проверочная 1 (дата проведения: 21 февраля, первые 10 минут пары)

определения: точка в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, прямая в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, точка B лежит между точками A и C в модели Пуанкаре, инверсия, инволютивное преобразование.

1. Нарисуйте треугольник в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и прямую, пересекающую его стороны BC и AC.

2. Нарисуйте угол ABC в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и смежный с ним угол.

3. Докажите, что при приведенном на занятии способе построения точки M' мы действительно получаем образ точки M при инверсии, то есть что $OM \cdot OM' = R^2$.

4. Докажите, что если при инверсии точка M переходит в точку M', то точка M' переходит в точку M.

проверочная 2 (дата проведения: 28 февраля)

определения: инверсия, сопряженное комплексное число, модуль комплексного числа, сумма комплексных чисел, произведение комплексных чисел.

1. Выведите формулу инверсии в комплексный числах, если центр инверсии совпадает с началом системы координат.

2. Выведите формулу инверсии в комплексных числах, если центру инверсии соответствует комплексное число z_0.

3. Выведите оба уравнения окружности в комплексных числах.

4. Получите условие ортогональности двух окружностей в комплексных числах.

5. Выведите оба уравнения прямой в комплексных числах.

проверочная 3 (дата проведения: 7 марта, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: инверсия, комплексное число, окружность, сопряженное комплексное число.

1. Докажите, что при инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.

2. Докажите, что окружность является инвариантной при инверсии тогда и только тогда, когда она перпендикулярна окружности инверсии.

3. Пусть окружность ω_1 с центром Q_1 при инверсии переходит в окружность ω_2 с центром Q_2. Докажите, что точка Q_2 не является образом точки Q_1 при данной инверсии.

4. Докажите, что окружность, проходящая через две инверсные точки (то есть точки, переходящие друг в друга при инверсии) является инвариантной.

проверочная 4 (дата проведения: 14 марта, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: Л-движение, инверсия, гомотетия, равные фигуры.

1. Докажите, что композиция двух гомотетий с разными центрами и взаимно обратными коэффициентами является параллельным переносом.

2. Докажите, что композиция двух инверсий с одним центром является гомотетией.

Чему равен ее коэффициент?

3. Докажите, что осевую симметрию можно рассматривать как инверсию с бесконечно большим радиусом.

4. Отложите отрезок равный данному на данном луче, если а) отрезок на Е-полуокружности, луч на Е-луче, б) отрезок на Е-луче, луч на Е-луче.

проверочная 5 (дата проведения: 21 марта, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: середина отрезка, прямой угол, конгруэнтные фигуры

1. В модели Пуанкаре постройте середину данного отрезка (отрезок на Е-полуокружности).

2. В модели Пуанкаре дана прямая a и точка A на ней. Через точку A проведите прямую, перпендикулярную a.

3. Покажите, что инверсия моделирует осевую симметрию в модели Пуанкаре.

4. Постройте прямоугольный треугольник и проведите в нем высоту к гипотенузе.

5. Докажите выполнение аксиомы III_5 в модели Пуанкаре.

проверочная 6 (дата проведения: 28 марта, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: двупрямоугольник, трипрямоугольник, четырехугольник Саккери, измерение отрезков, длина отрезка в модели Пуанкаре.

1. Изобразите четырехугольник Саккери, у которого основание AB лежит на Е-луче.

2. Изобразите двупрямоугольник, у которого сторона, отличная от основания, лежит на Е-луче.

3. Пусть у двупрямоугольника $ABCD$ с основанием AB углы C и D равны. Докажите, что $ABCD$ – четырехугольник Саккери.

4. Докажите, что в четырехугольнике Саккери отрезок, соединяющий середины основания и противоположной основанию стороны, перпендикулярен основанию.

проверочная 7 (дата проведения: 4 апреля, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: направление на прямой, направленная прямая, параллельные прямые у Лобачевского, расходящиеся прямые, аксиома Лобачевского, величина угла в модели Пуанкаре.

1. Пусть прямая a в модели изображается Е-лучом. Через точку $A \notin a$ проведите прямые, параллельные a, для каждого из двух направлений. Изобразите точки P, Q и внутренний луч угла QPB. Убедитесь, что он всегда пересекает луч QD.

2. Изобразите равнобедренный треугольник в модели Пуанкаре.

3. Докажите, что формула, задающая длину отрезка в модели удовлетворяет условию $\ell(AB) + \ell(BC) = \ell(AC)$, где $A - B - C$.

4. Прямая в модели изображена Е-полуокружностью и точка A дана внутри этой Е-полуокружности. Постройте прямые, параллельные данной в каждом направлении.

проверочная 8 (дата проведения: 11 апреля, последние 10 минут пары: с 17-20 до

17-30)

определения: заградительные прямые для угла, пересекающихся прямых, параллельных прямых, расходящихся прямых, окружность.

1. Изобразите в модели Пуанкаре заградительные прямые для пересекающихся прямых, параллельных прямых, расходящихся прямых в случае, когда одна из прямых изображается E-лучом.

2. Докажите, что на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника не постоянна.

3. Сформулируйте эквивалент аксиомы Лобачевского, если дан эквивалент V постулата Евклида: любая прямая, проходящая через внутреннюю точку угла, пересекает хотя бы одну из его сторон. Изобразите в модели иллюстрирующий рисунок.

4. Сформулируйте эквивалент аксиомы Лобачевского, если дан эквивалент V постулата Евклида: любая прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

5. Дан центр и радиус окружности. Постройте несколько точек этой окружности в модели Пуанкаре.

проверочная 9 (дата проведения: 18 апреля, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: инверсия, уравнение E-окружности в комплексных числах, окружность в геометрии Лобачевского, секущая равного наклона, орицикл, параллельные прямые по Лобачевскому.

1. Выведите уравнение E-окружности в комплексных числах, которому должны удовлетворять точки окружности (по Лобачевскому).

2. Постройте несколько точек окружности.

3. Постройте несколько точек орицикла.

4. Докажите, что орицикл изображается E-окружностью.

проверочная 10 (дата проведения: 25 апреля, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: орицикл, эквидистанта, инверсия, биссектриса треугольника, медиана треугольника, серединный перпендикуляр к стороне треугольника.

1. Постройте окружность, вписанную в треугольник, в модели Пуанкаре.

2. Постройте медианы треугольника в модели Пуанкаре.

3. Постройте несколько точек эквидистанты (база – E-полуокружность) в модели Пуанкаре.

4. Постройте треугольник и описанную около него эквидистанту в модели Пуанкаре.

проверочная 11 (дата проведения: 2 мая, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: параллельный перенос, сдвиг, группа Галилея, особая прямая, обыкновенная прямая, параллельные прямые, расстояние между точками, особое расстояние между точками.

1. Докажите, что композиция двух параллельных переносов есть параллельный пере-

нос. Докажите, что композиция сдвига и параллельного переноса на вектор, параллельный оси сдвига есть сдвиг с той же осью.

2. Докажите, что при параллельных переносах и сдвигах прямая переходит в прямую.

3. Две (обыкновенные) прямые на плоскости Галилея называются параллельными, если они не пересекаются. Докажите, что свойство прямых быть параллельными инвариантно относительно сдвигов и параллельных переносов.

4. Докажите, что расстояние между точками и особое расстояние между точками на плоскости Галилея инвариантны относительно сдвигов и параллельных переносов.

5. Выведите формулы сдвига, если точки P и P', задающие сдвиг лежат ниже оси Ox а) P левее P', б) наоборот.

проверочная 12 (дата проведения: 23 мая, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: длина отрезка, расстояние между точками, особое расстояние между точками, окружность, длина дуги окружности, середина отрезка, середина дуги, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой, треугольник.

1. Докажите, что если два отрезка имеют равные длины, то существует движение на плоскости Галилея, переводящее один в другой.

2. Докажите, что при параллельных переносах и сдвигах окружность (в смысле Галилея) переходит в окружность.

3. Выведите формулу для вычисления угла между прямыми.

4. Докажите, что если углы между двумя парами пересекающихся прямых равны, то существует движение на плоскости Галилея, которое переводит одну пару прямых в другую.

5. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.

6. Докажите, что медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

7. Изобразите треугольник на плоскости Галилея, его высоты и биссектрисы.

8. Докажите, что свойство прямой быть параллельной оси Ox не сохраняется относительно преобразований группы Галилея.

проверочная 13 (дата проведения: 30 мая, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: треугольник на плоскости Галилея, высота треугольника, биссектриса треугольника, медиана треугольника, равнобедренный треугольник.

1. Докажите второй признак равенства треугольников на плоскости Галилея.

2. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в серединах высот.

3. Докажите, что точки пересечения биссектрис треугольника образуют треугольник, стороны которого равны сторонам исходного треугольника, а углы в два раза меньше.

4. Докажите, что сумма длин сторон и сумма углов треугольника равны нулю.

5. Докажите, что $\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{BC}{\angle CAB} = \frac{CA}{\angle CBA}$.

6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике боковая сторона равна половине основания.

7. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектриса параллельна основанию.

проверочная 14 (дата проведения: 6 июня, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: параллелограмм, равносторонник, ромб, цикл.

1. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. Докажите, что цикл в геометрии Галилея – это парабола.

3. Покажите, что при сдвигах вдоль оси Oy и произвольных параллельных переносах парабола с ветвями, направленными вдоль оси Oy переходит в параболу с ветвями также направленными вдоль Oy.

4. Будут ли существовать сдвигу, которые переводят параболу с ветвями, направленными вверх, в параболу с ветвями вниз? Ответ обосновать.

5. Докажите, что около любого треугольника можно описать цикл.

проверочная 15 (дата проведения: 13 июня, последние 10 минут пары: с 17-20 до 17-30)

определения: антипараллелограмм, принцип двойственности, цикл.

1. Изобразите фигуру, двойственную треугольнику $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$.

2. Докажите, что если прямая a проходит через точку B, то двойственная точка A лежит на двойственной прямой b.

3. Выясните, что соответствует по принципу двойственности особому расстоянию между двумя точками одной окружности.

4. Докажите, что циклу двойственен цикл.

Программа зачета

Карточка с заданиями для зачета будет состоять из 5 заданий по 7 баллов за каждое (по 3 балла за само задание+4 балла за дополнительные вопросы по нему). Всего за зачет можно получить 35 баллов. Нужно уметь формулировать определения объектов, которые входят в задания карточки.

В карточках будут задания, аналогичные следующим:

1. На листе бумаги нарисована окружность и точка. Постройте образ данной точки при инверсии.
2. Даны точки $1+i$, $2-i$. Напишите уравнение прямой, проходящей через эти точки.
3. Дана точка $1+i$ и число 2. Напишите уравнение окружности с данным центром и радиусом.
4. В модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте середину отрезка, перпендикулярную прямую через данную точку, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, четырехугольник Саккери, двупрямоугольник.
5. В модели Пуанкаре постройте несколько точек окружности, эквидистанты, орицикла.
6. В модели Пуанкаре постройте окружность, вписанную в треугольник.
7. Найдите образ прямой $2x+y+1=0$ при сдвиге $x'=x$, $y'=2x+y$.
8. Докажите, что свойство Е-прямой быть параллельной оси Oy инвариантно при сдвигах и параллельных переносах.
9. Докажите, что при сдвигах и параллельных переносах Е-прямая переходит в Е-прямую.
10. Покажите, что свойство прямой быть параллельной оси Ox в геометрии Галилея не является геометрическим свойством.
11. Докажите, что расстояние между точками инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов вдоль Oy.
12. Докажите, что особое расстояние между точками инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов вдоль Oy.
13. Докажите, что отрезки на плоскости Галилея равны тогда и только тогда, когда они имеют равные длины.
14. Докажите, что на плоскости Галилея окружность переходит в окружность при сдвигах вдоль Oy и параллельных переносах.

15. Докажите, что дуги окружностей равны тогда и только тогда, когда они имеют равные длины.

16. Выведите формулу для вычисления величины угла между прямыми

17. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.

18. Покажите, что признака равенства треугольников по трем сторонам на плоскости Галилея нет.

19. Докажите, что на плоскости Галилея биссектриса угла треугольника проходит через середины высот, опущенных из двух остальных вершин треугольника.

20. Докажите, что на плоскости Галилея биссектрисы углов треугольника попарно пересекаются, причем точки пересечения служат вершинами треугольника, стороны которого равны сторонам исходного треугольника, а углы вдвое меньше его углов.

21. Докажите, что на плоскости Галилея медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

22. Докажите, что на плоскости Галилея углы при основании равнобедренного треугольника равны.

23. Докажите, что у равнобедренного треугольника медиана совпадает с высотой.

24. Докажите, что биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

25. Докажите, что на плоскости Галилея все четыре угла параллелограмма равны между собой.

26. Докажите, что на плоскости Галилея диагонали равносторонника перпендикулярны.

27. Докажите, что около любого треугольника можно описать цикл.