** *Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии M. Тогда проекция*

$$\pi : M \to Orb(M)$$

является непрерывным открытым отображением.

Доказательство. Напомним, что фактортопология определяется следующим образом. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, на котором введено отношение эквивалентности R. Тогда в фактормножестве $X/R = \{D_\alpha\}$ топология вводится следующим образом. Подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$ называется открытым тогда и только тогда, когда объединение $\cup D_\alpha$, $D_\alpha \in V$, рассматриваемых как подмножества в X, открыто в пространстве (X, τ).

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ открыт в X.

Сравнивая определение непрерывного отображения и определение фактортопологии, мы убеждаемся, что отображение π непрерывно.

Докажем, что отображение π открыто, то есть образом любого открытого множества является открытое множество. Пусть $U \subset M$ – открытое множество. Надо доказать, что $\pi(U)$ является открытым множеством в $Orb(M)$, то есть (по определению фактортопологии) $\pi^{-1}(\pi(U))$ открыто в M. Но

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{p \in U} Orb\, p = \cup_{g \in G} \varphi_g U.$$

Так как φ_g – диффеоморфизм (см. определение 3.2), а U – открытое множество, то $\varphi_g U$ открыто, следовательно, открыто в M и объединение таких множеств. □

§3.2. Фундаментальные векторные поля.

Пусть группа Ли G действует справа на гладком многообразии P. Обозначим соответствующее действие $\Phi : P \times G \to G$. Как обычно обозначим $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы Ли G.

Определим отображение

$$\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P),$$

где $\mathfrak{X}(P)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии P, следующим образом. Пусть $p \in P$ – произвольная фиксированная точка. Тогда действие группы Ли G индуцирует отображение

$$\sigma_p : G \to P$$

по формуле $\sigma_p(g) = \varphi_g(p) = \Phi(p, g) \equiv pg$ (см. определение 3.1). Напомним, что образом этого отображения являются орбиты действия Φ. Если $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $g(t)$ – соответствующая однопараметрическая подгруппа (см. § 2.5.), то определяется отображение

$$\Psi(p, t) = \sigma_p(exp\, tX) \equiv \Phi(exp\, tX, p). \tag{3.3}$$

Отображение Ψ является потоком на многообразии P, причем глобальным, так как однопараметрическая подгруппа определена для любого $t \in \mathbb{R}$. Этот поток порождает полное векторное поле $X^\flat$ по формуле (см. конец доказательства теоремы 1.8)

$$(X^\flat)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi(p, t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_p(exp\, tX). \tag{3.4}$$

Тогда положим $\lambda(X) = X^\flat$.

Так как отображение Ψ гладкое, то векторное поле $X^\flat$ гладко зависит от точки p, и следовательно, является гладким векторным полем. Кроме того,

$$(X^\flat)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_p(exp\, tX) = ((\sigma_p)_*)_e \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp\, tX = ((\sigma_p)_*)_e X_e.$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.15) и (2.13). Откуда получаем, что

$$(\lambda(X))_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e. \tag{3.5}$$

Предложение 3.3 **.** *Отображение λ является гомоморфизмом вещественных векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{X}(P)$.*

Доказательство. Это следует из того, что дифференциал гладкого отображения является $\mathbb{R}$-линейным отображением (см. предложение 1.1). □

Замечание 3.3**.** Также можно доказать, то отображение λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть

$$\lambda[X,Y] = [\lambda X, \lambda Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Итак, мы доказали, что гладкое действие группы Ли G на многообразии P индуцирует гомоморфизм алгебр Ли $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$. Образ этого гомоморфизма есть конечномерная подалгебра Ли $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{X}(P)$, элементы которой называются *фундаментальными векторными полями* на многообразии P. Алгебра Ли $\mathfrak{f}$ называется *алгеброй Ли фундаментальных векторных полей* на многообразии P.

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{f}$ порождает $C^\infty(P)$-модуль $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$, который является подмодулем модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладких векторных полей на многообразии P.

Замечание 3.4**.** Подробно тензорное произведение модулей вводилось в курсе Тензорная алгебра (глава 2). Напомним, что это такое и зачем это нужно. В алгебре Ли $\mathfrak{f}$ определена операция умножения только на вещественные числа. На функции из $C^\infty(P)$ умножать векторные поля из $\mathfrak{f}$ не можем, так как эта операция выведет нас за рамки $\mathfrak{f}$. Хотя в данном случае имеет смысл говорить о произведении функции и векторного поля из $\mathfrak{f}$, так как оно является векторным полем из $\mathfrak{X}(P)$, в котором такое произведение определено.

Чтобы каждый раз не выходить во все множество $\mathfrak{X}(P)$ при умножении фундаментального векторного поля на гладкую функцию, мы поступим следующим образом. Рассмотрим множество конечных формальных сумм вида

$$X = f_1 X_1 + \ldots + f_N X_N,$$

где N – не фиксированное натуральное число, $f_1, \ldots, f_N \in C^\infty$, $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{f}$. Это множество обозначается $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Структура $C^\infty(P)$-модуля в этом множестве вводится с помощью операции сложения

$$X + Y = f_1 X_1 + \ldots + f_N X_N + \tilde{f}_1 \tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{f}_{\tilde{N}} \tilde{X}_{\tilde{N}},$$

а операция умножения на гладкую функцию $f \in C^\infty(P)$ определяется так

$$fX = (ff_1)X_1 + \ldots + (ff_N)X_N.$$

Чтобы выполнялись аксиомы модуля, нам нужны будут следующие договоренности:

1. Порядок слагаемых в формальной сумме не важен;
2. $f_1 X + f_2 X = (f_1 + f_2)X,\ f_1, f_2 \in C^\infty(P),\ X \in \mathfrak{f}$;
3. $fX_1 + fX_2 = f(X_1 + X_2),\ f \in C^\infty(P),\ X_1, X_2 \in \mathfrak{f}$.

Итак, мы построили $C^\infty(P)$-подмодуль $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ в модуле $\mathfrak{X}(P)$. На его элементы мы можем при необходимости смотреть не только как на формальные суммы, но и "вычислять"эту формальную сумму, входящие туда векторные поля как элементы из $\mathfrak{X}(P)$.

Теорема 3.2**.** *Если группа Ли G действует на многообразии P эффективно, то гомоморфизм λ является мономорфизмом, в частности, алгебра Ли $\mathfrak{f}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Более того, если G действует свободно на P, то ненулевые фундаментальные векторные поля не имеют особых точек, то есть нигде не обращаются в нуль.*

Доказательство. 1) Пусть G действует эффективно на многообразии P. Надо доказать, что $ker\,\lambda = \{0\}$. Пусть $X \in ker\lambda$, то есть $\lambda(X) = 0$. Тогда соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем λX, тривиальна, то есть $F_t = id$ для любого вещественного t. Тогда $F_t(p) = \varphi_{exp\,tX} = id$. А так как действие эффективно, то $exp\,tX = e$ для любого вещественного t, то есть

$$X_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp\,tX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e = 0,$$

то есть $X_e = 0$, то есть $X = \beta^{-1}(X_e) = 0$. Здесь мы использовали канонический изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$. Итак, мы показали, что $ker\lambda = \{0\}$, следовательно, гомоморфизм λ является мономорфизмом.

2) Пусть группа G действует на многообразии P свободно. По определению имеем, что из существования точки $p \in P$, такой что $\varphi_g(p) = p$, следует $g = e$. Пусть точка $p \in P$, такая что $X_p^\flat = 0$. Отсюда следует, что p является неподвижной точкой однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$, то есть

$$F_t(p) = \varphi_{exp\,tX}(p) = p.$$

Так как действие свободно, $exp\,tX = e$. Откуда, как и выше, получаем $X = 0$. □

Теорема 3.3. *Пусть группа Ли G гладко действует справа на многообразии P. Тогда для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \stackrel{Ad(g^{-1})}{\longrightarrow} & \mathfrak{g} \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\lambda \\ \mathfrak{f} & \stackrel{(\varphi_g)_*}{\longrightarrow} & \mathfrak{f} \end{array}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $X^\flat = \lambda X \in \mathfrak{f}$ – соответствующее фундаментальное векторное поле на многообразии P. Оно порождает глобальный поток $\Psi : P \times \mathbb{R} \to P$ по формуле $\Psi(p,t) = \varphi_{exp\,tX}(p)$. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Ему отвечает диффеоморфизм $\varphi_g : P \to P$. Из теоремы 1.10 следует, что увлеченному им векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток

$$\Psi_{(\varphi_g)_* X^\flat}(p,t) = \varphi_g \circ \Psi_{X^\flat}(\varphi_g^{-1}(p),t) = \varphi_g \circ \varphi_{exp\,tX} \circ \varphi_g^{-1}(p) = \varphi_{g^{-1}(exp\,tX)g}(p) = \varphi_{A_{g^{-1}}(exp\,tX)}(p).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.3), определением 3.1 отображения σ_p, определением правого действия (§ 3.1.) и определением внутреннего автоморфизма (пример 3.7).

Итак, векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток, порожденный однопараметрической подгруппой $A_{g^{-1}}(exp\,tX)$. В частности, векторное поле $(\varphi_g)_* X^\flat$ будет фундаментальным, то есть $(\varphi_g)_* X^\flat = \lambda(Y)$, где Y – генератор этой подгруппы, то есть

$$Y_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A_{g^{-1}}(exp\,tX) = ((A_{g^{-1}})_*)_e \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp\,tX = ((A_{g^{-1}})_*)_e X_e = ((A_{g^{-1}})_*)_e \beta(X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.13), формулой (1.15) и примером 3.7.

Применим отображение β^{-1} к крайним частям последней цепочки равенств.

$$Y = Ad(g^{-1})(X).$$

Здесь мы также воспользовались определением отображения $Ad(g)$ из примера 3.7. Следовательно,

$$(\varphi_g)_* \lambda(X) = (\varphi_g)_* X^\flat = \lambda Y = \lambda(Ad(g^{-1})X),$$

где $X \in \mathfrak{g}$, то есть

$$(\varphi_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1}). \tag{3.6}$$

□

§3.3. Главные расслоения.

Главным расслоением называется четверка (P, M, G, π), где P – гладкое многообразие, G – группа Ли, гладко и свободно действующая на многообразии P, M – пространство орбит $Orb_G P$, являющееся гладким многообразием, $\pi : P \to M$ – гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in P$ ее орбиту. При этом должно выполняться так называемое *свойство локальной тривиальности* главного расслоения, а именно, многообразие M должно допускать открытое покрытие $\mathscr{U}$, которое называется *покрытием локальной тривиальности*, такое что для любого элемента U этого покрытия существует гладкое отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \to G,$$

удовлетворяющее двум свойствам

(F1) $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in P$, $g \in G$;

(F2) отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G,$$

заданное формулой

$$\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$$

является диффеоморфизмом.

Многообразие P называется *тотальным пространством расслоения*, группа Ли G называется *структурной группой*, многообразие M называется *базой расслоения*, отображение π называется *естественной проекцией*, отображение ψ_U называется *диффеоморфизмом локальной тривиальности*, элементы из покрытия локальной тривиальности называются *областями локальной тривиальности*.

Полный прообраз точки $m \in M$ относительно естественной проекции π называется *слоем* над точкой m.

Пример 3.10. Рассмотрим четверку (P, M, G, p_1), где M – гладкое многообразие, G – группа Ли, $P = M \times G$ – декартово произведение гладких многообразий, $p_1 : M \times G \to M$ – проекция на первый сомножитель, задаваемая формулой $p_1(m, g) = m$.

Группа Ли G действует на многообразии P справа по формуле

$$(m, g)h = (m, gh),\ (m, g) \in P, h \in G.$$

Покажите самостоятельно, что это гладкое, свободное, правое действие.

Орбиты этого действия есть классы вида

$$(m, g)G = \cup_{h \in G}(m, g)h = \cup_{h \in G}(m, gh) = \cup_{g \in G}(m, g) \equiv (m, G).$$

Этот класс мы можем отождествить с точкой $m \in M$, то есть $M = Orb_G P$.

В силу этого отождествления естественная проекция

$$\pi : P \to M,$$

задаваемая формулой $\pi(p) = Orb_G p = (m, G)$ канонически отождествляется с отображением p_1.

В качестве покрытия локальной тривиальности выберем покрытие, состоящее из единственного элемента $\mathscr{U} = \{M\}$. При этом положим

$$F_U(p) = F_U((m, g)) = g \equiv p_2(p),$$

то есть отображение F_U является проекцией на второй сомножитель. Оно, очевидно, гладкое. Проверим выполнение свойств $(F1)$ и $(F2)$:

$$F_U(ph) = F_U((m, g)h) = p_2((m, gh)) = gh = F_U(p)h.$$

Таким образом, $(F1)$ выполняется. Далее,

$$\psi_U(p) = \psi_U((m, g)) = (\pi(p), F_U(p)) = (p_1(p), p_2(p)) = (m, g) = p,$$

то есть отображение ψ_U является тождественным, а следовательно, является диффеоморфизмом.

Итак, мы доказали, что четверка (P, M, p_1, G) является главным расслоением. Оно называется *тривиальным главным расслоением.*

Определение 3.3. Пусть даны два главных расслоения $\mathscr{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathscr{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$. *Гомоморфизмом* расслоения $\mathscr{B}_1$ в расслоение $\mathscr{B}_2$ называется пара (f, ρ), где

$$f : P_1 \to P_2$$

гладкое отображение,

$$\rho : G_1 \to G_2$$

гомоморфизм групп Ли. При этом должны выполняться условия

1. отображение f послойно, то есть $\pi_1 = \pi_2 \circ f$;
2. отображение f согласовано с действиями структурных групп, то есть для любой точки $p \in P_1$ любого элемента $g \in G_1$ имеем $f(pg) = f(p)\rho(g)$.

В частности, если (P_1, f) является подмногообразием в P_2, а (G_1, ρ) – подгруппой группы Ли G_2, то расслоение $\mathscr{B}_1$ называется подрасслоением расслоения $\mathscr{B}_2$.

Если f – диффеоморфизм, ρ – изоморфизм групп Ли, то пара (f, ρ) называется *изоморфизмом* или *эквивалентностью* главных расслоений $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$.

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Гладкое отображение

$$s : M \to P$$

называется *(гладким) сечением* расслоения $\mathscr{B}$, если $\pi \circ s = id$.

Имеет место теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 3.4. *Главное расслоение допускает сечение тогда и только тогда, когда оно эквивалентно тривиальному.*

Замечание 3.5. Пусть дано главное расслоение (P, M, π, G). Нетрудно показать, что для любой области U локальной тривиальности четверка $(\pi^{-1}(U), U, \pi|_{\pi^{-1}(U)}, G)$ будет главным расслоением. Из свойств $(F1)$ и $(F2)$ следует, что это главное расслоение эквивалентно тривиальному расслоению $(U \times G, U, p_1, G)$ (изоморфизмом будет пара (ψ_U, id). В частности, получаем, что любое главное расслоение допускает локальные сечения, а именно, сечения над любой областью локальной тривиальности.

§3.4. Структурные уравнения главного расслоения.

4.1. Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *иммерсией*, если для любой точки $p \in M$ дифференциал этого отображения $(\varphi_*)_p$ инъективен, то есть $ker(\varphi_*)_p = \{0\}$.

Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *субмерсией*, если для любой точки $p \in M$ дифференциал этого отображения $(\varphi_*)_p$ сюръективен, то есть ранг отображения $(\varphi_*)_p$ равен размерности многообразия N.

Пример 3.11. Можно доказать, что если (P, M, π, G) – главное расслоение, то отображение π является субмерсией.

Пусть (P, M, π, G) – главное расслоение. Обозначим $\mathfrak{X}_\pi(P)$ векторное пространство векторных полей на P, π-связанных с векторными полями на M (см. § 1.3.). Такие векторные поля называются *проектирумыми.*

$$\mathfrak{X}_\pi(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) | \exists Y \in \mathfrak{X}(M), \pi_* X = Y\}.$$

Легко видеть, что множество проектируемых векторных полей несет структуру вещественного векторного пространства. Тогда возникает $\mathbb{R}$-линейное отображение $\pi_* : \mathfrak{X}_\pi(P) \to \mathfrak{X}(M)$. Обозначим его ядро через $\tilde{\mathscr{V}}$. Тогда на многообразии P определено распределение

$$\mathscr{V} = C^\infty(P) \otimes \tilde{\mathscr{V}}$$

(см. замечание 3.4).

Распределение $\mathscr{V}$ называется *вертикальным* распределением на многообразии P, а векторные поля, принадлежащие ему, называются *вертикальными векторными полями.*

Так как естественная проекция главного расслоения является субмерсией, получим

$$dim\, \mathscr{V}_p = dim\, \tilde{\mathscr{V}_p} = dim\, ker\, \pi_* = dim\, T_pP - rg(\pi_*)_p = dim\, P - dim\, M.$$

Итак, вертикальное распределение состоит из $dim\, P - dim\, M$-мерных площадок $\mathscr{V}_p$, которые являются касательными пространствами к слою в точке p. Чтобы доказать это, посмотрим на вертикальное распределение с иной точки зрения.

Напомним, что группа G действует справа на многообразии P и это действие порождает гомоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Образ этого гомоморфизма мы обозначили $\mathfrak{f}$ и назвали вещественным пространством фундаментальных векторных полей на P. Так как группа G действует эффективно (и более того, свободно), $dim\, \mathfrak{f} = dim\, \mathfrak{g}$. Так как G действует свободно, ненулевые векторные поля в $\mathfrak{f}$ не имеют особенностей (см. теорему 3.2), то есть не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия P. В частности, если $(X_1, \ldots, X_r)$ – базис $\mathfrak{g}$, то $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ – базис $\mathfrak{f}$, так как гомоморфизм λ является изоморфизмом.

Более того, так как векторные поля $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ не имеют особенностей, они образуют базис распределения $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Действительно, пусть

$$Y = \sum_{i=1}^{N} f^i Y_i \in \mathscr{F} \tag{3.7}$$

произвольный элемент (см. замечание 3.4). Если разложить каждый элемент Y_i по базису $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ и подставить в (3.7), то получим разложение для Y по базису $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$.

Оказывается, что распределения $\mathscr{V}$ и $\mathscr{F}$ совпадают (этот факт мы также примем без доказательства).

В частности, из этого следует, что $\mathscr{V} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ и

$$\mathscr{V}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathfrak{f}_p = \mathfrak{f}_p = T_p(Orb_G p).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\lambda X)_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e \in T_p(Orb_G p)$.

Предложение 3.4 **.** *Вертикальное распределение инволютивно, а значит, вполне интегрируемо. Его интегральные многообразия максимальной размерности являются подмногообразиями вида* (G, σ_p).

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathscr{V}$. Тогда по определению вертикального распределения имеем $\pi_* X = 0$, $\pi_* Y = 0$. По свойству отображения увлечения имеем

$$\pi_*[X, Y] = [\pi_* X, \pi_* Y] = 0,$$

то есть вертикальное распределение инволютивно. По теореме Фробениуса оно вполне интегрируемо. По определению интегрального многообразия (см. § 1.5.) пары (G, σ_p) будут интегральными многообразиями максимальной размерности этого распределения, так как $\mathscr{F}_p$ – касательное пространство к $\sigma_p(G) = Orb_G(p)$ в точке p и $\mathscr{F}_p = \mathscr{V}_p$. □

Пример 3.12. Рассмотрим круговую цилиндрическую поверхность. Это главное расслоение, где P – цилиндрическая поверхность, M – окружность, которая получается при пересечении P с плоскостью, перпендикулярной образующим, π ставит в соответствие каждой точке $p \in P$ точку пересечения окружности M и прямолинейной образующей, проходящей через точку p. Группа Ли G – это $\mathbb{R}$ с операцией сложения. Легко видеть, что это тривиальное главное расслоение.

Вертикальными векторными полями на цилиндрической поверхности будут поля, такие что их вектора в каждой точке параллельны прямолинейной образующей, проходящей через эту точку.

4.2. Прежде чем приступить к выводу структурных уравнений, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.2. *Пусть D – r-мерное распределение на гладком n-мерном многообразии M. Тогда любой (локальный) базис распределения D можно дополнить до локального базиса модуля $\mathfrak{X}(M)$.*

Доказательство. Имеем, для любой точки $p \in M$ существует окрестность U_p и набор векторных полей $(E_1, \ldots, E_r) \subset \mathfrak{X}(U_p)$, который служит базисом модуля $D|_{U_p}$. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть в некоторой окрестности U этой точки задан базис $(E_1, \ldots, E_r)$ модуля $D|_U$. Тогда $((E_1)_p, \ldots, (E_r)_p)$ – линейно независимая система векторов (определение локального базиса распределения § 1.5.). Дополним ее векторами $\xi_{r+1}, \ldots, \xi^n$ до базиса пространства $T_p(M)$. Тогда существуют векторные поля $(E_{r+1}, \ldots, E_n) \subset \mathfrak{X}(U)$, такие что их значения в точке p равны соответственно векторам $\xi_{r+1}, \ldots, \xi^n$ (см. курс Анализ на многообразиях). По непрерывности эти векторные поля будут линейно независимы в каждой точке окрестности U (в случае необходимости мы можем сузить эту окрестность U). Тогда система векторных полей $(E_1, \ldots, E_n)$ будет искомым локальным базисом модуля $\mathfrak{X}(M)$. $\square$

Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathscr{V}$ – его вертикальное распределение. Договоримся, что индексы $a, b, c, d, \ldots$ пробегают значения от 1 до $r = dim\, G$; индексы $i, j, k, l, \ldots$ пробегают значения от $r + 1$ до $r + n$, где $n = dim\, M$; индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ пробегают значения от 1 до $r + n = dim\, P$.

Фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Пусть $(\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$ – дуальный базис. Уравнения Картана структурной группы G имеют вид (см. (2.6)

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c.$$

Так как $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$ – изоморфизм, векторные поля $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ образуют базис векторного пространства $\mathfrak{f}$ фундаментальных векторных полей, а также распределения $\mathscr{F} = \mathscr{V}$. Согласно лемме 3.2 мы можем дополнить этот базис до локального базиса модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладкими векторными полями $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, то есть для любой точки $p \in P$ существует окрестность U и набор гладких векторных полей $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, такой что

$$(E_1^\flat|_U \equiv Y_1, \ldots, E_r^\flat|_U \equiv Y_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n})$$

базис модуля $\mathfrak{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис. Тогда формы $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$ (где α и β пробегают всевозможные значения) образуют локальный базис модуля тензорных полей типа (2,0). В частности, 2-формы $d\omega^\alpha$ (как тензорные поля типа (2,0)) раскладываются по этому базису, а именно,

$$d\omega^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \otimes \omega^\gamma, \tag{3.8}$$

где $R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma)$ – компоненты 2-формы $d\omega^\alpha$ в данном базисе. Здесь мы воспользовались тем, что компоненты тензора типа (2,0) относительно базиса (Y_α) совпадают с ее координатами относительно базиса $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$.

Применим оператор альтернирования Alt к обеим частям равенства (3.8). Так как форма $d\omega^\alpha$ является кососимметрической, $Alt(d\omega^\alpha) = d\omega^\alpha$. В силу линейности Alt функции $R^\alpha_{\beta\gamma}$ можно вынести за знак альтернации и воспользоваться определением операции внешнего умножения (**??**). Получим

$$d\omega^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma} Alt(\omega^\beta \otimes \omega^\gamma) = R^\alpha_{\beta\gamma} \frac{1!1!}{2!} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Итак, мы получаем

$$d\omega^\alpha = \tfrac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma; \quad R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma). \tag{3.9}$$

Докажем, что формы $\{\omega^i\}$ образуют систему Пфаффа вертикального распределения $\mathscr{V}$ (см. § 1.5.), то есть для любого векторного поля из вертикального распределения значение формы ω^i на нем равно нулю. Действительно, разложим векторное поле X по базису (Y_α): $X = X^\alpha Y_\alpha = X^a E_a^\flat + X^i Y_i$. Тогда

$$X \in \mathscr{V} \quad \Leftrightarrow \quad X = X^a E_a^\flat \quad \Leftrightarrow X^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^i(X) = 0.$$

Так как вертикальное распределение вполне интегрируемо (предложение 3.4), по предложению ?? существуют локально определенные 1-формы ω^i_j, такие что

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k. \tag{3.10}$$

С другой стороны, выпишем из уравнений (3.9) те, для которых индекс α меняется от $r+1$ до $r+n$, то есть $\alpha = i$:

$$d\omega^i = \frac{1}{2}R^i_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^i_{b\gamma}\omega^b \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2}R^i_{j\gamma}\omega^j \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{jc}\omega^j \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k. \tag{3.11}$$

Здесь мы учли следующее: индекс суммирования β пробегает сначала значения от 1 до r. Эта сумма коротко обозначается с помощью индекса b, а затем индекс β пробегает значения от $r+1$ до $r+n$. Эту группу слагаемых мы записали с помощью индекса j. Другими словами, сумму по индексу β мы разбили на две скобки. В одной индекс суммирования обозначили b, а в другой – j. Аналогично мы поступили и с индексом γ в каждом из получившихся слагаемых.

Рассмотрим пару слагаемых и переобозначим индексы суммирования $c \to b$ и $j \to k$ во втором слагаемом. Мы это можем сделать, так как эти пары индексов пробегают одно и то же множество значений:

$$\frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{jc}\omega^j \wedge \omega^c = \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{kb}\omega^k \wedge \omega^b = \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k = R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью коэффициентов $R^\alpha_{\beta\gamma}$ по нижним индексам:

$$R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma) = -d\omega^\alpha(Y_\gamma, Y_\beta) = -R^\alpha_{\gamma\beta} \tag{3.12}$$

и свойством антикоммутативности внешнего произведения 1-форм (??). С учетом приведенных подобных слагаемых, (3.11) примет вид

$$d\omega^i = \frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + (R^i_{bk} + \frac{1}{2}R^i_{jk})\omega^k$$

Сравнивая полученное равенство с (3.10), получим

$$\frac{1}{2}R^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c = 0.$$

Заметим, что в левой части этого равенства 2-формы $\omega^b \wedge \omega^c$ не являются линейно независимыми, так как 1-формы в них не упорядочены по номерам. Чтобы упорядочить 1-формы, воспользуемся формулой, полученной в курсе Тензорная алгебра $t_{ij}\omega^i \wedge \omega^j = 2!t_{[ij]}\omega^i \wedge \omega^j (i<j)$:

$$2!\frac{1}{2}R^i_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c (b<c) = 0.$$

Теперь в левой части равенства стоит линейная комбинация линейно независимых базисных 2-форм. Пользуемся определением линейной независимости и получаем $R^i_{[bc]} = 0$. В силу кососимметричности функций R^i_{bc} (см. формулу (3.12)) получим

$$R^i_{[bc]} = \frac{1}{2}(R^i_{bc} - R^i_{cb}) = \frac{1}{2}(R^i_{bc} + R^i_{bc}) = R^i_{bc}.$$

Итак, мы получили, что $R^i_{bc} = 0$, то есть

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k \equiv (R^i_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j) \wedge \omega^k.$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *первой группой структурных уравнений главного расслоения.*

Рассмотрим оставшиеся уравнения из (3.9) (индекс α пробегает значения от 1 до r, следовательно может быть обозначен буквой a):

$$d\omega^a = \frac{1}{2}R^a_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + (R^a_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j) \wedge \omega^k$$

Обозначим $R^a_{bk}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j = \omega^a_k$. Тогда полученное равенство примет вид

$$d\omega^a = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k. \tag{3.13}$$

В этих уравнениях мы можем уточнить значения коэффициентов R^a_{bc}. Оказывается, что это с точностью до знака структурные константы группы Ли G, то есть

$$R^a_{bc} = -C^a_{bc}. \tag{3.14}$$

Напомним, что мы ввели обозначения: (E_a) – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, (σ^a) – дуальный базис, $(E^\flat_a \equiv Y_a, Y_i)$ – локальный базис $\mathfrak{X}(P)$, (ω^a, ω^i) – дуальный базис для базиса $(E^\flat_a \equiv Y_a, Y_i)$.

Рассмотрим отображение антиувлечения для ковекторов (см. формулу (1.17))

$$\lambda^* : \mathfrak{f}^* \to \mathfrak{g}^*.$$

Здесь мы воспользовались тем, что левоинвариантные векторные поля на многообразии P образуют векторное пространство $\mathfrak{g}$, а значит, дуальное к нему векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ будет векторным пространством ковекторов (оно состоит из форм Маурера-Картана). Напомним, что это отображение задается формулой

$$(\lambda^*\omega)(X) = \omega(\lambda X),\ \omega \in \mathfrak{f}^*,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Докажем, что $\lambda^*(\omega^a) = \sigma^a$.

Действительно,

$$\lambda^*(\omega^a)(E_b) = \omega^a(\lambda E_b) = \omega^a(E^\flat_b) = \delta^a_b,$$

то есть формы $\lambda^*(\omega^a)$ образуют дуальный базис для (E_a), следовательно, совпадают с формами σ^a.

С учетом этого получим

$$\begin{aligned} R^a_{bc} = d\omega^a(E^\flat_b, E^\flat_c) = E^\flat_b(\omega^a(E^\flat_c)) - E^\flat_c(\omega^a(E^\flat_b)) - \omega^a([E^\flat_b, E^\flat_c]) = -\omega^a([E^\flat_b, E^\flat_c]) = -\omega^a([\lambda E_b, \lambda E_c]) = \\ = -\omega^a(\lambda[E_b, E_c]) = -\lambda^*\omega^a([E_b, E_c]) = -\sigma^a(C^h_{bc}E_h) = -C^h_{bc}\delta^a_h = -C^a_{bc}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.3); тем, что $\mathfrak{g}$ является векторным пространством, а значит, действие ковектора из $\mathfrak{g}^*$ на векторе из $\mathfrak{g}$ – это вещественное число. Действие векторного поля на этом числе есть нуль. Далее мы использовали замечание 3.3, структурные уравнения группы Ли (2.3.

Тогда с учетом (3.14) из (3.13 получим

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *второй группой структурных уравнений главного расслоения*. Первая и вторая группы структурных уравнений называются *полной группой структурных уравнений главного расслоения*:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k \end{array} \right. \tag{3.15}$$

§3.5. Связности в главных расслоениях.

5.1. Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathscr{V}$ – его вертикальное распределение. Группа Ли G действует на P справа. Введем еще одно обозначение правого действия

$$\Phi(p, g) = \varphi_g(p) = pg = R_g(p).$$

Правое действие $R_g : P \to P$ двигает точки из P. К тому же это диффеоморфизм (см. определение действия группы Ли на многообразии). Тогда определено отображение увлечения векторных полей

$$(R_g)_* : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P).$$

Возникает вопрос: что будет при этом диффеоморфизме с вертикальными векторными полями? В какие векторные поля они будут переходить?

Лемма 3.3. *Вертикальное распределение $\mathscr{V}$ инвариантно относительно действия структурной группы, то есть $(R_g)_*\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$ для любого $g \in G$. Кроме того, фундаментальные векторные поля переходят в фундаментальные векторные поля при действии структурной группы.*

Доказательство. 1) Докажем сначала, что фундаментальные векторные поля под действием структурной группы переходят в фундаментальные векторные поля.

Пусть $X^\flat$ – произвольное фундаментальное векторное поле. Тогда получим

$$(R_g)_*X^\flat = (R_g)_*(\lambda X) = \lambda(Ad(g^{-1})X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.6). Так как $Ad(g^{-1})X \in \mathfrak{g}$, векторное поле $(R_g)_* X^\flat = \lambda(Ad(g^{-1})X)$ является фундаментальным

2) Рассмотрим произвольное вертикальное векторное поле $X \in \mathscr{V}$. Фиксируем в $\mathscr{V}$ базис $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$, состоящий из фундаментальных векторных полей. Тогда векторное поле X можно разложить по этому базису

$$X = f^a E_a^\flat.$$

Нам нужно вычислить $(R_g)_* X = (R_g)_*(f^a E_a^\flat)$. Для этого нужно научиться выносить функцию за знак отображения увлечения. Фиксируем произвольную точку $p \in P$ и рассмотрим значение векторного поля $(R_g)_*(fX)$ в этой точке, где f – гладкая функция, $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Воспользуемся теоремой 1.2:

Заметим, что

$$((R_g)_*(fX))_p = ((R_g)_*)_{R_{g^{-1}}(p)}(fX)_{R_{g^{-1}}(p)} = f(R_{g^{-1}}(p))((R_g)_*)_{R_{g^{-1}}(p)} X_{R_{g^{-1}}(p)} = f \circ R_{g^{-1}}(p)((R_g)_* X)_p =$$
$$= ((f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* X)(p).$$

Итак, мы получили вспомогательную формулу "однородности"отображения увлечения

$$(R_g)_*(fX) = (f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* X \tag{3.16}$$

Вернемся к доказательству инвариантности вертикального распределения, используя формулу (3.16).

$$(R_g)_* X = (R_g)_*(f^a E_a^\flat) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* E_a^\flat.$$

Заметим, что $(f^a \circ R_{g^{-1}})$ – гладкие функции на P, $(R_g)_* E_a^\flat$ – фундаментальные векторные поля по доказанному в первом пункте. Таким образом, векторное поле $(R_g)_* X$ является линейной комбинацией фундаментальных векторных полей с коэффициентами – гладкими функциями, то есть является вертикальным векторным полем. $\square$

5.2. Отображение $\Pi : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ называется *проектором*, если

(1) Π – $C^\infty(P)$-линейное отображение

(2) $\Pi^2 = \Pi$.

Напомним также эквивалентное определение проектора: первое условие остается таким же, а второе меняется на следующее: для любого векторного поля $X \in Im\,\Pi$ (то есть векторного поля из образа отображения Π) имеем $\Pi\,X = X$.

Если на модуле $\mathfrak{X}(P)$ задан проектор Π, то модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{X}(P) = ker\,\Pi \oplus Im\,\Pi$. Верно и обратное, если модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму своих подмодулей $\mathfrak{X}(P) = A \oplus B$, то однозначно определяется проектор Π, такой что $Im\,\Pi = A$, $ker\,\Pi = B$.

Отображение $Q = id - \Pi$ также является проектором и называется *дополнительным проектором.* Общую теорию проекторов можно посмотреть в курсе Тензорная алгебра (файл tenz alg.pdf).

Проектор $C^\infty(P)$-модуля $\mathfrak{X}(P)$ на подмодуль $\mathscr{V}$ называется *вертикальным проектором.*

Говорят, что $C^\infty(P)$-линейное отображение F модуля $\mathfrak{X}(P)$ *инвариантен* относительно действия структурной группы, если для любого элемента $g \in G$ имеем

$$(\varphi_g)_* \circ F = F \circ (\varphi_g)_*.$$

Здесь $(\varphi_g)_*$ – отображение увлечения векторных полей. Оно определено, так как φ_g является диффеоморфизмом (см. § 1.3.).

Замечание 3.6**.** Так как группа G действует на P справа, в дальнейшем будем обозначать $\varphi_g = R_g$. Таким образом,

$$R_g(p) = \varphi_g(p) = pg = \Phi(p, g).$$

Связностью в главном расслоении $\mathscr{B}$ называется вертикальный проектор Π, инвариантный относительно действия структурной группы. Другими словами, $C^\infty(P)$-линейное отображение $\Pi : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ называется связностью, если выполняются следующие условия:

1. $\Pi^2 = \Pi$;
2. $Im\,\Pi = \mathscr{V}$;
3. для любого $g \in G$ имеем $(R_g)_* \circ \Pi = \Pi \circ (R_g)_*$.

Пусть $\Pi_{\mathscr{V}}$ – вертикальный проектор (не обязательно связность, то есть он не обязательно инвариантен относительно действия структурной группы). Обозначим его ядро $ker\,\Pi_{\mathscr{V}} = \mathscr{H}$ и дополнительный проектор – через $\Pi_{\mathscr{H}}$. Множество $\mathscr{H}$ является распределением и называется *псевдогоризонтальным распределением*, а проектор $\Pi_{\mathscr{H}}$ называется *псевдогоризонтальным проектором*.

В частности, если $\Pi_{\mathscr{V}}$ является связностью (то есть является не только вертикальным проектором, но еще и инвариантна относительно действия структурной группы G), то распределение $\mathscr{H}$ называется *горизонтальным распределением*, а проектор $\Pi_{\mathscr{H}}$ называется *горизонтальным проектором*.

Лемма 3.4. *Если $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, то $\Pi_{\mathscr{H}}$ инвариантен относительно действия структурной группы Ли G, то есть $(R_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{H}} = \Pi_{\mathscr{H}} \circ (R_g)_*$.*

Доказательство. Так как $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, имеем $(R_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{V}} = \Pi_{\mathscr{V}} \circ (R_g)_*$. Тогда

$$(R_g)_* \circ \Pi_{\mathscr{H}} = (R_g)_* \circ (id - \Pi_{\mathscr{V}}) = (id - \Pi_{\mathscr{V}}) \circ (R_g)_*.$$

□

Следствие 3.1. Если $\Pi_{\mathscr{V}}$ – связность, то распределение $\mathscr{H}$ инвариантно относительно действия группы Ли G, то есть $(R_g)_*\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$.

Доказательство. Имеем для любого векторного поля $X \in \mathscr{H}$

$$(R_g)_*X = (R_g)_*(\Pi_{\mathscr{H}}X) = \Pi_{\mathscr{H}}((R_g)_*X),$$

то есть векторное поле $(R_g)_*X \in Im\,\Pi_{\mathscr{H}} = \mathscr{H}$. □

Вывод: если на главном расслоении $\mathscr{B}$ задана связность, то на многообразии P возникает распределение $\mathscr{H}$, обладающее следующими свойствами:

(1) оно является дополнительным к вертикальному распределению $\mathscr{V}$;

(2) оно инвариантно относительно действия структурной группы G.

Верно и обратное.

Лемма 3.5. *Пусть на тотальном пространстве главного расслоения $\mathscr{B}$ задано распределение $\mathscr{H}$, обладающее свойствами* (1) *и* (2)*. Тогда на $\mathscr{B}$ однозначно определяется связность.*

Доказательство. По условию модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$. Тогда однозначно определен проектор $\Pi_{\mathscr{V}}$, для которого образ совпадает с $\mathscr{V}$. Нам осталось показать, что проектор $\Pi_{\mathscr{V}}$ инвариантен относительно действия структурной группы.

Пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольный элемент. Тогда он однозначно представим в виде $X = X_{\mathscr{V}} + X_{\mathscr{H}}$, где $X_{\mathscr{V}} \in \mathscr{V}$, $X_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$. По условию для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_*X_{\mathscr{H}}$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\Pi_{\mathscr{V}} \circ (R_g)_*X = \Pi_{\mathscr{V}}((R_g)_*(X_{\mathscr{V}} + X_{\mathscr{H}})) = \Pi_{\mathscr{V}}((R_g)_*X_{\mathscr{V}}) = (R_g)_*X_{\mathscr{V}} = (R_g)_*(\Pi_{\mathscr{V}}X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение увлечения и проектор являются линейными отображениями; $\Pi_{\mathscr{V}}((R_g)_*X) = 0$, так как образ проектора $\Pi_{\mathscr{V}}$ совпадает с ядром дополнительного проектора $\Pi_{\mathscr{H}}$. Далее мы использовали лемму 3.3 и альтернативное условие из определения проектора. Итак, вертикальный проектор инвариантен относительно действия структурной группы, следовательно, является связностью. □

Объединяя результаты, мы получаем

Теорема 3.5. *Задание связности в главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию распределения $\mathscr{H} \subset \mathfrak{X}(P)$, такого что*

1. *$\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$;*

2. *для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_*\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$.* □

Пусть $\mathscr{B}$ – главное расслоение. Тогда G действует на P свободно и определяет изоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, который выдает фундаментальные векторные поля. Мы научились умножать фундаментальные векторные поля на функции из $C^\infty(P)$, рассматривая формальные суммы $f^1 X_1^\flat + \ldots + f^N X_N^\flat$. Это расширило векторное пространство $\mathfrak{f}$ до $C^\infty(P)$-модуля $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Но не слишком сильно, сохранив глобальный базис (то есть конечномерность). Другими словами, любой базис векторного пространства $\mathfrak{f}$ является базисом $C^\infty(P)$-модуля $\mathscr{F}$, но при этом мы умножаем не на вещественные числа, а на функции.

Проведем аналогичную процедуру с присоединенной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (это r-мерное векторное пространство) и получим $C^\infty(P)$-модуль $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Он состоит из формальных сумм вида

$$f^1X_1+\ldots+f^NX_N,$$

где $f^1,\ldots,f^N\in C^\infty(P)$, $X_1,\ldots,X_N\in\mathfrak{g}$ – произвольные левоинвариантные векторные поля. В отличии от $\mathscr{F}$, здесь мы никак не сможем умножить функцию f на левоинвариантное векторное поле X, так как они определены на разных многообразиях. Этот модуль также сохраняет глобальный базис, то есть базис векторного пространства $\mathfrak{g}$ становится базисом модуля $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$, но коэффициенты – функции. Более подробно: рассмотрим произвольный элемент из $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ – это формальная сумма вида $f^1X_1+\ldots+f^NX_N$. Разложим каждое левоинвариантное векторное поле X_α, $\alpha=1,\ldots,N$ по базису $(E_1,\ldots,E_r)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. Коэффициенты разложения – вещественные числа. Подставим полученные разложения в формальную сумму

$$f^1X_1+\ldots+f^NX_N=f^1(g_1^aE_a)+\ldots+f^N(g_N^aE_a)=(f^1g_1^a+\ldots+f^Ng_N^a)E_a.$$

В крайне правой части стоит формальная сумма (суммирование по a). В скобках стоит обычная сумма произведений функций на вещественные числа – это гладкая функция на многообразии P. Таким образом, формальную сумму вида $f^1X_1+\ldots+f^NX_N$ мы смогли привести к виду формальной суммы $(f^1g_1^a+\ldots+f^Ng_N^a)E_a$, где в качестве векторов стоят левоинвариантные векторные поля E_a. Будем говорить в этом случае, что мы разложили элемент $f^1X_1+\ldots+f^NX_N\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ по базису (E_a).

Научим изоморфизм λ работать с модулями $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ и $\mathscr{F}$. Это будет новое отображение

$$\Lambda: C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}\to C^\infty(P)\otimes\mathfrak{f}=\mathscr{F}=\mathscr{V},$$

определенное формулой

$$\Lambda(f^1X_1+\ldots+f^NX_N)=f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N).$$

Обычно его обозначают $\Lambda=id\otimes\lambda$. Это отображение будет изоморфизмом модулей.

Пусть теперь на главном расслоении $\mathscr{B}$ задана связность Π. Тогда определяется отображение

$$\theta=\Lambda^{-1}\circ\Pi:\mathfrak{X}(P)\to\mathscr{V}\to C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}.$$

Это отображение $C^\infty(P)$- линейно как композиция таковых. Оно называется *формой связности.*

Как мы видим, это не привычная для нас дифференциальная форма, так как она отображает векторные поля в $C^\infty(P)$- модуль $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$, а не в $C^\infty(P)$ (как мы привыкли в случае обычных форм). Так как $\mathfrak{g}$ является векторным пространством, такие отображения как θ называются *формами со значениями в векторном пространстве* $\mathfrak{g}$. Так как θ отображает один экземпляр $\mathfrak{X}(P)$, она называется 1-формой со значениями в векторном пространстве $\mathfrak{g}$ (если аргументов было бы r штук, то она называлась бы r-формой).

Такие необычные формы можно свести к знакомым нам обычным формам следующим образом. Так как $\mathfrak{g}$ – конечномерное векторное пространство, в нем есть базис $(E_1,\ldots,E_r)$. Он же будет базисом для $C^\infty(P)$-модуля $C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Пусть $X\in\mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда $\theta(X)\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ и этот элемент модуля можно разложить по базису $\theta(X)=\theta^a(X)E_a$. Через $\theta^a(X)$ мы обозначили коэффициенты разложение. Это функции из $C^\infty(P)$ (если меняется X, то меняются коэффициенты $\theta^a(X)$). В результате мы получаем отображения $\theta^a:\mathfrak{X}(P)\to C^\infty(P)$, которые каждому векторному полю X ставят в соответствие функцию $\theta^a(X)$. Очевидно, что эти функции $C^\infty(P)$-линейны, а значит, являются 1-формами (обычными). Эти 1-формы называются *тензорными компонентами* формы связности θ.

Изучим свойства формы связности.

Предложение 3.5 **.** *$\theta\circ\Lambda=id$. В частности, $\theta\circ\lambda=1\otimes id$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $X=f^1X_1+\ldots+f^NX_N\in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$. Тогда по определению Λ и θ получим

$$\theta\circ\Lambda(X)=\theta(f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N))=\Lambda^{-1}\circ\Pi(f^1\lambda(X_1)+\ldots+f^N\lambda(X_N))=\Lambda^{-1}\Lambda(X)=X.$$

Здесь мы воспользовались тем, что фундаментальные векторные поля $\lambda(X_\alpha)$ являются вертикальными ($\mathfrak{f}\subset\mathscr{V}$), а Π является вертикальным проектором, следовательно, $\Pi(\lambda(X_\alpha))=\lambda(X_\alpha)$. В частности, для любого $X\in\mathfrak{g}$ имеем

$$\theta\circ\lambda(X)=\Lambda^{-1}\circ\Pi(\lambda(X))=\Lambda^{-1}(\lambda(X))=\Lambda^{-1}(\Lambda(1X))=1\otimes id(X).$$

□

Следствие 3.2. $\theta(fX^\flat) = fX$.

Действительно,
$$\theta(f\lambda(X)) = f\theta \circ \lambda(X) = f(1X) = fX.$$

У нас было отображение $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Оно строилось так: брался внутренний автоморфизм $A_g : G \to G$, $A_g(x) = gxg^{-1}$ и рассматривался его дифференциал в точке $e \in G$. Это отображение $((A_g)_*)_e : T_e(G) \to T_e(G)$. Тогда, используя изоморфизм β отождествления присоединенной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и касательного пространства в точке e к группе Ли G, мы получали отображение $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$.

Научим отображение $Ad(g)$ работать с модулем $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ по аналогии с отображением Λ. Зададим отображение $Ad(g) : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ формулой

$$Ad(g)(f^1 X_1 + \ldots + f^N X_N) = (f^1 \circ R_g) Ad(g)(X_1) + \ldots + (f^N \circ R_g) Ad(g)(X_N).$$

Задача 3.3. Докажите, что $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$, то есть введенное отображение Ad будет гомоморфизмом групп.

Доказательство. Имеем

$$Ad(g_1g_2)(f^k \otimes X_k) = (f^k \circ R_{g_1g_2}) \otimes Ad(g_1g_2)(X_k) = ((f^k \circ R_{g_2}) \circ R_{g_1}) \otimes (Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(X_k)) =$$
$$= Ad(g_1)\big((f^k \circ R_{g_2}) \otimes (Ad(g_2)(X_k)\big) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(f^k \otimes X_k).$$

Здесь мы воспользовались определением правого действия. Итак, мы показали, что Ad является гомоморфизмом, а значит, представлением на модуле $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$. □

Теорема 3.6. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, θ – форма связности на $\mathscr{B}$. Тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(P) & \xrightarrow{(R_g)_*} & \mathfrak{X}(P) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \end{array}$$

или $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$. Это свойство называется эквивариантностью формы связности.

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на три части.

1) Пусть $X_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$ – произвольное векторное поле. Докажем, что для него выполняется требуемое тождество. Имеем
$$\theta \circ (R_g)_*(X_{\mathscr{H}}) = \Lambda^{-1} \circ \Pi((R_g)_*(X_{\mathscr{H}})) = 0.$$
Здесь мы воспользовались теоремой 3.5 и тем, что $\mathscr{H} = ker\,\Pi$.

С другой стороны,
$$Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{H}}) = Ad(g^{-1}) \circ \Lambda^{-1} \circ \Pi(X_{\mathscr{H}}) = 0.$$
Здесь мы использовали также, что $X_{\mathscr{H}} \in ker\,\Pi$ (это следует из определений вертикального проектора и горизонтального распределения).

2) Пусть $X_{\mathscr{V}} \in \mathscr{V}$. Тогда фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и рассмотрим базис $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ в вертикальном распределении $\mathscr{V}$, где $E_a^\flat = \lambda(E_a)$. Следовательно, любое вертикальное векторное поле (то есть векторное поле из $\mathscr{V}$) можно разложить по этому базису: $X_{\mathscr{V}} = f^a E_a^\flat$, $f^a \in C^\infty(P)$, $a = 1, \ldots, r$.

Используя формулу (3.16), получим

$$\theta \circ (R_g)_* X_{\mathscr{V}} = \theta \circ (R_g)_*(f^a E_a^\flat) = \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* E_a^\flat\right) = \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})((R_g)_* \lambda(E_a))\right) =$$
$$= \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})(\lambda \circ Ad(g^{-1})(E_a))\right) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(\theta \circ \lambda \circ Ad(g^{-1})(E_a) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(1 \otimes Ad(g^{-1})(E_a)) =$$
$$= Ad(g^{-1})(f^a \otimes E_a) = Ad(g^{-1}) \circ \theta \circ \Lambda(f^a \otimes E_a) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(f^a E_a^\flat) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{V}}).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.6), $C^\infty(P)$-линейностью формы связности, предложением **??**, формулой (**??**).

3) Рассмотрим общий случай $X \in \mathfrak{X}(P)$. Тогда раскладывая $X = X_{\mathscr{H}} + \mathfrak{X}_{\mathscr{V}}$ и применяя пункты 1), 2) и линейность отображений, получим

$$\theta \circ (R_g)_*(X) = \theta \circ (R_g)_*(X_{\mathscr{H}}) + \theta \circ (R_g)_*(X_{\mathscr{V}}) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{H}}) + Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{V}}) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(X).$$

□

Теорема 3.7. *Задание связности в главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию 1-формы θ на пространстве расслоения со значениями в алгебре Ли структурной группы, обладающей свойствами:*

1. $\theta \circ \Lambda = id$; *в частности,* $\theta(fX^\flat) = f \otimes X$;

2. $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$, *где* $f \in C^\infty(P)$, $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$.

Доказательство. 1) Если проектор Π – связность на $\mathscr{B}$, то по доказанному 1-форма $\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$ обладает требуемыми свойствами.

2) Обратно, пусть форма θ, заданная на многообразии P обладает указанными свойствами. Нам нужно построить связность на $\mathscr{B}$, а именно, проектор на вертикальное распределение $\mathscr{V}$, инвариантный относительно действия структурной группы. Зададим отображение

$$\Pi : \mathfrak{X}(P) \to \mathscr{V}$$

по формуле $\Pi = \Lambda \circ \theta$. Очевидно, что оно $C^\infty(P)$-линейно как композиция таковых. Далее,

$$\Pi^2 = (\Lambda \circ \theta) \circ (\Lambda \circ \theta) = \Lambda \circ \theta = \Pi.$$

Здесь мы воспользовались первым свойством θ из условия теоремы. Таким образом, построенное отображение Π является проектором.

Покажем, что образом проектора Π совпадает с вертикальным распределением $\mathscr{V}$. Очевидно, что для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$ получим $\Pi(X) \in \mathscr{V}$, так как $\Lambda : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \to \mathscr{V}$. Докажем, что отображение Π сюръективно, что и будет означать совпадение образа проектора Π и вертикального распределения $\mathscr{V}$. Имеем, по первому свойству формы θ из условия теоремы $\theta(\Lambda(X)) = X$, то есть для любого $X \in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$ существует прообраз $(\Lambda(X))$ при отображении θ, то есть θ – сюръективно. Отображение Λ сюръективно по определению (так как сюръективно отображение $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$). Тогда сюръективно и отображение Π. Итак, отображение Π является проектором на вертикальное распределение $\mathscr{V}$.

Нам осталось показать, что этот проектор инвариантен относительно действия структурной группы. Для этого достаточно показать, что его псевдогоризонтальное распределение $\mathscr{H} = ker\,\Pi$ инвариантно относительно действия структурной группы (см. теорему 3.5).

Пусть $X_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$ – произвольный элемент, $g \in G$. Тогда

$$\Pi \circ (R_g)_* X_{\mathscr{H}} = \Lambda \circ \theta \circ (R_g)_* X_{\mathscr{H}} = \Lambda \circ Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathscr{H}}) = 0,$$

так как $ker\,\Pi = ker\,\theta$. Следовательно, $\Pi \circ (R_g)_* X_{\mathscr{H}} \in ker\,\Pi = \mathscr{H}$. Значит, Π – связность. При этом ее форма связности

$$\Lambda^{-1} \circ \Pi = \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \theta = \theta$$

совпадает с исходной формой θ. □

§3.6. Горизонтальный лифт.

6.1. В дальнейшем нам потребуется следующее предложение, которое мы примем без доказательства.

Предложение 3.6 **.** *Пусть* $\Pi_{\mathscr{V}}$ *– вертикальный проектор в главном расслоении* $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$, $\mathscr{H}$ *– соответствующее псевдогоризонтальное распределение. Тогда для любой точки* $p \in P$ *отображение*

$$(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p} : \mathscr{H}_p \to T_{\pi(p)}(M)$$

является изоморфизмом линейных пространств.

Теорема 3.8. *Пусть* $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ *– главное расслоение,* $\mathscr{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ *– (псевдо)горизонтальное распределение на* P*. Тогда для любого векторного поля* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *существует единственное векторное поле* $Y \in \mathscr{H}$ π*-связанное с векторным полем* X*, то есть* $\pi_* Y = X$ *(см. § 1.3.).*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле. Согласно предложению 3.6 для любой точки $p \in P$ существует единственный вектор $Y_p \in \mathscr{H}_p$, такой что

$$(\pi_*)_p Y_p = X_{\pi(p)}.$$

Следовательно, на многообразии P однозначно определено семейство векторов $Y = \{Y_p | p \in P\}$. Можно показать, что это семейство векторов определяет на P гладкое векторное поле. Тогда Y будет искомым. □

Рассмотрим главное расслоение $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ и фиксируем на нем связность, то есть вертикальный проектор $\Pi_{\mathscr{V}}$, инвариантный относительно действия структурной группы. Пусть $\mathscr{H}$ – горизонтальное распределение на многообразии P, X – произвольное векторное поле на многообразии M. Векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(P)$, однозначно определяемое условиями

$$1) \quad \pi_* Y = X; \quad 2) \quad Y \in \mathscr{H},$$

называется *горизонтальным лифтом* или *горизонтальным поднятием* векторного поля X и обозначается $X^\sharp$.

В силу теоремы 3.8 для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует и единственен горизонтальный лифт $X^\sharp$. Горизонтальные лифты векторных полей с базы расслоения можно охарактеризовать как проектируемые горизонтальные векторные поля.

Рассмотрим свойства горизонтальных лифтов.

Теорема 3.9. *Горизонтальный лифт $X^\sharp$ произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ инвариантен относительно действия структурной группы, то есть для любого элемента $g \in G$ имеем*

$$(R_g)_* X^\sharp = X^\sharp.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ является горизонтальным лифтом векторного поля X. Чтобы воспользоваться для этого определением горизонтального лифта, нам нужно показать, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$, во-первых, горизонтально, а, во-вторых, что оно π- связано с векторным полем X.

Напомним, что горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ является ядром связности $\Pi_{\mathscr{V}}$. Тогда с учетом инвариантности связности (вертикального проектора $\Pi_{\mathscr{V}}$) относительно действия структурной группы имеем

$$\Pi_{\mathscr{V}}((R_g)_* X^\sharp) = (R_g)_*(\Pi_{\mathscr{V}} X^\sharp) = (R_g)_*(0) = 0,$$

так как векторное поле $X^\sharp$ горизонтально, то есть принадлежит ядру вертикального проектора $\Pi_{\mathscr{V}}$.

Таким образом, мы получили, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ принадлежит ядру проектора $\Pi_{\mathscr{V}}$, следовательно, горизонтально.

Вычислим $\pi_*((R_g)_* X^\sharp)$. Из определения главного расслоения следует, что $\pi \circ (R_g) = \pi$. Тогда

$$\pi_* \circ (R_g)_* = \pi_*.$$

Используя эту формулу, получим

$$\pi_*((R_g)_* X^\sharp) = \pi_* X^\sharp = X.$$

По определению мы получаем, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ является π-связанным с векторным полем X.

Объединяя оба результата, получаем, что $(R_g)_* X^\sharp$ есть горизонтальный лифт векторного поля X, что и требовалось доказать. □

Теорема 3.10. *Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем*

$$\Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]^\sharp,$$

где $\Pi_{\mathscr{H}} = id - \Pi_{\mathscr{V}}$ – горизонтальный проектор (дополнительный к вертикальному), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. Очевидно, что в обеих частях равенства стоят горизонтальные векторные поля. Осталось доказать, что они являются лифтами одного и того же векторного поля $[X, Y]$ из $\mathfrak{X}(M)$, то есть $\pi_* \circ \Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]$. Имеем

$$\pi_* \circ \Pi_{\mathscr{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = \pi_* \circ (id - \Pi_{\mathscr{V}})([X^\sharp, Y^\sharp]) = [\pi_* X^\sharp, \pi_* Y^\sharp] = [X, Y].$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Pi_{\mathscr{V}}([X^\sharp, Y^\sharp]) \in \mathscr{V} = ker\, \pi_*$ (см. § 3.4.) и свойство увлеченных векторных полей (см. замечание 1.5). □

6.2. Если на главном расслоении $\mathscr{B}$ фиксирована связность, то возникает отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P),$$

сопоставляющий каждому векторному полю $X \in \mathfrak{X}(M)$ его горизонтальный лифт $X^\sharp$.

Покажем, что отображение $\sharp$ является $\mathbb{R}$-линейным отображением, то есть гомоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{X}(M)$ и $\mathfrak{X}(P)$. Для этого нужно проверить выполнение двух равенств

$$X^\sharp + Y^\sharp = (X + Y)^\sharp; \quad \lambda X^\sharp = (\lambda X)^\sharp,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, λ – произвольное вещественное число. Доказательство этих равенств аналогично доказательству теоремы 3.9 (проведите самостоятельно).

Так как отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P)$$

гомоморфизм векторных пространств, он однозначно расширяется до гомоморфизма $C^\infty(P)$-модулей

$$\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P)$$

по формуле $\natural(f^k \otimes X_k) = f^k X_k^\sharp$, $f^k \in C^\infty(P)$, $X_k \in \mathfrak{X}(M)$, то есть $\natural = id \otimes \sharp$.

Из доказанного следует, что

$$\pi_* \circ \natural(1 \otimes X) = X; \quad \pi_* \circ \sharp = id, \; X \in \mathfrak{X}(M).$$

Предложение 3.7 **.** *Гомоморфизм $\sharp$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $X \in ker\,\sharp$, то есть $\sharp X = 0$. Следовательно, $\pi \circ \sharp(X) = 0$, то есть $id(X) = 0$, то есть $X = 0$. $\square$

Следствие 3.3. Из этого следует, что $ker\,\natural = \{0\}$, так как $ker\,\natural C^\infty(P) \otimes ker\,\sharp$, а значит, гомоморфизм $\natural$ является мономорфизмом.

Предложение 3.8 **.** *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной в нем связностью и $\mathscr{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда отображение*

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}$$

является изоморфизмом векторных пространств. Здесь $\mathfrak{X}_\pi(P)$ – модуль проектируемых векторных полей. В частности, $Im\,\sharp = \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathscr{H}$.

Доказательство. По определению горизонтального лифта имеем $\sharp \circ \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P)\cap\mathscr{H}} = id$. Кроме того, как мы видели $\pi_* \circ \sharp = id$. Откуда получим, что $\sharp^{-1} = \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P)\cap\mathscr{H}}$, то есть оно $\mathbb{R}$-линейно и допускает обратное, то есть является изоморфизмом векторных пространств. $\square$

Теорема 3.11. *Пусть X – горизонтальное векторное поле. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) X – горизонтальный лифт некоторого векторного поля с базы расслоения;

2) X – проектируемо;

3) X инвариантно относительно действия структурной группы.

Доказательство. 1) Пусть X – лифт некоторого векторного поля Y с базы, то есть $X = Y^\sharp$. По определению оно проектируемо, так как $\pi_* X = Y$, а в соответствии с замечанием 3.9 оно инвариантно относительно действия структурной группы. Итак, из 1) следует 2) и 3).

2) Пусть X – проектируемо. Тогда $X \in Im\,\sharp$, так как по условию X – горизонтально. Следовательно, существует векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$, такое что $X = Y^\sharp$, то есть горизонтальный лифт. Тогда по доказанному X инвариантно относительно действия структурной группы. Итак, из 2) следует 1) и 3).

3) Пусть X инвариантно относительно действия структурной группы. Пусть $p, q \in P$ – произвольные точки, такие что $\pi(p) = \pi(q)$. Тогда по определению главного расслоения (транзитивность действия группы на слоях) существует элемент $g \in G$ такой, что $q = pg$, а значит,

$$(\pi_*)_q X_q = (\pi_*)_q(((R_g)_*)_p X_p) = ((\pi \circ R_g)_*)_p X_p = (\pi_*)_p X_p.$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью векторного поля X относительно действия структурной группы, то есть $X_q = X_{R_g(p)} = ((R_g)_*)_p X_p$. Итак, векторное поле X проектируемо, а значит, является горизонтальным лифтом. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, $\mathscr{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда любой горизонтальный вектор $X_p \in \mathscr{H}_p$ можно достроить до горизонтального лифта некоторого поля с базы расслоения.*

Доказательство. Обозначим $m = \pi(p)$, $Y_m = (\pi_*)_p X_p$. Достроим вектор Y_m до векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда $Y^\sharp$ будет искомым векторным полем. В силу единственности горизонтального лифта $(Y^\sharp)_p = X_p$. $\square$

Предложение 3.9 **.** *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, $\mathscr{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{H}$ является изоморфизмом $C^\infty(P)$-модулей.*

Доказательство. Согласно следствию 3.3 гомоморфизм $\natural$ является мономорфизмом. Далее, из леммы 3.6 следует, что распределение на P, являющееся образом гомоморфизма $\natural$, определяет в любой точке $p \in P$ площадку, совпадающую с $\mathscr{H}_p$. Но распределение $\mathscr{H}$ также образует в любой точке $p \in P$ такую же площадку. Следовательно, $Im\,\natural = \mathscr{H}$. Итак, отображение $\natural$ является изоморфизмом. $\square$

Теорема 3.12. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Тогда $\mathfrak{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P)$ или, как говорят, $C^\infty(P)$-модуль $\mathfrak{X}(P)$ является $C^\infty(P)$-расширением векторного пространства проектируемых векторных полей $\mathfrak{X}(P)$.*

Доказательство. Фиксируем связность в главном расслоении $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{H}$ – ее горизонтальное распределение. Очевидно, что разложение $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$ индуцирует разложение $\mathfrak{X}_\pi(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}_\pi$. Следовательно,

$$C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) = C^\infty(P) \otimes (\mathscr{V} \oplus \mathscr{H}_\pi) = C^\infty(P) \otimes \mathscr{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathscr{H}_\pi = \mathscr{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathscr{H}_\pi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что вертикальное распределение $\mathscr{V}$ является $C^\infty(P)$-модулем. Так как гомоморфизм $\sharp : \mathfrak{X}(M) \to H_\pi$ является изоморфизмом векторных пространств, а значит, гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(P) \otimes \mathscr{H}_\pi$ является изоморфизмом $C^\infty(P)$-модулей. Согласно предложению 3.7 образом этого изоморфизма является распределение $\mathscr{H}$ и, значит, $C^\infty(P) \otimes \mathscr{H}_\pi = \mathscr{H}$. Откуда

$$C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H} = \mathfrak{X}(P).$$

□

Замечание 3.7. Теорема 3.12 позволяет построить локальный базис в $\mathfrak{X}(P)$, состоящий из проектируемых векторных полей. В следующем параграфе мы будем использовать базис, первая часть которого состоит из фундаментальных векторных полей (это поля π-связанные с нулевым векторным полем на базе), а вторая часть базиса состоит из горизонтальных лифтов векторных полей натурального базиса с базы расслоения).

§3.7. Структурные уравнения связности. Теорема Картана-Лаптева.

7.1. Примем без доказательства важную теорему.

Теорема 3.13. *Пусть $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение со связной структурной группой. Тогда псевдогоризонтальное распределение $\mathscr{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ является горизонтальным тогда и только тогда, когда*

$$[\lambda\mathfrak{g}, \mathscr{H}] \subset \mathscr{H},$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли структурной группы G. Другими словами, псевдогоризонтальное распределение $\mathscr{H}$ будет горизонтальным (то есть будет задавать связность) тогда и только тогда коммутатор любого фундаментального векторного поля и векторного поля из псевдогоризонтального распределения $\mathscr{H}$ принадлежит $\mathscr{H}$.

Замечание 3.8. Связность структурной группы существенна в доказательстве достаточности из теоремы 3.13. Необходимость может быть доказана без нее. Это будет существенно при выводе второй группы структурных уравнений связности.

Вернемся к изучению структурных уравнений главного расслоения (см. § 3.4.). Напомним, что если фиксировать базис $(E_1, \dots, E_r)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то фундаментальные векторные поля $(E_1^\flat, \dots, E_r^\flat)$ образует базис векторного пространства фундаментальных векторных полей $\mathfrak{f}$, а также базис распределения $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathscr{F} = \mathscr{V}$. Этот базис мы дополняли до локального базиса $\mathfrak{X}(P)$. Если на многообразии P фиксирована связность (или, более обще, псевдогоризонтальное распределение), то в качестве дополнительных векторных полей можно взять горизонтальные лифты векторных полей базы, образующих локальный базис модуля $\mathfrak{X}(M)$. Например, можно взять горизонтальные лифты векторных полей натурального базиса:

$$E_{r+1} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^\sharp, \quad \dots, \quad E_{r+n} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x^n}\right)^\sharp.$$

Назовем полученный базис

$$(E_1^\flat, \dots, E_r^\flat, E_{r+1}, \dots, E_{r+n}) \tag{3.17}$$

базисом, адаптированным связности или, более обще, *базисом, адаптированным псевдогоризонтальному распределению*, короче, CA-базисом.

Напомним, что индексы $a, b, c, d = 1, \dots, r$, индексы $i, j, k, \ell = r+1, \dots, r+n$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r+n$.

Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис.

Лемма 3.7. *1-формы $(\omega^1, \dots, \omega^r)$ образуют систему Пфаффа распределения (псевдо)горизонтального распределения $\mathscr{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(P)$. Имеем

$$X = X^a E_a^\flat + X^i E_i = \omega^a(X) E_a^\flat + \omega^i(X) E_i.$$

Тогда

$$X \in \mathscr{H} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^a(X) = 0.$$

□

Согласно (3.15) вторая группа структурных уравнений главного расслоения имеет вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j,$$

где $\omega^a_j = R^a_{bj}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{kj}\omega^k$. Благодаря связности (а именно, выбору дополнения к базису в горизонтальном распределении эти уравнения можно еще больше упростить. А именно, с учетом теоремы 3.13 получим

$$R^a_{bj} = d\omega^a(E^\flat_b, E_j) = E^\flat_b\omega^a(E_j) - E_j\omega^a(E^\flat_b) - \omega^a([E^\flat_b, E_j]) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega^a(E_j) = \delta^a_j$, $\omega^a(E^\flat_b) = \delta^a_b$ и $[E^\flat_b, E_j] \in \mathscr{H}$, а значит, по лемме 3.7 $\omega^a([E^\flat_b, E_j]) = 0$. Итак, при фиксации связности вторая группа структурных уравнений приняла вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j. \tag{3.18}$$

Обратно, пусть $R^a_{bj} = 0$. Тогда для любого фундаментального векторного поля $X^\flat \in \mathfrak{f}$ и любого горизонтального векторного поля $Y_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$ имеем

$$\omega^a([X^\flat, Y_{\mathscr{H}}]) = -d\omega^a(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) + X^\flat(\omega^a(Y_{\mathscr{H}})) - Y_{\mathscr{H}}(\omega^a(X^\flat)) = -d\omega^a(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) = \frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) -$$

$$-\frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j(X^\flat, Y_{\mathscr{H}}) = \frac{1}{2}C^a_{bc}(\omega^b(X^\flat)\omega^c(Y_{\mathscr{H}}) - \omega^b(Y_{\mathscr{H}})\omega^c(X^\flat)) - \frac{1}{2}R^a_{ij}(\omega^i(X^\flat)\omega^j(Y_{\mathscr{H}}) - \omega^i(Y_{\mathscr{H}})\omega^j(X^\flat)) = 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathfrak{f}$ векторное пространство, а значит результат действия формы (так как это линейное отображение векторного пространства, то форма является ковектором) на векторном поле (аналогично это вектор) будет вещественное число. Тогда действие вектора на вещественном числе (то есть на постоянной функции) равно нулю. Еще одно слагаемое $\omega^a(Y_{\mathscr{H}})$ обнуляется согласно лемме 3.7. Также мы воспользовались (3.18). Наконец, использовали формулу (**??**) и то, что формы (ω^i) образуют систему Пфаффа вертикального распределения (см § 3.4.).

Замечание 3.9**.** Уравнения (3.18) выведены без предположения связности структурной группы.

Обратное утверждение, а именно, то что $\mathscr{H}$ является горизонтальным распределением при выполнении (3.18), требует предположения связности структурной группы.

Тем самым нами доказана

Теорема 3.14**.** *(Картана-Лаптева) Псевдогоризонтальное распределение на пространстве главного расслоения $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ является горизонтальным (то есть определяет связность тогда и только тогда, когда его система Пфаффа (ω^a) удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \,\Box$$

Замечание 3.10**.** В теореме Картана-Лаптева структурная группа G предполагается связной, иначе берется сужение расслоения на связную компоненту группы G.

Соотношения

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^a &= -\tfrac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \tfrac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \end{aligned} \tag{3.19}$$

называются *структурными уравнениями Картана* или *структурными уравнениями связности* (первой и второй группой соответственно).

7.2. Запишем структурные уравнения связности в инвариантном виде. Пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда мы можем разложить его по CA-базису (3.17)

$$X = X^a E^\flat_a + X^i E_i.$$

Пусть θ – форма связности на $\mathscr{B}$. Тогда по определению формы связности (см. (**??**). Тогда

$$\theta(X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(X^a E^\flat_a + X^i E_i) = \Lambda^{-1}(X^a E^\flat_a) = X^a \otimes \lambda^{-1}(E^\flat_a) = X^a \otimes E_a = \omega^a(X) \otimes E_a \equiv \omega^a \otimes E_a(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что Π – проектор на вертикальное распределение, а значит, на горизонтальных векторных полях дает нуль; определением $\Lambda = id \otimes \lambda$. Напомним, что (E_a) – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Последнее равенство в цепочке мы положили по определению. Итак, мы получили

$$\theta = \omega^a \otimes E_a,$$

то есть формы $\{\omega^a\}$ являются тензорными компонентами формы связности θ (см. замечание **??**).

Далее, положим по определению

$$d\theta = d\omega^a \otimes E_a.$$

Можно показать, что форма $d\theta$ не зависит от выбора базиса (E_a), а значит, определена корректно.

Составим формальные суммы из второй группы структурных уравнений (3.19)

$$d\omega^a \otimes E_a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

С учетом определения структурных констант $C^a_{bc}E_a = [E_b, E_c]$ получим

$$d\theta = -\frac{1}{2}\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

Обозначим

$$\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] = [\theta, \theta]; \quad \tfrac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = \Phi. \tag{3.20}$$

Тогда с учетом этих обозначений вторая группа структурных уравнений запишется в виде

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi,$$

где $\Phi = \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$ – 2-форма на многообразии P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Она называется *формой кривизны связности.* Связность в главном расслоении называется *плоской*, если форма кривизны связности тождественно равна нулю.

Теорема 3.15. *Связность на главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда ее горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ вполне интегрируемо.*

Доказательство. Согласно второй группе структурных уравнений (3.19) связность в главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда

$$d\omega^a = \left(-\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b\right) \wedge \omega^c,$$

Согласно предложению **??** это означает, что система Пфаффа (ω^a) горизонтального распределения инволютивна, а значит, по теореме Фробениуса $\mathscr{H}$ вполне интегрируемо. □

r-форма $\omega \in \Lambda_r(P)$ на многообразии P называется *горизонтальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален.

Предложение 3.10 **.** *Форма $\omega \in \Lambda_r(P)$ горизонтальна тогда и только тогда, когда*

$$\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = \omega,$$

где отображение $(\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega)(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}(X_1), \dots, \Pi_{\mathscr{H}}(X_r))$, $\Pi_{\mathscr{H}}$ – проектор на псевдогоризонтальное распределение, дополнительный к проектору $\Pi_{\mathscr{V}}$ на вертикальное распределение.

Доказательство. Пусть r-форма ω горизонтальна. Тогда для любых векторных полей $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1 + \Pi_{\mathscr{V}}X_1, \dots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r + \Pi_{\mathscr{V}}X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1, \dots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = \Pi^*_{\mathscr{H}}\omega(X_1, \dots, X_r). \tag{3.21}$$

Здесь мы воспользовались линейностью формы ω и тем, что она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален ($\Pi_{\mathscr{V}}X_i$ – вертикальные векторные поля).

Обратно, пусть $\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = \omega$. Рассмотрим векторные поля $X_1, \dots, X_r$, где X_1 – вертикальное векторное поле. Тогда

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \Pi^*_{\mathscr{H}}\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathscr{H}}X_1, \Pi_{\mathscr{H}}X_2, \dots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = \omega(0, \Pi_{\mathscr{H}}X_2, \dots, \Pi_{\mathscr{H}}X_r) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что значение r-формы на наборе аргументов, среди которых хотя бы один нулевой, равно нулю. □

Пусть на главном расслоении $\mathscr{B} = (P, M, \pi, G)$ фиксирована связность. r-форма ω называется *вертикальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов горизонтален.

Задача 3.4. Докажите, что r-форма ω является вертикальной тогда и только тогда, когда $\Pi^*_{\mathscr{H}}\omega = 0$.

Замечание 3.11. Свойство формы быть горизонтальной – внутреннее свойство главного расслоения, а свойство формы быть вертикальной зависит от выбора связности.

Лемма 3.8. *q-форма ω на многообразии P горизонтальна тогда и только тогда, когда в CA-базисе (E_a, E_i) она имеет вид*

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_q} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}, \tag{3.22}$$

где (ω^a, ω^i) – базис дуальный для базиса (E_a, E_i).

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (3.22). Напомним, что координаты формы (то есть коэффициенты разложения в (3.22)) совпадают с компонентами этой формы в CA-базисе, то есть

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_q}),$$

где $\alpha = 1, \ldots, r + n$. В силу (3.22), коэффициенты, у которых хотя бы один индекс принимает значения от 1 до r, то есть индекс вида a, равны нулю. Следовательно, $\omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_q})$, где хотя бы одно $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ принимает значение от 1 до r равно нулю.

Рассмотрим набор векторных полей $X_1, \ldots, X_q$ и предположим, что X_1 вертикальное векторное поле, то есть оно раскладывается $X_1 = X_1^a E_a$, $a = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\omega(X_1^{a_1} E_{a_1}, X_2^{a_2} E_{a_2} + X_2^{i_2} E_{i_2}, \ldots, X_r^{a_r} E_{a_r} + X_r^{i_r} E_{i_r}) = X_1^{a_1} \ldots \omega(E_{a_1}, \ldots) + \ldots$$

Здесь мы раскрыли суммы по линейности. Тогда в каждом слагаемом будет сомножитель вида $\omega(E_a, \ldots,)$. Он обращается в нуль, а значит, и вся сумма равна нулю.

Обратно, пусть форма ω горизонтальна. Тогда

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \omega(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_s}) = 0,$$

если хотя бы один из аргументов вертикален, то есть хотя бы один из индексов принимает значения от 1 до r. □

Пример 3.13. Форма кривизны связности Φ является горизонтальной. Точнее ее тензорные компоненты являются горизонтальными формами в силу леммы 3.8 и определения формы кривизны (3.20).

Форма связности θ является вертикальной. Действительно, по определению формы связности (**??**) имеем

$$\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi,$$

где Π – вертикальный проектор. Так как $ker\, \Pi = \mathscr{H}$, для любого горизонтального векторного поля $X_{\mathscr{H}}$ имеем $\theta(X_{\mathscr{H}}) = 0$.

§3.8. Задачи к главе.

Задача 3.5. Пусть дана круговая цилиндрическая поверхность (см. пример 3.12). Как мы видели, его вертикальное распределение состоит из векторных полей, касательные векторы которых параллельны прямолинейным образующим этой цилиндрической поверхности. Базисом вертикального распределения является система фундаментальных векторных полей (в данном случае – это одно векторное поле). Докажите, что фундаментальное векторное поле на цилиндре не может иметь стрелки торчащие в разные стороны. Используя этот факт, покажите, что вертикальное распределение не совпадает с векторным пространством фундаментальных векторных полей (чтобы получить знак равенства, нужно взять тензорное произведение $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Задача 3.6. На круговой цилиндрической поверхности задано отображение двумерного касательного векторного пространства в каждой точке цилиндрической поверхности на вертикальное распределение. Указать соответствующее горизонтальное распределение.

Задача 3.7. Для круговой цилиндрической поверхности в каждой ее точке даны прямые, которые пересекают прямолинейные образующие под одним и тем же углом. Будет ли множество векторов, параллельное такой прямой, образовывать горизонтальную площадку некоторой связности? Если эти прямые будут гладко поворачиваться?

Глава 4. Главное расслоение вещественных реперов.

§4.1. Главное расслоение вещественных реперов.

1.1. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка. Рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ и фиксируем в нем базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда совокупность $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ называется *линейным репером* многообразия M с вершиной в точке m (или просто *репером*), а базис $(e_1, \ldots, e_n)$

называется *базисной частью линейного репера* или просто *базисом репера.* Линейный репер, базисная часть которого является натуральным базисом, будем называть *натуральным репером.*

Обозначим $BM = \{(m, e_1, \ldots, e_n), m \in M\}$ множество всех реперов во всех точках многообразия M. Наша ближайшая задача доказать, что четверка $(BM, M, GL(n, \mathbb{R}), \pi)$, где $\pi : BM \to M$ – отображение, ставящее каждому реперу p его вершину m, является главным расслоением (см. § 3.3.).

Мы должны доказать выполнимость всех требований определения главного расслоения. Начнем с действия группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве (пока в этом множестве нет даже структуры топологического пространства). Напомним, что задание действия группы G на множестве P равносильно заданию отображения $\Phi : G \times P \to P$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\Phi(e, m) = m; \quad \Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m),$$

где e – единица группы G, $g, h \in G$ – произвольные элементы, $m \in P$ – произвольный репер. Задаем отображение Φ в нашем случае:

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times BM \to BM$$

каждому реперу $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in BM$ и каждой матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ставит в соответствие репер $q = (m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с той же вершиной m и базисной частью $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, для которой матрица g является матрицей перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Другими словами, $\varepsilon_i = g_i^j e_j$, где (g_i^j) – элементы матрицы g. Мы видим, что действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM сводится к действию этой группы на множестве базисов векторного пространства $T_m(M)$. Как мы доказали в примере 3.8 это правое свободное действие. О гладкости этого действия мы пока ничего не можем сказать, так как на множестве BM нет гладкой структуры и пока мы отложим этот вопрос. Займемся орбитами построенного действия. Возьмем произвольный репер $p \in BM$ и применим к нему все элементы группы $GL(n, \mathbb{R})$. Очевидно, что мы получим все возможные реперы с вершиной в точке m, то есть орбитами действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве реперов BM являются множества всевозможных реперов с общей вершиной. Каждую такую орбиту мы можем отождествить с вершиной реперов, принадлежащий ей, то есть многообразие M может быть отождествлено с множеством орбит действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM.

Построим гладкую структуру на BM, используя гладкую структуру на M. Пусть (U, φ) – произвольная гладкая карта на M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Зададим отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

положив $F_U(p) = g$, где g – матрица перехода от базиса натурального репера

$$p_0 = \left(m, e_1^0 = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_m, \ldots, e_n^0 = \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_m \right)$$

к базису репера p, то есть элемент $g \in GL(n, \mathbb{R})$ однозначно определяющийся из уравнения $p_0 g = p$.

Теперь естественным образом определяется отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbb{R})$$

по формуле $\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$.

Лемма 4.1. *Отображение ψ_U является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\psi_U(p_1) = \psi_U(p_2)$ для некоторых реперов $p_1, p_2 \in BM$. Тогда, в частности, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, а значит, вершины этих реперов совпадают. Далее, $F_U(p_1) = F_U(p_2)$, следовательно совпадают матрицы перехода от базисной части этих реперов к натуральному реперу, а значит, совпадают и сами базисы. Итак, $p_1 = p_2$, следовательно, отображение ψ_U инъективно.

Это отображение также и сюръективно, так как для любой пары $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$ можно построить репер $p = (m, g^{i_1} e_{i_1}^0, \ldots, g^{i_n} e_{i_n}^0)$, который будет прообразом этой пары. □

Теперь внесем во множество BM топологию, потребовав, чтобы отображение ψ_U было гомеоморфизмом. Иначе говоря, базой топологии на BM служит система множеств $\psi_U^{-1}(V_1 \times V_2)$, где $V_1 \subset U$ – открытое подмножество в топологии многообразия M, $V_2 \subset GL(n, \mathbb{R})$ – открытое подмножество в топологии группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда BM превратится в топологическое пространство. Из определения построенной топологии легко следует, что в ней отображение $\pi : BM \to M$ будет непрерывным. Действительно, для любого открытого множества $U \subset M$ его полный прообраз $\pi^{-1}(U) = \psi_U^{-1}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ будет открыт как прообраз открытого множества при гомеоморфизме.

Теперь переходим к построению карт на топологическом пространстве BM. Пусть $p \in BM$ – произвольная точка. Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M в окрестности точки $m = \pi(p)$. Рассмотрим пару (W, χ), где $W = \pi^{-1}(U)$ (это открытое множество, так как π непрерывно), $\chi : W \to \mathbb{R}^{n^2+n}$ – отображение, заданное формулой $\chi(p) = (\varphi \circ \pi(p), g_j^i \circ F_U(p)) \equiv (\varphi \times g_j^i) \circ \psi_U$, где $g_j^i : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

– функции, ставящие в соответствие матрице (g^i_j) ее элемент из i-й строки и j-го столбца. Отображение χ является гомеоморфизмом как композиция таковых. Тогда пара (W,χ) является локальной картой в топологическом пространстве BM. Ее координаты (y^i, y^i_j) задаются формулами

$$y^i = x^i \circ \pi; \quad y^i_j = g^i_j \circ F_U$$

Докажем, что построенные карты на BM гладко связаны. Пусть $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ – другая локальная карта в окрестности точки p с координатами $(\tilde{y}^i, \tilde{y}^i_j)$. Пусть ей соответствует локальная карта $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ с координатами $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ в окрестности точки $m = \pi(p)$. Тогда $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi$, $\tilde{y}^i_j = g^i_j \circ \tilde{F}_U$. Заметим, что отображение

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

является диффеоморфизмом евклидовых пространств, поскольку эти карты гладко связаны. Пусть этот диффеоморфизм задается уравнениями $\tilde{x}^i = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\chi} \circ \chi^{-1} : \chi(W \cap \tilde{W}) \to \tilde{\chi}(W \cap \tilde{W}).$$

Получим формулы, задающее это отображение и убедимся, что они гладкие. Имеем

$$\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n) \circ \pi = \alpha^i(x^1 \circ \pi, \ldots, x^n \circ \pi) = \alpha^i(y^1, \ldots, y^n).$$

Это гладкое отображение как композиция таковых.

Далее, обозначим $C = (C^i_k)$ матрицу перехода от натурального репера второй карты к натуральному реперу первой карты, то есть $p_0 = \tilde{p}_0 C$. Тогда

$$\tilde{y}^i_j(p) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(p) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(p_0 g) = g^i_j \circ \tilde{F}_U(\tilde{p}_0 C g) = g^i_j(Cg) = C^i_k g^k_j = C^i_k g^k_j(g) = C^i_k g^k_j(F_U(p)) = C^i_k y^k_j(p)$$

Итак, формулы перехода от первой ко второй карте имеют вид

$$\tilde{y}^i = \alpha^i(y^1, \ldots, y^n); \quad \tilde{y}^i_j = C^i_k y^k_j.$$

Это гладкие функции. Они обратимы, причем обратные функции также являются гладкими. Таким образом, мы построили гладкую структуру на BM, превратив это множество в гладкое многообразие размерности $n^2 + n$.

Заметим, что относительно построенной гладкой структуры отображения π и F_U являются гладкими, так как задаются формулами $x^i = y^i$, $g^i_j = y^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Далее, нам нужно показать, что группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ гладко действует на многообразии BM. Заметим, что в построенных картах действие группы Ли

$$((y^i, y^i_j), g^i_j) \to (\tilde{y}^i, \tilde{y}^i_j)$$

задается уравнениями $\tilde{y}^i = y^i$, $\tilde{y}^i_j = y^i_k g^k_j$, где g^i_j по-прежнему функции, ставящие в соответствие матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ее элемент из i-й строки j-го столбца. Действительно, пусть $\tilde{p} = ph$. Тогда так как $p = p_0 g$, $\tilde{p} = p_0 \tilde{g}$, то

$$\tilde{p} = ph = (p_0 g)h = p_0(gh),$$

то есть $\tilde{g} = gh$. Элементы матриц $\tilde{g}$, g, h – это $\tilde{y}^i_j$, y^i_j, $g^i_j(h) \equiv g^i_j$, откуда получим требуемые формулы. Итак, функции, задающие действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, гладкие.

Нам осталось доказать, что $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in BM$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Обозначим $h = F_U(p)$. Это означает, что $p_0 h = p$, где p_0 – натуральный репер в точке $m = \pi(p)$. Тогда

$$pg = (p_0 h)g = p_0(hg).$$

В силу определения отображения F_U получим $hg = F_U(pg)$, то есть $F_U(p)g = F_U(pg)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что совокупность $\mathscr{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ образует главное расслоение с базой M, естественной проекцией π, структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ и тотальным пространством расслоения BM. Это главное расслоение называется *главным расслоением реперов над многообразием* M.

1.2. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка, $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный репер в точке m. Тогда репер p можно отождествить с линейным изоморфизмом (*реперным отображением*) $p : \mathbb{R}^n \to T_m(M)$, действующим по формуле

$$p((x^1, \ldots, x^n)) = x^i e_i.$$

Замечание 4.1. В курсе Анализ на многообразиях мы построили реперное отображение r_φ, которое определялось локальной картой (U,φ) гладкого многообразия M. Это отображение является частным случаем реперного отображения, введенного в данном параграфе, а именно, это реперное отображение (в смысле этого параграфа), определенное в каждой точке $m\in U$ натуральным репером p_0 с вершиной в этой точке.

Аналогично рассуждениям в курсе Анализ на многообразиях можно доказать (докажите самостоятельно), что реперное отображение является биекцией и, более того, изоморфизмом векторных пространств.

Лемма 4.2. *(о реперах) При указанном отождествлении правое действие Φ группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ на многообразии M определяется формулой*

$$\Phi(p,g)\equiv pg=p\circ g.$$

Доказательство. Пусть $p=(m,e_1,\dots,e_n)$ – произвольный элемент из BM, $g=(g^i_j)\in GL(n,\mathbb{R})$. Тогда

$$\Phi(p,g)=(m,g^{i_1}_1e_{i_1},\dots,g^{i_n}_ne_{i_n}).$$

И значит, если репер pg рассматривать как линейный изоморфизм, то

$$(pg)((x^1,\dots,x^n))=x^i(g^j_ie_j).$$

С другой стороны,

$$p\circ g((x^1,\dots,x^n))=p(g^1_jx^j,\dots,g^n_jx^j)=g^i_jx^je_i.$$

Здесь под записью $g((x^1,\dots,x^n))$ понимается умножение матрицы g на столбец $(x^1,\dots,x^n)$. Итак, $pg=p\circ g$. □

§4.2. Форма смещения.

Пусть $\mathscr{B}(M)=(BM,M,GL(n,\mathbb{R}),\pi)$ – главное расслоение вещественных реперов. В каждой точке $p\in BM$ тотального пространства расслоения определим отображение

$$\omega_p:T_p(BM)\to\mathbb{R}^n$$

по формуле $\omega_p(\xi)=p^{-1}\circ(\pi_*)_p(\xi)$, где $\xi\in T_p(BM)$. Так как дифференциал гладкого отображения и реперное отображения являются $\mathbb{R}$-линейными, таковым будет и отображение ω_p. Тогда формула

$$\omega(X)(p)=\omega_p(X_p)=p^{-1}\circ(\pi_*)_p(X_p),\ X\in\mathfrak{X}(BM),$$

определяет $C^\infty(BM)$-линейное отображение $\omega:\mathfrak{X}(BM)\to C^\infty(BM)\otimes\mathbb{R}^n$. Согласно замечанию **??** это отображение является 1-формой со значениями в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта форма называется *формой смещения*. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксировать базис (ε_i), например, стандартный базис, то для каждого векторного поля $X\in\mathfrak{X}(BM)$ элемент $\omega(X)\in C^\infty(BM)\otimes\mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\omega(X)=\omega^i(X)\varepsilon_i$, где $\omega^i(X)\in C^\infty(BM)$. Тогда $\omega^i:\mathfrak{X}(BM)\to C^\infty(BM)$ – $C^\infty(BM)$-линейные отображения, то есть обычные 1-формы на многообразии BM. Это тензорные компоненты формы смещения относительно базиса $(\varepsilon_i)\subset\mathbb{R}^n$. Итак,

$$\omega=\omega^i\otimes\varepsilon_i.$$

Можно показать, форма смещения является гладкой, то есть ее компоненты в натуральном базисе каждой локальной карты на BM суть гладкие функции.

Теорема 4.1. *Форма смещения ω обладает следующими свойствами:*

1. *ω горизонтальная форма, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле;*
2. *$(R_g)^*\omega=g^{-1}\circ\omega$, $g\in GL(n,\mathbb{R})$.*

Доказательство. По определению вертикального векторного поля X (см. § 3.4.) получим $\pi_*X=0$. Тогда первое утверждение теоремы будет следовать из определения формы смещения.

Для доказательства второго утверждения вспомним формулу из замечания 3.9: $\pi\circ R_g=\pi$. Имеем

$$((R_g)^*\omega)_pX=((R_g)^*_{pg}\omega_{pg})(X)=\omega_{pg}(((R_g)_*)_pX)=(pg)^{-1}\circ(\pi_*)_{pg}(((R_g)_*)_pX)=g^{-1}\circ p^{-1}\circ((\pi\circ R_g)_*)_p(X)=$$
$$=g^{-1}\circ\omega_p(X),\ X\in T_p(BM).$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.20), определением антиувлечения ковекторов (1.17) и определением формы смещения. □

Пусть на расслоении вещественных реперов $\mathscr{B}(M)$ фиксирована связность и пусть $\mathscr{H}$ – ее горизонтальное распределение. Фиксируем элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольный репер $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ из BM. Тогда $p(\xi) \in T_m(M)$. Здесь мы рассматриваем репер как реперное отображение (см. определение перед леммой 4.2). Рассмотрим горизонтальный лифт (§ 3.6.) вектора $p(\xi)$, то есть вектор $(X_\xi)_p \in T_p(BM)$, такой что $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Этот вектор существует и единственен в силу предложения 3.6 . Таким образом, мы получаем векторное поле X_ξ на многообразии BM. Нетрудно показать, что оно будет гладким. Векторное поле X_ξ называется *базисным векторным полем*, порожденным вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 4.1 . *Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(BM)$ является базисным векторным полем тогда и только тогда, когда $\omega(X) = \xi$ – фиксированный вектор в $\mathbb{R}^n$, ω – форма смещения. Другими словами, векторное поле $X \in \mathfrak{X}(BM)$ является базисным тогда и только тогда, когда существует $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой что для любой точки $p \in BM$ имеем $\omega_p(X_p) = \xi$.*

Доказательство. По определению формы смещения для любой точки $p \in BM$ и любого базисного векторного поля X_ξ имеем $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Применим к обеим частям этого равенства отображение p^{-1} (обратное к реперному отображению). Тогда получим $\omega_p((X_\xi)_p) = \xi$. Это верно для любой точки p, следовательно, $\omega(X_\xi) = \xi$.

Обратно, пусть для некоторого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(BM)$ верно равенство $\omega(X) = \xi$. Докажем, что оно будет базисным. Распишем данное равенство для произвольной точки $p \in BM$. Получим $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = \xi$. По определению формы смещения получим $p^{-1} \circ (\pi_*)_p X_p = \xi$ и, применив к обеим частям реперное отображение p, получим определение базисного векторного поля $(\pi_*)_p X_p = p(\xi)$. По определению это означает, что X является базисным векторным полем. □

Предложение 4.2 . *Базисные векторные поля принадлежат горизонтальному распределению $\mathscr{H}$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из определения горизонтального лифта и базисного векторного поля. □

Теорема 4.2. *Совокупность $\mathfrak{b}$ всех базисных векторных полей на многообразии BM образует n-мерное векторное пространство ($n = dim\, M$), а сужение формы смещения ω на горизонтальное распределение задает естественный изоморфизм $\omega : \mathfrak{b} \to \mathbb{R}^n$ векторных пространств. При этом $(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$.*

Доказательство. Пусть ω – форма смещения. Рассмотрим ее сужение на множество $\mathfrak{b}$ базисных векторных полей и докажем, что это сужение является биекцией. Пусть X – произвольное базисное векторное поле. Тогда согласно предложению 4.1 существует единственный элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой что $\omega(X) = \xi$. Этот элемент поставим в соответствие базисному векторному полю X. Пусть Y – другое базисное векторное поле и ему соответствует элемент η. Предположим, что $\omega(X) = \omega(Y)$, то есть $(\pi_*)_p(X_p) = (\pi_*)_p(Y_p)$. Так как векторы X_p и Y_p горизонтальны и отображение $(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p}$ является изоморфизмом, в частности, биекцией (см. предложение 3.6), векторы X_p и Y_p совпадают для любой точки $p \in BM$. Тогда $X = Y$ и мы доказали, что $\omega|_{\mathfrak{b}}$ является инъективным отображением. Сюръективность следует из определения базисного векторного поля. Итак, отображение $\omega|_{\mathfrak{b}}$ является биекцией. С помощью этого отображения мы введем структуру векторного пространства в множество базисных векторных полей, а именно,

$$X_\xi + Y_\eta = \omega^{-1}(\omega(X_\xi + Y_\eta)); \quad \lambda X_\xi = \omega^{-1}(\lambda\omega(X_\xi)),$$

где λ – произвольное вещественное число. Такое определение структуры векторного пространства в $\mathfrak{b}$ превращает биекцию ω в изоморфизм векторных пространств.

Чтобы доказать требуемое равенство, заметим, что для любой точки $p \in BM$ отображение $\omega_p : \mathscr{H}_p \to \mathbb{R}^n$ будет биекцией как композиция биекций $(\pi_*)_p|_{\mathscr{H}_p}$ и p^{-1}. Тогда отображение $\omega|_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$ будет также биекцией. Обратите внимание, что множеством значений отображения $\omega|_{\mathscr{H}}$ уже является не $\mathbb{R}^n$, так как в случае произвольного горизонтального векторного поля (отличного от базисного) для различных точек $p \in BM$ мы будем получать различные n-ки вещественных чисел.

Далее, по определению антиувлечения получим

$$\omega((R_g)_* X_\xi) = ((R_g)^*\omega)(X_\xi) = g^{-1} \circ \omega(X_\xi) = g^{-1}\xi = \omega(X_{g^{-1}\xi}).$$

Здесь мы воспользовались теоремой 4.1 и предложением 4.1 . Так как $\omega|_{\mathscr{H}}$ биекция и горизонтальное распределение связности инвариантно относительно правых сдвигов (при правых сдвигах горизонтальные векторные поля переходят в горизонтальные), получим требуемое равенство. □

Теорема 4.3. *Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $\mathscr{H}$ – горизонтальное распределение некоторой связности на BM. Тогда $C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b} = \mathscr{H}$. В частности, горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ параллелизуемо, то есть допускает глобальный базис из необращающихся в нуль векторных полей. При этом $C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(BM)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.2 любой базис $(\xi_1, \dots, \xi_n) \subset \mathbb{R}^n$ порождает базис $(E_{\xi_1} \equiv E_1, \dots, E_{\xi_n} \equiv E_n) \subset \mathfrak{b}$. Более того, базисные векторные поля не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия BM. Действительно, если предположить, что в какой-либо точке $p \in BM$ базисное векторное поле X_ξ обращается в нуль, то согласно предложению 4.1 получим

$$\xi = \omega(E_\xi)(p) = \omega_p((E_\xi)_p) = 0,$$

что противоречит выбору базиса в $\mathbb{R}^n$.

Как мы знаем, горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ является n-мерным, то есть для каждой точки $p \in BM$ площадка $\mathscr{H}_p$ является n-мерным векторным пространством. Так как базисные векторные поля горизонтальны и не равны нулю в любой точке многообразия BM, система векторов $((E_1)_p, \dots, (E_n)_p)$ образует базис площадки $\mathscr{H}_p$. Рассмотрим произвольное горизонтальное векторное поле X. Тогда для любой фиксированной точки $p \in BM$ имеем $X_p = X^i(p)(E_i)_p$, где $X^i(p)$ – некоторые вещественные числа. Теперь отпустим точку p. Мы получим разложение для векторного поля X, а именно, $X = X^i(p)E_i$, где $X^i(p)$ – некоторые функции. Эти функции с необходимостью будут гладкими, так как $X^i(p) = \omega^i(X)$, где (ω^i) – дуальный базис для базиса (E_i). Итак, мы показали, что любое горизонтальное векторное поле раскладывается по базисным векторным полям с коэффициентами, являющимися гладкими функциями, а значит, $(X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})$ является базисом горизонтального распределения $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H} = C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b}$.

Таким образом, $C^\infty(BM)$ модуль $\mathscr{H}$ параллелизуем.

С другой стороны, как мы доказали, вертикальное распределение $\mathscr{V}$ допускает глобальный базис, состоящий из фундаментальных векторных полей $(X_1^\flat, \dots, X_{n^2}^\flat)$. Тогда, объединяя два построенных базиса, мы получим базис модуля $\mathfrak{X}(BM) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H} = C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b})$. □

Следствие 4.1. Пространство расслоения реперов над любым гладким многообразием параллелизуемо. Напомним, что многообразие называется *параллелизуемым*, если его модуль векторных полей допускает глобальный базис. Здесь мы исходим из того, что любое главное расслоение допускает связность.

§4.3. Структурные уравнения главного расслоения реперов.

3.1. Следующую очень важную теорему, носящую название обобщенной леммы Картана, мы примем без доказательства.

Теорема 4.4. *(обобщенная лемма Картана) Пусть $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра свободного модуля V с конечным числом N образующих (в качестве V мы часто будем рассматривать модуль $\mathfrak{X}(BM)$ гладких векторных полей на тотальном пространстве главного расслоения реперов). Уравнения*

$$\theta_a \wedge \omega^a = 0,$$

где $a = 1, \dots, n$, θ_a – внешние формы произвольной степени r, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса модуля V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = \theta_{ab} \wedge \omega^b$, где $\{\theta_{ab}\}$ – некоторые $(r-1)$-формы, такие что $\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b = 0$.

Сформулируем также без доказательства два следствия из обобщенной леммы Картана (их доказательства не сложны и читатель может доказать их самостоятельно).

Следствие 4.2. В частности, если θ_a – 2-формы, то $\theta_{[ab]} = A_{abc}\omega^c$, где $\{A_{abc}\}$ – подходящие скаляры, кососимметричные по первым двум индексам.

Следствие 4.3. (лемма Картана) В принятых обозначениях уравнения $\theta_a \wedge \omega^a = 0$, где $a = 1, \dots, n$, θ_a – 1-формы, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = A_{ab}\omega^b$, где $\{A_{ab}\}$ – подходящие скаляры, причем $A_{ab} = A_{ba}$.

3.2. Переходим к главному расслоению вещественных реперов $\mathscr{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Обозначим $W = \pi^{-1}(U)$ – область канонической локальной карты пространства расслоения с координатами (y^i, y^i_j), где $y^i = x^i \circ \pi$, $y^i_j = g^i_j \circ F_U$ (см. § 4.1.).

Пусть (e^i_j) – стандартный базис полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то есть базис состоящий из матриц, у которых $(e^i_j)^k_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j$. Этому базису соответствует стандартный базис $b = (E^i_j)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, где $E^i_j = \beta^{-1} \circ \varkappa^{-1}(e^i_j)$ (см. § 2.3., § 2.2.). Этому базису отвечает базис вертикального распределения $\mathscr{V}$, состоящий из фундаментальных векторных полей

$$\mathscr{E}^i_j = (E^i_j)^\flat.$$

Рассмотрим область $W = \pi^{-1}(U)$ канонической карты главного расслоения реперов. Построим связность на главном расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$. Для этого рассмотрим тривиальное главное расслоение $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$, где $p_1 : U \times GL(n, \mathbb{R}) \to U$ – проекция на первый сомножитель (см. пример 3.10). Действие группы здесь определяется следующим образом: $R_h((m,g)) = (m, R_h(g)) \equiv (id \times R_h)((m,g))$, где в левой части равенства R_g обозначает действие группы на многообразии, а в правой те же символы обозначают правый сдвиг на группе Ли.

Касательное пространство $T_{(m,g)}(U \times GL(n,\mathbb{R}))$ в любой точке $(m,g) \in U \times GL(n,\mathbb{R})$ представимо в виде прямой суммы

$$T_{(m,g)}(U \times GL(n,\mathbb{R})) = T_m(M) \oplus T_g(GL(n,\mathbb{R})),$$

где под $T_m(M)$ мы понимаем $T_m(M) \times \{0\}$, а под $T_g(GL(n,\mathbb{R}))$ – $\{0\} \times T_g(GL(n,\mathbb{R}))$.

Слой $(p_1)^{-1}(m) = \{(m,g), g \in GL(n,\mathbb{R})\}$ отождествляется с группой $GL(n,\mathbb{R})$, так как точка m фиксирована, а элемент g пробегает всю группу $GL(n,\mathbb{R})$. Так как вектора вертикальных площадок суть касательные векторы к слою расслоения, вертикальные площадки $\mathscr{V}_{(m,g)}$ отождествляются с векторными пространствами $T_g(GL(n,\mathbb{R}))$. Тогда в качестве горизонтальных площадок $\mathscr{H}_{(m,g)}$ можно взять касательные пространства $T_m(M)$. Они будут инвариантны, так как для любого элемента $(X,Y) \in T_m(M) \oplus T_g(GL(n,\mathbb{R}))$ имеем

$$((R_h)_*)_{(m,g)}(X,Y) = ((id_*)_{(m,0)\equiv m}X, ((R_h)_*)_{(0,g)\equiv g}Y) = (X, ((R_h)_*)_g Y).$$

Откуда получаем, что для любого элемента $(X,0) \in T_m(M)$ имеем $((R_h)_*)_{(m,g)}(X,0) = (X,0)$ для любой точки (m,g), а значит, векторные поля из $T_m(M) \equiv T_m(M) \times \{0\}$ являются инвариантными относительно действия структурной группы $GL(n,\mathbb{R})$. Таким образом, мы определили инвариантное, дополнительное к вертикальному распределение, которое будет определять связность на главном расслоении $(U \times GL(n,\mathbb{R}), U, GL(n,\mathbb{R}), p_1)$. С помощью построенной связности на тривиальном расслоении мы зададим связность на расслоении $(W, U, GL(n,\mathbb{R}), \pi|_W)$ с помощью диффеоморфизма $\psi_U : W = \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n,\mathbb{R})$. Эта связность называется *тривиальной связностью.*

Пусть $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in W$ – произвольная точка. Нам нужно определить в ней горизонтальную площадку. Пусть $\mathscr{H}_p = \psi_U^{-1}(T_m(M) \times \{0\})$. Тогда для любого элемента $Z = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(X,0) \in \mathscr{H}_p$ и любого фиксированного элемента $g \in GL(n,\mathbb{R})$ имеем

$$((R_g)_*)_p(Z) = ((R_g)_*)_p((\psi_U^{-1})_*)_{(m,h)}(X,0) = (R_g \circ \psi_U^{-1})_{(m,h)}(X,0) = ((R_g)_*)_{(m,h)}(X,0) = (X,0).$$

Здесь сначала R_g означает действие на расслоении $(W, U, GL(n,\mathbb{R}), \pi|_W)$, а затем, действие на расслоении $(U \times GL(n,\mathbb{R}), U, GL(n,\mathbb{R}), p_1)$. Таким образом, площадки $\mathscr{H}_p$ инварианты относительно действия структурной группы, а значит, являются горизонтальными. Итак, мы получили связность в расслоении $(W, U, GL(n,\mathbb{R}), \pi|_W)$.

Тогда, фиксировав эту связность и стандартный базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ в $\mathbb{R}^n$, мы получим систему базисных векторных полей $(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n)$, где для краткости обозначено $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{\varepsilon_i}$. Эта система векторных полей определена локально (для каждой области W) и является базисом горизонтального распределения $\mathscr{H}$.

Таким образом, мы получили базис $(\mathscr{E}^i_j, \mathscr{E}_k)$ модуля $\mathfrak{X}(W)$. В нем векторные поля $\mathscr{E}^i_j$ определены глобально, а векторные поля $\mathscr{E}_k$ определены локально на W. Пусть (ω^i_j, ω^k) – дуальный базис. Напомним, что индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения от 1 до $n = dim\, M$.

Найдем координаты 1-форм ω^i_j в натуральном базисе (dy^i_j, dy^k) карты (W, χ). Обозначим $(\pi^i_j) \subset \mathfrak{gl}^*(n,\mathbb{R}$ базис дуальный базису (E^i_j). Тогда $\{(\pi^i_j)_e\}$ будет базисом, дуальным базису

$$(E^i_j)_e = \varkappa^{-1}(e^i_j) = \left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_e$$

(см. пример 2.9), а значит,

$$(\pi^i_j)_e = (dg^i_j)_e. \tag{4.1}$$

Лемма 4.3**.** *Имеем $\pi^i_j = \tilde{g}^i_k dg^k_j$, где $\tilde{g}^i_k = g^i_k(g^{-1}) \equiv (g^{-1})^i_k$ – функции на многообразии $GL(n,\mathbb{R})$, которые каждой матрице g ставят в соответствие элемент i-ой строки j-го столбца из матрицы g^{-1}.*

Доказательство. Так как формы π^i_j составляют двойственный базис для базиса (E^i_j) алгебры Ли $GL(n,\mathbb{R})$, они являются левоинвариантными, то есть для любого фиксированного элемента $g \in GL(n,\mathbb{R})$ имеем $L^*_g \pi^i_j = \pi^i_j$ для любого $g \in GL(n,\mathbb{R})$, где L_g – диффеоморфизм левого сдвига, определяемый формулой $L_g(h) = gh$, $h \in GL(n,\mathbb{R})$ (см. § 2.2.). Тогда, в частности, в точке $e \in GL(n,\mathbb{R})$ – единице группы, получим

$$(L^*_g \pi^i_j)_e = (\pi^i_j)_e. \tag{4.2}$$

Применим формулу (1.20) из § 1.3.

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}$$

к левой части равенства (4.2). Получим

$$(L^*_g)_g(\pi^i_j)_g = (\pi^i_j)_e.$$

Подействуем на обе части этого равенства отображением $(L_g^*)^{-1} = L_{g^{-1}}^* : T_e(GL(n,\mathbb{R})) \to T_g(GL(n,\mathbb{R}))$. Тогда с учетом равенства (4.1)

$$(\pi_j^i)_g = L_{g^{-1}}^*(\pi_j^i)_e = L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e. \tag{4.3}$$

Чтобы разобраться с правой частью полученного равенства, докажем ряд вспомогательных формул. Пусть $X_g \in T_g(GL(n,\mathbb{R}))$ – произвольный вектор. Тогда с учетом определения антиувлечения ковекторов $((\phi^* u)(\xi) = u(\phi_* \xi))$, дифференциала функции $(df(X) = X(f))$

$$(L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e)(X_g) = (dg_j^i)_e(((L_{g^{-1}})_*)_g X_g) = (((L_{g^{-1}})_*)_g X_g)(g_j^i) = X_g(g_j^i \circ L_{g^{-1}}) \tag{4.4}$$

Заметим, что для любого $h \in GL(n,\mathbb{R})$ имеем

$$g_j^i \circ L_{g^{-1}}(h) = g_j^i(g^{-1}h) = g_k^i(g^{-1})h_j^k = \tilde{g}_k^i g_j^k(h).$$

Напомним, что матрица g, а значит, и матрица g^{-1} у нас фиксированы, следовательно, $\tilde{g}_k^i$ суть вещественные числа. Тогда, продолжая цепочку равенств (4.4), получим

$$(L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e)(X_g) = X_g(g_j^i \circ L_{g^{-1}}) = X_g(\tilde{g}_k^i g_j^k) = d(\tilde{g}_k^i g_j^k)_g(X_g).$$

Так как это верно для любого вектора X_g, имеем

$$L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e = d(\tilde{g}_k^i g_j^k)_g = \tilde{g}_k^i (dg_j^k)_g.$$

С учетом (4.3) из этого равенства получаем, что для любой фиксированной точки $g \in GL(n,\mathbb{R})$ имеем

$$(\pi_j^i)_g = \tilde{g}_k^i (dg_j^k)_g.$$

Теперь отпускаем точку g. Тогда вещественные числа $\tilde{g}_k^i$ превращаются в функции взятия i,k-го элемента матрицы, обратной матрице g, и имеем

$$\pi_j^i = \tilde{g}_k^i dg_j^k. \tag{4.5}$$

□

Лемма 4.4. *Пусть $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ – произвольный элемент, $F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n,\mathbb{R})$ – гладкое отображение, ставящее каждому реперу $p \in \pi^{-1}(U)$ матрицу перехода от базиса натурального репера к базису репера p. Тогда*

$$(F_U)_*((X|_W)^\flat) = X|_{F_U(W)}\,.$$

Доказательство. Обозначим $g(t) = exp(tX)$ – однопараметрическую подгруппу, соответствующую левоинвариантному векторному полю X. Тогда по определению главного расслоения получим

$$F_U(pg(t)) = F_U(p)g(t).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$, получим

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_U(pg(t)) = ((F_U)_*)_p \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} pg(t) = ((F_U)_*)_p X_p^\flat.$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.15) и определением фундаментального векторного поля (3.4).

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_U(p)g(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_{F_U(p)}(g(t)) = ((L_{F_U(p)})_*)_e \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t) = ((L_{F_U(p)})_*)_e X_e = X_{F_U(p)}.$$

Здесь мы также воспользовались формулой (1.15), формулой (2.13) и левоинвариантностью векторного поля X (см. § 2.2.).

Итак, мы получили, что

$$((F_U)_*)_p X_p^\flat = X_{F_U(p)}.$$

Это верно для любой точки $p \in W$, что и требовалось доказать. □

Согласно лемме 4.4 имеем

$$(F_U)_*(\mathscr{E}_j^i) = E_j^i.$$

Тогда

$$(F_U)^* \pi_j^i = \omega_j^i, \tag{4.6}$$

где (π_j^i) – дуальный базис для базиса (E_j^i) алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Действительно,
$$(F_U)^*\pi^i_j(\mathscr{E}^k_\ell) = \pi^i_j((F_U)_*\mathscr{E}^k_\ell) = \pi^i_j(E^k_\ell) = \delta^i_\ell\delta^k_j.$$
По критерию (см. курс Тензорная алгебра) это означает, что формы $(F_U)^*\pi^i_j$ образуют дуальный базис для базиса $(\mathscr{E}^k_\ell)$ вертикального распределения $\mathscr{V}$.

Наконец, применим отображение F_U^* к равенству (4.5). В левой части мы получим ω^i_j согласно (4.6). Вычислим правую часть, используя то, что $\phi^*(f) = f\circ\phi$, $\phi^*\circ d = d\circ\phi^*$ и $y^i_j = g^i_j\circ F_U$.

$$F_U^*(\tilde{g}^i_k dg^k_j) = (\tilde{g}^i_k\circ F_U)d(g^k_j\circ F_U) = \tilde{y}^i_k dy^k_j,$$

где мы обозначили $\tilde{y}^i_k = \tilde{g}^i_k\circ F_U$ – это функции на W, которые каждому реперу из W сначала ставят в соответствие матрицу перехода от натурального репера к данному, затем берут обратную к этой матрице, и наконец, выделяют (i,k)-й элемент из полученной матрицы.

Итак, мы получили выражения для форм ω^i_j в локальной карте (W,χ):

$$\omega^i_j = \tilde{y}^i_k dy^k_j. \tag{4.7}$$

Рассмотрим произведение функций $g^i_k\tilde{g}^k_j$. Для каждой точки $h\in GL(n,\mathbb{R})$ имеем

$$g^i_k\tilde{g}^k_j(h) = g^i_k(h)\tilde{g}^k_j(h) = h^i_k(h^{-1})^k_j = \delta^i_j(h),$$

где символ δ^i_j обозначает функции, которые каждой матрице $h\in GL(n,\mathbb{R})$ ставят в соответствие единицу при $i=j$ и нуль при $i\neq j$. Подействуем на полученное равенство отображением F_U^*: $(g^i_k\circ F_U)(\tilde{g}^k_j\circ F_U) = \delta^i_j\circ F_U$. Тогда
$$y^i_k\tilde{y}^k_j = \delta^i_j$$

Продифференцировав это тождество, получим

$$dy^i_k\tilde{y}^k_j + y^i_k d\tilde{y}^k_j = 0.$$

Подставив это соотношение в (4.7), получим

$$\omega^i_j = -y^r_j d\tilde{y}^i_r. \tag{4.8}$$

Итак, двухиндексные формы дуального базиса определяются координатными функциями локальной карты (4.7) и (4.8).

Выясним локальное строение 1-форм ω^k.

Теорема 4.5. *Формы (ω^i) суть тензорные компоненты $(\tilde{\omega}^i)$ формы смещения ω относительно стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По определению тензорных компонент формы смещения имеем $\omega = \tilde{\omega}^i\otimes\varepsilon_i$. Тогда

$$(\tilde{\omega}^i)_p(\mathscr{E}_j)_p = (\omega_p(\mathscr{E}_{\varepsilon_j}))^i = (\varepsilon_j)^i = \delta^i_j.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством базисного векторного поля (см. предложение 4.1). С другой стороны, в силу горизонтальности формы смещения (см. теорему 4.1) она будет обращаться в нуль на вертикальных векторных полях, в частности, на фундаментальных векторных полях, то есть $\tilde{\omega}^i_p((\mathscr{E}^k_r)_p) = 0$. Значит, $(\tilde{\omega}^i_p)$ будут элементами дуального базиса для базиса $((\mathscr{E}^i_j)_p, (\mathscr{E}_k)_p)$ и это верно для любой точки p, то есть $\tilde{\omega}^i = \omega^i$. □

Найдем координаты 1-форм ω^i в натуральном базисе (dy^i_j, dy^k) карты (W,χ). Здесь нам также потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.5. *Пусть $p = (m, e_1, \ldots, e_n)\in W$ – произвольная точка, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right\}$ – часть натурального базиса карты (W,χ) в точке p, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m\right\}$ – натуральный базис соответствующей карты (U,φ) в точке m. Тогда*

$$(\pi_*)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m.$$

Доказательство. Напомним сведения из курса Анализ на многообразиях. Пусть на многообразии M дана локальная карта (U,φ) с координатами. Тогда в каждой точке $m\in U$ возникает система касательных векторов $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m\right\}$, которая является базисом касательного пространства $T_m(M)$. Этот базис мы назвали натуральным. Фиксируем произвольный индекс $i = 1, \ldots, n$. Тогда касательный вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m$, рассматриваемый как класс эквивалентности соприкасающихся путей в точке m содержит путь γ, задаваемый в локальной карте (U, φ) уравнениями

$$\gamma : x^j = x_0^j + \delta_i^j t,$$

где $(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \varphi(m)$ – координаты точки m в карте (U, φ), t – параметр.

Применим эту конструкцию для карт (W, χ) и (U, φ) главного расслоения реперов. Фиксируем точку p и индекс i. Тогда вектора $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ и $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_m$ задаются путями γ_W и γ_U, соответственно

$$\gamma_W : \begin{array}{l} y^j = y_0^j + \delta_i^j t \\ y_k^j = (y_k^j)_0 \end{array} ; \quad \gamma_U : \ x^j = x_0^j + \delta_i^j t,$$

где (x_0^j) – координаты точки m в карте (U, φ), $(y_0^j, (y_k^j)_0)$ – координаты точки p в карте (W, χ). Так как отображение $\pi : BM \to M$ в картах (W, χ), (U, φ) задается уравнениями $x^j = y^j$, получим $\gamma_W = \gamma_U \circ \pi$. Тогда по определению дифференциала отображения (см. § 1.2.) в случае вектора, рассматриваемого как класс эквивалентности, получим требуемое соотношение. □

Лемма 4.6. *Пусть* $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y_k^j}\right\}$ *– натуральный базис карты* (W, χ). *Тогда векторные поля* $\frac{\partial}{\partial y_k^j}$ *принадлежат вертикальному распределению.*

Доказательство. Напомним, что векторное поле X, заданное на тотальном пространстве расслоения, называется вертикальным, если оно π-связано с нулевым векторным полем на базе M, то есть для любой точки p выполняется равенство $(\pi_*)_p X_p = 0$.

Фиксируем точку $p \in W$ и пару индексов i, j. Рассмотрим касательный вектор $\frac{\partial}{\partial y_j^i}\Big|_p$. Тогда в карте (W, χ) путь, принадлежащий этому вектору задается уравнениями

$$\gamma : \begin{array}{l} y^k = y_0^k \\ y_\ell^k = (y_\ell^k)_0 + \delta_j^k \delta_\ell^i t, \end{array}$$

где $(y_0^k, (y_\ell^k)_0)$ – координаты точки p в карте (W, χ). Так как отображение $\pi : BM \to M$ задается уравнениями $x^k = y^k$, образом пути γ будет множество точек из $U \subset M$, задаваемых уравнениями $x^k = y_0^k$. Это одна точка $\pi(p) = m$. Такой путь задает нулевой вектор, следовательно, $(\pi_*)_p \frac{\partial}{\partial y_j^i}\Big|_p = 0$ для любой точки p. Таким образом, мы показали, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial y_j^i}$ вертикальны. □

Лемма 4.7. *В карте* (W, χ) *имеем*

$$(\mathscr{E}_k)_p = y_k^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p.$$

Доказательство. Так как $\mathscr{E}_k$ является базисным векторным полем, согласно предложению 4.1 для любой точки $p \in W$ имеем $\omega_p((\mathscr{E}_k)_p) = \varepsilon_k$, где ω_p – значение формы смещения в точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$, ε_k – элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Тогда по определению формы смещения получим

$$(\pi_*)_p((\mathscr{E}_k)_p) = p(\varepsilon_k) = e_k = g_k^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m = g_k^i \circ F_U(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m = y_k^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m. \tag{4.9}$$

Здесь g_k^i сначала обозначают элементы матрицы перехода от натурального базиса к базису $(e_1, \ldots, e_n)$, а затем функции взятия i, k-го элемента.

Так как $\mathscr{E}_k$ – горизонтальные векторные поля, $(\mathscr{E}_k)_p$ – горизонтальные вектора и они раскладываются только по векторам $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ (согласно лемме 4.6 векторы $\frac{\partial}{\partial y_j^i}\Big|_p$ вертикальны). Тогда

$$(\mathscr{E}_k)_p = A_k^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p,$$

где A_j^k – некоторые вещественные числа, которые нужно найти. Для этого воспользуемся равенством (4.9. Имеем

$$(\pi_*)_p \left(A_k^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = y_k^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m.$$

Тогда

$$(\pi_*)_p \left(A_k^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = A_k^j (\pi_*)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \right) = A_k^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_m.$$

Таким образом, получим

$$A_k^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_m = y_k^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m,$$

следовательно, $A_k^j = y_k^j(p)$. Откуда и получаем требуемое утверждение. □

Из доказанное леммы получим

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \tilde{y}_i^j(\mathscr{E}_j)_p.$$

Наконец, мы можем найти компоненты $(\omega^i)_k$ 1-форм ω^i в натуральном базисе. Имеем для любой точки $p \in W$

$$(\omega^i)_k(p) = \omega_p^i\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = \omega_p^i(\tilde{y}_k^j(p)(\mathscr{E}_j)_p) = \tilde{y}_k^j(p)\delta_j^i = \tilde{y}_k^i(p).$$

Здесь мы воспользовались дуальностью частей базисов $(\mathscr{E}_k)$ и (ω^i). Так как полученное равенство верно для любой p, имеем $(\omega^i)_k = \tilde{y}_k^i$. Кроме того, так как 1-формы ω^i суть тензорные компоненты формы смещения относительно стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ и форма смещения является горизонтальной формой, то значения форм ω^i на вертикальных векторных полях $\frac{\partial}{\partial y_j^i}$ будут равны нулю. Тогда учитывая, что координаты 1-формы в дуальном базисе совпадают с ее компонентами, получим разложения 1-форм ω^i по натуральному базису 1-форм

$$\omega^i = \tilde{y}_j^i dy^j.$$

Продифференцируем это соотношение внешним образом и учтем формулы (4.8) (из этой формулы мы выразим $d\tilde{y}_j^i$)

$$d\omega^i = d\tilde{y}_j^i \wedge dy^j = -\tilde{y}_j^r \omega_r^i \wedge dy^j = -\omega_r^i \wedge (\tilde{y}_j^r dy^j) = -\omega_r^i \wedge \omega^r.$$

Итак, мы получили

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j. \tag{4.10}$$

Эти соотношения называются *первой группой структурных уравнений* главного расслоения вещественных реперов.

Замечание 4.2. Обратим внимание, что в отличие от случая произвольного главного расслоения, формы ω_j^i определены однозначно.

Замечание 4.3. Если в качестве базиса матричной алгебры $M_{n,n}$ взять не (e_j^i), а $(-e_j^i)$, то базис вертикального распределения будет $(-\mathscr{E}_j^i)$. Тогда дуальный базис вертикального распределения будет состоять из форм $(-\omega_j^i)$ и первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j. \tag{4.11}$$

Обе формы первый группы структурных уравнений используются в современных исследованиях. В дальнейшем мы будем использовать первый вид структурных уравнений, делая замечания по поводу вида тех или иных формул в случае второго вида структурных уравнений. Договоримся говорить, что мы "работаем в минусах если используется первая группа структурных уравнений вида (4.10) и будем говорить, что мы "работаем в плюсах если используется первая группа структурных уравнений вида (4.11).

Формы (ω_j^i, ω^k) образуют локальный базис модуля $\mathfrak{X}(BM)$, который является дифференциальной алгеброй относительно операции внешнего дифференцирования. Чтобы иметь полную информацию об этой дифференциальной алгебре, нужно научиться дифференцировать любые дифференциальные формы любой степени, а для этого в силу свойств оператора внешнего дифференцирования, достаточно научиться дифференцировать базисные 1-формы, то есть формы ω_j^i и ω^k. Правило дифференцирования одноиндексных форм описаны в первой группе структурных уравнений. Чтобы найти формулу для дифференцирования двухиндексных форм, воспользуемся так называемой *процедурой дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений главного расслоения реперов.

Будем работать в минусах (в плюсах просчитайте самостоятельно). Продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (4.10).

$$0 = -d\omega_j^i \wedge \omega^j + \omega_j^i \wedge d\omega^j = -d\omega_j^i \wedge \omega^j - \omega_j^i \wedge \omega_k^j \wedge \omega^k.$$

Здесь мы воспользовались правилом внешнего дифференцирования внешнего произведения 1-форм из теоремы 1.1 и еще подставили первую группу структурных уравнений. Тогда

$$(d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k) \wedge \omega^j = 0.$$

Обозначим $\Delta\omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ – это 2-формы, а ω^i – 1-формы. Тогда применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 4.4 и следствие из нее), то есть существуют 1-формы (ω^i_{jk}), локально определенные на многообразии BM, такие что

$$\Delta\omega^i_j = \omega^i_{jk} \wedge \omega^k$$

и $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jk\ell}\omega^\ell$, где $\{A^i_{jk\ell}\}$ – локально определенные гладкие функции на многообразии BM. С учетом определения $\Delta\omega^i_j$ получим

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k.$$

Эти уравнения называются *второй группой структурных уравнений главного расслоения реперов*.

Итак, полная группа структурных уравнений главного расслоения реперов имеет вид

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k, \end{cases}$$

где $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jk\ell}\omega^\ell$ и $\{A^i_{jk\ell}\}$ – локально определенная система гладких функций на многообразии BM.

В этих уравнениях содержится вся информация о дифференциальной алгебре главного расслоения реперов, а значит, и о геометрии этого расслоения, в частности, в них содержится вся информация о геометрии исходного многообразия M.

§4.4. Основная теорема тензорного анализа.

4.1. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m)$ (это слой в главном расслоении реперов $\mathscr{B}(M)$ над точкой m) определены n функций $\{e_1, \ldots, e_n\}$ со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$, а именно, функция e_i сопоставляет точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ вектор e_i, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что в канонической карте (W, χ) имеем

$$e_i(p) = y^j_i(p) e^0_j,$$

где $e^0_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_m$ – векторы натурального репера, y^i_j – координаты в локальной карте (W, χ) (они являются элементами матрицы перехода от натурального базиса к базису репера p). Это функции гладкие, так как в локальных картах (W, χ) и $(T_m(M), r_\varphi)$ они задаются формулами $(e_i)^j = y^j_i$. Эти функции от переменных y^i, y^i_j бесконечно дифференцируемы.

Продифференцируем функцию e_i. Так как это функция со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ (в результате мы получим 1-форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$), то правило дифференцирования выглядит так

$$de_i = dy^j_i \otimes e^0_j = dy^j_i \otimes \tilde{y}^k_j e_k = \tilde{y}^k_j dy^j_i \otimes e_k = \omega^k_i \otimes e_k.$$

Здесь мы воспользовались линейностью операции тензорного умножения и формулой (**??**). Обратите внимание, что мы работаем в минусах. Итак,

$$de_i = \omega^k_i \otimes e_k.$$

Эта формула имеет смысл лишь на области $W = \pi^{-1}(U)$ локальной карты. Аналогично на области локальной карты W определены n функций $\{e^1, \ldots, e^n\}$ со значениями в пространстве $T^*_m(M)$, которые сопоставляют каждому реперу $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ i-й ковектор дуального репера. Так как для ковектора натурального базиса и дуального базиса репера p связаны с помощью обратной матрицы, получаем

$$e^i(p) = \tilde{y}^i_j e^j_0, \tag{4.12}$$

где $e^j_0 = dx^j|_m$, $j = 1, \ldots, n$ – ковекторы корепера, дуального натуральному реперу. Следовательно, отображение $(e^i \circ \chi^{-1})$ задается уравнениями $(e^i)_j = \tilde{y}^i_j$, то есть функции e^i являются гладкими. Дифференцируя соотношение (4.12), получим

$$de^i = d\tilde{y}^i_j \otimes y^j_k e^k = -\omega^i_k \otimes e^k.$$

Итак,

$$de^i = -\omega^i_k \otimes e^k.$$

4.2. Пусть t – тензорное поле типа (r,s) на многообразии M. Оно порождает семейство функций $\{t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ на многообразии BM по формуле

$$t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}(p)=(t_{\pi(p)})(e_{i_1},\ldots,e_{i_r},e^{j_1},\ldots,e^{j_s}), \tag{4.13}$$

где $p=(m,e_1,\ldots,e_n)\in BM$, $(e^1,\ldots,e^n)$ – дуальный базис для базиса $(e_1,\ldots,e_n)$. Нетрудно видеть, что это гладкие функции.

Пусть, в частности, дано векторное поле $X\in\mathfrak{X}(M)$, то есть тензорное поле типа (0,1). Применим для него формулу (4.13). Тогда получим систему функций на BM следующего вида

$$X^i(p)=X_m(e^i).$$

Фиксируем точку $m\in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m)\subset BM$ внутренним образом порождается функция

$$X_m:\pi^{-1}(m)\to T_m(M)$$

со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ по формуле

$$X_m(p)=X^i(p)e_i(p),$$

где $p=(m,e_1,\ldots,e_n)\in\pi^{-1}(m)$. Очевидно, что эта функция постоянная, так как ее значение в точке p равно значению векторного поля X как сечения касательного расслоения в точке $m=\pi(p)$. Применим к этой функции оператор внешнего дифференцирования. Здесь e_i рассматривается как функция.

$$0=d(X_m)=dX^i(p)\otimes e_i+X^i(p)de_i=dX^i(p)\otimes e_i+X^i(p)\omega^j_i\otimes e_j=(dX^i(p)+X^j(p)\omega^i_j)\otimes e_i.$$

Теперь мы смотрим на выражение $(dX^i(p)+X^j(p)\omega^i_j)\otimes e_i$ как на форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$. Она будет нулевой тогда и только тогда, когда ее тензорные компоненты $dX^i(p)+X^j(p)\omega^i_j$ равны нулю, то есть

$$dX^i(p)+X^j(p)\omega^i_j=0$$

для каждой точки p из слоя $\pi^{-1}(m)$. В других обозначениях мы можем записать эту формулу так

$$(dX^i+X^j\omega^i_j)\big|_{\pi^{-1}(m)}=0.$$

Напомним, что слои главного расслоения являются интегральными многообразиями вертикального распределения. Следовательно, формы $dX^i+X^j\omega^i_j$ принадлежат кораспределению $\mathbf{C}_{\mathscr{V}}$, ассоциированному вертикальному распределению, а значит, раскладываются по базисным формам ассоциированного кораспределения $\mathbf{C}_{\mathscr{V}}$, то есть по формам Пфаффа (ω^i). С учетом этого в области W имеем

$$dX^i+X^j\omega^i_j={X^i}_j\omega^j, \tag{4.14}$$

где $\{{X^i}_j\}\subset C^\infty(W)$ – некоторые подходящие функции.

Итак, мы доказали, что функции $\{X^i\}$, определенные на многообразии BM удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.14), где $\{{X^i}_j\}\subset C^\infty(W)$ – некоторая система подходящих функций, определенная на W.

Докажем обратное. Пусть на многообразии BM задана система гладких функций $\{X^i\}$, $i=1,\ldots,n$, которая в каждой канонической карте (W,χ) удовлетворяет системе уравнений (4.14). Фиксируем точку $m\in M$. Получим, что на подмногообразии $\pi^{-1}(m)$, которое задается уравнениями $\omega^i=0$, $i=1,\ldots,n$, эти соотношения принимают вид $dX^i+X^j\omega^i_j=0$. Подставим в это равенство соотношения (**??**):

$$dX^i+X^j\tilde{y}^i_k dy^k_j=0.$$

Умножая обе части этого равенства на обратную матрицу (y^ℓ_i), получим

$$y^\ell_i dX^i+X^j dy^\ell_j=0\quad\Leftrightarrow\quad d(y^\ell_j X^j)=0.$$

Откуда следует, что $y^i_jX^j=const$, $i,j=1,\ldots,n$, а именно, $y^i_jX^j=X^i_0$. Это дает возможность корректно определить вектор $X_m\in T_m(M)$ по формуле $X_m=X^i(p)e_i$, где $p=(m,e_1,\ldots,e_n)$ – произвольная точка слоя $\pi^{-1}(m)$. Действительно, если $q=(m,\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_n)\in\pi^{-1}(m)$ – другая точка, то

$$X^i(q)\hat{e}_i=X^i(q)y^j_i(q)e^0_j=X^j_0e^0_j.$$

С другой стороны,

$$X^i(p)e_i=X^i(p)y^j_i(p)e^0_j=X^j_0e^0_j.$$

Таким образом, $X^i(q)\hat{e}_i = X^i(p)e_i$ и вектор X_m определен корректно.

Семейство векторов $X = \{X_m\}$ образуют гладкое векторное поле на многообразии M. В самом деле, фиксируем натуральное сечение (то есть сечение, которое ставит в соответствие каждой точке $m \in U$ натуральный репер в этой точке) $s : U \to BM$. Это локальное сечение. Оно существует в силу локальной тривиальности главного расслоения. Тогда компоненты векторного поля X в натуральном базисе имеют вид

$$\hat{X}^i(m) = X^i(p_0) = X^i \circ s(m),$$

то есть гладкие функции как композиция таковых. Следовательно, компоненты семейства векторов X являются гладкими функциями, а значит, X является гладким векторным полем. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4.6. *Задание векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{X^i\}$ на пространстве расслоения вещественных реперов BM, удовлетворяющих уравнениям*

$$dX^i + X^j\omega^i_j = X^i{}_j\omega^j.$$

Аналогичным образом (докажите самостоятельно) доказывается следующая теорема.

Теорема 4.7. *Задание формы $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{\eta_i\}$ на пространстве расслоения вещественных реперов BM, удовлетворяющих уравнениям*

$$d\eta_i - \eta_j\omega^j_i = \eta_{ij}\omega^j,$$

где $\{\eta_{ij}\}$ – система подходящих гладких функций, определенная на каждой канонической карте (W, χ).

Аналогичным образом, но более громоздкими рассуждениями доказывается основная теорема тензорного анализа.

Теорема 4.8. *Задание тензорного поля типа (r, s) на гладком многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ на многообразии BM, удовлетворяющий в любой координатной окрестности (W, χ) соотношениям*

$$dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k, \tag{4.15}$$

где $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\}$ – подходящая система гладких функций в области W.

Замечание 4.4. Во-первых, еще раз напомним, что функции $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$, определенные на BM, в каждой точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ суть компоненты тензора t_m в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Во-вторых, выведенные формулы получены при проведении расчетов в минусах, то есть для структурных уравнений вида $d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j$. Если проводить вычисления в плюсах, то есть работать со структурными уравнениями $d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$, то дифференциальные уравнения (4.15) будут выглядеть следующим образом

$$dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} - t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k - \ldots - t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} + \ldots + t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k,$$

то есть знаки меняются на противоположные. Запишите уравнения, которым будут удовлетворять функции для векторного поля и 1-формы в случае плюса в структурных уравнениях.

§4.5. Связности в главном расслоении вещественных реперов.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $\mathscr{B}(M)$ – главное расслоение вещественных реперов над M. Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и рассмотрим каноническую локальную карту (W, χ) на BM. Как мы видели в предыдущем параграфе в модуле $\mathfrak{X}(W)$ существует базис $b = (\mathscr{E}^i_j, \mathscr{E}_k)$, где $\mathscr{E}^i_j = (E^i_j)^\flat$ – фундаментальные векторные поля (базис вертикального распределения), $\mathscr{E}_k$ – базисные векторные поля, порожденные стандартным базисом арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$, (E^i_j) – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$.

Вычислим форму тривиальной связности главного расслоения $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$. Так как диффеоморфизм $\psi_U = (\pi, F_U)$, а значит, $\pi = p_1 \circ \psi_U$ и $F_U = p_2 \circ \psi_U$, где p_1 и p_2 – проекции на первый и второй сомножители соответственно, из леммы 4.4 получим

$$E^i_j = (F_U)_*(\mathscr{E}^i_j) = (p_2 \circ \psi_U)_*(\mathscr{E}^i_j); \quad E_k = \pi_*(\mathscr{E}_k) = (p_1 \circ \psi_U)_*\mathscr{E}_k,$$

где E_k – новое обозначение – образ базисных векторных полей при отображении π_*. Итак, векторные поля $\left(E^i_j, E_k\right)$ будут образом базиса b при диффеоморфизме ψ_U, то есть будут базисом модуля $\mathfrak{X}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$.

В этом базисе связность тривиального расслоения $(U \times GL(n,\mathbb{R}), U, p_1, GL(n,\mathbb{R}))$ задается формой связности $\Theta = p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j$. Действительно, для любого элемента $(X,0)$ из горизонтального распределения связности на тривиальном расслоении имеем

$$\Theta((X,0)) = (p_2^*(\pi_j^i))((X,0))E_i^j = \pi_j^i((p_2)_*(X,0))E_i^j = \pi_j^i(0)E_i^j = 0.$$

Так как $\Theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$, где Π – связность на тривиальном расслоении, Λ – изоморфизм, мы показали, что любой элемент горизонтального распределения принадлежит ядру Π. Обратно, пусть элемент (X,Y) принадлежит ядру связности Π. Нам нужно показать, что $Y = 0$, а значит, этот элемент имеет вид $(X,0)$, то есть лежит в горизонтальном распределении. Имеем $\Theta((X,Y)) = 0$, так как (X,Y) из ядра Π, а значит, из ядра Θ. Тогда $p_2^*(\pi_j^i)((X,Y)) = 0$, а значит, $\pi_j^i(((p_2)_*(X,Y)) = 0$ и $\pi_j^i(Y) = 0$. Это равенство верно для любой формы π_j^i. Так как эти формы образуют дуальный базис на $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, мы получаем, что для векторного поля Y все его координаты в базисе (E_j^i) равны нулю, то есть $Y = 0$, а значит, элемент (X,Y) принадлежит горизонтальному распределению.

Таким образом, мы показали, что построенное выше горизонтальное распределение тривиального главного расслоения и форма Θ относятся к одной и той же связности, то есть Θ действительно является формой связности.

Вернемся к главному расслоению реперов. Мы построили форму связности $\Theta = p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j$ для тривиального расслоения $(U \times GL(n,\mathbb{R}), U, p_1, GL(n,\mathbb{R}))$. Тогда диффеоморфизм ψ_U переведет эту форму связности в форму связности расслоения $(W, U, \pi|_W, GL(n,\mathbb{R}))$:

$$\theta_U = \psi_U^*\Theta = \psi_U^* \circ p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = (p_2 \circ \psi_U)^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = F_U^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = \omega_j^i \otimes E_i^j.$$

Итак, мы получили, что

$$\theta_U = \omega_j^i \otimes E_i^j,$$

то есть формы (ω_j^i) дуального базиса $(\mathscr{E}_j^i, \mathscr{E}_k)$, являются тензорными компонентами тривиальной связности главного расслоения реперов.

Лемма 4.8. *Пусть (P,M,π,G) – произвольное главное расслоение, θ_1 и θ_2 – формы двух связностей на нем. Тогда форма $\zeta = \theta_1 - \theta_2$ является горизонтальной формой, то есть для любого вертикального векторного поля $X \in \mathscr{V}$ имеем $\zeta(X) = 0$.*

Доказательство. Согласно предложению **??** имеем

$$\theta_1 \circ \Lambda = \theta_2 \circ \Lambda = id.$$

Тогда $(\theta_1 - \theta_2) \circ \Lambda = 0$. Так как $Im\,\Lambda = \mathscr{V}$, то для любого $X \in \mathscr{V}$ существует векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(P)$, такое что $\Lambda(Y) = X$. Следовательно, $(\theta_1 - \theta_2)(X) = 0$ для любого вертикального поля X. □

С учетом доказанной леммы получим, что если в расслоении реперов $\mathscr{B}(M)$ фиксирована связность с формой θ, то в области W канонической локальной карты на многообразии BM формы $\theta_j^i - \omega_j^i$ являются горизонтальными (это тензорные компоненты двух связностей: с формой θ и тривиальной). Тогда они раскладываются по системе Пфаффа вертикального распределения $\{\omega^i\}$. В качестве элементов такой системы можно взять тензорные компоненты формы смещения. Другими словами, существуют такие функции $\{\gamma_{jk}^i\} \subset C^\infty(W)$, такие что

$$\theta_j^i - \omega_j^i = \gamma_{jk}^i \omega^k.$$

Выразим из этих соотношений омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов (4.10) (мы работаем в минусах):

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \gamma_{jk}^i \omega^k \wedge \omega^j = -\theta_j^i \wedge \omega^j - \gamma_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

Здесь для установки скобок альтернации мы воспользовались примером 7.3 из курса тензорной алгебры. Обозначим $-\gamma_{[jk]}^i = \frac{1}{2}S_{jk}^i$. Тогда первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \tag{4.16}$$

где $S_{jk}^i = -2\gamma_{[jk]}^i$, и называется (в этом виде) *первой группой структурных уравнений связности.*

Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный базис (ε_i). Тогда обозначим

$$\Omega = \frac{1}{2}S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i.$$

Это 2-форма со значениями в $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что она определена глобально на BM и, очевидно, является горизонтальной, то есть обращается в нуль, если хотя бы один ее аргумент вертикален. Эта форма называется *формой кручения связности.*

Напомним, что вторая группа структурных уравнений связности в произвольном главном расслоении имеет вид

$$d\theta^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c + R^a_{k\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\{\theta^a\}$ – тензорные компоненты формы связности θ. Эти уравнения были выведены без использования связности структурной группы, а значит, могут быть применены в случае полной линейной группы, которая не является связной. В случае главного расслоения реперов имеем (см. § 2.3.)

$$\theta^a = \theta^i_j; \quad \tfrac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j.$$

Обозначим коэффициенты $R^a_{k\ell} = \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}$. Тогда вторая группа структурных уравнений связности главного расслоения реперов примет вид

$$d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell. \tag{4.17}$$

Обозначим $\Phi = \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^k \otimes E^j_i$. Это 2-форма со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ структурной группы. Можно показать, что эта форма определена глобально. Она является горизонтальной и называется *формой кривизны связности.*

Замечание 4.5. Если в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ вместо базиса (E^i_j) базис $(-E^i_j)$ (то есть базис получающийся из матриц $(-e^i_j)$ полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то тензорные компоненты формы связности θ заменятся на формы $-\theta^i_j$, а формы ω^i_j заменятся на формы $-\omega^i_j$. При этом первая группа структурных уравнений главного расслоения реперов будет иметь вид $d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$. Рассмотрим разность $-\theta^i_j + \omega^i_j$. Эта форма будет горизонтальной, следовательно раскладывается по одноиндексным омегам: $-\theta^i_j + \omega^i_j = \gamma^i_{jk}\omega^k$. Здесь коэффициенты γ^i_{jk} отличаются от прежних коэффициентов знаком. Выразим из этого равенства двухиндексные омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j + \gamma^i_{jk}\omega^k \wedge \omega^j = \theta^i_j \wedge \omega^j - \gamma^i_{[jk]}\omega^j \wedge \omega^k = \theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где $\frac{1}{2}S^i_{jk} = -\gamma^i_{[jk]}$. Обратите внимание, что полученные здесь функции S^i_{jk} также знаком отличаются от соответствующих функций, полученных выше.

Для второй группы структурных уравнений заметим, что структурные константы $C^{ik\ell}_{jpt}$ не изменятся, так как определяются соотношениями $[e^i_j, e^k_p] = C^{ik\ell}_{jpt}e^t_\ell$. Так как компоненты формы связности в таком базисе имеют вид $(-\theta^i_j)$ из второй группы структурных уравнений связности главного расслоения реперов получим $-d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell$ или

$$d\theta^i_j = \theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jk\ell} = -\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}$. Знак волны мы будем в дальнейшем опускать. Опять видим, что компоненты формы кривизны поменяли знак.

Итак, вычисляя в плюсах, мы получили следующие две группы структурных уравнений связности

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j + \tfrac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k; \quad d\theta^i_j = \theta^i_k \wedge \theta^k_j + \tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell.$$

Обратите внимание, что хотя мы выводили эти уравнения в предположении, что базис алгебры Ли состоит из элементов $(-E^i_j)$ в структурных уравнениях стоят тензорные компоненты формы связности, определенные относительно базиса (E^i_j). Это приводит к трудностям, хотя до 2000 года в диссертационных исследованиях использовалась именно эта форма структурных уравнений (в плюсах). В дальнейшем мы будем работать в минусах, а соответствующие результаты в плюсах рекомендуем читателю получать самостоятельно.

Проведем процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений связности. Для этого введем обозначения

$$\Omega^i = \tfrac{1}{2}S^i_{jk}\omega^k \wedge \omega^\ell; \quad \Phi^i_j = \tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell \tag{4.18}$$

для тензорных компонент форм кручения и кривизны связности. Тогда структурные уравнения связности примут вид

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \Omega^i; \quad d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \Phi^i_j. \tag{4.19}$$

Продифференцируем внешним образом первое уравнение из (4.19):

$$0 = -d\theta^i_j \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge d\omega^j + d\Omega^i.$$

Подставим вместо $d\theta^i_j$ и $d\omega^j$ их выражения из (4.19), заменив во втором случае индекс i на индекс j:

$$0 = -(-\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \Phi^i_j) \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge (-\theta^j_k \wedge \omega^k + \Omega^j) + d\Omega^i.$$

Приведем подобные и учтем обозначения (4.18):

$$d\Omega^i - \Phi^i_j \wedge \omega^j + \theta^i_j \wedge \Omega^j = 0. \tag{4.20}$$

Продифференцируем внешним образом первое соотношение из (4.18):

$$\begin{aligned}2d\Omega^i &= dS^i_{jk} \wedge (\omega^j \wedge \omega^k) + S^i_{jk} d(\omega^j \wedge \omega^k) = dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k - S^i_{jk}\omega^j \wedge d\omega^k = \\ &= dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{jk}(-\theta^j_\ell \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}S^j_{\ell t}\omega^\ell \wedge \omega^t) \wedge \omega^k - S^i_{jk}\omega^j \wedge (-\theta^k_\ell \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}S^k_{\ell t}\omega^\ell \wedge \omega^t) = \\ &= \left(dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что сначала дифференцируется внешнее произведение функции (0-формы) и 2-формы, а затем продифференцировали внешнее произведение двух 1-форм. Каждый раз мы пользовались теоремой (1.1). Далее, мы подставили первую группу структурных уравнений в их первоначальном виде (4.16), не забыв поменять свободный индекс (в первом случае на j, а во втором случае на k). При этом индексы суммирования нам также пришлось поменять. После раскрытия скобок мы видим, что в каждом слагаемом есть внешнее произведение одноиндексных омег. Сделаем у них индексы суммирования одинаковыми и вынесем за скобку (сделаем все индексы суммирования j и k). Внутри больших скобок мы привели подобные, воспользовавшись кососимметричностью S^i_{jk} по нижним индексам.

Умножим (4.20) на 2 и подставим полученное выражение для $2\Omega^i$ и обозначение (4.18) для Ω^i и Φ^i_j:

$$\left(dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k - R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega^j + S^j_{k\ell}\theta^i_j \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Опять здесь есть внешнее произведение двух одноиндексных омег и мы их вынесем за скобку. Но сначала сгруппируем слагаемые, которые очень напоминают основную теорему тензорного анализа 4.8 и введем для этой суммы обозначение:

$$\nabla S^i_{jk} = dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell \tag{4.21}$$

и подставим его в полученное равенство

$$\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell\right) \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Обозначим $\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell\right) \wedge \omega^j = \Psi^i_k$. Это 2-форма. Тогда получим $\Psi^i_k \wedge \omega^k = 0$ и применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 4.4), то есть существуют 1-формы θ^i_{kj}, такие что $\Psi^i_k = \theta^i_{kj} \wedge \omega^j$ и

$$\theta^i_{[kj]} = A^i_{kj\ell}\omega^\ell, \tag{4.22}$$

где $A^i_{kj\ell}$ – система подходящих функций, кососимметричная по индексам k и j. Вернемся к обозначению Ψ^i_k. Тогда получим

$$\left(\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell - \theta^i_{kj}\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Теперь применима лемма Картана (см. следствие 4.3):

$$\nabla S^i_{jk} + S^i_{\ell t}S^\ell_{jk}\omega^t - R^i_{jk\ell}\omega^\ell - \theta^i_{kj} = B^i_{jk\ell}\omega^\ell, \tag{4.23}$$

где $B^i_{jk\ell}$ – система подходящих функций.

Лемма 4.9**.** *Во введенных обозначениях* $\nabla S^i_{[jk]} = S^i_{jk}$.

Доказательство. Проальтернируем по индексам j и k соотношение (4.21):

$$\nabla S^i_{[jk]} = dS^i_{[jk]} - S^i_{\ell[k}\theta^\ell_{j]} - S^i_{[j|\ell|}\theta^\ell_{k]} + S^\ell_{[jk]}\theta^i_\ell = dS^i_{jk} - \frac{1}{2}S^i_{\ell k}\theta^\ell_j + \frac{1}{2}S^i_{\ell j}\theta^\ell_k - \frac{1}{2}S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + \frac{1}{2}S^i_{k\ell}\theta^\ell_j + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell = \nabla S^i_{jk}.$$

Здесь мы использовали кососимметричность функций S^i_{jk} по паре нижних индексов. □

Проальтернируем соотношения (4.23) по индексам j и k, учтем (4.22) и лемму 4.9. Тогда получим, что ∇S^i_{jk} выражается через одноиндексные омеги с некоторыми коэффициентами, которые мы обозначим $S^i_{jk\ell}$, а именно,

$$dS^i_{jk} - S^i_{\ell k}\theta^\ell_j - S^i_{j\ell}\theta^\ell_k + S^\ell_{jk}\theta^i_\ell = S^i_{jk\ell}\omega^\ell.$$

С учетом соотношений $\theta^i_j=\omega^i_j+\gamma^i_{jk}\omega^k$ из этих уравнений получим

$$dS^i_{jk}-S^i_{\ell k}\omega^\ell_j-S^i_{j\ell}\omega^\ell_k+S^\ell_{jk}\omega^i_\ell=\tilde S^i_{jk\ell}\omega^\ell.$$

Здесь мы слагаемые с одноиндексными омегами перенесли в правую часть равенства, вынесли за скобку и полученную в скобку сумму обозначили через $\tilde S^i_{jk\ell}$. Это функции определенные на координатных окрестностях W. С ученом основной теоремы тензорного анализа (см. теорему 4.8) из этого следует, что система функций $\{S^i_{jk}\}\subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле S типа (2,1) на многообразии M. Этот тензор называется *тензором кручения связности.*

Аналогичную процедуру дифференциального продолжения можно провести для второй группы структурных уравнений связности. Продифференцируем внешним образом вторую группу структурных уравнений связности (4.19)

$$0=-d\theta^i_k\wedge\theta^k_j+\theta^i_k\wedge d\theta^k_j+d\Phi^i_j=-(-\theta^i_t\wedge\theta^t_k+\Phi^i_k)\wedge\theta^k_j+\theta^i_k\wedge(-\theta^k_t\wedge\theta^t_j+\Phi^k_j)+d\Phi^i_j=d\Phi^i_j-\Phi^i_k\wedge\theta^k_j+\theta^i_k\wedge\Phi^k_j. \quad (4.24)$$

После дифференцирования мы подставили вместо $d\theta^i_k$ и $d\theta^k_j$ выражения из второй группы структурных уравнений связности, изменив нужным образом свободные индексы (при этом следите, чтобы индексы суммирования не повторяли свободные индексы – их при необходимости также нужно поменять). Слагаемые с тремя двухиндексными тетами взаимно уничтожатся.

Далее, продифференцируем внешним образом вторые соотношения из обозначений (4.18):

$$2d\Phi^i_j=dR^i_{jk\ell}\wedge\omega^k\wedge\omega^\ell+R^i_{jk\ell}d\omega^k\wedge\omega^\ell-R^i_{jk\ell}\omega^k\wedge d\omega^\ell=dR^i_{jk\ell}\wedge\omega^k\wedge\omega^\ell+R^i_{jk\ell}(-\theta^k_t\wedge\omega^t+\frac12 S^k_{tr}\omega^t\wedge\omega^r)\wedge\omega^\ell-$$
$$-R^i_{jk\ell}\omega^k\wedge(-\theta^\ell_t\wedge\omega^t+\frac12 S^\ell_{tr}\omega^t\wedge\omega^r)$$

Здесь мы подставили первую группу структурных уравнений связности.

Подставим выражение для $d\Phi^i_j$ и обозначения (4.18) для Φ^i_j в равенство (4.24):

$$(dR^i_{jk\ell}-R^i_{tk\ell}\theta^t_j-R^i_{jt\ell}\theta^t_k-R^i_{jkt}\theta^t_\ell+R^t_{jk\ell}\theta^i_t)\wedge\omega^k\wedge\omega^\ell+\frac12 R^i_{jk\ell}S^k_{tr}\omega^t\wedge\omega^r\wedge\omega^\ell-\frac12 R^i_{jk\ell}S^\ell_{tr}\omega^k\wedge\omega^t\wedge\omega^r=0.$$

Введем обозначение

$$\nabla R^i_{jk\ell}=dR^i_{jk\ell}-R^i_{tk\ell}\theta^t_j-R^i_{jt\ell}\theta^t_k-R^i_{jkt}\theta^t_\ell+R^t_{jk\ell}\theta^i_t$$

и вынесем две одноиндексные омеги за скобки. Для этого нужным образом переобозначим индексы суммирования.

$$(\nabla R^i_{jk\ell}+\frac12 R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t-\frac12 R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r)\wedge\omega^k\wedge\omega^\ell=0.$$

Обозначим $\Psi^i_{j\ell}=(\nabla R^i_{jk\ell}+\frac12 R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t-\frac12 R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r)\wedge\omega^k$ и применим обобщенную лемму Картана (см. теорему 4.4):

$$\Psi^i_{j\ell}=\theta^i_{j\ell k}\wedge\omega^k,\quad \theta^i_{j[\ell k]}=A^i_{j\ell kr}\omega^r.$$

Тогда

$$(\nabla R^i_{jk\ell}+\frac12 R^i_{jr\ell}S^r_{tk}\omega^t-\frac12 R^i_{jkt}S^t_{\ell r}\omega^r-\theta^i_{j\ell k})\wedge\omega^k=0. \quad (4.25)$$

Аналогично лемме 4.9 доказывается, что из кососимметричности $R^i_{jk\ell}$ по двум последним индексам следует кососимметричность 1-форм $\nabla R^i_{jk\ell}$ по двум последним индексам. С учетом этого применим лемму Картана к (4.25) и проальтернируем полученное выражение по индексам ℓ и k (проделайте вычисления самостоятельно). Все получившиеся слагаемые кроме $\nabla R^i_{jk\ell}$ будут линейными комбинациями одноиндексных омег. Перенесем эти слагаемые в правую часть и обозначим их $R^i_{jk\ell t}\omega^t$, то есть

$$dR^i_{jk\ell}-R^i_{tk\ell}\theta^t_j-R^i_{jt\ell}\theta^t_k-R^i_{jkt}\theta^t_\ell+R^t_{jk\ell}\theta^i_t=R^i_{jk\ell t}\omega^t.$$

С учетом того, что $\theta^i_j=\omega^i_j+\gamma^i_{jk}\omega^k$, получим

$$dR^i_{jk\ell}-R^i_{tk\ell}\omega^t_j-R^i_{jt\ell}\omega^t_k-R^i_{jkt}\omega^t_\ell+R^t_{jk\ell}\omega^i_t=\tilde R^i_{jk\ell t}\omega^t.$$

По основной теореме тензорного анализа (см. теорему 4.8) из этого следует, что система функций $\{R^i_{jk\ell}\}\subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле типа (3,1) на многообразии M. Это тензорное поле называется *тензором кривизны связности.*

§4.6. Ковариантное дифференцирование.

Гладкое многообразие, для которого фиксирована связность в его главном расслоении реперов, называется *пространством аффинной связности*. На таком многообразии можно построить аппарат инвариантного дифференциального исчисления – основной аппарат современной геометрии.

Пусть M – n-мерное пространство аффинной связности, $\theta = \{\theta^i_j\}$ – форма связности. Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M. В соответствии с основной теоремой тензорного анализа (см. теорему 4.8), задание тензорного поля t равносильно заданию системы функций $\{t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ на многообразии BM, удовлетворяющие уравнениям

$$dt^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\ldots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\omega^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} + t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\ldots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_s}_k = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r k}\omega^k, \tag{4.26}$$

где $\{\omega^i_j\}$ – компоненты формы тривиальной связности, $\{t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r k}\}$ – локально определенная система подходящих функций на многообразии BM. Напомним, что эти уравнения имеют смысл лишь в координатной окрестности W, так как эти формы имеют вид $\omega^i_j = \tilde{y}^i_k dy^k_j$. С другой стороны, мы знаем, что $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$. Выразим двухиндексные омеги и подставим их в (4.26):

$$dt^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\ldots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\theta^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r} + t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\ldots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_s}_k = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\omega^k, \tag{4.27}$$

где $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r k} - t^{j_1\ldots j_s}_{pi_2\ldots i_r}\gamma^p_{i_1k} - \ldots + t^{j_1\ldots j_{s-1}p}_{i_1\ldots i_r}\gamma^{j_s}_{pk}$. Обозначим

$$t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} - t^{j_1\ldots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\theta^k_{i_1} - \ldots - t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r} + t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_1}_k + \ldots + t^{j_1\ldots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_s}_k = \nabla t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}.$$

Тогда последние соотношения запишутся в виде

$$\nabla t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\omega^k.$$

Заметим, что формы $\nabla t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ глобально определены на многообразии BM, а формы $\{\omega^i\}$, будучи тензорными компонентами глобально определенной формы смещения, также глобально определены и линейно независимы в каждой точке многообразия BM. Тогда функции $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}$ также глобально определены на BM, то есть $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} \in C^\infty(BM)$.

Проводя процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27), то есть дифференцируя их внешним образом и используя лемму Картана, получим соотношения вида

$$\nabla t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k,p}\omega^p.$$

В силу основной теоремы тензорного анализа это означает, что система гладких функций $\{t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\}$ определяет тензорное поле типа $(r+1, s)$ на многообразии M, который называется *ковариантным дифференциалом тензорного поля* t относительно заданной связности. Будем обозначать ковариантный дифференциал тензорного поля t через ∇t.

Пример 4.1. Проведем процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27) в случае векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Напомним, что задание векторного поля X на многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{X^i\}$ на многообразии BM – тотальном пространстве расслоения вещественных реперов. Тогда соотношения (4.27) примут вид

$$dX^i + X^j\theta^i_j = X^i{}_{,j}\omega^j.$$

Продифференцируем их внешним образом:

$$0 + dX^j \wedge \theta^i_j + X^j d\theta^i_j = dX^i{}_{,j} \wedge \omega^j + X^i{}_{,j} d\omega^j.$$

Подставим вместо $d\theta^i_j$ и $d\omega^i$ структурные уравнения (4.16) и (4.17).

$$(X^j{}_{,k}\omega^k - X^k\theta^j_k) \wedge \theta^i_j + X^j(-\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell) = dX^i{}_{,j} \wedge \omega^j + X^i{}_{,j}(-\theta^j_k \wedge \omega^k + \frac{1}{2}S^j_{k\ell}\omega^k \wedge \omega^\ell). \tag{4.28}$$

Два слагаемых с двумя двухиндексными омегами взаимно уничтожатся. Все остальное переносим направо. Введем обозначение (в него войдут три слагаемых из последнего равенства с необходимым переобозначением индексов суммирования)

$$dX^i{}_{,j} + X^k{}_{,j}\theta^i_k - X^i{}_{,k}\theta^k_j = \nabla X^i{}_{,j}.$$

Тогда (4.28) перепишется в виде

$$\nabla X^i{}_{,j} \wedge \omega^j - \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k \wedge \omega^\ell = 0. \tag{4.29}$$

Дальнейшие рассуждения можно провести двумя разными путями. Первый путь нам уже известен – это использование обобщенной леммы Картана и леммы Картана (так мы доказывали, что тензоры кручения и кривизны действительно являются тензорами). Проведите эти рассуждения самостоятельно.

Мы посмотрим новый путь, идею которого будем использовать в дальнейшем. Заметим, что $\nabla X^i{}_{,j}$ – это 1-формы, определенные на многообразии BM. В его модуле $\mathfrak{X}^*(BM)$ 1-форм существует глобально определенный базис (θ^i_j, ω^k). Утверждая это, мы воспользовались тем, что и двухиндексные теты (тензорные компоненты формы связности), и одноиндексные омеги (тензорные компоненты формы смещения) определены глобально на BM. При этом нетрудно убедиться (используя соотношения $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$), что формы θ^i_j будут линейно независимы. Тогда формы $\nabla X^i{}_{,j}$ можно разложить по базису (θ^i_j, ω^k):

$$\nabla X^i{}_{,j} = A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k + A^i_{jk}\omega^k,$$

где $A^{ik}_{j\ell}$ и A^i_{jk} – некоторые гладкие функции на многообразии BM. Подставим полученное разложение в (4.29):

$$(A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k + A^i_{jk}\omega^k) \wedge \omega^j - \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Раскроем скобки.

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k \wedge \omega^j + A^i_{jk}\omega^k \wedge \omega^j - \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j\omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j}\omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

В левой части этого равенства стоит 2-форма. Напомним, что в модуле 2-форм $\Lambda_2(BM)$ есть канонический базис $\{\theta^i_j \wedge \omega^k, \omega^\ell \wedge \omega^t\, (\ell < t)\}$. Он образован из базиса $\mathfrak{X}^*(BM)$ (подробности можно посмотреть в курсе Тензорный анализ или в курсе Анализ на многообразиях). Если в последнем равенстве мы сможем получить разложение по этому базису (такого разложения в нем нет, так как у внешних произведений одноиндексных омег индексы не упорядочены), то используя линейную независимость базисных форм, мы получим соотношения на коэффициенты такой линейной комбинации. Заметим, что внешние произведения $\theta^i_j \wedge \omega^k$ упорядочивать не нужно, так как на первом месте всегда стоит форма θ^i_j, которая в базисе $\mathfrak{X}^*(BM)$ всегда стоит раньше всех одноиндексных омег. Чтобы упорядочить внешние произведения одноиндексных омег, используем задачу 7.5 из курса Тензорной алгебры:

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k \wedge \omega^j - 2A^i_{[jk]}\omega^j \wedge \omega^k (j < k) - 2\cdot\frac{1}{2}R^i_{j[k\ell]}X^j\omega^k \wedge \omega^\ell (k < \ell) + 2\cdot\frac{1}{2}S^j_{[k\ell]}X^i{}_{,j}\omega^k \wedge \omega^\ell (k < \ell) = 0.$$

Так как тензоры кручения и кривизны кососимметричны по последним двум нижним индексам, альтернация снимется. У одноиндексных омег переобозначим индексы суммирования так, чтобы их внешнее произведение вынести за скобку:

$$A^{ik}_{j\ell}\theta^\ell_k \wedge \omega^j + (-2A^i_{[k\ell]} - 2\cdot\frac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j + 2\cdot\frac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j})\omega^k \wedge \omega^\ell (k < \ell) = 0.$$

Теперь у нас получилось разложение по базису 2-форм. Применяем линейную независимость.

$$A^{ik}_{j\ell} = 0; \quad -A^i_{[k\ell]} - \tfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}X^j + \tfrac{1}{2}S^j_{k\ell}X^i{}_{,j} = 0.$$

Итак, мы получаем, что для разложения $\nabla X^i{}_{,j}$ коэффициенты при двухиндексных тетах равны нулю, а значит, эта форма раскладывается только по одноиндесным омегам.

$$\nabla X^i{}_{,j} = A^i_{jk}\omega^k.$$

Переходя, как и выше, от форм двухиндексных тет к двухиндексным омегам, получим основную теорему тензорного анализа, то есть система функций $\{X^i{}_{,j}\}$ задает тензорное поле типа (1,1).

Систему функций A^i_{jk} обычно обозначают $X^i{}_{,j,k}$.

Задача 4.1. Проведите процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27) в случае 1-формы.

Замечание 4.6. В дальнейшем, доказывая, что система функций, заданная на многообразии BM, задает тензорное поле на многообразии M, мы не будем от уравнений с тетами (тензорными компонентами формы связности) переходить к уравнениям с омегами (которые присутствуют в основной теореме тензорного анализа). Мы будем сразу делать вывод о том, что задано тензорное поле, так как в каждом случае этот переход один и тот же.

Замечание 4.7. Можно показать, что задание связности в главном расслоении реперов многообразия M равносильно заданию оператора Кошуля и, следовательно, оператора ковариантного дифференцирования на многообразии M (см. курс Анализ на многообразиях). При этом компоненты $\hat{t}^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}$ ковариантного дифференциала тензорного поля t относительно натурального базиса (как они определялись в курсе Анализ на многообразиях) и функции $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}$, заданные на многообразии BM, связаны соотношением

$$\hat{t}^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} = t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} \circ s,$$

где $s : M \to BM$ – локальное сечение, ставящее точкам области U локальной карты на M натуральные реперы в этих точках.

Тензоры кручения и кривизны связности определенные в этом курсе и в курсе Анализ на многообразиях также совпадают. Подробности можно почитать в монографии Кириченко "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях"или в файле diffs6.ps.