Домашнее задание 1. (задано 12 сентября)

1. На занятии была решена задача: Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Докажите, что при $\alpha = 30^0$ для любого положения прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник.

   Докажите, что для $\alpha < 30^0$ утверждение задачи не верно (приведите контрпример).

2. Вспоминаем соотношения между сторонами и углами в треугольнике: напротив меньшей стороны лежит меньший угол, и наоборот.

   Существует ли такой выпуклый пятиугольник (все углы меньше 180^0) $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC – тупые?

3. (9 класс, 2012) В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60^0. Докажите, что трапеция равнобедренная. Главное – увидеть правильный треугольник.

4. (8 класс, школьная, 2015)Просто закрученное условие. Нарисуйте все данные и то, что из них легко следует на картинке и задача решится.
   В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M – середина AD. Докажите, что угол BMC – тупой.

5. Задача на идею, разобранную на занятии: есть соотношение между линейными элементами, а нужно найти угол(9 класс, школьная, 2015)
   В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности. Найдите угол CAB.

Домашнее задание 2. (задано 26 сентября)

1. (Московские математические олимпиады, 1935 год, 1-й тур) Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

   Сейчас эта задача присутствует в нашем основном курсе геометрии бакалавриата в разделе „Применение преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии“.

2. Вспомним задачу: по одну сторону прямой даны две точки A и B. Найдите на прямой точку M, такую, что сумма $AM + BM$ была бы наименьшей (задача Герона). Ее решение хорошо известно. Решите такую задачу: по одну сторону прямой даны две

точки A и B. Найдите на прямой точку M, такую, что разность $MA - MB$ была бы наибольшей.

3. (еще одна задача из этой же оперы уровня школьной олимпиады) По одну сторону прямой даны две точки A и B. На этой прямой расположите отрезок XY так, чтобы длина ломаной $AXYB$ была бы наименьшей.

4. (задача уровня школьной олимпиады, на использование свойства касательной: квадрат касательной равен произведению отрезков секущей) Постройте окружность, которая касается прямой и проходит через две данные точки A и B.

5. (Московские математические олимпиады, 1941 год, 1-й тур, 7 – 8 класс) Постройте треугольник, если известны его высота и медиана, проведенные из одной вершины, и радиус описанной около треугольника окружности.

Домашнее задание 3. (задано 3 октября)

1. (9 класс, школьная, 2016)

   В треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A, перпендикулярна биссектрисе угла B, а медиана, выходящая из вершины B, перпендикулярна биссектрисе угла A. Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника ABC.

2. (8 класс,школьная)

   В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC = 120^0$, $\angle DAB = 60^0$.

3. (8 класс, окружная, 2016) Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC – точку A_1, а на стороне AC – точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB, MC.

4. (9 класс, школьная, 2014)

   Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60^0, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

   Сплошные равнобедренные треугольники.

5. (8 класс, окружная, 2018) В трапеции $ABCD$ точка M – середина боковой стороны CD. Лучи BD и BM делят угол ABC на три равные части. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Найдите углы трапеции.

Домашнее задание 4. (задано 10 октября)

1. Вспомним задачу из курса элементарной геометрии. Пусть дан произвольный треугольник ABC и окружность с центром O, вписанная в ABC. Докажите, что $\angle BOC = 90^0 + \frac{\angle A}{2}$. А также: пусть дан треугольник ABC. Около него описана окружность радиуса R. Докажите, что $BC = 2R\sin\angle BAC$.

2. (московская математическая олимпиада, 1953, 1-й тур, 7 класс) Поможет достроенный параллелограмм.

   Докажите, что в трапеции сумма углов при большем основании меньше, чем при меньшем.

3. (красивая задача на вписанную окружность, 9 класс, окружная, 2016)
   В треугольник ABC вписана окружность с центром O. а стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C – точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что угол BOP равен углу COQ.

4. Если увидеть описанную окружность, то задача легко решится. Ну и конечно же нужно помнить признаки параллельности прямых.
   (9 класс, окружная, 2014) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

5. (9 класс, окружная, 2015) Надо использовать два числовых данных. Попробуйте встроить их по одному каждый в свою конструкцию.
   Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM – в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

Домашнее задание 5. (задано 17 октября)

1. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D, окружность Ω_2 в точке E и прямую AB – в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

2. (9 класс, окружная, 2016) Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90^0$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC. Найдите угол DCF.

3. (9 класс, окружная, 2015) Один четырехугольник уже вписан в окружность, а второй нужно увидеть.

   Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

4. Поработайте с вписанными в окружность углами и равными треугольниками. Ничего особо сложного нет.

   (10 класс, окружная, 2016) В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O – центр описанной около MKN окружности).

5. (из истории математических олимпиад, Московские математические олимпиады, 1960, 2-й тур, 7 класс) Докажите, что стороны произвольного четырехугольника являются сторонами некоторой трапеции.

24 октября ничего не задано. Продолжайте делать предыдущие домашние задания

Домашнее задание 6. (задано 31 октября)

1. (11 класс, окружная, 2014)Если увидеть три точки на одной окружности и ее центр, то задача решится.

   В треугольнике ABC угол C равен 75^0, а угол B равен 60^0. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BMC с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

2. (8 класс, окружная) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричные B и C относительно прямых AC и AB соответственно. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

3. Вспоминаем множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

   (Московские математические олимпиады, 1938 год, 2-й тур) Постройте треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

4. (Московские математические олимпиады, 1941 год, 2-й тур, 7-8 классы) Постройте треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2, H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

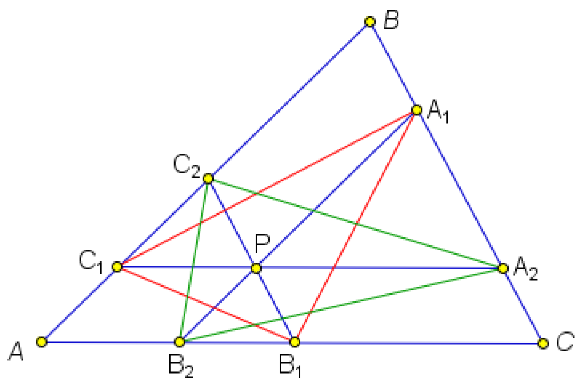
5. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 8-9 классы) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Домашнее задание 7. (задано 7 ноября)

1. На одной строчке нарисованы два сердечка. Одно движется по строчке, проезжая через другое. Докажите, что в каждый момент времени разность площадей не пересекающихся частей сердечек постоянна. Сформулируйте аналогичную задачу для пространства.

2. (10 класс, школьная, 2015)
Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?

3. (10 класс, окружная, 2016)



Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC проведены три отрезка, параллельные его сторонам. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

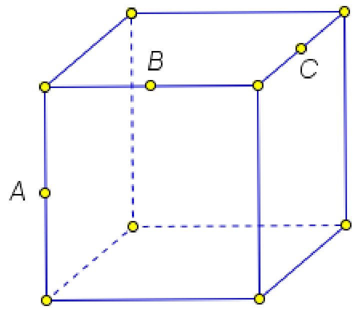
4. (10 класс, школьная, 2016)
Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

5. (Московские математические олимпиады, 1984 год, 7 класс) Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что площадь параллелограмма не превосходит половины площади треугольника.

14 ноября ничего не задано. Продолжайте делать предыдущие домашние задания

Домашнее задание 8. (задано 21 ноября)

1. (11 класс, школьная, 2015)



Дан куб, A, B, C – середины его ребер. Чему равен угол ABC?

2. (11 класс, школьная, 2016)
Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении $1:2$, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на ребрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Примет обоснуйте.

3. (11 класс, региональный, 2012) На такую идею уже решали задачу в планиметрии.

   Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A – параллельно SC и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

4. Хотя задача из стереометрии, все идеи решения из планиметрии
(11 класс, окружная, 2011) Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. M и N – точки пересечения медиан граней ABC и ABD соответственно. Докажите, что отрезки CN и DM равны.

5. (11 класс, окружная, 2011) Здесь несколько способов решения. Попробуйте координатный.

   Укажите точки на поверхности куба, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

Домашнее задание 9. (задано 28 ноября)

1. Для положительных x, y, z найдите $\sqrt{3}xz + y(x+z)$, если $x^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{\sqrt{3}} = 625$, $\frac{y^2}{3} + z^2 + \frac{yz}{\sqrt{3}} = 49$, $x^2 + z^2 + xz = 576$.

2. Решите системы уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9 \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27 \\ x^y + y^z + z^x = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y^2 + z^3 = 2 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 4 \\ x^3 + y^4 + z^5 = 8. \end{cases}$$

3. Докажите, что $\arccos\frac{15}{17} - 2\operatorname{arcctg} 4 = 0$.

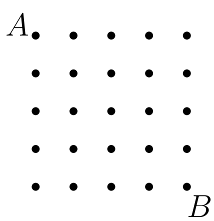
4. Докажите, что $\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + \operatorname{arctg} 4 + \arcsin\frac{8}{17} = 180^0$.

5. Вычислите $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Домашнее задание 10. (задано 5 декабря)

1. (6 класс, школьная, 2013) Как разрезать квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых?

2. (7 класс, окружная, 2014)



Соедините точки A и B ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:
1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;
2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;
3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

3. (10 класс, школьная, 2015)
В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

4. (8 класс, школьная, 2016)
Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линия сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

Домашнее задание 11. (задано 12 декабря)

1. Даны две не пересекающиеся окружности. Из центра каждой из этих окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны между собой.

2. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

3. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

4. Пусть CM – медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^0$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный или прямоугольный.

Контрольная работа. (дата проведения: 19 декабря)

Контрольная работа будет содержать 5 задач из списка задач для домашней работы. Баллы 15 – 30 баллов (за каждую задачу можно получить максимум 6 баллов). Если студент набирает менее 15 баллов, то ставится 0 баллов.

Примерный вариант контрольной работы.

1. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60^0. Докажите, что трапеция равнобедренная.

2. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

3. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D, окружность Ω_2 в точке E и прямую AB – в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

4. Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A – параллельно SC и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

5. Вычислите $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Зачет. (26 декабря и ?? января)

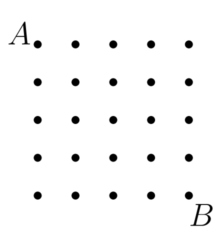
12 – 20 баллов. Обсуждение задач из домашней работы. Будет карточка с 4 задачами. Нужно рассказать их решение.

Примерный вариант карточки для зачета.

1. По одну сторону прямой даны две точки A и B. На этой прямой расположите отрезок XY так, чтобы длина ломаной $AXYB$ была бы наименьшей.

2. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90^0$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC. Найдите угол DCF.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?

4. 

Соедините точки A и B ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;

2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;

3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.