Отображения присоединенных G-структур в исследовании преобразований гладких многообразий, наделенных дополнительными тензорными структурами.

Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором фиксирован максимальный гладкий атлас.

Под тензорной структурой на гладком многообразии будем понимать систему тензорных полей, фиксированную на гладком многообразии. Тензорные поля в основном будем рассматривать как полилинейные отображения модулей векторных полей и модулей 1-форм.

В каждой точке гладкого многообразия M определяется касательное пространство. Это векторное пространство, размерность которого равна размерности многообразия. В нем есть базисы. Добавляя к каждому базису точку, в которой определено касательное пространство, получаем репер. Собираем все реперы по всем точкам многообразия – получаем еще одно гладкое многообразие BM. На нем справа свободно и гладко действует полная линейная группа $GL(n,\mathbb{R})$. Каждая матрица переводит один репер в другой так, что является для них матрицей перехода. Указанное действие определяет главного расслоение вещественных реперов,то есть четверку $(BM, M, \pi, GL(n,\mathbb{R}))$. Слой над точкой – это множество всех реперов касательного пространства в данной точке многообразия.

Пусть теперь на многообразии M задано тензорное поле, например риманова метрика g (симметричное положительно определенное тензорное поле типа (2,0)). Тогда определяется система функций на многообразии BM (там точки – это реперы $p = (m, e_1, \dots, e_n)$)

$$g_{ij}(p) = g_m(e_i, e_j).$$

Эти гладкие функции называются компонентами римановой метрики на пространстве расслоения реперов. Все свойства римановой метрики g могут быть сформулированы в терминах ее компонент.

Среди всех реперов есть такие, в которых компоненты фиксированного тензорного поля (в нашем случае это риманова метрика) имеют наиболее простой вид. Таких реперов меньше и группа матриц перехода тоже меньше. В случае римановой метрики берем ортонормированные реперы и получаем ортогональную группу $O(n,\mathbb{R})$ (матрицы перехода от ортонормированного репера к ортонормированному). Более того, выбирая множество реперов, матрицы перехода от каждого к каждому образуют ортогональную группу, мы однозначно определим риманову метрику. При этом говорят, что задание римановой метрики на гладком многообразии M равносильно заданию подрасслоения $(OM, M, \pi, O(n,\mathbb{R}))$ в главном расслоении реперов со структурной группой $O(n,\mathbb{R})$. Оно называется присоединенной G-структурой (короче будем называть ее G-структурой).

Рассмотрим преобразование исходного тензорного поля (у нас риманова метрика). Например, конформное преобразование, то есть переход от метрики g к метрике $\tilde{g} = e^{2f}g$, где f – гладкая функция на многообразии M. Каждой римановой метрике будет соответствовать своя G-структура. Обозначим вторую из них теми же буквами, но с волнами $(\tilde{O}M, M, \tilde{\pi}, O(n,\mathbb{R}))$. Тогда возникает пара отображений (ψ, id), где $\psi : OM \to \tilde{O}M$

$$p = (m, e_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{e}_i = e^{-f}(m)e_i).$$

Эта пара будет изоморфизмом главных расслоений и будет однозначно задавать конформное преобразование метрики в том смысле, что зная ψ мы можем получить соотношение $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Эту ситуацию можно обобщить. Риманову метрику оставим, а ее преобразование зададим с помощью отображений (ψ, id)

$$\psi :\, p = (m, e_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{e}_i = f_i^j e_j).$$

На матрицу $F = (f_i^j)$ накладывается ряд требований. Во-первых, она должна быть обратима. Во-вторых, если взять другой репер p' из первой G-структуры и построим репер $\tilde{p}' = \psi(p')$, то матрица перехода от $\tilde{p}$ к $\tilde{p}'$ должна быть ортогональной. Выполнения этих условий достаточно, чтобы однозначно определилась вторая метрика. В конкретных ситуациях преобразование тензорной структуры естественным образом возникает именно в виде отображения ψ.

В результате, во-первых, имея конкретный вид матрицы (f_i^j), можно получить соотношение между исходной римановой метрикой и преобразованной. Подробно мы посмотрим этот переход ниже на другом примере. Во-вторых, используя отображение ψ можно получить соотношения для систем функций, задающих тензорные поля, исходной и преобразованной тензорных структур. В нашем случае это например компоненты тензора Римана-Кристоффеля, то есть тензора кривизны римановой связности. Что позволяет по свойству одной структуры сразу видеть какое свойство соответствует ему на преобразованной структуре.

Я работаю с двумя структурами: почти эрмитовой и почти контактной метрической. Почти эрмитова структура – это пара (J, g), состоящая из антиинволютивного эндоморфизма J и римановой структуры g, согласованной с J.

Почти контактная метрическая структура – это четверка тензорных полей (Φ, η, ξ, g), где Φ – эндоморфизм, ξ – векторное поле, η – 1-форма, g – риманова структура. При этом должны выполняться 5 тождеств, в которых участвуют перечисленные тензорные поля.

Начнем с почти эрмитовых структур. Много примеров: комплексное проективное (келерово), евклидово комплексное (келерово), комплексное гиперболическое пространство (келерово), $S^1 \times S^{2k+1}$ (придумал Вайсман, локально конформно келерово), шестимерная сфера (приближенно келерово), касательные пространства над неплоскими римановыми многообразиями (W_2, не келерово), линейные расширения почти контактных метрических, T^1-расслоения с почти контактной метрической базой.

Классификация: 16 классов в 1980 году Грей и Хервелла. Те же классы но с других позиций получены В.Ф. Кириченко. На втором способе получения 16 классов остановимся подробнее. Рассмотрим ковариантный дифференциал эндоморфизма J в римановой связности метрики g, то есть ∇J. Он определяет два тензорных поля типа $(2, 1)$ по формулам

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X); \quad C(X,Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)(JY) + \nabla_Y(J)JX - \nabla_X(J)JY).$$

и однозначно по ним восстанавливается. Первое тензорное поле называется виртуальным тензором, а второе – структурным. В свою очередь виртуальный тензор однозначно представим в виде бесследного и примитивного тензорного поля, а структурный – в виде кососимметрического тензорного поля и квазисимметричного. В результате получаем, что ∇J однозначно определяется четырьмя тензорными полями. Каждое из них может обращаться в тождественный нуль. Перебираем всевозможные случаи обращения в нуль этих полей. Таких вариантов – 16. Договоримся об обозначении классов: сопоставим
кососимметричному $\to W_1$
квазисимметричному $\to W_2$
бесследному $\to W_3$
примитивному $\to W_4$.
Будем в обозначении писать то W, для которого соответствующее тензорное поле не равно нулю. Например, через $W_1 \oplus W_4$ будет обозначаться класс почти эрмитовых многообразий, для которых структурный тензор кососимметричен, а виртуальный – примитивен (здесь квазисимметричное тензорное поле нулевое и бесследное тензорное поле тоже нулевое).

Грей и Хервелла в своей статье 1980 года показали, что классы, в которых есть символ W_4, являются конформно инвариантными. При этом локально определено такое конформное преобразования, что если класс обозначается $U \oplus W_4$, то конформно преобразованное многообразие будет принадлежать классу U. Другими словами, почти эрмитова структура многообразия упрощается.

Напомним, что под конформным преобразованием почти эрмитовой структуры (J, g) понимают переход к структуру $(J, \tilde{g} = e^{2f}g)$ (очевидно также почти эрмитовой), где f – некоторая гладкая функция на многообразии M.

Итак, для конформно инвариантных классов почти эрмитовых многообразий имеет смысл рассматривать конформные преобразования.

Метод изучения одного почти эрмитова многообразия – безусловно модификация метода подвижного репера Картана (будем называть его методом присоединенной G-структуры). Он заключается в следующем. В комплексификация касательных пространств определенным образом строятся реперы. Они называются А-реперами. Рассматривается главное расслоение всех А-реперов над почти эрмитовым многообразием. В результате каждое тензорное поле, заданное на почти эрмитовом многообразии, характеризуется набором функций, определенных на тотальном пространстве расслоения А-реперов (они называются компонентами тензорного поля на пространстве расслоения А-реперов). Введем эти функции для тензорных полей, с которыми мы работаем на почти эрмитовом многообразии. Как известно, необходимым условием существования почти эрмитовой структуры на гладком многообразии является его четномерность и ориентируемость. В связи с этим обозначим размерность многообразия M через $2n$. Договоримся, что индексы $i, j, k = 1, \ldots, 2n$, $a, b, c, d, f, h = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$. А-репер будем обозначать так: $p = (m, \varepsilon_i) \equiv (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$. Компоненты эндоморфизма J и метрики g определяются так:

$$J_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_i) = J_i^j(p)\varepsilon_j; \quad g_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = g_{ij}(p).$$

А-реперы хороши тем, что функции J_i^j и g_{ij} имеют простой вид

$$(J_i^j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом определяются компоненты структурного и виртуального тензоров

$$B_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = B_{ij}^k(p)\varepsilon_k; \quad C_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = C_{ij}^k(p)\varepsilon_k$$

Каждое из этих тензорных полей имеет только две ненулевые группы компонент в А-репере. Обозначим их следующим образом:

$$B_{\hat{a}b}^c = B^{ca}{}_b; \quad B_{a\hat{b}}^{\hat{c}} = B_{ca}{}^b; \quad C_{\hat{b}\hat{c}}^a = B^{abc}; \quad C_{bc}^{\hat{a}} = B_{abc}.$$

Итак, структурный и виртуальный тензоры определяются соответственно системами функций $\{B^{ab}{}_c; B_{ab}{}^c\}$ и $\{B^{abc}; B_{abc}\}$.

Пусть теперь на гладком многообразии M кроме исходной почти эрмитовой структуры (J, g) появляется еще конформно преобразованная почти эрмитова структура $(J, \tilde{g} = e^{2f}g)$. Каждая из них определяет свои А-реперы и системы функций, задающие структурный и виртуальный тензоры каждой из почти эрмитовых структур, оказываются определенными на разных многообразиях. В этой ситуации даже те авторы, которые при исследовании одного многообразия используют метод присоединенной G-структуры, переходят в случае преобразований к инвариантному исчислению Кошуля и находят соотношения между основными тензорными полями в инвариантном виде. Это приводит к существенному усложнению формул и приходится ограничиваться изучением только простых классов.

В результате встает задача: найти способ изучения обоих почти эрмитовых многообразий (исходного и конформно преобразованного), используя сразу два тотальных пространства расслоения А-реперов и систем функций, определенных на них.

Решить эту задачу получилось следующим образом. Обозначим тотальный пространства расслоения А-реперов исходного многообразия через P, а конформно преобразованного – через $\tilde{P}$ (все объекты второго многообразия будем обозначить теми же буквами, что и на первом, но с волной). Тогда корректно определяется отображение $\psi : P \to \tilde{P}$ по формуле $\psi(m, \varepsilon_i) = (m, e^{-f}(m)\varepsilon_i)$. Тогда пара $(\psi, id : U(n) \to U(n))$ является изоморфизмом главных расслоений $(P, M, U(n), \pi)$ и $(\tilde{P}, M, U(n), \tilde{\pi})$. Тогда ненулевые компоненты структурных и виртуальных тензоров почти эрмитовых многообразий будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned}(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; \quad (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a \delta_c^b - \beta^b \delta_c^a;\\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc}; \quad (e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta_b^c - \beta_b \delta_a^c,\end{aligned}$$

где $\{\beta_a, \beta^a \equiv \beta_{\hat{a}}\}$ – компоненты в А-репере 1-формы $df \equiv \beta$. Также были получены соотношения на тензорные компоненты форм смещения и римановых связностей рассматриваемых многообразий. Эти формулы и основная теорема тензорного анализа позволяют находить аналогичные соотношения для ковариантных дифференциалов структурных и виртуальных тензоров и систем функций, получаемых в процессе дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия (например, для системы функций, определяющих голоморфную секционную кривизну почти эрмитова многообразия).

Посмотрим применение полученных формул на примере (эта задача встала передо мной еще в кандидатской, но решить ее я смогла только сейчас). Вернемся к классификации почти эрмитовых многообразий. Нам понадобятся 4 класса: $\{0\}$ – класс келеровых многообразий (структурный и виртуальный тензоры тождественно равны нулю, то есть ковариантный дифференциал J нуль), класс W_1 (приближенно келеровы многообразия), класс W_4 и класс $W_1 \oplus W_4$ (будем называть их VG-многообразиями). Эти классы включаются друг в друга следующим образом: (картинка). При этом все включения строгие. Отметим, что класс W_1 выделяется в классе VG условием $\alpha = 0$, где $\alpha = -\frac{1}{n-1}\delta F \circ J$, $F(X,Y) = g(JX,Y)$. F – келерова форма, α – форма Ли.

По обозначениям мы видим, что два из четырех – W_4 и VG – являются конформно инвариантными. Класс W_4 (в размерности выше 4) совпадает с классом локально конформно келеровых многообразий (то есть для каждой точки такого многообразия существует окрестность и гладкая функция, что пара $(J, e^{2f}g)$ будет в этой окрестности келеровой структурой). Так как класс W_1 включен в класс VG, то очевидно, что класс VG будет содержать все локально конформно приближенно келеровы многообразия. Возникает вопрос, а может быть он совпадет с классом локально конформно приближенно келеровых многообразий? Ответ оказался утвердительным.

Так как класс W_4 уже изучен, достаточно рассматривать только VG-многообразия, не принадлежащие классу W_4. Будем называть такие многообразия собственными VG-многообразиями. В окрестности каждой точки, для которой $B = B^{abc}B_{abc}$ отлично от нуля, определяется функция $f = ln\sqrt{B} \equiv ln\sqrt{||N||}$, которая в случае локально конформно приближенно келерова многообразия задает конформное преобразование структуры к приближенно келеровой структуре (структура упрощается – виртуальный тензор обнуляется). Рассмотрим такую же функцию для окрестностей точек произвольного VG-многообразия. Оказывается, что в результате мы получаем многообразие, которое „проще“ исходного: для него $\tilde{B} = 1$ (хотя априори оно не обязано быть приближенно келеровым). Работа с этим тождеством позволила доказать, что форма Ли $\tilde{\alpha}$ конформно преобразованного многообразия нулевая, а значит, оно является приближенно келеровым. Тогда исходное собственное VG-многообразие является локально конформно приближенно келеровым.

Используя такой же подход моему магистранту Аленникову М.А. удалось доказать, что любое собственное шестимерное VG-многообразие точечно постоянной гомолорфной секционной кривизны является конформно плоским.

Итак, озвученный подход к изучению почти эрмитовых многообразий позволяет сводить изучение свойств „сложных“ многообразий к изучению более простых многообразий. Для этого нужно набрать как можно больше преобразований, упрощающих структуру многообразия. Для почти эрмитовых многообразий такие преобразования мы построили с моим магистрантом Суздалевым С.К., используя линейные расширения почти контактных метрических многообразий и преобразования почти контактных метрических многообразий.

Линейные расширения почти контактных метрических структур наиболее наглядно показывают преимущество задания преобразования тензорной структуры в виде отображения ψ присоединенных G-структур. Напомним, что под линейным расширением многообразия M называется декартово произведение $M \times \mathbb{R}$. Если многообразие M имеет почти контактную метрическую структуру (Φ, η, ξ, g), то его линейное расширение будет иметь почти эрмитову структуру (J, h). Подвергнем структуру на M конформному преобразованию, то есть перейдем к структуре $(\Phi, e^{-f}\xi, e^f\eta, e^{2f}g)$. Для него также можно построить линейное расширение и оно будет иметь почти эрмитову структуру $(\tilde{J}, \tilde{h})$. Тогда преобразование $(J, h) \to (\tilde{J}, \tilde{h})$ легко задается с помощью отображения ψ присоединенных G-структур. Для реперов вида $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi, \nu)$, где ν – это единичный вектор прямой $\mathbb{R}$, а $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi)$ – A-базис почти контактной метрической структуры, отображение ψ очевидно будет иметь вид

$$\psi : (m, \varepsilon_i, \xi, \nu) \to (e^{-f}(m)\varepsilon_i, e^{-f}\xi, \nu).$$

Из этих реперов строятся A-реперы для почти эрмитовой структуры по формуле

$$(E_a, E_{\hat{a}}, E_0 = \frac{\xi - i\nu}{\sqrt{2}}, E_{\hat{0}} = \frac{\xi + i\nu}{\sqrt{2}}).$$

В A-реперах преобразование почти эрмитовой структуры примет вид

$$(E_a, E_{\hat{a}}, E_0, E_{\hat{0}}) \to (e^{-f}E_a, e^{-f}E_{\hat{a}}, \frac{(e^{-f}+1)E_0 + (e^{-f}-1)E_{\hat{0}}}{2}, \frac{(e^{-f}-1)E_0 + (e^{-f}+1)E_{\hat{0}}}{2})$$

По которому достаточно легко устанавливается инвариантный закон преобразования почти эрмитовой структуры.

$$\tilde{J}(X) = JX + (e^f - 1)g(X, \xi)\nu - (e^{-f} - 1)g(X, \nu)\xi; \quad \tilde{g}(X, Y) = e^{2f}g(X, Y) + (1 - e^{2f})g(X, \nu)g(Y, \nu).$$

Для почти контактных метрических многообразий я провела построения аналогичные построениям для почти эрмитовых многообразий. Ситуация там гораздо сложнее и выгоды предлагаемого подхода более наглядны.

Напомним, что почти контактной метрической структурой называется четверка (Φ, ξ, η, g), где Φ – эндоморфизм, ξ – векторное поле, η – 1-форма, g – риманова структура. Они удовлетворяют 5 требованиям. Ковариантный дифференциал Φ в римановой связности метрики g определяет уже не два, а шесть тензорных полей, однозначно определяющих $\nabla\Phi$. Они называются структурными тензорами почти контактного метрического многообразия. По аналогии с виртуальным и структурным тензорами почти эрмитова многообразия шесть структурных тензоров почти контактного метрического многообразия определяют 2048 классов таких многообразий.

Вопрос о конформной инвариантности всех этих классов оставался открытым. Поэтому я начала изучение именно с него. Напомним, что под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры понимают переход от четверки (Φ, ξ, η, g) к четверке $(\Phi, \tilde{\xi} = e^{-f}, \tilde{\eta} = e^f\eta, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – некоторая гладкая функция на многообразии M. Необходимым условием существования почти контактной метрической структуры на гладком многообразии является его нечетномерность. Поэтому обозначим размерность многообразия M через $2n+1$. Договоримся, что индексы $i, j, k = 0, 1, \ldots, 2n$, $a, b, c, d = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$.

Для почти контактного метрического многообразия строится A-репер $p = (m, \xi_m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$. В таких реперах компоненты эндоморфизма Φ и метрики g имеют вид

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим конформное преобразование почти контактной метрической структуры и обозначим через P тотальное пространство расслоения A-реперов исходного многообразия и через $\tilde{P}$ – тотальное пространство A-реперов преобразованного многообразия. Тогда отображение $\psi : P \to \tilde{P}$ по формуле

$$\psi(m, \xi_m, \varepsilon_i) = (m, e^{-f}(m)\xi_m, e^{-f}(m)\varepsilon_i).$$

Это отображение задает изоморфизм главных расслоений и позволяет найти формулы, связывающие шесть структурных тензоров исходного и конформно преобразованного почти контактного метрического многообразия:

$$(e^f\circ\pi)(\tilde{C}^{ab}{}_c\circ\psi)=C^{ab}{}_c+\beta^a\delta^b_c-\beta^b\delta^a_c;\quad (e^f\circ\pi)(\tilde{C}^{abc}\circ\psi)=C^{abc};\quad (e^f\circ\pi)(\tilde{C}^{ab}\circ\psi)=C^{ab};$$
$$(e^f\circ\pi)(\tilde{C}^a{}_b\circ\psi)=C^a{}_b-\beta_0\delta^a_b;\qquad (e^f\circ\pi)(\tilde{D}^{ab}\circ\psi)=D^{ab};\qquad (e^f\circ\pi)((\tilde{\tilde{D}}^a\circ\psi)=D^a+\beta^a,$$

где $\{\beta_0,\beta_a,\beta^a\equiv\beta_{\hat{a}}\}$ – компоненты в А-репере 1-формы $df\equiv\beta$. Имея эти соотношения легко проверять конформную инвариантность любого класса почти контактных метрических многообразий. Возьмем, например, класс нормальных структур. Он определяется следующими требованиями на шесть структурных тензоров:

$$C^{abc}=C^{ab}=D^{ab}=D^a=0.$$

Инвариантный вид определения: $N_\Phi+d\eta\otimes\xi=0$, *где* N_Φ *– тензор Нейенхейса, задаваемый формулой* $N_\Phi(X,Y)=\Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]$.

Сразу видно, что этот класс не является конформно инвариантным. При этом нормальная структура переходит в нормальную структуру тогда и только тогда, когда $\beta^a=0$, то есть форма df параллельна контактной форме η.

Получающиеся выкладки просты даже с учетом перевода определения класса из инвариантного вида в А-репер. (Можно показать инвариантные формулы преобразования структурных тензоров из диссертации Ускорева).

В планах здесь провести процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений, для того чтобы связать между собой функции, работающие с тензором Римана-Кристоффеля, тензором Риччи и скалярной кривизной.

Чтобы более эффективно применять этот подход, нужны преобразования. Для почти контактных метрических структур они даже более актуальны (из-за большей сложности структуры), чем для почти эрмитовых.

Подход к построению преобразований следующий: берется почти эрмитово многообразие и к его структуре применяется какое-нибудь преобразование. Я брала конформное. Для каждого из полученных почти эрмитовых многообразий строится еще одно многообразие, которое несет почти контактную метрическую структуру. Получаем переход от первой почти контактной структуры ко второй. Это будет пример еще одного преобразования. Я брала T^1-расслоения (главное расслоение, структурной группой которого является окружность). Были получены следующие формулы:

$$\tilde{\Phi}=\Phi-(\tilde{\eta}\circ\Phi)\otimes\tilde{\xi};\quad \xi=\tilde{\eta}(\xi)\tilde{\xi}.$$
$$\tilde{g}(X,Y)=(e^{2f}\circ\pi)(g(X,Y)-\eta\otimes\eta(X,Y))+\tilde{\eta}\otimes\tilde{\eta}(X,Y),$$

где $\tilde{\eta}$ – форма связности на главном T^1-расслоении, f – гладкая функция, задающая конформное преобразование на базе расслоения (она несет почти эрмитову структуру). Это преобразование совпадает с конформным преобразованием почти контактной метрической структуры тогда и только тогда, когда функция f является константой. Поэтому преобразование существенно отличается от конформного и с ним имеет смысл работать. Здесь остается открытым вопрос: есть ли среди этих преобразований такие, которые упрощают почти контактную метрическую структуру.

Прежде чем искать ответ на этот вопрос построим более общие преобразования почти контактной метрической структуры, которые объединяли бы и конформные преобразования и преобразования, полученные для T^1-расслоений. Возьмем формулы, полученные для T^1-расслоений и запишем их для произвольных почти контактных метрических многообразий. В качестве формы $\tilde{\eta}$ возьмем произвольную 1-форму, такую что в любой точке многообразия M функция $\tilde{\eta}(\xi)$ будет отлична от нуля. Оказалось, что четверка $(\tilde{\Phi},\tilde{\eta},\tilde{\xi},\tilde{g})$ всегда является почти контактной метрической структурой. Такой переход от исходной почти контактной метрической структуры к указанной был назван обобщенным конформным преобразованием. Для такого преобразования тензорной структуры многообразия было рассмотрено отображение присоединенных G-структур вида

$$\psi: p=(m,\xi_m,\varepsilon_i)\to\tilde{p}=(m,\tilde{\eta}(\xi)^{-1}(m)\xi_m,e^{-f}(m)(\varepsilon_i-\tilde{\eta}(\varepsilon_i)\tilde{\xi}).$$

Это отображение позволило получить формулы, связывающие системы функций, задающих шесть структурных тензоров. В частности, для преобразований, индуцированных на T^1-расслоениях получаем формулы (для T^1-расслоений только три из шести структурных тензоров отличны от тождественных нулей)

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{D}^{ab} \circ \psi) = D^{ab} - \tilde{\eta}^{[ab]} + \tilde{\eta}_c C^{cab}; \quad (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{abc} \circ \psi) = C^{abc}; \quad (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \psi) = C^{ab}{}_c - \beta^b \delta^a_c + \beta^a \delta^b_c.$$

Эти формулы позволяют легко выяснять инвариантность классов при рассматриваемых преобразованиях почти контактных метрических структур.

В дальнейших планах исследовать полученные преобразования на предмет упрощения почти контактных метрических структур.