О некоторых свойствах преобразований линейных расширений почти контактных метрических многообразий.

Конформные преобразования римановых и постримановых многообразий применяются в создании современной теории гравитационного поля, их свойства связаны с проблемами, рассматриваемыми в квантовой теории поля, а также с вычислением критических размерностей $n = 26$ и $n = 10$ в теории струн, и т.п. С римановым многообразием (в том числе и римановым многообразием, на котором кроме римановой метрики фиксированы какие-либо еще тензорные поля) могут быть связаны другие гладкие многообразия, несущие какие-либо тензорные структуры (касательное и кокасательное расслоения, T^1-расслоения, линейные расширения и т.д.). Тогда конформное преобразование на исходном римановом многообразии индуцирует некоторое преобразование тензорной структуры, связанного с ним многообразия. В связи с этим встает задача получения явного вида индуцированных преобразований и изучения их свойств.

Пусть M – связное гладкое $2n+1$-мерное многообразие. Пусть на нем фиксирована четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ – тензорное поле типа (1,1), η – 1-форма, ξ – векторное поле, g – риманова метрика. При этом выполняются соотношения

$$1)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 2)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 3)\, \eta(\xi) = 1; \quad 4)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Такая четверка тензорных полей называется *почти контактной метрической структурой.* Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.*

Рассмотрим декартово произведение $M \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – это вещественная прямая, M – почти контактное метрическое многообразие. Как известно, на таком многообразии порождается почти эрмитова структура. Напомним, что *почти эрмитовой структурой* на гладком многообразии называется пара (J, h), где J – тензорное поле типа (1,1) и $J^2 = -id$, а h – риманова метрика, для которой $h(JX, JY) = h(X, Y)$, X, Y – произвольные векторные поля на гладком многообразии. Многообразие $M \times \mathbb{R}$ вместе с такой почти эрмитовой структурой называется *линейным расширением.*

На многообразии M перейдем
от структуры (Φ, ξ, η, g) к структуре $(\Phi, \tilde{\xi} = e^{-f}\xi, \tilde{\eta} = e^{f}\eta, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M. Такой переход называется *конформным преобразованием почти контактной метрической структуры.* Построим линейное расширение исходного и преобразованного почти контактных метрических многообразий. В результате получим на гладком многообразии $M \times \mathbb{R}$ две почти эрмитовых структуры (J, h) и $(\tilde{J}, \tilde{h})$. Переход от первой ко второй назовем *индуцированным преобразованием* почти эрмитовой структуры на линейном расширении.

Задание почти контактной метрической структуры на гладком многообразии равносильно заданию подрасслоения в главном расслоении реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Эти реперы имеют вид $(x, \xi_x, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $a = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$, $\hat{a} = \hat{1}, \ldots, \hat{n}$, $x \in M$. Указанное подрасслоение называется присоединенной G-структурой. Используя эти реперы, построим два множества реперов для линейного расширения $M \times \mathbb{R}$

$$B_1 = \{(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_x, \nu)\}; \quad B_2 = \{(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}})\},$$

где ν – единичный вектор вещественной прямой, $m = (x, t) \in M \times \mathbb{R}$ – произвольная точка, $\varepsilon_0 = \frac{\xi_x - \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon_{\hat{0}} = \frac{\xi_x + \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}$. Система реперов B_2 задает подрасслоение в главном расслоении реперов со структурной группой $U(n+1)$.

Конформное преобразование почти контактной метрической структуры можно задать так:

$$\psi : (x, \xi_x, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \to (x, e^{-f}(x)\xi_x, e^{-f}(x)\varepsilon_a, e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}).$$

Пара (ψ, id) будет изоморфизмом присоединенных G-структур исходного и конформно преобразованного почти контактных метрических многообразий. Тогда для индуцированного преобразования на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ в случае реперов B_1 получим (отображения присоединенных G-структур обозначим той же буквой ψ)

$$\psi : (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu) \to (m, e^{-f}(x)(\varepsilon_a, e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}, e^{-f}(x)\xi_m, \nu),$$

Это преобразование реперов из B_1 порождает преобразование реперов из B_2, которое обозначим той же буквой

$$\psi : (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}}) \to (m, \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}),$$

где $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(x)\varepsilon_a$, $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}$,

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \tfrac{(e^{-f}(x)+1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(x)-1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \tfrac{(e^{-f}(x)-1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(x)+1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}.$$

Это отображение однозначно задает индуцированное преобразование почти эрмитовой структуры (J, h).

Теорема 1. *Индуцированное преобразование почти эрмитовой структуры линейного расширения будет конформным тогда и только тогда, когда функция f является константой.*

Напомним, что конформным преобразованием почти эрмитовой структуры называется переход от почти эрмитовой структуры (J, h) к почти эрмитовой структуре $(J, e^{2f}h)$, где f – гладкая функция.

Теорема 2. *Пусть на гладком многообразии M задано конформное преобразование почти контактной метрической структуры. Тогда на его линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ индуцированное преобразование $(J, h) \to (\tilde{J}, \tilde{h})$ имеет вид*

$$\tilde{J}(X) = JX + (e^f - 1)h(X, \xi)\nu - (e^{-f} - 1)h(X, \nu)\xi;$$
$$\tilde{h}(X, Y) = e^{2f}h(X, Y) + (1 - e^{2f})h(X, \nu)h(Y, \nu),$$

где X, Y – произвольные векторные поля на $M \times \mathbb{R}$.

Отметим, что если взять произвольное почти эрмитово многообразие и задать преобразование его почти эрмитовой структуры по данным формулам, где ξ – произвольное единичное векторное поле, а $\nu = J\xi$, то полученная пара $(\tilde{J}, \tilde{h})$ всегда будет почти эрмитовой структурой.

Напомним, что действие группы $U(n)$ на пространстве W тензорных полей типа $(3, 0)$, удовлетворяющих свойствам

$$t(X, Y, Z) = -t(X, Z, Y) = -t(X, JY, JZ),$$

определяет четыре неприводимых подпространства: W_1, W_2, W_3, W_4 и W распадается в прямую сумму этих подпространств:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4.$$

Для почти эрмитова многообразия M с почти эрмитовой структурой (J, g) ковариантный дифференциал ∇F келеровой формы $F(X, Y) = g(JX, Y)$ (в римановой связности метрики g) принадлежит пространству W. Критерии принадлежности каждому из этих подпространств можно записать с использованием виртуального тензора

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X)$$

и структурный тензора

$$C(X, Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)).$$

Виртуальный тензор однозначно представим в виде суммы бесследного и примитивного тензорного полей

$$B = B_0 + B_1,$$

а 3-форма, определяемая структурным тензором $\mathscr{C}(X,Y,Z) = \langle\langle X, C(Y,Z)\rangle\rangle$, где $\langle\langle X,Y\rangle\rangle = g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X,JY)$, представима в виде суммы квазисимметричного и кососимметричного тензорных полей

$$\mathscr{C} = C_0 + C_1,$$

$Alt\, C_0 = 0$, $Alt\, C_1 = C_1$. Тогда подпространства будут определяться условиями

$$\begin{array}{lllll} W_1: & C_0 = 0 & & B_0 = 0 & B_1 = 0 \\ W_2: & & C_1 = 0 & B_0 = 0 & B_1 = 0 \\ W_3: & C_0 = 0 & C_1 = 0 & B_1 = 0 & \\ W_4: & C_0 = 0 & C_1 = 0 & & B_0 = 0 \end{array}$$

В зависимости от того, какие из четырех тензорных полей B_0, B_1, C_0, C_1 обнуляются, получаются 16 классов почти эрмитовых многообразий.

Возвращаемся к преобразованиям линейных расширений почти контактных метрических многообразий. Возникает вопрос: какие из условий

$$C_0 = 0;\ C_1 = 0;\ B_0 = 0;\ B_1 = 0$$

остаются инвариантными при преобразованиях линейных расширений? Был получен следующий ответ:

Теорема 3. *1) условие $C_1 = 0$ инвариантно (то есть инвариантен класс $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$)*
2) условие $C_0 = 0$ инвариантно тогда и только тогда, когда функция f, определяющая конформное преобразование структуры на исходном почти контактном метрическом многообразии M, будет константой. При этом структурный и виртуальный тензоры линейного расширения будут инвариантны, хотя почти комплексная структура и метрика меняются.
3) условие $B_1 = 0$ инвариантно тогда и только тогда, когда функция f будет константой. При этом структурный и виртуальный тензоры линейного расширения будут инвариантны, хотя почти комплексная структура и метрика меняются.
4) условие $B_0 = 0$ не инвариантно.