проверочная 1. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 15 марта)

Определения: векторное пространство, арифметическое пространство, линейно зависимая система векторов, линейно независимая система векторов, базис, координаты вектора в базисе, канонический базис арифметического пространства.

1. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $x+y=y+x$.

2. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $x+(y+z)=(x+y)+z$.

3. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $\exists 0\,\forall x\in\mathbb{R}^n\; x+0=x$.

4. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $\forall\, x\in\mathbb{R}^n\,\exists -x\in\mathbb{R}^n\; x+(-x)=0$.

5. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$.

6. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

7. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

8. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется $1x=x$.

9. Будет ли система векторов $(1,1,0,0,0)$, $(0,1,1,0,0)$, $(0,0,1,1,0)$, $(0,0,0,1,1)$, $(1,0,0,0,1)$ базисом в $\mathbb{R}^5$?

10. Докажите, что если система векторов $(e_1,\dots,e_n)$ векторного пространства V линейно зависима, то хотя бы один из них можно выразить через остальные.

проверочная 2. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 22 марта)

Определения: вектор в точке, касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке p, векторное поле, гладкое отображение, диффеоморфизм, гладкое векторное поле.

1. Докажите, что если $\{(p;e_1),\dots,(p;e_n)\}$ – базис в $T_p(\mathbb{R}^n)$, то $(e_1,\dots,e_n)$ – базис в $\mathbb{R}^n$.

2. Докажите, что если $(e_1,\dots,e_n)$ – базис в $\mathbb{R}^n$, то $\{(p;e_1),\dots,(p;e_n)\}$ – базис в $T_p(\mathbb{R}^n)$.

3. Изобразите несколько векторов векторного поля, для которого ассоциированное отображение имеет вид 1) $X(p)=-p$, 2) $X(p)=(x^2,x^1)$, 3) $X(p)=(-2x^2,\frac{1}{2}x^1)$, 4) $X(p)=(\frac{x^1+x^2}{2},\frac{x^1-x^2}{2})$.

4. Выясните, какие из векторных полей предыдущей задачи будут гладкими. Ответ обосновать.

5. Вычислите и изобразите несколько векторов градиента функции $f(x^1,x^2)=x^1+(x^2)^2$.

проверочная 3. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 29 марта)

определения: векторное поле, гладкое векторное поле, параметризованная кривая, интегральная кривая векторного поля

1. Выведите систему дифференциальных уравнений для нахождения интегральной кривой.

2. Найдите интегральную кривую векторного поля $\mathbf{X}(x^1,x^2)=(x^1,x^2;0,2)$, проходящую через точку $(0,1)$.

3. Найдите параметрические уравнения интегральной кривой векторного поля, заданного ассоциированным отображением $X(p)=(-2x^2,\frac{1}{2}x^1)$, проходящую через точку $(0,1)$. Определите вид этой кривой.

4. Найдите параметрические уравнения интегральной кривой векторного поля, заданного ассоциированным отображением $X(p)=(2x^2,\frac{1}{2}x^1)$, проходящую через точку $(0,1)$. Определите вид этой кривой.

проверочная 4. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 5 апреля)

определение: гладкое векторное поле, интегральная кривая векторного поля, отображение φ_t, полное векторное поле, градиент функции.

1. Пусть дано векторное поле $\mathbf{X}(x^1,x^2)=(x^1,x^2;-x^2,x^1)$. Определите, какое преобразование плоскости задает отображение φ_t. Найдите образ окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ при отображении $\varphi_{\frac{\pi}{4}}$.

2. Пусть дано векторное поле $\mathbf{X}(x^1,x^2)=(x^1,x^2;x^2,2x^1)$. Определите, какое преобразование плоскости задает отображение φ_t. Найдите образ окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ при отображении φ_1.

3. Пусть $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – гладкая функция, $\alpha(t)$ – интегральная кривая градиента ∇f. Докажите, что $\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)=|\nabla f(\alpha(t))|^2$.

4. Докажите, что $\varphi_{t_1}\circ\varphi_{t_2}=\varphi_{t_1+t_2}$ и $(\varphi_t)^{-1}=\varphi_{-t}$.

проверочная 5. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 12 апреля) определения: n-поверхность, вектор в точке, градиент функции, гладкая функция, касательный вектор к параметризованной кривой, касательный вектор к n-поверхности.

1. Выясните, будет ли n-поверхностью множества точек S, которые задаются уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-c=0$ при различных значениях константы c. Как называются эти множества точек?

2. Пусть множество точек задано уравнением $x^3=(x^1)^2-(x^2)^2$. Докажите, что это поверхность. Как называется эта поверхность? Приведите пример касательного вектора в точке $p=(2,1,3)$.

3. Докажите, что если вектор $\mathbf{v}$ в точке p является касательным к n-поверхности S, то он перпендикулярен $\nabla f(p)$.

4. Докажите, что если вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен $\nabla f(p)$, то он является касательным к поверхности S.

5. Пусть множество точек задано уравнением $x^3=(x^1)^2+(x^2)^2$. Докажите, что это поверхность. Выясните, является ли вектор $(1,1,2;1,1,-1)$ касательным к этой поверхности.

6. Пусть дана поверхность $x^3=(x^1)^2+(x^2)^2$ и вектор в точке $(1,0,1;0,0,1)$. Представьте этот вектор в виде суммы касательного вектора к поверхности и вектора, коллинеарного градиенту функции, задающей поверхность, в этой точке.

проверочная 6. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 19 апреля)

определения: касательный вектор к n-поверхности, касательное пространство к поверхности, точка экстремума функции на n-поверхности, n-поверхность, градиент функции.

1. Найдите вид матриц, из которых состоит касательное пространство к группе $SL(2,\mathbb{R})$ в точке $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Пусть S – некоторая n-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная уравнением $f(x^1,\ldots,x^{n+1})=0$. Пусть на задана гладкая функция $g:U\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ и $p\in S$ – точка экстремума g на S. Докажите, что существует действительное число λ, такое что $\nabla g(p)=\lambda\nabla f(p)$.

3. Пусть S – окружность, заданная уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2=1$. Определим функцию $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ равенством

$$g(x^1,x^2)=6x^1-x^2.$$

Найдите максимальное и минимальное значения этой функции на окружности S.

4. Пусть S – единичная окружность $(x^1)^2+(x^2)^2=1$. Определим функцию $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ равенством

$$g(x^1,x^2)=a(x^1)^2+2bx^1x^2+c(x^2)^2,$$

где a,b,c – некоторые вещественные числа, не равные нулю одновременно. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции g на окружности S.

5. Пусть S – окружность, заданная уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2=1$. Определим функцию $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ равенством

$$g(x^1,x^2)=(x^1)^2+4x^1x^2-(x^2)^2.$$

Найдите максимальное и минимальное значения этой функции на окружности S.

проверочная 7. (10 минут в начале пары, дата проведения проверочной: 26 апреля)

определения: векторное поле на поверхности, касательное векторное поле на поверхности, нормальное векторное поле на поверхности, гладкое векторное поле на поверхности, интегральная кривая касательного векторного поля на поверхности.

1. Пусть дан гиперболический параболоид $(x^1)^2-(x^2)^2=x^3$ и векторное поле $\mathbf{X}(p)=(p;x^2,x^3,-x^1)$. Выясните, будет ли оно касательным, нормальным. В случае отрицательного ответа представьте его в виде суммы нормального и касательного векторных полей.

2. Докажите, что для любого касательного векторного поля на n-поверхности через каждую ее точку проходит интегральная кривая этого векторного поля.

3. Докажите, что для каждой связной n-поверхности существует ровно два нормальных гладких единичных векторных поля.

4. Дан однополостный гиперболоид $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=1$. Вычислите и нарисуйте несколько векторов нормальных единичных гладких векторных полей.

5. Дана парабола $(x^1)^2 = x^2$. Вычислите и нарисуйте несколько векторов нормальных единичных гладких векторных полей.

Программа зачета.

35 баллов= часть 1(15 балла)+часть 2(10 баллов) + часть 3 (10 баллов)

часть 1. Будет как минимум три определения из следующего списка, нужно уметь не только формулировать определение, но и приводить примеры объектов, подходящих под определение и уметь выяснять, подходит ли данный объект под определение.

определения: векторное пространство, арифметическое пространство, линейно зависимая система векторов, линейно независимая система векторов, базис, координаты вектора в базисе, канонический базис арифметического пространства, вектор в точке, касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке p, векторное поле на $U \subset \mathbb{R}^n$, гладкое отображение $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$, гладкое векторное поле на $U \subset \mathbb{R}^n$, параметризованная кривая, интегральная кривая векторного поля, касательный вектор параметризованной кривой, отображение φ_t, касательный вектор параметризованной кривой, гладкая функция $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, касательный вектор к поверхности, градиент функции, интегральная кривая векторного поля, скалярное произведение векторов в точке, n-поверхность, касательное пространство в точке к n-поверхности, векторное поле на n-поверхности, касательное векторное поле, нормальное векторное поле, гладкое векторное поле на n-поверхности, интегральная кривая касательного векторного поля на n-поверхности, гауссово отображение.

часть 2. Доказать одно из следующих утверждений. Будет беседа по доказательству (нужно знать определения объектов, используемых в доказательстве утверждения, уметь объяснять что откуда следует).

1. Докажите, что для $\mathbb{R}^n$ выполняется одна из восьми аксиом векторного пространства (в варианте будет написана какая именно аксиома).

2. Докажите, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$ векторного пространства V линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов можно выразить через остальные вектора системы.

3. Докажите, что $\{(p; e_1), \dots, (p; e_n)\}$ – базис в $T_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в $\mathbb{R}^n$.

4. Выведите систему дифференциальных уравнений для нахождения интегральной кривой векторного поля.

5. Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, α – интегральная кривая векторного поля ∇f. Докажите, что

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = |\nabla f(\alpha(t))|^2$$

для всех $t \in I$.

6. Пусть α – интегральная кривая поля ∇f. Докажите, что для каждого $t_0 \in I$ функция f растет вдоль интегральной кривой α в точке $\alpha(t_0)$ быстрее чем вдоль любой другой кривой, проходящей через $\alpha(t_0)$ с той же самой скоростью. Другими словами, покажите, что если кривая $\beta : \tilde{I} \to U$ такова, что $\beta(s_0) = \alpha(t_0)$ для некоторого $s_0 \in \tilde{I}$ и $|\dot\beta(s_0)| = |\dot\alpha(t_0)|$, то

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) \geq \frac{d}{ds}(f \circ \beta)(s_0).$$

7. Пусть дана гладкая функция $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, которая определяет n-поверхность S. Пусть на U определена еще одна гладкая функция $g : U \to \mathbb{R}$. Пусть существует точка $p \in S$, такая, что для любой точки $q \in S$ либо $g(p) \geq g(q)$, либо $g(p) \leq g(q)$. Докажите, что существует число λ, такое, что $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$.

8. Пусть дана окружность $S = \{(x^1, x^2)\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$ и функция $g(x^1, x^2) = a(x^1)^2 + 2bx^1x^2 + c(x^2)^2$. Докажите, что максимальное и минимальное значения функции g равны собственным значениям матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

9. Пусть дано гладкое касательное векторное поле на n-поверхности. Докажите, что через каждую точку этой n-поверхности проходит единственная интегральная кривая этого векторного поля.

10. Докажите, что для каждой n-поверхности существует ровно два гладких, единичных нормальных векторных поля.

11. Докажите, что геодезические имеют постоянную по модулю скорость.

12. Докажите, что любой прямолинейный отрезок n-поверхности является геодезической.

часть 3. Решить одну задачу, аналогичную следующим (числовые данные могут быть изменены). Будет беседа по решению (нужно знать определения объектов, используемых в решении задачи, уметь объяснять что откуда следует).

1. Выясните, будет ли система векторов $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,0,0,1)$ базисом в $\mathbb{R}^4$. Если да, то найдите координаты вектора $(2,1,-2,-1)$ в этом базисе.

2. Изобразите несколько векторов векторного поля, для которого ассоциированное отображение имеет вид 1) $X(p)=-p$, 2) $X(p)=(2x^2,3x^1)$, 3) $X(p)=(-2x^2,3x^1)$. Найдите интегральные кривые этих векторных полей. Определите вид интегральной кривой, проходящей через точку $(1,1)$.

3. Вычислите градиент следующих функций и изобразите несколько векторов этого векторного поля 1) $f(x^1,x^2)=2x^1+3x^2$, 2) $f(x^1,x^2)=2x^1+(x^2)^2$. Найдите интегральные кривые векторных полей ∇f. Определите вид интегральной кривой, проходящей через точку $(0,1)$.

4. Докажите, что $\varphi_{t_1}\circ\varphi_{t_2}=\varphi_{t_1+t_2}$ и $(\varphi_t)^{-1}=\varphi_{-t}$. Пусть дано векторное поле $\mathbf{X}(x^1,x^2)=(x^1,x^2;-x^2,x^1)$. Определите, какое преобразование плоскости задает отображение φ_t. Найдите образ окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ при отображении $\varphi_{\frac{\pi}{4}}$.

5. Нарисуйте множество, заданное функцией f, и несколько векторов векторного поля ∇f для точек из этого множества, если

$$\begin{array}{ll} (a)\, f(x^1,x^2)=(x^1)^2+2(x^2)^2-1; & (b)\, f(x^1,x^2)=(x^1)^2-2x^2-3; \\ (c)\, f(x^1,x^2)=(x^1)^2-2(x^2)^2; & (d)\, f(x^1,x^2)=x^1-(x^2)^2. \end{array}$$

6. Будет ли множество $S=\{(x^1,\ldots,x^{n+1})\, x^{n+1}=(x^1)^2+2(x^2)^2+\ldots+n(x^n)^2\}$ n-поверхностью? Ответ обосновать.

7. Будет ли множество $S=\{(x^1,\ldots,x^{n+1})\, x^{n+1}=n(x^1)^2-(n-1)(x^2)^2-\ldots-(x^n)^2\}$ n-поверхностью? Ответ обосновать.

8. Выясните, будет ли n-поверхностью множества точек S, которые задаются уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-c=0$ при различных значениях константы c. Как называются эти множества точек?

9. Пусть дана поверхность $x^3=(x^1)^2+(x^2)^2$ и вектор в точке $(1,0,1;0,0,1)$. Выясните, будет ли он касательным вектором к поверхности. В случае отрицательного ответа представьте этот вектор в виде суммы касательного вектора к поверхности и вектора, коллинеарного градиенту функции, задающей поверхность, в этой точке.

10. Пусть дана окружность $S=\{(x^1,x^2)\ (x^1)^2+(x^2)^2=1\}$. Найдите минимальное и максимальное значения функции $g(x^1,x^2)=3x^1-4x^2$. Найдите точки, в которых достигаются минимум и максимум.

11. Пусть дана окружность $S=\{(x^1,x^2)\ (x^1)^2+(x^2)^2=1\}$. Найдите минимальное и максимальное значения функции $g(x^1,x^2)=3(x^1)^2-2x^1x^2-4(x^2)^2$. (Коэффициенты в вариантах могут быть изменены).

12. Пусть даны ориентированная 2-поверхность S, угол $\varphi\in[-\pi,\pi]$ и отображение $R_\varphi: T_p(S)\to T_p(S)$ по формуле $R_\varphi(\mathbf{v})=\cos\varphi\mathbf{v}+\sin\varphi[\mathbf{N}(p),\mathbf{v}]$. Докажите, что отображение R_φ является линейным.

13. Опишите сферический образ при $n=1$ и $n=2$ данной n-поверхности, ориентированной нормалью $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, где f – функция, заданная левой частью каждого из уравнений:

- Цилиндр $(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=1$;
- Конус $-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=0$, $x^1>0$;
- Эллипсоид $(x^1)^2+\ldots+(n+1)(x^{n+1})^2=r^2$;
- Параболоид $-x^1+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=0$;

14. Для произвольных $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ параметризованная кривая $\alpha(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)$ являются геодезическими на цилиндре $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Докажите.

15. Для каждой пары единичных ортогональных векторов $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ и каждого $a \in \mathbb{R}$ окружность большого круга (или точка, если $a = 0$) $\alpha(t) = (\cos at)e_1 + (\sin at)e_2$ является геодезической на 2-сфере $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Докажите.