проверочная 1. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 15 сентября)

Определения: проективная прямая.

1. Докажите, что расширенная прямая является проективной прямой.

2. Докажите, что пучок прямых является проективной прямой.

3. Отобразите эллипс в гиперболу при центральном проектировании.

4. Отобразите эллипс в параболу при центральном проектировании.

5. Отобразите параболу в гиперболу при центральном проектировании.

проверочная 2. (дата проведения проверочной: 22 сентября)

Определения: проективная прямая, проективная плоскость, координаты точки на расширенной прямой, координаты точки на обычной прямой в аффинной системе координат.

1. Докажите, что что при замене вектора, порождающего точку, на другой обе координаты умножаются на одно и то же число.

2. Докажите, что при замене вектора $\vec{e}$ на другой, обе координаты точки умножаются на одно и то же число.

3. Найдите координаты точек A_1, A_2, E в проективном репере (A_1, A_2, E).

4. Найдите соотношение между координатой x собственной точки M в аффинном репере и ее координатами (x_1, x_2) в проективном репере.

5. Постройте точку $M(1, -1)$ на расширенной прямой а) в проективном репере первая точка несобственная, б) в проективном репере вторая точка несобственная, в) в проективном репере точка E несобственная.

6. Докажите, что расширенная плоскость является проективной плоскостью.

проверочная 3. (дата проведения проверочной: 29 сентября)

определения: проективная плоскость, проективный репер на плоскости, координаты точки в проективном репере плоскости,

1. Докажите, что через любые две различные прямые проективной плоскости пересекаются.

2. Докажите, что через любые две различные точки проективной плоскости проходит проективная прямая.

3. Вычислите координаты точек A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3 в проективном репере (A_1, A_2, A_3, E).

4. Вычислите координаты точки M_1 в проективном репере (A_2, A_3, E_1).

5. Вычислите координаты точки M_2 в проективном репере (A_1, A_3, E_2).

6. Пусть дан проективный репер $(A_1^\infty, A_2, A_3, E)$ и точка $M(1, 1, -1)$. Постройте точки M_1 и M_2 на соответствующих координатных прямых и догадайтесь, как по ним построить точку M.

7. Докажите, что для собственной точки M расширенной плоскости имеют место равенства $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$, где (x_1, x_2, x_3) – координаты этой точки в проективном репере $(A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$, (x, y) – координаты этой точки в аффинной системе координат $(A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$.

проверочная 4. (дата проведения проверочной: 6 октября)

определения: однородные координаты точки на плоскости, формулы перехода от одного репера к другому, принцип двойственности на плоскости, трехвершинник.

1. Выведите общее уравнение проективной прямой на проективной плоскости.

2. Выведите параметрические уравнения проективной прямой на проективной плоскости.

3. На расширенной плоскости дан проективный репер $(A_1, A_2^\infty, A_3, E^\infty)$ и точка $M(2, 1, 1)$. Постройте эту точку.

4. Сформулируйте двойственное утверждение: если у двух трехвершинников ABC и $A'B'C'$ соответствующие стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну точку. (одна из двух теорем Дезарга)

проверочная 5. (дата проведения проверочной: 13 октября)

определения: сложное отношение четырех точек проективной прямой, простое отношение трех точек аффинной прямой,

1. Выразите сложное отношение четырех точек A, B, C, D через их аффинные координаты, если 1) A – несобственная, 2) B – несобственная, 3) D – несобственная. 2. На расширенной плоскости дан проективный репер $(A_1^\infty, A_2, A_3^\infty, E)$ и точка $M(0,1,1)$. Постройте эту точку.

проверочная 6. (дата проведения проверочной: 20 октября)

определения: сложное отношение четырех точек, центральное проектирование точек одной прямой на другую, проективный репер плоскости, полный четырехвершинник, противоположные стороны полного четырехвершинника, диагональные точки, диагонали.

1. Докажите, что $(AB,CD) = \frac{1}{(BA,CD)}$ и $(AB,CD) = (CD,AB)$.

2. Докажите, что $(AC,BD) = 1 - (AB,CD)$.

3. Выведите формулы перехода от репера (A,B,O,E) к реперу (A',B',O,E).

4. Используя результаты задачи 3, докажите, что при центральном проектировании сохраняется сложное отношение четырех точек прямой.

проверочная 7. (дата проведения проверочной: 27 октября)

определения: сложное отношение четырех точек, сложное отношение четырех прямых пучка, полный четырехвершинник, гармоническая четверка точек, проективное преобразование плоскости.

1. Докажите, что на каждой диагонали и каждой стороне полного четырехвершинника есть гармоническая четверка точек.

2. Докажите, что для любой пары проективных реперов существует проективное преобразование плоскости, переводящее первый репер во второй.

3. Докажите, что для любой пары проективных реперов проективное преобразование плоскости, переводящее первый репер во второй, единственно.

проверочная 8. (дата проведения проверочной: 3 ноября)

определения: проективное преобразование плоскости, гомология, параболическая гомология, гиперболическая гомология.

1. Выведите формулы проективных преобразований.

2. Докажите, что формулы вида $\rho x_i' = c_i^j x_j$, $i,j = 1,2,3$, в которых определитель матрицы (c_{ij}) отличен от нуля, задают проективное преобразование плоскости.

3. Параболическая гомология задана центром S (собственным, несобственным), осью s (собственной, несобственной) и парой соответствующих точек $A \to A'$ (собственные, несобственные). Постройте образ данной точки M при заданной гомологии.

проверочная 9. (дата проведения проверочной: 10 ноября)

определения: гомология, гиперболическая гомология, параболическая гомология.

1. Гиперболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. На данной прямой p найдите точку X, образ которой лежит на данной прямой q, где $q \neq f(p)$.

2. Гомология (гиперболическая, параболическая) задана центром S, парой соответствующих точек $A \to A'$ и парой соответствующих параллельных прямых $a \to a'$. Постройте образ данной точки M^∞ при данной гомологии.

3. Дана точка S и прямая a $(S \notin a)$. Постройте прямую s так, чтобы при гиперболической гомологии с центром S и осью s, прямая a была прообразом бесконечно удаленной прямой. Найдите образ произвольной точки при этой гомологии.

4. Дана точка S, пара соответствующих точек $A \to A'$ и прямая a. Построить ось s так, чтобы гиперболическая гомология с центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$ переводила прямую a в бесконечно удаленную прямую.

проверочная 10. (дата проведения проверочной: 17 ноября)

определения: кривая второго порядка, невырожденная кривая второго порядка, овальная линия, поляра точки, полюс прямой, полный четырехвершинник.

1. Докажите, что невырожденная кривая второго порядка имеет не более двух общих точек с прямой.

2. Докажите, что овальная линия пересекается с прямой всегда в двух точках.

3. Докажите, что поляра точки относительно овальной линии является прямой.

4. Докажите теорему о взаимности поляритета.

5. Постройте поляру точки для гиперболы (параболы), если точка внутри (снаружи).

самостоятельная работа. (дата проведения проверочной: 24 ноября, 45 минут в начале пары)

Самостоятельная состоит из трех заданий: 1) доказать утверждение (будут взяты утверждения из списка к проверочным работам 1 – 10) (5 баллов) 2) решить задачу аналогичную задачам из проверочных 1 – 7 (5 баллов) 3) решить задачу аналогичную задачам из проверочных 8 – 10 (5 баллов).

Примерный вариант.

1. Докажите, что для собственной точки M расширенной плоскости имеют место равенства $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$, где (x_1, x_2, x_3) – координаты этой точки в проективном репере $(A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$, (x, y) – координаты этой точки в аффинной системе координат $(A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$.

2. Пусть дан репер $(A_1^\infty, A_2, A_3, E^\infty)$ на расширенной плоскости. Постройте точку $M(1, 1, 3)$.

3. Постройте поляру точки, не лежащей на гиперболе.

проверочная 11. (дата проведения проверочной: 1 декабря)

определения: поляра, полюс, овальная линия, касательная к линии второго порядка, проективное преобразование плоскости, группа, подгруппа.

1. Даны овальная линия и прямая. Постройте полюс этой прямой.

2. Пусть точка лежит на овальной линии. Докажите, что ее поляра – это касательная в этой точке.

3. Пусть точка лежит на овальной линии. Докажите, что касательная в этой точке является полярой этой точки.

4. Постройте касательную к эллипсу (параболе, гиперболе) в данной точке на нем (ней).

5. Выведите вид формул проективных преобразований, для которых данная прямая инвариантна.

проверочная 12. (дата проведения проверочной: 8 декабря)

определения: полюс, поляра, овальная линия,

1. Докажите, что простое отношение трех точек $(AB, C) = -(AB, CQ)$, где Q – точка пересечения прямой (AB) с абсолютом a.

2. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

3. Пусть дано семейство параллельных хорд λ для диаметра p эллипса (или гиперболы). Докажите, что диаметр, определяемых хордами, параллельными прямой p, будет принадлежать семейству λ.

4. Докажите, что все диаметры параболы параллельны.

5. Покажите, параболические гомологии – это параллельные переносы, а гиперболические гомологии – это гомотетии.

проверочная 13. (дата проведения проверочной: 15 декабря)

определения: овальная линия, проективное преобразование, сложное отношение четырех точек, центропроективная геометрия, центроаффинная геометрия

1. Покажите, что в центропроективной геометрии есть несоединимые точки.

2. Выведите вид формул проективных преобразований центропроективной геометрии.

3. Изобразите разные виды прямых в геометрии Лобачевского и покажите, что при движении точки B к абсолюту расстояние между A и B стремится к бесконечности.

4. Покажите, что в геометрии Лобачевского прямая перпендикулярная данной изображается проективной прямой, проходящей через полюс данной прямой.

проверочная 14. (дата проведения проверочной: 22 декабря)

определения: метрика на плоскости Лобачевского, метрика на множестве внешних точек овальной линии,

1. Выведите формулу для вычисления расстояния между точками для точек внутри овальной линии.

2. Выведите формулу для вычисления расстояния между точками вне овальной линии.

Программа зачета. (дата проведения: ?? января)

Зачет (35баллов)= часть 1(11 баллов)+ часть 2(12 баллов)+ часть 3(12 баллов).

часть 1. Нужно знать следующие определения, уметь приводить примеры, определять, подходит ли объект под определение.

определения: проективная плоскость, проективная прямая, проективный репер на проективной прямой, проективный репер на проективной плоскости, расширенная прямая, расширенная плоскость, модели проективной прямой и проективной плоскости, трехвершинник, принцип двойственности на проективной плоскости, уравнения проективной прямой на проективной плоскости, сложное отношения четырех точек, проективные преобразования плоскости, гомологии, параболическая гомология, гиперболическая гомология, полный четырехвершинник, гармонические четверки точек, центральное проектирование, линии второго порядка на проективной плоскости, овальная линия, полюс, поляра, невырожденная линия второго порядка, аффинная геометрия, центропроективная геометрия, центроаффинная геометрия, флаговая геометрия, геометрия Лобачевского, измерение расстояний между точками внутри овальной линии, измерение расстояния между точками вне овальной линии.

часть 2. Докажите одно из следующих утверждений:

1. Докажите, что расширенная прямая является проективной прямой.

2. Докажите, что пучок прямых является проективной прямой.

3. Докажите, что расширенная плоскость является проективной плоскостью.

4. Докажите, что связка прямых является проективной плоскостью.

5. Докажите, что проективные координаты точки на проективной прямой определены однозначно с точностью до постоянного множителя.

6. Докажите, что проективные координаты точки на проективной плоскости определены однозначно с точностью до постоянного множителя.

7. Определите проективные реперы на координатных прямых проективного репера плоскости и найдите координаты проекций точки M на эти прямые.

8. Найдите соотношение между координатой x собственной точки M расширенной прямой в аффинном репере и ее координатами (x_1, x_2) в проективном репере.

9. Докажите, что через любые две различные прямые проективной плоскости пересекаются.

10. Докажите, что через любые две различные точки проективной плоскости проходит проективная прямая.

11. Докажите, что для собственной точки M расширенной плоскости имеют место равенства $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$, где (x_1, x_2, x_3) – координаты этой точки в проективном репере $(A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$, (x, y) – координаты этой точки в аффинной системе координат $(A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$.

12. Выведите общее уравнение проективной прямой на проективной плоскости.

13. Выведите параметрические уравнения проективной прямой на проективной плоскости.

14. Докажите, что $(AB, CD) = \frac{1}{(BA, CD)}$, $(AB, CD) = (CD, AB)$, $(AC, BD) = 1 - (AB, CD)$.

15. Докажите, что при центральном проектировании сохраняется сложное отношение четырех точек прямой.

16. Докажите, что на каждой диагонали и каждой стороне полного четырехвершинника есть гармоническая четверка точек.

17. Докажите, что для любой пары проективных реперов существует единственное проективное преобразование плоскости, переводящее первый репер во второй.

18. Выведите формулы проективных преобразований.

19. Докажите, что формулы вида $\rho x_i' = c_i^j x_j$, $i, j = 1, 2, 3$, в которых определитель матрицы (c_{ij}) отличен от нуля, задают проективное преобразование плоскости.

20. Докажите, что невырожденная кривая второго порядка имеет не более двух общих точек с прямой.

21. Докажите, что овальная линия пересекается с прямой всегда в двух точках.

22. Докажите, что поляра точки относительно овальной линии является прямой.

23. Докажите теорему о взаимности поляритета.

часть 3. Решите задачу аналогичную следующим:

1. Задайте отображение, переводящее эллипс в гиперболу (параболу). Задайте отображение, переводящее гиперболу в параболу.

2. Постройте точку M по ее координатам в проективном репере плоскости (точки репера могут быть как собственными, так и несобственными).

3. Вычислите координаты точек A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3 в проективном репере (A_1, A_2, A_3, E).

4. Сформулируйте двойственное утверждение: если у двух трехвершинников ABC и $A'B'C'$ соответствующие стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну точку. (одна из двух теорем Дезарга)

5. Получите двойственную фигуру, используя принцип двойственности: трехвершининк, множество точек одной прямой, две пересекающиеся прямые, две прямые, пересекающиеся на третьей данной прямой, три точки, не лежащие на одной прямой, три прямые, не проходящие через одну точку.

6. Выразите сложное отношение четырех точек A, B, C, D через их аффинные координаты, если 1) A – несобственная, 2) B – несобственная, 3) D – несобственная.

7. Параболическая гомология задана центром S (собственным, несобственным), осью s (собственной, несобственной) и парой соответствующих точек $A \to A'$ (собственные, несобственные). Постройте образ данной точки M при заданной гомологии.

8. Гиперболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. На данной прямой p найдите точку X, образ которой лежит на данной прямой q, где $q \neq f(p)$.

9. Гомология (гиперболическая, параболическая) задана центром S, парой соответствующих точек $A \to A'$ и парой соответствующих параллельных прямых $a \to a'$. Постройте образ данной точки M^∞ при данной гомологии.

10. Дана точка S и прямая a ($S \notin a$). Постройте прямую s так, чтобы при гиперболической гомологии с центром S и осью s, прямая a была прообразом бесконечно удаленной прямой. Найдите образ произвольной точки при этой гомологии.

11. Дана точка S, пара соответствующих точек $A \to A'$ и прямая a. Построить ось s так, чтобы гиперболическая гомология с центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$ переводила прямую a в бесконечно удаленную прямую.

12. Постройте поляру точки для гиперболы (параболы), если точка внутри (снаружи).

13. Даны овальная линия и прямая. Постройте полюс этой прямой.

14. Пусть точка лежит на овальной линии. Докажите, что ее поляра – это касательная в этой точке.

15. Пусть точка лежит на овальной линии. Докажите, что касательная в этой точке является полярой этой точки.

16. Постройте касательную к эллипсу (параболе, гиперболе) в данной точке на нем (ней).

17. Выведите вид формул проективных преобразований, для которых данная прямая инвариантна.

18. Докажите, что простое отношение трех точек $(AB, C) = -(AB, CQ)$, где Q – точка пересечения прямой (AB) с абсолютом a.

19. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

20. Пусть дано семейство параллельных хорд λ для диаметра p эллипса (или гиперболы). Докажите, что диаметр, определяемых хордами, параллельными прямой p, будет принадлежать семейству λ.

21. Докажите, что все диаметры параболы параллельны.

22. Покажите, что в центропроективной геометрии есть несоединимые точки.

23. Выведите вид формул проективных преобразований центропроектиной геометрии.

24. Изобразите разные виды прямых в геометрии Лобачевского и покажите, что при движении точки B к абсолюту расстояние между A и B стремится к бесконечности.

25. Покажите, что в геометрии Лобачевского прямая перпендикулярная данной изображается проективной прямой, проходящей через полюс данной прямой.

26. Выведите формулу для вычисления расстояния между точками для точек внутри овальной линии.

27. Выведите формулу для вычисления расстояния между точками вне овальной линии.