

## Рабочий план

Чтения лекций и проведения занятий по курсу «Анализ на многообразиях»  
для студентов 1 года магистратуры (2 семестр 2014/2015 уч.г.)

Лектор – доц. Игнаточкина Л. А.

### Лекции и семинары.

1. Необходимые сведения из топологии. ([1] § 1.2) -- 1 час  
Домашнее задание: пример 1.1, 1.2, 1.5 (доказать), задача 1.1.
2. Гладкие отображения областей евклидовых пространств. Гладкие структуры и гладкие многообразия. ([1] §1.3, §1.4) – 3 часа  
Домашнее задание: пример 1.12, 1.13, 1.14 (доказать), задача 1.3, 1.4, 1.5, пример 1.16 (доказать)
3. Гладкие отображения многообразий. Алгебра гладких функций многообразия. Касательные векторы как соприкасающиеся пути. ([1] §1.5, §1.6п.6.1) – 4 часа  
Домашнее задание: задача 1.7, пример 1.21 (разобрать), задача 1.8 (разобрать доказательство первого равенства, второе доказать), задача 1.9.
4. Касательные векторы как инфинитезимальные дифференцирования. Натуральный базис ([1] §1.6п.6.2, п.6.3) – 2 часа  
Домашнее задание: доказать линейность  $\xi$ , задача 1.10 (разобрать)
5. Векторные расслоения. Касательное расслоение. ([1]§1.7) – 2 часа  
Домашнее задание: доказать все утверждения сформулированные, но не доказанные на занятии.
6. Гладкие сечения векторных расслоений ([1]§1.8) – 2 часа  
Домашнее задание: доказать все утверждения сформулированные, но не доказанные на занятии.
7. Векторные поля. Коммутатор векторных полей ([1]§1.9, §1.10) – 4 часа.  
Домашнее задание: задача 1.11, пример 1.25 (доказать оставшееся), пример 1.26, пример 1.27 (разобрать)
8. Коллоквиум. – 2 часа
9. Кокасательное расслоение. Дифференциальные 1-формы ([1]§1.11) – 2 часа  
Домашнее задание: прочитать и законспектировать [2] §2п.2.1, §3п.3.1
10. Тензорные поля. Примеры тензорных полей ([1]§1.12) – 2 часа  
Домашнее задание: прочитать и законспектировать [2] §4п.4.1, доказать теорему 4.3
11. Операции с тензорными полями ([1]§1.13) – 4 часа  
Домашнее задание: задача 1.15, 1.17, 1.18, 1.20, 1.21.
12. Симметрические и кососимметрические тензорные поля. Эндоморфизмы симметризации и альтернирования. ([1]§1.14) – 2 часа  
Домашнее задание: задача 1.22, 1.23, 1.25, 1.26, 1.27
13. Операция внешнего умножения  $\wedge$ . ([1]§1.14, [2]§7 теорема 7.6) – 2 часа  
Домашнее задание: задача 1.28, 1.29, 1.30
14. Решение задач ([2]§6 задача 6.25 – 6.32, пример 6.15, 6.16, 6.17) – 2 часа
15. Контрольная работа. – 2 часа

ИТОГО 36 часов

### Программа коллоквиума.

1. Гладкие отображения областей евклидовых пространств. Диффеоморфизмы. Пример.
2. Гладкие многообразия. Пример:  $\mathbb{R}^n$ . Различные гладкие структуры на  $\mathbb{R}$ .
3. Гладкие многообразия. Пример: векторное пространство.
4. Гладкие многообразия. Пример: аффинное пространство.
5. Гладкие многообразия. Пример: окружность. Атлас из двух карт.
6. Гладкие многообразия. Пример: окружность. Атлас из четырех карт.
7. Гладкие отображения многообразий. Гладкие функции. Алгебра гладких функций.
8. Касательный вектор как класс соприкасающихся путей. Независимость определения от выбора карты.
9. Координаты касательного вектора. Формула преобразования координат при переходе от одной карты к другой.
10. Реперное отображение. Задание структуры векторного пространства в касательном пространстве.
11. Касательный вектор как инфинитезимальное дифференцирование.
12. Натуральный базис. Различные точки зрения на его векторы.
13. Векторные расслоения. Касательное расслоение.

14. Гладкие сечения векторного расслоения. Структуры векторного пространства и модуля в множестве сечений.
15. Теорема о локальном базисе в модуле гладких сечений векторного расслоения.
16. Векторные поля на гладком многообразии как гладкие сечения касательного расслоения и как дифференцирования алгебры гладких функций. Натуральный базис.
17. Коммутатор векторных полей и его свойства.

### Примерные варианты контрольной работы.

#### Вариант 1.

1. Докажите, что для тензорных полей  $t$  типа  $(r,0)$  и  $T$  типа  $(0,s)$  верно равенство  $t \otimes T = T \otimes t$ .
2. Упростите выражение  $C^1_1(\eta \otimes \xi)$ , где  $\eta$  -- 1-форма,  $\xi$  -- векторное поле.
3. Докажите, что у любого кососимметричного тензорного поля  $t$  компоненты вида  $t_{ii\dots}$  равны нулю.

#### Вариант 2.

1. Докажите, что для векторных полей  $X$  и  $Y$  равенство  $X \otimes Y = Y \otimes X$  вообще говоря не верно.
2. Упростите выражение  $C^1_1(L \otimes X)$ , где  $L$  – эндоморфизм,  $X$  – векторное поле.
3. Докажите, что если применить эндоморфизм симметризации к тензорному полю, то получится симметричное тензорное поле.

### Вопросы к зачету.

1. Гладкие многообразия. Примеры.
2. Гладкие отображения гладких многообразий. Примеры.
3. Касательный вектор как класс соприкасающихся путей. Координаты касательного вектора.
4. Касательный вектор как инфинитезимальное дифференцирование. Натуральный базис.
5. Векторные расслоения. Касательное расслоение.
6. Гладкие сечения векторных расслоений. Локальный базис модуля гладких сечений.
7. Векторные поля как гладкие сечения и дифференцирования алгебры гладких функций. Натуральный базис.
8. Коммутатор векторных полей.
9. Кокасательное расслоение. Дифференциальные 1-формы как гладкие сечения кокасательного расслоения и как линейные отображения.
10. Векторное расслоение тензоров. Тензорные поля как гладкие сечения и как полилинейные отображения.
11. Операции с тензорными полями и их свойства.
12. Симметричные и кососимметричные тензорные поля. Эндоморфизмы альтернирования и симметризации.
13. Операция внешнего умножения.

### Основная литература.

1. <http://iaign.ucoz.ru/index/magistratura/0-18> [электронный ресурс] Краткое руководство к действию по тензорному анализу.
2. Игнаточкина Л.А. Руководство к решению задач по тензорной алгебре векторных пространств. Москва, МПГУ, 2014.
3. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Одесса, 2013.
4. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия, Наука, 1988.

### Дополнительная литература.

5. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология. Москва, Издательство МЦНМО, 2010.
6. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения, Мир, 1975.
7. Джет Неструев Гладкие многообразия и наблюдаемые, МЦНМО, 2000.
8. Постников М.М. Лекции по геометрии Семестр V. Римановы многообразия, Наука, 1998.
9. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, Мир, 1964.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
 Федеральное государственное бюджетное образовательное  
 учреждение высшего профессионального образования  
 «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ)

математический факультет

Кафедра геометрии

**РЕЙТИНГ-ПЛАН**

по дисциплине «Анализ на многообразиях»

**2014-2015 учебный год, семестр 2**

Направление подготовки – 010100.68 Математика

Профиль/Магистерская программа «Компьютерные науки и математика»

(квалификация «магистр»)

очная форма обучения

БАЗОВАЯ ЧАСТЬ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ			
Виды контроля	Тема / форма аттестационной работы	Мин. кол-во баллов	Макс. кол-во баллов
Контроль посещаемости занятий	Посещение лекционных занятий	5	15
	Посещение семинарских и практических занятий	2.5	7.5
	Посещение семинарских и практических занятий	2.5	7.5
Текущий контроль работы на семинарских и практических занятиях	Проверочные работы по теории и задачам (1 работа +2у.е)	15	25
Рубежный контроль	1. Коллоквиум	20	40
	2. Контрольная работа.	10	20
		10	20
Промежуточная аттестация	зачет	10	20
		10	20
Итого		50	100
К промежуточной аттестации (экзамену) не допускаются студенты, набравшие в течение семестра менее 31 балла			
Подготовка _____ является обязательным условием получения итоговой рейтинговой оценки за семестр не зависимо от количества накопленных баллов			
Посещение: присутствие на занятии +2 у.е., отсутствие на занятии -2у.е, опоздание -1у.е. Расчет баллов за посещение производится пропорционально сумме у.е. за посещения.			
Выполнение любого задания на уровне ниже «удовлетворительного» = 0 рейтинговых баллов			

**РАСЧЕТ ИТОГОВОЙ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ**

от 50 баллов

«зачет»

**РАСЧЕТ ИТОГОВОЙ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ**

до 49 баллов

«неудовлетворительно»

от 50 до 64 баллов

«удовлетворительно»

от 65 до 84 баллов

«хорошо»

от 85 до 100 баллов

«отлично»

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ**

№ задания и форма аттестационной работы	Тема	Мин. кол-во баллов	Макс. кол-во баллов
Решение задач и доказательство утверждений по темам, перечисленным в зачете.		1	5

Разработчик: Игнаточкина Л.А.

Зав. кафедрой: Атанасян С.Л.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.