О некоторых видах обобщенно конформных преобразований почти контактных метрических структур.

Пусть M – четномерное гладкое многообразие. Пусть на нем фиксирована пара (J, g_M), состоящая из антиинволютивного эндоморфима J и римановой метрики, согласованной с ним. Такая пара называется почти эрмитовой структурой на гладком многообразии, эндоморфизм J называется почти комплексной структурой, а гладкое многообразие с почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием.

С каждым почти эрмитовым многообразием связано подрасслоение $B^A(M) = (B^A(M), M, \pi, U(n))$ главного расслоения реперов со структурной группой $U(n)$. Тотальное пространство этого главного расслоения состоит из так называемых А-реперов. Это комплексные реперы, матрица перехода от одного такого репера к другому является унитарной и компоненты тензорных полей J и g в них имеют достаточно простой вид. Подрасслоение $B^A(M)$ называется присоединенной G-структурой почти эрмитова многообразия.

Известно, что четверка

$$\mathscr{P} = \left(B^A(M)/SU(n) = P, M, \pi, U(n)/SU(n) = T^1\right)$$

является главным расслоением со структурной группой T^1 – это одномерный тор, то есть окружность. Оно называется главным T^1-расслоением.

Тотальное пространство P этого расслоения несет так называемую почти контактную метрическую структуру. Это четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ – эндоморфизм, ξ – векторное поле, η – 1-форма, g – риманова метрика. При этом эти тензорные поля удовлетворяют пяти условиям. На тотальном пространстве T^1-расслоения эта четверка получается следующим образом

$$g = \pi^* g_M + \eta \otimes \eta; \quad \Phi = i_H \circ J \circ \pi_*,$$

где η – форма связности на T^1-расслоении.

Все основные действующие лица у нас определены. Переходим к рассмотрению преобразований. Пусть дано четномерное гладкое многообразие M. На нем фиксирована почти эрмитова структура (J, g). Обозначим полученное почти эрмитово многообразие через $\mathscr{M}$. Подвергнем почти эрмитову структуру (J, g) конформному преобразованию, то есть перейдем к структуре $\tilde{\mathscr{M}} = (M, J, \tilde{g})$. Для каждого из полученных почти эрмитовых многообразий построим присоединенную G-структуру (обозначим их $B^A(M)$ и $\tilde{B}^A(M)$ соответственно). Тогда конформное преобразование заданное на базе M, порождает отображение присоединенных G-структур

$$\psi : p = (m, \varepsilon_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_i = e^{-f}\varepsilon_i).$$

Теперь переходим в каждой башне на третий этаж. Получаем две почти контактные метрические структуры на тотальных пространствах расслоений. Многообразия $B^A/SU(n)$ и $\tilde{B}^A/SU(n)$ диффеоморфны и этот диффеоморфизм позволяет перекинуть почти контактную структуру с волнами на гладкое многообразие $B^A/SU(n)$. Полученную четверку обозначим также. В результате на гладком многообразии $B^A/SU(n)$ получаем две почти контактных метрических структуры. Переход от первой ко второй назовем преобразованием, индуцированным конформным преобразованием базы.

Нетрудно получить формулы такого преобразования

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi} = \Phi - (\tilde{\eta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi};\\
&\tilde{g} = (e^{2f} \circ \pi)(g - \eta \otimes \eta) + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta};\\
&\xi = \tilde{\eta}(\xi)\tilde{\xi}.
\end{aligned}$$

Оказалось, что полученное преобразование существенно отличается от конформного преобразования, то есть от перехода от почти контактной структуры (Φ, η, ξ, g) к почти контактной метрической структуре $(\Phi, e^f\eta, e^{-f}\xi, e^{2f}g)$, которое часто встречается при исследовании почти контактных метрических многообразий. А именно, преобразование, индуцированное на T^1 -расслоении, является конформным тогда и только тогда, когда функция f является константой.

Объединим оба примера преобразований в общий класс следующим образом. Рассмотрим произвольное нечетномерное гладкое многообразие P с почти контактной метрической структурой и запишем формулы, полученные для индуцированного преобразования, но $\tilde{\eta}$ будет произвольной 1-формой $\tilde{\eta}(\xi) \neq 0$ в каждой точке многообразия P, а f – произвольная гладкая функция на многообразии P. Оказалось, что четверка $(\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$, заданных названным образом всегда образуют почти контактную метрическую структуру, а значит корректно определено преобразования исходной почти контактной метрической структуры. Назовем его обобщенным конформным преобразованием. Этот термин объясняется тем, что при выборе $\tilde{\eta} = e^f\eta$, мы получаем конформное преобразование.

Для почти контактного метрического многообразия, также как и для почти эрмитова, существует присоединенная G-структура со структурной группой $1 \times U(n)$. Так как многообразий два, то получаем и две присоединенные G-структуры. Чтобы изучать многообразия, нужно установить отображение между присоединенными G-структурами. Оно задается следующими формулами:

$$p = (m, \xi, \varepsilon_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\eta}(\xi)\xi, e^{-f}(\varepsilon_i - \tilde{\eta}(\varepsilon_i)\tilde{\xi}).$$

Каждое почти контактное метрическое многообразие характеризуется шестью тензорными полями, которые называются структурными тензорами такого многообразия. Они получаются из ковариантного дифференциала эндоморфизма Φ в римановой связности метрики g. Каждое структурный тензор задается системой функций на пространстве присоединенной G-структуры. С помощью отображения ψ удалось связать эти системы функций между собой для исходного и преобразованного многообразия.

Например, в случае конформного преобразования они имеют вид

$$\begin{array}{lll} (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \psi) = C^{ab}{}_c + \beta^a \delta^b_c - \beta^b \delta^a_c; & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{abc} \circ \psi) = C^{abc}; & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab} \circ \psi) = C^{ab}; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^a{}_b \circ \psi) = C^a{}_b - \beta_0 \delta^a_b; & (e^f \circ \pi)(\tilde{D}^{ab} \circ \psi) = D^{ab}; & (e^f \circ \pi)((\tilde{\tilde{D}}^a \circ \psi) = D^a + \beta^a, \end{array}$$

где $\{\beta_i\}$ – компоненты 1-формы df. Аналогичные формулы были получены и для преобразования, индуцированного на T^1-расслоении.

Принадлежность почти контактного метрического многообразия тому или иному классу записывается с помощью условий на шесть структурных тензоров. Используя полученные формулы легко определить, является ли данный класс конформно инвариантным. В случае отрицательного ответа, получаются условия, которым удовлетворяют структурные тензоры конформно преобразованного многообразия. Например, класс косимплектических многообразий, то есть почти контактных метрических многообразий, для которых все шесть структурных тензоров равны нулю, не является конформно инвариантным.

Наконец, отметим, что классификация, основанная на шести структурных тензорах, имеет 2048 классов и полученные формулы дают ответ на вопрос об инвариантности каждого из этих классов относительно рассмотренных преобразований.