Дополнительные главы алгебры и математического анализа.

21 января 2018 г.

Содержание

Литература.

1. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва, «Высшая школа», 1979.

2. Мирошин В.В Делимость натуральных чисел в задачах С6 единого государственного экзамена по математике.

3. https://yagubov.ru [Электронный ресурс]

4. Попченко С.Н. Теоретический материал по теме "Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Взаимосвязь операций над комплексными числами и преобразованиями плоскости".

5. А.Г.Мордкович, Л.О. Деницева, Л.И.Звавич, Т.А.Корешкоав, и др. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2ч. задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень).

6. Т.М. Банникова, Н.А.Баранова Основы теории чисел, Ижевск, 2009.

7. И.В. Яковлев Материалы по математике. Китайская теорема об остатках.

8. Википедия.

9. М.И. Шабунин и др. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: профил.уровень, Москва, Просвещение, 2011. – 142с.

10. Абрамов, Виленкин и др. Избранные вопросы математики. 10 класс. Факультативный курс, Москва, Просвещение, 1980.

11. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. – 2-е изд. – М.:МЦНМО,2002.–240с.

12. Понарин Я.П. Алгебра комплексный чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов.– М.:МЦНМО, 2004.

13. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2004.–192с.

14. М.К. Потапов, А.В.Шевкин Алгебра и начала математического анализа: 10 кл. : базовый и профильный уровни: кн. для учителя, Москва, Просвещение, 2008. – С.191.

15. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математичекого анализа 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень), М.: Мнемозина, 2010, – 264с.

16. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных)

17. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. Учебное пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией. М., Просвещение, 1969 г.

18. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/А.Г.Мордкович. П.В.Семенов – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424.с.:ил.

19. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. Изд. 2-у, испр. и доп.М.:ФАЗИС, 1997, 554с.

20. Шипачев В.С.Математический анализ: Учеб.пособие для вузов.– М. Высшая школа, 1999, —176с.

21. Методы решения пределов [Электронный ресурс]mathprofi.ru

22. В.И. Арнольд Математический тривиум.// УМН, 1991, т.46, вып.1(277) с. 226 – 232.

23. Г.М.Фихтенгольц Основы математического анализа, Т.1, Москва, Наука, 1964.

24. Е.А.Семенко и др. Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа: Кн. для учащихся 11 класса общеобразовательных учреждений, Москва, Просвещение, 1997, 191с.

1. Дополнительные главы алгебры и теории чисел

1. Теоретико числовые функции: число и сумма делителей. Применение основных понятий теории делимости при решении уравнений

1.1. Теория и разобранные примерыГоворят, что целое число n делится на целое число m, если существует целое число k, такое что $n = mk$. Число m называют *делителем* числа n.

Напомним, что натуральное число p, отличное от 1, называется *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p.

Из основного курса теории чисел мы знаем основную теорему арифметики: Любое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = {p_1}^{k_1} \dots {p_\ell}^{k_\ell},$$

где $p_1, \dots, p_\ell$ – различные простые числа, $k_1, \dots, k_\ell$ – степени, в которых эти простые числа входят в разложение числа n. Для того чтобы выполнялась единственность разложения, единица исключается из множества простых чисел.

Любой делитель натурального числа $n = {p_1}^{k_1} \dots {p_\ell}^{k_\ell}$ может быть представлен в виде $m = {p_1}^{i_1} \dots {p_\ell}^{i_\ell}$, где $i_1, \dots, i_\ell$ пробегают значения от нуля до $k_1, \dots, k_\ell$ соответственно. Поэтому первый множитель в числе m можно выбрать $k_1 + 1$ и так далее. Тогда количество возможных способов составления числа m будет равно

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_\ell + 1).$$

Это формула для вычисления количества делителей числа.

Задача 1.1**.** (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010) Натуральное число n делится на 42 и имеет 42 делителя. Найдите все такие натуральные числа.

Решение. Пусть $n = {p_1}^{k_1} \dots {p_\ell}^{k_\ell}$ – каноническое разложение. Так как это число делится на 42, его можно представить в виде $n = 42m = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m$. Из этого следует, что простые делители $2, 3, 7$ заведомо входят в его каноническое разложение. С другой стороны, применяя формулу для вычисления количества делителей числа, получаем

$$\tau(n) = 42 = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1) \dots,$$

где k_1, k_2, k_3 – кратности делителей $2, 3, 7$. Так как

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1) \dots,$$

то в крайне правом выражении может быть только три скобки. Тогда получаем следующие возможности

$$
\begin{gathered}
k_1+1=2;\ k_2+1=3;\ k_3+1=7\\
k_1+1=2;\ k_2+1=7;\ k_3+1=3\\
k_1+1=3;\ k_2+1=2;\ k_3+1=7\\
k_1+1=7;\ k_2+1=2;\ k_3+1=3\\
k_1+1=3;\ k_2+1=7;\ k_3+1=2\\
k_1+1=7;\ k_2+1=3;\ k_3+1=2
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Откуда получаем шесть возможных значений для числа n:

$$2\cdot 3^2\cdot 7^6;\ 2\cdot 3^6\cdot 7^2;\ 2^2\cdot 3\cdot 7^6;\ 2^6\cdot 3\cdot 7^2;\ 2^2\cdot 3^6\cdot 7;\ 2^6\cdot 3^2\cdot 7.$$

□

Задача 1.2**.** (Кенгуру, 9-10 класс, 2016) Натуральное число N имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и N). Произведение пяти из них равно 648. Найдите шестой делитель.

Решение. Так как $648 = 2^3\cdot 3^4$, в каноническом разложении числа N будут присутствовать 2 и 3. По формуле для количества делителей получаем

$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\ldots = 6 = 2\cdot 3,$$

где k_1 – кратность 2 в каноническом разложении, а k_2 – кратность 3. Значит, скобок две и либо $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, либо $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Таким образом, мы получаем две возможности для N: $N = 2^2\cdot 3 = 12$ и $N = 2\cdot 3^2 = 18$. Первый случай не подходит, так как в числе 648 четыре тройки и их нужно все распределить по делителям числа 12: $1, 2, 3, 4, 6, 12$ (они войдут в 3, 6, 12 и в этих числах еще три двойки). Значит, на эти три делителя исчерпывается весь запас числа 648, а остается еще два делителя 2 и 4. Для второго случая получаем $648 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 18$ и ответ 9. □

Задача 1.3**.** Натуральное число N имеет в качестве простых делителей только 5 и 7. Найдите все такие N, удесятеренное число натуральных делителей равно сумме количеств натуральных делителей чисел N^2 и N^3.

Решение. Число $N = 5^x\cdot 7^y$. Тогда $N^2 = 5^{2x}\cdot 7^{2y}$, $N^3 = 5^{3x}\cdot 7^{3y}$. Применяем формулу для вычисления числа делителей и получаем уравнение

$$10(x+1)(y+1) = (2x+1)(2y+1) + (3x+1)(3y+1).$$

Это уравнение нужно решить в натуральных числах. После упрощения оно принимает вид

$$3xy = 5x + 5y + 8.$$

Выразим из него x: $x = \frac{5y+8}{3y-5} = 1 + \frac{2y+13}{3y-5}$. Так как x и y должны быть целыми (и даже натуральными), нужно потребовать, чтобы $2y + 13 \geq 3y - 5$, то есть $y \leq 18$. Заметим, что x и y входят в уравнение симметрично и оба должны быть четными, так как если они нечетны, то левая часть не делится на два, а правая часть делится на два. Значит, нам нужно проверить числа $y = 2, 4, 6, 8$. Мы видим, что при 6 и 8 не получается целым x. Тогда при $y = 2$ получаем $x = 18$. При $y = 4$ получаем $x = 4$. Окончательно получаем ответ: $N = 5^{18} \cdot 7^2$, $N = 5^2 \cdot 7^{18}$, $N = 5^4 \cdot 7^4$. □

Выведем формулу для вычисления суммы делителей. Пусть каноническое разложение числа $n = {p_1}^{k_1} \ldots {p_\ell}^{k_\ell}$. Тогда сумма делителей будет выглядеть так:

$$\sigma(n) = \sum_{i_1 \in \{0,1,\ldots,k_1\},\ldots} {p_1}^{i_1} \ldots {p_\ell}^{i_\ell}.$$

Легко видеть, что каждое слагаемое в этой сумме ровно один раз встречается после раскрытия скобок в произведении

$$(1 + p_1 + \ldots + {p_1}^{k_1}) \ldots (1 + p_\ell + \ldots + {p_\ell}^{k_\ell}).$$

Теперь применяем формулу для вычисления суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$\sigma(n) = \frac{{p_1}^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \ldots \frac{{p_\ell}^{k_\ell+1} - 1}{p_\ell - 1}.$$

В задачах удобнее применять эту формулу в таком виде

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \ldots + {p_1}^{k_1}) \ldots (1 + p_\ell + \ldots + {p_\ell}^{k_\ell}).$$

Задача 1.4. ([16], стр. 10) Найдите натуральное число N, имеющее 6 делителей, сумма которых равна 104.

Решение. По формуле для вычисления количества делителей числа получим

$$\tau(N) = 6 = 2 \cdot 3 = (k_1 + 1)(k_2 + 1).$$

Тогда само число N имеет вид

$$N = p_1 \cdot (p_2)^2.$$

Применяем формулу для вычисления суммы делителей числа

$$\sigma(N) = (1 + p_1)(1 + p_2 + (p_2)^2) = 104.$$

Так как $p_1 \geq 2$, то нам нужны следующие разложения числа 104 на два множителя: $104 = 4 \cdot 26 = 8 \cdot 13$. Получаем четыре системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + p_1 = 4 \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p_1 = 26 \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p_1 = 8 \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p_1 = 13 \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 8 \end{cases}$$

Решая их, получаем, что $p_1 = 7$, $p_2 = 3$. Следовательно, $N = 7 \cdot 3^2 = 63$. □

Посмотрим, как применяется теория делимости при решении уравнений в целых числах.

Задача 1.5**.** ([9], стр. 12) Найдите целочисленные решения уравнения $3x^2 - 8xy - 16y^2 = 19$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители

$$3x^2 + 4xy - 12xy - 16y^2 = x(3x + 4y) - 4y(3x + 4y) = (x - 4y)(3x + 4y) = 19.$$

Так как делителями числа 19 являются только числа ± 1 и ± 19, мы получаем четыре варианта:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ x - 4y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x - 4y = 19 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ x - 4y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ x - 4y = -19 \end{cases}$$

Осталось решить линейные системы уравнений и выбрать те решения, которые являются целочисленными. Проведите вычисления самостоятельно. □

Задача 1.6**.** ([9], стр. 11) Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 204$ не имеет целочисленных решений.

Доказательство. Разложим число 204 на простые множители

$$204 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17.$$

Из этого разложения мы видим, что оно делится на 3 (Почему выбрали именно 3? Число 2 стоит в квадрате и левая часть – разность квадратов, здесь вряд ли найдем противоречие; число 17 большое и признаков делимости у нас нет). Тогда рассмотрим случаи для x и y, которые возможны при их делении на 3. Они могут делиться на 3 без остатка, давать в остатке 1 или давать в остатке 2. Запишем эти возможности в таблицу: первый столбец – это возможные виды числа x, а первая строка – это возможные виды числа y. На пересечении строки и столбца будет вид числа $x^2 - 2y^2$.

	3t	3t+1	3t+2
3m	9k	3k+2	3k+1
3m+1	3k+1	3k+2	3k+2
3m+2	3k+1	3k+2	3k+1

Вычислим, например, вид числа $x^2 - 2y^2$ в случае, когда $x = 3m + 1$, $y = 3t + 2$. Остальные вычисляются аналогично. Имеем

$$x^2 - 2y^2 = (3m+1)^2 - 2(3t+2)^2 = 9m^2 + 6m + 1 - 18t^2 - 12t - 8 = 3(3m^2 + 2m - 9t^2 - 6t - 3) + 2 = 3k + 2.$$

Мы видим, что если оба числа x и y делятся на 3, то число $x^2 - 2y^2$ делится на 9, но 204 на 9 не делится. Значит, числа x и y, делящиеся на 3, не будут корнями уравнения. В остальных случаях число $x^2 - 2y^2$ не делится на 3, а число 204 делится. Значит, и в этих случаях числа x и y не являются корнями уравнения.

Итак, мы показали, что данное уравнение не имеет корней. □

Найдите целочисленные решения уравнения $5x^2 + 8xy - 4y^2 = 17$.

Задача 1.7. ([9], стр.12) Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8xy + 17y^2 = 2 \\ (x+4)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы мы видим, что $|x+4| \leq 1$ и $|y-1| \leq 1$. Тогда $0 \leq y \leq 2$, то есть возможные значения $y = 0; 1; 2$. Находим из по этим значениям y из второго уравнения x. Если оно оказывается целым, то проверяем, удовлетворяет ли найденная пара первому уравнению. $\square$

Задача 1.8. ([14], стр. 39) задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи, 1180 – 1240) Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждые две горлицы – также 1 монета и, наконец, за каждого голубя – по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Решение. Обозначим количества каждого вида птиц a, b, c соответственно. Тогда получаем первое уравнение $a + b + c = 30$ и второе уравнение $2a + 3b + 12c = 180$. Выразим из первого a и подставим во второе $b + 10c = 120$. Тогда b делится на 10, то есть равно либо 10, либо 20. Если $b = 10$, то получаем систему $a + c = 20$, $a + 6c = 75$. Тогда $a = 9$, $c = 11$. Если $b = 20$, то получаем систему $a + c = 10$, $a + 6c = 60$. Тогда $c = 10$ и $a = 0$, что противоречит смыслу задачи. Получаем, что воробьев было 9, горлиц – 10, голубей – 11. $\square$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. (тренировочный вариант ЕГЭ-2010) Найдите натуральное число N, имеющее 6 делителей, сумма которых равна 104.

2. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая 1 и само число).

3. ([9], стр. 12) Найдите целочисленные решения уравнения $5x^2 + 8xy - 4y^2 = 17$.

4. ([9], стр. 12) Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} 17x^2 + 8xy + y^2 = 2, \\ (x-1)^2 + (y+4)^2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

5. ([9], стр. 12) Найдите все целочисленные решения уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1)\, x^2 = 3y + 5; & 2)\, x^2 = 9y + 8; \\ 3)\, 2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 10 = 0; & 4)\, 3x^2y^2 + 4y^2 = 24x^2 + 48; \\ 5)\, x^2 - 2xy + 2y^2 = 4; & 6)\, x^2 + 2xy + 2y^2 = 4. \end{array}$$

6. *(необязательная) ([9], стр. 12) Докажите, что не имеет решений в целых числах уравнение:

$$1)\, 2001x^2 + 2002 = y^2;\ 2)\, 2002x^2 + 2003 = y^2.$$

7. ([14], стр. 40) задача из „Арифметики “ Л.Ф. Магницкого (1669 – 1739) Купил некто на 80 алтын гусей, утят и чирков. Гуся покупал по 2 алтына, утку по 1 алтыну, чирка же по 3 деньги, а всех куплено 80 птиц. Спрашивается, сколько каких птиц он купил. (1 алтын =3к., 1 деньга=0.5 к.)

2. Наибольший общий делитель и его линейное представление

2.1. Теория и разобранные примеры

Наибольшим общим делителем чисел $a_1, \dots, a_n$ называется такой их общий делитель, который делится на любой их общий делитель этих чисел. Целые числа $a_1, \dots, a_n$ называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

Будем обозначать наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_n$ круглыми скобками:

$$d = (a_1, \dots, a_n).$$

Рассмотрим вопрос о нахождении наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Есть два основных способа:

1. Основная теорема арифметики.

Напомним, что любое натуральное число единственным образом представимо в так называемом каноническом виде

$$n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s},$$

где $p_1, \dots, p_s$ – различные простые числа, $k_1, \dots, k_s$ – натуральные числа.

Если есть два числа a и b, то рассмотрим для каждого каноническое разложение. Найдем общие простые множители в этих разложениях, посмотрим, в каких степенях они входят в эти разложения и возьмем наименьшие из них. Произведение выбранных простых множителей в этих степенях даст наибольший общий делитель.

Например,

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^4;\ b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^8.$$

Общими будут простые числа: $2, 7$. Выбираем для них степени: для двойки это будет 2, а для семерки – 4. Тогда наибольший общий делитель $d = 2^2 \cdot 7^4$.

2. Алгоритм Евклида.

Не всегда числа легко раскладываются на простые множители. В этих случаях выгоден алгоритм Евклида.

Рассмотрим два натуральных числа a и b.

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot q_1 + r_1 & 0 \le r_1 < b\\
b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1\\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2\\
&\dots & \dots\\
r_{n-3} &= r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1} & 0 \le r_{n-1} < r_{n-2}\\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n & 0 \le r_n < r_{n-1}\\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} & r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Последний не равный нулю остаток будет наибольшим общим делителем чисел a и b. Действительно, поднимаясь снизу вверх по алгоритму Евклида, мы видим, что r_n делит r_{n-1}, а значит и r_{n-2}. Еще на строчку выше: r_n делит r_{n-2}. И так далее. Дойдя до верха, получаем, что r_n делит a и b, то есть является их общим делителем.

Рассмотрим произвольный делитель d чисел a и b. Опускается сверху вниз: число d делит a и b, следовательно, делит r_1. Число d делит b и r_1, следовательно, делит r_2. И так далее. Наконец, число d делит r_{n-2} и r_{n-1}, следовательно, делит r_n. Тогда r_n делится на любой общий делитель чисел a и b, следовательно, является наибольшим общим делителем.

Замечание 1.1. Строгое доказательство существования и единственности наибольшего общего делителя приведено в [1].

В качестве приложений к решению задач интересны следствия из алгоритма Евклида.

Следствие 1.1. r_n – наибольший общий делитель чисел a и b тогда и только тогда, когда он наибольший общий делитель чисел r_{n-1} и r_{n-2}; r_{n-2} и r_{n-3}; $\dots$; b и r_1.

Следствие 1.2. Если d – наибольший общий делитель чисел a и b, то существуют целые числа k_1 и k_2, такие что

$$d = k_1 a + k_2 b.$$

Доказательство. Рассмотрим предпоследнее равенство в алгоритме Евклида

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n.$$

Выразим из него r_n. Поднимаемся на одну строку выше в алгоритме Евклида. Выражаем из нее r_{n-1} и подставляем

$$r_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1}) \cdot q_n.$$

Мы получаем выражение r_n через r_{n-2} и r_{n-3}. Поднимаемся еще на одну строку выше в алгоритме Евклида, выражаем r_{n-2} и подставляем в последнее равенство. И так далее. Окончательно получим выражение r_n через a и b с некоторыми коэффициентами. $\square$

Следствие 1.3. Если общий делитель d чисел a и b представим в виде

$$d = k_1 a + k_2 b,$$

где k_1 и k_2 некоторые целые числа, то он является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Доказательство. Если d_1 – произвольный общий делитель чисел a и b, то он делит d. Получаем, что d – наибольший общий делитель. □

Следствие 1.4. Числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда

$$k_1 a + k_2 b = 1$$

для некоторых целых k_1 и k_2.

Следующая теорема сводит нахождение общего делителя нескольких чисел к нахождению наибольшего общего делителя двух чисел.

Теорема 1.1. *Пусть даны целые числа a, b, c. Тогда*

$$((a, b), c) = (a, b, c).$$

Доказательство. Обозначим $d_1 = (a, b)$ и $d = (d_1, c)$. Легко видеть, что d является делителем a и b.

По доказанным выше следствиям получаем

$$d_1 = k_1 a + k_2 b; \; d = k_3 d_1 + k_4 c.$$

Подставим первое равенство во второе

$$d = k_3(k_1 a + k_2 b) + k_4 c.$$

Если $\tilde{d}$ – произвольный общий делитель чисел a, b и c, то из последнего равенства следует, что он является делителем d. Следовательно, d – наибольший общий делитель чисел a, b, c. □

Посмотрим пример применения наибольшего общего делителя в решении диофантовых уравнений.

Диофантовым уравнением первой степени называется уравнение вида

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

с целыми коэффициентами a, b, c. Решением диофантова уравнения называется пара целых чисел x, y, которая превращает его в верное равенство.

Задача 1.9. Решите уравнение в целых числах: $47x - 111y = 89$.

Решение. Заметим, что есть числа a и b взаимно просты, то найдутся такие x, y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$. Умножаем на число c. Тогда $a \cdot (c \cdot x) + b(c \cdot y) = c$.

Применяем алгоритм Евклида к числам 47 и 111:

$$\begin{aligned}
&111 = 47 \cdot 2 + 17\\
&47 = 17 \cdot 2 + 13\\
&17 = 13 \cdot 1 + 4\\
&13 = 4 \cdot 3 + 1\\
&4 = 1 \cdot 4 + 0.
\end{aligned}$$

Теперь ищем линейное представление

$$1 = 13 - (4 \cdot 3) = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 = 4(47 - 17 \cdot 2) - 3 \cdot 17 = 4 \cdot 47 - 11 \cdot 17 = \\ = 4 \cdot 47 - 11 \cdot (111 - 47 \cdot 2) = 26 \cdot 47 - 11 \cdot 111.$$

Крайние части цепочки равенств умножаем на 89.

$$89 = 47(26 \cdot 89) - 111(11 \cdot 89).$$

Получаем

$$x = 26 \cdot 89 + 111t,\ y = 11 \cdot 89 + 47t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Задача 1.10. ([16], стр. 13) Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a, b \in \mathbb{N}$). Докажите, что дробь $\frac{2a+b}{5a+3b}$ также несократима.

Решение. Так как дробь $\frac{a}{b}$, наибольший общий делитель чисел a, b равен 1. Найдем наибольший общий делитель чисел $2a + b$ и $5a + 3b$, используя алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} &5a + 3b = 2 \cdot (2a + b) + a + b \\ &2a + b = 1 \cdot (a + b) + a \\ &a + b = 1 \cdot a + b \end{aligned}$$

Далее по алгоритму Евклида мы должны делить a на b и т.д. Другими словами, мы должны искать наибольший общий делитель чисел a и b. Он же будет наибольшим общим делителем чисел $5a + 3b$ и $2a + b$. Так как $(a, b) = 1$, то $(5a + 3b, 2a + b) = 1$. $\square$

Задача 1.11. ([16], стр. 13) Найдите все натуральные n, при которых дробь

$$\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$$

сократима.

Решение. Опять ищем наибольший общий делитель числителя и знаменателя:

$$3n^3 - 8n^2 + 14n - 8 = (3n - 5)(n^2 - n + 3) + 7$$

Тогда наибольший общий делитель будет такой же, как у $3n - 5$ и 7. Так как 7 – простое число, то возможны случаи: $d = 1$ и $d = 7$. В случае $d = 1$ получаем, что дробь несократима. Если $d = 7$, то $3n - 5 = 7t$. Откуда

$$n = \frac{7t + 5}{3} = 2y + 1 + \frac{t + 2}{3}.$$

Это должно быть натуральное число, то есть $t = 3k + 1$. Тогда $n = 7k + 4$. $\square$

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя алгоритм Евклида, найдите (733, 1998) и (221,565,42). Найдите линейное представление наибольшего общего делителя для каждого случая.

2. ([9], стр. 12) Найдите все целые решения уравнения а) $5x - 3y = 13$, б) $4x - 5y = 17$.

3. *(необязательная) ([14], стр. 41) задача-шутка
   Докажите, что существует решение уравнения
   $$29x + 30y + 31z = 366$$
   в натуральных числах.

3. Цепные дроби.

3.1. Теория и разобранные примеры

Выражение вида

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \ldots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

где $b_0, \ldots, b_n; a_0, \ldots, a_n$ могут быть любыми действительными или комплексными числами, а также функциями от одной или нескольких переменных, называется конечной цепной (или непрерывной) дробью. $b_0, \ldots, b_n$ называются частными числителями, а $a_0, \ldots, a_n$ – частными знаменателями или неполными частными. В этой записи, естественно предполагается, что $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Это условие не касается a_0, которое может быть равно нулю.

Нас будет интересовать частный случай цепных дробей, у которых все числители равны 1, а знаменатели – натуральные числа. Такие цепные дроби записывают так:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

Например, $[1; 3, 2, 4]$ – это цепная дробь

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}$$

Всякая цепная дробь такого вида выражает некоторое рациональное число. Чтобы получить выражение этого числа в виде обыкновенной дроби, надо свернуть цепную дробь, начиная с конца, все указанные операции. В нашем примере получаем

$$2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}; \ 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}; \ 1 + \frac{9}{31} = \frac{40}{31}.$$

Имеет место теорема

Теорема 1.2. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби. Такое представление определено однозначно (если договориться, что последний частный знаменатель больше 1).*

Доказательство в [17], стр. 240. Оно основано на применении алгоритма Евклида.

В качестве примера посмотрим представление в виде цепной дроби рационального числа $\frac{17}{11}$. Делим 17 на 11, дробную часть переворачиваем и опять делим и так далее:

$$\frac{17}{11} = 1 + \frac{6}{11} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{6}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{6}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$$

Те же самые значения a_i мы могли бы получить, применяя алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} &17 = 11 \cdot 1 + 6 \\ &11 = 6 \cdot 1 + 5 \\ &6 = 5 \cdot 1 + 1 \\ &5 = 1 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

Мы получили последовательность $[1; 1, 1, 5]$ (вторые множители первых слагаемых в правых частях равенств).

Цепные дроби служат для получения приближенных значений, имеющих малые знаменатели. Эти приближенные значения получаются так: число разлагают в цепную дробь и обрывают процесс разложения на некотором шагу, заменяя смешанную дробь ее целой частью. Получающиеся таким образом дроби называются подходящими дробями для данной цепной дроби. Иными словами, подходящими дробями для заданной цепной дроби

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

называются дроби

$$[a_0];\ [a_0; a_1];\ [a_0; a_1, a_2];\ \ldots, [a_0; a_1, \ldots, a_n],$$

то есть

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1};\ \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1};\ \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \ldots$$

Чем больше номер подходящей дроби, тем утомительнее ее непосредственное обращение в обыкновенную дробь. При этом все предыдущие вычисления оказываются бесполезными для дальнейшего, все приходится выполнять вновь.

Естественно искать путь вычисления подходящих дробей данной цепной дроби, при котором использовались бы значения предыдущих дробей. Оказывается, для этого можно использовать так называемые рекуррентные соотношения между тремя последовательными подходящими дробями.

Методом математической индукции можно доказать ([17], стр. 251), что

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i-1}a_i + P_{i-2}}{Q_{i-1}a_i + Q_{i-2}},$$

где $i = 2, 3, \ldots, n$ и $\frac{P_i}{Q_i}$ – i-я подходящая дробь. Чтобы эта формула не теряла смысла при $i = 1$, кладут по определению $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$.

Вычислим подходящие дроби и саму дробь $[2; 3, 2, 7, 4]$. Вычисления по полученным формулам запишем в виде таблицы.

	0	1	2	3	4
a_i			2	7	4
P_i	2	7	16	109	452
Q_i	1	3	7	152	215

Рассмотрим применение цепных дробей для решения диофантовых уравнений вида $ax+by = c$, где a, b, c – целые числа. Такие уравнения мы уже решали, используя линейное представление наибольшего общего делителя двух чисел.

Задача 1.12**.** Решите в целых числах уравнение $43x + 30y = 1$.

Решение. Разложим $\frac{43}{30}$ в цепную дробь: $[1; 2, 3, 4]$. Рассмотрим разность между предпоследней и последней подходящими дробями

$$\frac{43}{30} - \frac{10}{7} = \frac{1}{30 \cdot 7}.$$

Тогда $43 \cdot 7 - 30 \cdot 10 = 1$. Умножаем обе части на 11

$$43 \cdot (77) + 30 \cdot (-110) = 11.$$

Откуда получаем, что $x = 77$, $y = -110$ является решением уравнения. Тогда общий вид всех решение будет такой:

$$x = 77 + 30t;\ y = 43t - 110;\ t \in \mathbb{Z}.$$

Этот метод всегда применим, если c делится на наибольший общий делитель чисел a и b. □

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Обратите следующие обыкновенные дроби в цепные: $\frac{355}{113}$, $\frac{271}{100}$, $\frac{707}{500}$.
2. Вычислите подходящие дроби для цепной дроби $[2, 4, 3, 2]$.
3. Используя цепные дроби, решите диофантовы уравнения: $4x + 7y = 41$, $7x - 5y = 21$, $19x + 17y = 15$.

4. Элементы теории сравнений

4.1. Теория и разобранные примеры

Запись (она называется *сравнением*)

$$a \equiv b\,(mod\,m)$$

означает, что разность $a-b$ делится на m.

Перечислим основные свойства сравнений.

1. В сравнениях мы можем переносить слагаемые из одной части сравнения в другую, как мы это делаем в уравнениях. Убедитесь самостоятельно, что

$$a \equiv b\,(mod\,m) \;\Rightarrow\; a-b \equiv 0\,(mod\,m).$$

2. Одно сравнение можно подставлять в другое (по одному модулю)

$$ac \equiv b\,(mod\,m),\; a \equiv d\,(mod\,m) \;\Rightarrow\; dc \equiv b\,(mod\,m).$$

Действительно, по условию имеем $ac-b$ делится на m и $a-d$ делится на m. Тогда

$$dc - b \pm ac = (ac-b) + c(d-a)$$

делится на m, так как обе скобки делятся на m.

3. Два сравнения по одному и тому же модулю можно складывать и вычитать, а также умножать обе части сравнения на одно и то же число:

$$a \equiv b\,(mod\,m),\; c \equiv d\,(mod\,m) \;\Rightarrow\; a \pm c \equiv b \pm d\,(mod\,m)$$
$$a \equiv b\,(mod\,m),\; k \in \mathbb{Z}(k \neq 0) \;\Rightarrow\; ak \equiv bk\,(mod\,m).$$

4. Делить обе части сравнения мы можем на число, взаимно простое с модулем:

$$ak \equiv bk(mod\,m),\; \text{НОД}(m,k)=1 \;\Rightarrow\; a \equiv b\,(mod\,m)$$

(докажите эти факты самостоятельно, используя определение сравнения).

5. Мы покажем, что сравнения по одному модулю можно перемножать, то есть

$$a \equiv b\,(mod\,m),\; c \equiv d\,(mod\,m) \;\Rightarrow\; ac \equiv bd\,(mod\,m).$$

Действительно, нам нужно показать, что $ac-bd$ делится на m. Имеем

$$ac - bd \pm bc = (a-b)c + (c-d)b.$$

Так как обе скобки делятся на m (см. исходные сравнения), то и сумма будет делиться на m.

6. Из любого сомножителя в произведении можно вычесть модуль, не нарушив сравнения. Это свойство сразу же обобщается на любую конечную степень m.

$$ab \equiv (a-m)b\,(mod\,m).$$

Посмотрим, как применяется теория сравнений при решении задач на нахождение остатка от деления.

Задача 1.13. Докажите, что число $a = 47^4 + 70^3 + 93^4 + 20$ делится на 23.

Решение. **1 способ.** Делим числа 47, 70 и 93 на 23 с остатком. Во всех трех случаях получаем 1. Тогда

$$47 \equiv 1\,(mod\,23);\; 70 \equiv 1\,(mod\,23);\; 93 \equiv 1\,(mod\,23).$$

Следовательно (умножаем сравнения),

$$47^4 \equiv 1^4\,(mod\,23);\ 70^3 \equiv 1^3\,(mod\,23);\ 93^4 \equiv 1^4\,(mod\,23).$$

Теперь складываем все три сравнения и прибавляем 20 к обеим частям сравнения

$$a \equiv 1+1+1+20\,(mod\,23) \equiv 0\,(mod\,23),$$

то есть $a-0$ делится на 23. Таким образом, мы получили, что a делится на 23.

2 способ. Преобразуем a

$$a = (47^4-1)+(70^3-1)+(93^4-1)+23$$

Вспоминаем формулы сокращенного умножения для x^3-1, x^4-1:

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1);\ x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Применяя их в нашем случае, получаем,

$$a = 46q_1 + 69q_2 + 92q_3 + 23.$$

Легко видеть, что каждое из слагаемых делится на 23, а значит, и вся сумма делится на 23.

Второй способ, конечно, проще, но первый более универсален. □

Задача 1.14**.** Докажите, что число $a = 10^8 + 10$ делится на 11.

Решение. **1 способ.** Здесь удобно такое сравнение

$$10 \equiv -1\,(mod\,11).$$

Тогда

$$10^8 + 10 \equiv (-1)^8 + 10\,(mod\,11) \equiv 11\,(mod\,11) \equiv 0\,(mod\,11).$$

Это означает, что число a делится на 11.

2 способ. Представим a в таком виде

$$a = 10^8 - 1 + 11.$$

Нам нужно показать, что число 10^8-1 делится на 99. Это восьмизначное число, все цифры которого 9. Оно делится на 99, а значит и на 11. □

Задача 1.15**.** Найдите остаток от деления $a = 6^{192}+1$ на 17.

Доказательство. Заметим, что $6^{192} = 36^{96}$ и $36 \equiv 2(mod\,17)$. Тогда

$$6^{192} \equiv 2^{96}(mod\,17) \equiv 16^{24} \equiv (mod\,17) \equiv (-1)^{24}(mod\,17) \equiv 1(mod\,17).$$

Прибавляем 1 (посмотрите на число a) и получаем остаток 2. □

Задача 1.16**.** ([16], стр. 21) Найдите остаток от деления 2011^{2012} на 13.

Решение. Записываем цепочку сравнений

$$2011^{2012} \equiv 27^{335} \cdot 3 \equiv 1^{335} \cdot 3 \equiv 3 (mod\, 13).$$

Итак, остаток от деления равен 3. □

Задача 1.17. ([16], стр. 21) Докажите, что если целое число a не делится на 5, то число $a^4 - 1$ делится на 5.

Решение. Так как a не делится на 5, то остаток от деления a на 5 может быть одним из следующих чисел $r = 1, 2, 3, 4$. Используя сравнения этот факт можно записать так:

$$a \equiv r (mod\, 5).$$

Возводим это сравнение в 4 степень (умножаем само на себя 4 раза).

$$a^4 \equiv r^4 (mod\, 5).$$

Учитывая, что

$$1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1 (mod\, 5),$$

получаем, что $a^4 - 1 \equiv 0 (mod\, 5)$, то есть $a^4 - 1$ делится на 5. □

Пусть k – натуральное число. Выясним, какие остатки при делении на 3 может давать число k^2. Пусть $k = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Тогда

$$k^2 \equiv (3t + r)^2 \equiv 3t^2 + 6tr + r^2 \equiv r^2 (mod\, 3).$$

Получаем, что возможные остатки: 0, 1.

С помощью теории сравнений докажем признак делимости на 11.

Теорема 1.3. *Натуральное число a*

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на 11 тогда и только тогда когда на 11 делится число

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n.$$

Доказательство. Так как $10 \equiv (-1)(mod\, 11)$, получим

$$10^2 \equiv 10^4 \equiv \ldots \equiv 10^{2k} \equiv 1 (mod\, 11);$$

$$10^3 \equiv 10^5 \equiv \ldots \equiv 10^{2k+1} \equiv (-1)(mod\, 11).$$

Тогда по свойствам сравнений

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n (mod\, 11).$$

Итак, мы показали, что число a делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма его цифр, взятая с чередующимися знаками. □

Эта теорема может быть обобщена.

Теорема 1.4. *(общий признак делимости чисел) Для того чтобы число M делилось на число d, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр этого числа на остатки, получаемые от деления на d соответствующих степеней числа 10, делилась на d.*

Доказательство. Пусть

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

и

$$10^n = dq_n + r_n;\ \ldots;\ 10^2 = dq_2 + r_2;\ 10 = dq_1 + r_1.$$

Тогда M делится на d тогда и только тогда, когда на d делится сумма

$$a_n r_n + \ldots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0.$$

□

4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что число a делится на m, если 1) $a = 18^4 + 52^3 + 86^4 + 14$, $m = 17$; 2) $a = 20^3 + 58^4 + 77^2 + 16$, $m = 19$. Решите задачу двумя способами.
2. В предыдущей задаче поменяйте в заданиях значения m местами и найдите остаток от деления a на m.
3. Докажите, что число a делится на m, если 1) $a = 4 \cdot 35^{19} + 13 \cdot 52^{15}$, $m = 17$; 2) $a = 3 \cdot 5^{25} + 4^7 \cdot 9^6$, $m = 19$.
4. Найдите остаток от деления $a = 2^{425} + 50^{37}$ на 17.
5. ([16], стр. 21) Пусть k – натуральное число. Найдите возможные остатки от деления k^2 на 4,5,6,7,8,9.
6. ([16], стр. 21) Докажите, что при делении на 3 куб целого числа и само число дают одинаковые остатки (0,1,2).
7. *(необязательная) Попробуйте сформулировать признаки делимости на 13, 17, 19, 23.

5. Функция Эйлера, Малая теорема Ферма, теорема Эйлера, Китайская теорема об остатках.

5.1. Теория и разобранные примеры В предыдущей теме, находя остатки от деления, мы пользовались тем, что основание степени (или какая-нибудь его степень) при делении на модуль давала хорошие остатки: 1, 2, 3 и т.п. Что делать, если этого не происходит?

Есть две полезные теоремы: теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Малая теорема Ферма помогает работать с простыми модулями, а теорема Эйлера с составными. Чтобы сформулировать эти теоремы, нам потребуются новые понятия.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ – арифметическая функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. При этом полагают по определению, что число 1 взаимно просто со всеми натуральными числами и $\varphi(1) = 1$. Эта функция названа в честь Л. Леонарда Эйлера, который впервые использовал ее в 1760 году в своих работах по теории чисел для доказательства малой теоремы Ферма, а затем и для доказательства более общего утверждения – теоремы Эйлера.

Очевидно, что для любого простого числа p значение функции Эйлера

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Действительно, если p – простое число, то все числа, идущие перед ним не имеют с ним общих делителей кроме 1.

Можно показать, что функция Эйлера является мультипликативной функцией, то есть если числа m и n взаимно просты, то

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

И еще одно свойство, которое помогает вычислять функцию Эйлера. Если p – простое число, то

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

Действительно, посчитаем числа, которые не взаимно просты с p^n и меньше него. Это числа вида p, $2p$, $3p$, $\ldots$, $(p^{n-1}-1)p$. Первый множитель в этих числах как раз и считает их. Другими словами, этих чисел $p^{n-1} - 1$. Тогда количество чисел взаимно простых с p^n не превосходящих него равно $p^n - 1 - (p^{n-1} - 1) = p^n - p^{n-1}$.

Благодаря этим свойствам можно вычислить функцию Эйлера для любого n. Действительно, раскладываем n на простые множители $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ и применяем эти свойства

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}) = \varphi(p_1^{k_1}) \ldots \varphi(p_s^{k_s}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \ldots (p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}).$$

Ее можно преобразовать в более удобный вид, вынеся из скобок $p_1^{k_1}$, $\ldots$, $p_s^{k_s}$ и подставив $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$.

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Теперь мы можем сформулировать теорему Эйлера.

Теорема 1.5. *(теорема Эйлера) Если числа a и m взаимно просты, то*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \,(mod\, m),$$

где $\varphi(m)$ – функция Эйлера.

Доказательство. Докажем теорему Эйлера. Пусть $x_1, \ldots, x_{\varphi(m)}$ – все различные натуральные числа меньшие m и взаимно простые с ним. Так как a взаимно просто с m и x_i, $i = 1, \ldots, \varphi(m)$ взаимно просто с m, то ax_i взаимно просто с m, то есть $x_i a \equiv x_j (mod\, m)$ для некоторого j. Действительно, если это не так, то $x_i a \equiv k(mod\, m)$, где k и m не являются взаимно простыми (все взаимно простые с m перечислены среди иксов), то есть у них есть общий делитель $d > 1$. По определению сравнения $x_i a = m \cdot q + k$ и тогда d делит как правую часть равенства, так и левую, то есть $d > 1$ – общий делитель чисел $x_i a$ и m. Противоречие с их взаимной простотой.

Покажем, что все остатки при делении $x_i a$ на m различны. Действительно, если это не так, то существуют $i_1 \neq i_2$, такие что

$$x_{i_1} a \equiv x_{i_2} a (mod\, m) \ \Leftrightarrow \ (x_{i_1} - x_{i_2}) a \equiv 0 (mod\, m).$$

Так как a и m взаимно просты, на a можно разделить

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) \equiv 0 (mod\, m).$$

Это означает, что разность $(x_{i_1} - x_{i_2})$ делится на m. Но это были натуральные числа меньшие m. Противоречие.

В результате мы получаем $\varphi(m)$ сравнений

$$x_i a \equiv x_j (mod\, m),$$

в которых все правые части разные. Другими словами, в левых и в правых частях этих сравнений будут перечислены все возможные иксы. Перемножим эти сравнения

$$x_1 \ldots x_{\varphi(m)} a^{\varphi(m)} \equiv x_1 \ldots x_{\varphi(m)} \, (mod\, m).$$

Переносим в одну сторону и делим на число $x_1 \ldots x_{\varphi(m)}$, которое с m взаимно просто. В результате получаем требуемую формулу из теоремы Эйлера. □

Следствием теоремы Эйлера является малая теорема Ферма.

Теорема 1.6. *(Малая теорема Ферма) Если p – простое число и a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p, то есть*

$$a^{p-1} \equiv \ 1 \, (mod\, p).$$

У этой теоремы есть альтернативная формулировка: если p – простое число и a – любое целое число, то a^p сравнимо с a по модулю p, то есть $a^p \equiv a \, (mod\, p)$. В этой формулировке отсутствует требование, чтобы a не делилось на p.

Замечание 1.2. Чтобы получить малую теорему Ферма из теоремы Эйлера, нужно заметить, что для простого числа p взаимно простыми с ним будут все числа, начиная с 1 и заканчивая $p - 1$, то есть $\varphi(p) = p - 1$.

Теорема Эйлера и малая теорема Ферма применяются при нахождении остатка от деления. Их применение выгодно, когда происходит деление на достаточно большое число.

Посмотрим примеры решения задач.

Вернемся к задаче 1.17: нужно было доказать, что если a не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5. Это утверждение сразу следует из малой теоремы Ферма, так как a и 5 взаимно просты.

Задача 1.18**.** ([16], стр. 22) Докажите, что число n^5 оканчивается на ту же цифру, что и n.

Решение. Нам нужно доказать, что число $n^5 - n$ делится на 10 (при делении на 10 оба числа дают один и тот же остаток). Заметим, что

$$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

Тогда это четное число, следовательно, делится на 2. Используя малую теорему Ферма, получаем, что $n^5 \equiv n(mod\, 5)$, то есть $n^5 - n$ делится на 5. В результате получаем, что $n^5 - n$ делится на 10. □

Задача 1.19**.** ([16], стр. 22) Докажите, что число $13^{176} - 1$ делится на 89.

Доказательство. Имеем $13^{176} - 1 = (13^{88} - 1)(13^{88} + 1)$. Так как 89 простое число и оно взаимно просто с 13, используя малую теорему Ферма, получаем $13^{88} \equiv 1(mod\, 89)$. Тогда получаем, что $13^{88} - 1$ делится на 89. □

Задача 1.20**.** Найдите остаток от деления числа 11^{219} на 91.

Решение. Переформулируем задачу так, чтобы применить теорему Эйлера: найти такое число $0 < x < 91$, такое что $11^{219} \equiv x\, (mod\, 91)$.

Сначала заметим, что 11 и 91 взаимно просты. Вычислим функцию Эйлера $\varphi(91)$. Так как $91 = 7 \cdot 13$, получаем

$$\varphi(91) = 91 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right) = 6 \cdot 12 = 72.$$

Теперь применяем теорему Эйлера и свойства сравнений

$$11^{219}\, (mod\, 91) \equiv 11^{72 \cdot 3 + 3}\, (mod\, 91) \equiv (11^{\varphi(91)})^3 \cdot 11^3 \equiv 11^3\, (mod\, 91) \equiv$$
$$\equiv 121 \cdot 11\, (mod\, 91) \equiv 330\, (mod\, 91) \equiv 57\, (mod\, 91).$$

Поясним последний переход. Нам нужно найти число, которое меньше 91 и сравнимо с 330 по модулю 91. Это остаток от деления 330 на 91. Итак, ответ в задаче 57. □

По легенде в Китае военачальники считали численность войска так: давали несколько последовательных команд типа «В колонну по 7 становись!», «В колонну по 11 становись!», ... и в каждом случае выясняли, сколько солдат получилось в последнем ряду. После этого – только по найденным остаткам! – вычислялось общее количество солдат с помощью китайской теоремы об остатках.

Прежде чем сформулировать эту теорему, рассмотрим предварительные сведения, необходимые для нее.

Задача 1.21. Докажите, что если натуральные числа a и m взаимно просты, то при любом целом b

1) ровно одно из чисел $0, 1, \ldots, m-1$ удовлетворяет сравнению $ax \equiv b\,(mod\,m)$;

2) сравнение $ax \equiv b\,(mod\,m)$ имеет единственное решение вида $x \equiv c\,(mod\,m)$.

Решение. 1) Пусть два различных числа $x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ удовлетворяют данному сравнению, то есть

$$ax_1 \equiv b(mod\,m);\; ax_2 \equiv b(mod\,m).$$

Вычитаем из первого сравнения второе и делим на a (можем это сделать, так как a и m взаимно просты). В результате получаем, что разность $x_1 - x_2 \equiv 0(mod\,m)$, то есть делится на m. Но этого не может быть, так как оба числа x_1, x_2 – натуральные и меньше m.

2) По пункту 1) получаем, что число x, удовлетворяющее сравнению $ax \equiv b(mod\,m)$ и меньшее m единственно. Обозначим его c. Очевидно, что любое число вида $c + mt$, $t \in \mathbb{Z}$ также удовлетворяет этому сравнению:

$$a(c + mt) \equiv ac(mod\,m) \equiv b(mod\,m).$$

То есть является его решением.

Рассмотрим любое число вида $d + mt$, $t \in \mathbb{Z}$, где $d \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $d \neq c$. Если предположить, что оно является решением сравнения $ax \equiv b(mod\,m)$, то получим, что

$$a(d + mt) \equiv ad(mod\,m) \equiv b(mod\,m).$$

Это противоречит единственности c.

Итак, мы показали, что решение $x \equiv c(mod\,m)$ единственно. □

Пусть натуральные числа a и m взаимно просты. Единственное число x из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, удовлетворяющее сравнению $ax \equiv 1(mod\,m)$, называется *мультипликативным обратным* по модулю m для числа a и обозначается $a^{-1}(mod\,m)$.

Задача 1.22. Найдите $3^{-1}(mod\,7)$ и $7^{-1}(mod\,3)$.

Решение. Найдем $3^{-1}(mod\,7)$. Нам нужно найти такое число $c \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, что $3c \equiv 1(mod\,7)$, то есть число $3c$ при делении на 7 должно давать в остатке 1. Это 5. В данной задаче ответ легко находится подбором. Что делать, если подбор не помогает? Заметим, что искомое число c удовлетворяет равенству $3c = 7k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ или перенося $7k$ влево

$$3c - 7k = 1.$$

Это знакомое нам диофантово уравнение первой степени, которое мы научились решать с помощью линейного представления наибольшего общего делителя. Проведем еще раз эти рассуждения для нашего примера. Берем числа 7 и 3 и делим с остатком

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Выражаем $1 = 3 \cdot (-2) - 7 \cdot (-1)$ (следим, чтобы знаки перед 1, 3, 7 были бы такие же как в исходном диофантовом уравнении. Тогда общее решение уравнения будет $c = -2 + 7t$, $t \in \mathbb{Z}$. Второе неизвестное нас не интересует. Вспоминаем, что нам нужно c от нуля до шести. Значит, берем $t = 1$ и получаем нужное $c = 5$. □

Замечание 1.3. В предыдущей задаче продемонстрирован общий метод решения сравнений вида $ax \equiv b(mod\, m)$ с помощью линейного представления наибольшего общего делителя. Мы показали, как получить линейное представление с помощью алгоритма Евклида. □

Теорема 1.7. *(Китайская теорема об остатках) Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – попарно взаимно простые натуральные числа (то есть $(m_i, m_j) = 1$, $i \neq j$) и $M = m_1 m_2 \ldots m_n$. Тогда, каковы бы ни были целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, система сравнений*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \,(mod\, m_1) \\ x \equiv a_2 \,(mod\, m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_n \,(mod\, m_n) \end{cases}$$

имеет единственное решение $x \equiv a \,(mod\, M)$, где

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i M_i \mu_i,$$

и обозначено

$$M_i = \frac{M}{m_i},\ \mu_i \equiv M_i^{-1}(mod m_i).$$

Теорема 1.8. *Доказательство проводится непосредственной проверкой. Проверим, что a удовлетворяет первому сравнению. Остальные доказываются аналогично. Рассмотрим выражение*

$$a = a_1 M_1 \mu_1 + a_2 M_2 \mu_2 + \ldots + a_n M_n \mu_n$$

Так как $M_2 = \frac{M}{m_2} = m_1 m_3 m_4 \ldots m_n$ делится на m_1, слагаемое $a_2 M_2 \mu_2$ тоже будет делится на m_1, то есть будет сравнимо с нулем по модулю m_1. Аналогично будут сравнимы с нулем все последующие слагаемые. Осталось первое слагаемое. Вспоминаем, что $\mu_1 \equiv M_1^{-1}(mod\, m_1)$ и по определению мультипликативного обратного $M_1 M_1^{-1} \equiv 1(mod\, m_1)$. Тогда получим

$$a \equiv a_1 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0(mod\, m_1) \equiv a_1(mod\, m_1).$$

Остальные сравнения проверяются аналогично.

Можно показать, что решение будет единственным.

Посмотрим, как применяется китайская теорема об остатках.

Задача 1.23. Олег собрал мешочек монет. Саша пересчитал их, и оказалось, что если разделить все монеты на пять равных кучек, то останется две лишние монеты. А если на четыре равные кучки – останется одна лишняя монета. В то же время монетки можно разделить на три равные кучки. Какое наименьшее число монет могло быть у Олега?

Доказательство. **1 способ.** Применим китайскую теорему об остатках. Составляем систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 2\,(mod\,5) \\ x \equiv 1\,(mod\,4) \\ x \equiv 0\,(mod\,3). \end{cases}$$

Находим $M = 60$, $M_1 = 12$, $M_2 = 15$, $M_3 = 20$. Формула в нашем случае выглядит так:

$$a = a_1M_1\mu_1 + a_2M_2\mu_2 + a_3M_3\mu_3 = 2 \cdot 12 \cdot \mu_1 + 1 \cdot M_2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot M_3 \cdot \mu_3.$$

Мы видим, что нам нужно найти μ_1 и μ_2, то есть нужно найти мультипликативные обратные для M_1, M_2. Подробно распишем для M_1. По определению мультипликативного обратного получаем сравнение

$$12x \equiv 1\,(mod\,5),$$

то есть $12x = 5k+1$ или $12x-5k = 1$. Это линейное представление НОД. Ищем его по алгоритму Евклида, как это делалось выше.

$$\begin{aligned} &12 = 5 \cdot 2 + 2 \\ &5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ &2 = 1 \cdot 2. \end{aligned}$$

Выражаем

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 = 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12.$$

Тогда $M_1 = -2$. Так как μ_1 должно быть сравнимо с M_1 по модулю 5, мы можем взять любое удобное для нас число, сравнимое с -2 по модулю 5. Например, 3 или 8 или -7. Возьмем все-таки $\mu_1 = -2$.

Аналогичные вычисления для μ_2 дают следующий результат $\mu_2 = -1$. Теперь находим a

$$a = 2 \cdot 12 \cdot (-2) + 1 \cdot 15 \cdot (-1) = -63.$$

Нам в задаче нужно наименьшее положительное x, сравнимое с a по модулю 60. Прибавляем к a по 60, пока не получим положительное число: 57. Итак, с помощью китайской теоремы об остатках мы получили, что у Олега 57 монет.

2 способ. Если не знать о китайской теореме об остатках, то задача тоже решается, причем эта задача решается даже проще. Итак, у нам нужно найти число x, которое делится на 3, при делении на 5 дает остаток 2 ($x = 5k + 2$), а при делении на 4 дает остаток 1 ($x = 4m + 1$). Приравниваем правые части двух последних равенств

$$5k + 2 = 4m + 1; \Leftrightarrow\ 4m - 5k = 1.$$

Здесь даже без алгоритма Евклида видно, что $m = k = -1$. Тогда любое решение этого диофантова уравнения будет иметь вид $m = -1+5t$, $k = -1+4t$, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = 20t-3$. Вспоминаем, что это число должно делится на 3. Так как 20 на 3 не делится, то должно на 3 делится t. Берем самое маленькое такое $t = 3$. Тогда $x = 57$. Мы получили тот же самый ответ. $\square$

Задача 1.24**.** Найдите все целые n, при которых число $a = n^2 + 3n + 1$ делится на 55.

Решение. Чтобы число $n^2 + 3n + 1$ делилось на 55, оно должно делится на 5 и 11. Найдем такие n отдельно для 5 и отдельно для 11, а затем с помощью китайской теоремы об остатках объединим ответы.

Начинаем с 5. Запишем данное число a в таком виде

$$a = n^2 + 5n - 2n + 1 = (n-1)^2 + 5n.$$

Такое число делится на 5 тогда и только тогда, когда на 5 делится число $n - 1$, то есть $n \equiv 1\,(mod 5)$.

Проводим аналогичные рассуждения для 11. Опять представляем число a в удобном виде

$$a = n^2 - 8n + 11n + 1 \pm 16 = (n-4)^2 + 11n - 15.$$

Тогда

$$(n-4)^2 + 11n - 15 \equiv (n-4)^2 - 4\,(mod\,11).$$

Получаем, что число $(n-4)^2 - 4$ должно делиться на 11, то есть $(n-4)^2 \equiv 4(mod\,11)$, то есть $n - 4 \equiv \pm 2(mod\,11)$, то есть $n \equiv 6(mod\,11)$. Итак, мы получаем, что n должно удовлетворять одной из двух систем сравнений

$$\begin{cases} n \equiv 1\,(mod 5) \\ n \equiv 6(mod\,11) \end{cases} \quad \begin{cases} n \equiv 1\,(mod 5) \\ n \equiv 2(mod\,11) \end{cases}$$

Применяя китайскую теорему об остатках в первом случае, мы получаем

a_i	m_i	M_i	μ_i
1	5	11	1
6	11	5	-2

$$n \equiv 1 \cdot 11 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot (-2)(mod\,55) \equiv (-49) \equiv 6(mod\,55).$$

Итак, в первом случае мы получаем $n = 55t + 6$, $t \in \mathbb{Z}$.

Проводим вычисления во втором случае

$$n \equiv 1 \cdot 11 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot (-2)(mod\,55) \equiv 46(mod\,55).$$

Итак, во втором случае получаем $n = 55t + 46$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $n = 55t + 6$, $n = 55t + 46$, $t \in \mathbb{Z}$. □

5.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что при любом целом a разность $a^3 - a$ делится на 3;
2. Найдите остаток от деления 13^{245} на 77.
3. Найдите остаток от деления 17^{324} на 69.

4. *(необязательная) Найдите $7^{-1}(mod\,3)$.

5. *(необязательная) Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на $2, 3, 5, 7$ остатки $1, 2, 4, 6$ соответственно.

6. *(необязательная) Три спутника пересекут меридиан города Лидса сегодня ночью: первый – в 1 ночи, второй – в 4 утра, а третий – в 8 утра. У каждого спутника свой период обращения. Первому на полный оборот вокруг Земли требуется 13 часов, второму – 15, а третьему – 19 часов. Сколько часов пройдет (от полуночи) до того момента, когда спутники одновременно пересекую меридиан Лидса?

6. Комплексные числа

6.1. Теория и разобранные примерыНапомним, что комплексное число – это упорядоченная пара (a, b) вещественных чисел, которую записывают в виде $z = a + bi$, и $i^2 = -1$. При этом операции с комплексными числами задаются так:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;\ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Эти правила легко получаются из условия $i^2 = -1$ и требования привычных условий линейности при раскрытии скобок (как в алгебре: первое слагаемое первой скобки на первое слагаемое второй скобки плюс первое слагаемое первой скобки на второе слагаемое второй скобки и т.д.). Вещественное число a называется *действительной частью* комплексного числа z, а вещественное число b называется *мнимой частью* комплексного числа z. Вещественная часть комплексного числа z обозначается $Re\,z$, а мнимая – $Im\,z$.

Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической записью* комплексного числа.

Комплексно сопряженным для комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\bar{z} = a - bi$. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Используя правило умножения комплексный чисел, проверьте самостоятельно, что $|z|^2 = z\bar{z}$.

Операция комплексного сопряжения коммутирует с операциями сложения и умножения комплексных чисел, то есть верны равенства

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Докажите эти равенства самостоятельно, используя представление комплексного числа в виде $z = a + bi$ и определение комплексно сопряженного числа.

Очевидно, что комплексное сопряжение комплексно сопряженного числа дает само число:

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Задача 1.25. ([5], 32.27) Решите уравнение $iz = (1 - i)$.

Умножаем обе части уравнение на $-i$ (комплексно сопряженное для коэффициента перед переменной). Тогда получим

$$z = (-i)(1 - i) = -1 - i.$$

Задача 1.26. ([5], 32.28) Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\frac{z_1}{z_2} = a\frac{z_2}{z_1} + bz_2$, если $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$.

Подставляем значения z_1 и z_2 в данную формулу. Получаем

$$\frac{1+i}{1-i} = a\frac{1-i}{1+i} + b(1-i).$$

В каждой дроби домножаем числитель и знаменатель на комплексно сопряженное знаменателю

$$\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = a\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + b(1-i).$$

В знаменателях применяем формулу $z\bar{z} = |z|^2$ и определения модуля комплексного числа. В числителях раскрываем скобки. В результате получаем

$$i = a(-i) + b - bi,\ b + (-a-b-1)i = 0.$$

Комплексное число равно нулю, если и вещественная и мнимая его части равны нулю

$$\begin{cases} b = 0 \\ a+b+1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

С помощью комплексного сопряжения среди комплексных чисел легко отлавливать вещественные и чисто мнимые. Покажем, что комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$. Действительно, пусть z – вещественное, то есть оно имеет вид $z = a + 0i$. Тогда $\bar{z} = a - 0i = a = z$. Обратно, пусть комплексное число $z = a + bi$ удовлетворяет условию $\bar{z} = z$. Тогда

$$a + bi = a - bi \ \Rightarrow b = 0,$$

то есть $z = a + 0i$, то есть число z является вещественным.

Докажите самостоятельно, что комплексное число является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z} = -z$.

Задача 1.27. ([5], 32.30) Докажите, что число $(b+i\sqrt{a})^3 + (b-i\sqrt{a})^3$ является действительным при любых вещественных $a \geq 0$, b. Вычислите $(2+i\sqrt{5})^3 + (2-i\sqrt{5})^3$.

Задача 1.28. ([5],32.36) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5z_1 - 3\bar{z}_2 = -9+5i \\ 4\bar{z}_1 + z_2 = 3-4i. \end{cases}$$

Применим операцию комплексного сопряжения ко второму уравнению, умножим на 3 и сложим с первым

$$\begin{cases} 5z_1 - 3\bar{z}_2 = -9+5i \\ 17z_1 = 17i. \end{cases}$$

Откуда находим $z_1 = i$. Подставляем это значение в первое уравнение и находим, что $z_2 = 3$.

Рассмотрим не нулевое комплексное число $z = a + bi$ и представим его в виде

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right).$$

Как мы определили выше $\sqrt{a^2+b^2}$ – это модуль комплексного числа z и он обозначается $|z|$. Сейчас для краткости мы обозначим его r. Заметим, что числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ удовлетворяют тождеству

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

а значит. найдется такое число φ, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Это число определено не однозначно. Таких чисел много и они имею вид $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Число $0 \le \varphi \le 2\pi$ называется *главным аргументом* комплексного числа z и обозначается $arg\, z$. Таким образом, ненулевое комплексное число мы можем записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Этот способ записи комплексного числа называется его представлением в тригонометрической форме или просто *тригонометрической формой* комплексного числа.

Выведем правило умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Пусть даны два числа

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha);\ z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Тогда по правилу умножения комплексный чисел получим

$$z_1z_2 = r_1r_2((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)) = r_1r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Получаем формулу

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \tag{1.2}$$

Мы видим, что при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножаются, а аргументы складываются.

В тригонометрической форме удобно делить одно комплексное число на другое. Выведем для этого формулу.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} =$$

Во второй дроби умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i\cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta))}{1} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Итак, при делении одного комплексного числа на другое их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

Из формулы (1.2) сразу же следует формула для возведения комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в квадрат

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Эта формула легко обобщается на любое натуральное n

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула называется *формулой Муавра.*

Эта формула верна также и для отрицательных n. Действительно, обозначим отрицательное $n = -m$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^m(\cos m\varphi + i\sin\varphi} = r^{-m}(\cos(0 - m\varphi) + i\sin(0 - m\varphi) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Используя формулу Муавра, докажите следующее свойство степени:

$$(zw)^n = z^n w^n;\ z, w \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Задача 1.29**.** Вычислите $(1 - i\sqrt{3})^{2017}$.

Решение. Запишем комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. Для этого нам будет нужен его модуль

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Тогда

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Возводим в степень по формуле Муавра

$$z^{2017} = 2^{2017}\left(\cos\left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{2017}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{2016}(1 + i\sqrt{3}).$$

□

Задача 1.30**.** Вычислите $(1 - \cos\alpha - i\sin\alpha)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Приведем выражение $1 - \cos\alpha - i\sin\alpha$ к такому виду, чтобы можно было применить формулу Муавра и свойство степени

$$1 - \cos\alpha - i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Применяем

$$(1 - \cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos n\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin n\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

□

Выведем формулу для извлечения корня из комплексного числа. Пусть z – комплексное число, отличное от нуля, n – натуральное число. Тогда корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое число w, что $w^n = z$. Представим оба числа z и w в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha);\ w = s(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Используя формулу Муавра, получаем

$$s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Таким образом, одно и то же комплексное число представлено двумя способами в тригонометрической форме. Но в двух таких представлениях модуль должен быть один и тот же, а аргумент может отличаться на $2\pi k$. Тогда получаем

$$s^n = r;\ \alpha = n\beta + 2\pi k,\ \mathbb{Z}.$$

Откуда получаем формулу для вычисления корня n-ой степени

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right).$$

Среди этих чисел только n различных: при значениях k от 0 до $n-1$. Дальше они будут повторяться. Проведите доказательство самостоятельно.

Задача 1.31**.** Вычислите все значения $\sqrt[3]{1}$.

Доказательство. Применяем формулу для вычисления корней, учитывая, что $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

$$w_k = \left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Подставляем поочередно k и получаем

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2};$$

□

Наконец, напомним показательную форму комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

6.2. Задачи для самостоятельного решения

1. ([5]) Решите уравнения $(1+i)z = (1-i)$; $(1+i)^2 z = (1-i)^3$.
2. ([5], 32.28) Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\frac{z_1}{z_2} = a\frac{z_2}{z_1} + bz_2$, если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$.

3. ([5], 32.31) При каких действительных значениях a число $z = (2-ai)^3-(3-ai)^2+5+a(2-i\sqrt{5})^3$ а) является действительным; б) чисто мнимым?

4. ([5], 32.36) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} i\bar{z}_1 + 2z_2 = 3 + 8i \\ 2iz_1 - \bar{z}_2 = 7i; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 7 - 6i \\ z_1 - 2z_2 = -3 - i; \end{cases}$$

5. ([15], стр. 125) С помощью тригонометрической формы комплексного числа решите уравнения: 1) $z^2 = -i$, 2) $z^2 = -16i$, 3) $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

6. ([10], стр. 104) Вычислите

$$\left(\frac{(1+i\sqrt{3})}{1+i}\right)^{1980}; \ (1 + i\,\mathrm{tg}\ 1^0)^{20}.$$

7. ([5], стр. 127) Вычислите $z^3 - z^2 + 1$ при $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

8. * (необязательная) Вычислите суммы

$$S_1 = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi;$$
$$S_2 = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi,$$

   где $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Найдите $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[3]{-1}$.

7. Основная теорема алгебры многочленов с одной переменной с комплексными коэффициентами и ее следствия. Теорема Виета

Напомним, что *многочленом одной переменной с комплексными (действительными, рациональными, целыми) коэффициентами* называется выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – некоторые комплексные (действительные, рациональные, целые) числа, одновременно не равные нулю. Если $a_n \neq 0$, то многочлен называется многочленом n-ой степени.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются многочлены с комплексными коэффициентами.

Говорят, что многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $g(x)$ дает в остатке многочлен $h(x)$ (степень многочлена $h(x)$ меньше степени многочлена $g(x)$), если выполняется равенство

$$f(x) = g(x)q(x) + h(x).$$

Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует многочлен $q(x)$, такой, что $f(x) = g(x)q(x)$.

Теорема 1.9. *(теорема Безу) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $f(a)$.*

Доказательство. Разделим многочлен $f(x)$ на двучлен $(x-a)$ с остатком

$$f(x) = (x-a)g(x) + b.$$

Тогда, подставляя вместо x число a, получим

$$f(a) = (a-a)g(x) + b,$$

то есть $b = f(a)$. □

Теория многочленов с комплексными коэффициентами оказывается оказывается проще теории многочленов с действительными коэффициентами. Это происходит благодаря основной теореме алгебры (была доказана К.Ф.Гауссом). Сформулируем ее.

Теорема 1.10. *Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [1].

Рассмотрим следствия из основной теоремы алгебры.

Следствие 1.5. Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение n линейных множителей.

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть утверждение верно при n, Докажем его при $n+1$.

Рассмотрим многочлен $f(x)$ с комплексными коэффициентами степени $n+1$. Тогда по основной теореме алгебры он имеет хотя бы один комплексный корень. Обозначим его z_1. Тогда по теореме Безу получим

$$f(x) = (x - z_1)f_1(x).$$

Многочлен $f_1(x)$ имеет степень n, а значит, по предположению индукции раскладывается на n линейных множителей. Таким образом, получаем, что многочлен $f(x)$ раскладывается на $n+1$ линейный множитель. □

Комплексное число z называется *корнем многочлена* $f(x)$, если $f(z) = 0$.

Следствие 1.6. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ тогда и только тогда, когда всякий корень многочлена $g(x)$ является корнем многочлена $f(x)$, причем его кратность в многочлене $g(x)$ не превосходит его кратности в многочлене $f(x)$.

Докажите самостоятельно, использовав разложение на линейные множители.

Замечание 1.4. Заметим, что аналогичное утверждение для многочленов с действительными коэффициентами не верно. Например, многочлен $(x+1)$ не делится на многочлен $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$, хотя оба они имеют ровно один корень (-1).

С помощью разложения многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители докажем теорему Виета для многочлена произвольной степени.

Рассмотрим многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, \ldots, a_0$ – некоторые комплексные числа. Разложим его на линейные множители, где $z_1, \ldots, z_n$ – корни этого многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - z_1)\ldots(x - z_n).$$

Раскрываем скобки в правой части равенства и собираем коэффициенты при степенях икс. n-я степень икса будем, если при умножении скобок из каждой скобки брать x. $(n-1)$-я степень получится, если из одной скобки при умножении брать зет, а из остальных иксы. Таких слагаемых получится столько же, сколько корней и коэффициентом перед x^{n-1} будет сумма всех корней с минусами. Рассуждая аналогично и учитывая, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при соответствующих степенях, получим

$$\begin{aligned}
&x^n: \quad a_n = a_n\\
&x^{n-1}: \quad a_n(-z_1 - z_2 - \ldots - z_n) = a_{n-1}\\
&x^{n-2}: \quad a_n(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n) = a_{n-2}\\
&\ldots\\
&\text{свободный член}: \quad a_n(-1)^n z_1 z_2 \ldots z_n = a_0
\end{aligned}$$

или, разделив обе части на a_n, получим

$$\begin{aligned}
&z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\tfrac{a_{n-1}}{a_n}\\
&z_1 z_2 + \ldots + z_{n-1}z_n = \tfrac{a_{n-2}}{a_n}\\
&\ldots\\
&z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \tfrac{a_0}{a_n}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Эти формулы называются формулами Виета. Еще из школьного курса известны формулы Виета для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}\end{cases}$$

Для уравнения третьей степени получаются такие формулы Виета

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}\\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{c}{a}\\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.\end{cases}$$

Запишите самостоятельно формулы Виета для уравнения четвертой степени.

Задача 1.32**.** Докажите, что при любых натуральных p и q число $(p+1)^{2q+1} + p^{q+2}$ делится на число $p^2 + p + 1$.

Решение. Рассмотрим многочлен $f(x) = (x+1)^{2q+1}+x^{q+2}$ и покажем, что он делится на квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$. Этот трехчлен имеет два комплексно сопряженных корня. Обозначим их α и β. Покажем, что они являются корнями многочлена $f(x)$. Так как α – корень многочлена $x^2 + x + 1$, то $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Тогда

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) = 0,$$

то есть $\alpha^3 = 1$. Кроме того, $\alpha + 1 = -\alpha^2$. Вычисляем

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^{2q+1}+\alpha^{q+2} = (-\alpha^2)^{2q+1}+\alpha^{q+2} = -\alpha^{4q+2}+\alpha^{q+2} = \alpha^{q+2}(1-\alpha^{3q}) = \alpha^{q+2}(1-(\alpha^3)^q) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что α – корень многочлена $x^2 + x + 1$ – является корнем многочлена $f(x)$. Для второго корня β все рассуждения проводятся дословно, заменяя α на β. Тогда получаем, что любой корень многочлена x^2+x+1 является корнем многочлена $f(x)$, то есть $f(x)$ делится на $x^2 + x + 1$. Так как коэффициенты у обоих многочленов являются целыми числами, то в качестве частного мы получим многочлен тоже с целыми коэффициентами (вспомните, как один многочлен делится на другой столбиком). Тогда

$$(p + 1)^{2q+1} + p^{q+2} = f(p) = (p^2 + p + 1)g(p),$$

где $g(p)$ – целое число. □

Задача 1.33**.** При каких целых n число $n^{44} + n + 1$ число является простым?

Доказательство. Заметим, что при $n = 0$ или $n = -1$ получаем, что $n^{44} + n + 1 = 1$ – простым не является. При $n = 1$ получаем 3 – простое число. Покажем, что при остальных целых n число $n^{44} + n + 1$ является составным.

Рассмотрим многочлен $f(x) = x^{44}+x+1$ и покажем, что он делится на квадратный трехчлен x^2+x+1. Аналогично предыдущей задаче доказывается, что оба корня квадратного трехчлена $x^2 + x + 1$ являются корнями многочлена $f(x)$. Тогда

$$x^{44} + x + 1 = (x^2 + x + 1)P(x),$$

где $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Так как при целом n, отличном от $\pm1, 0$ имеем

$$n^{44} + n + 1 > n^2 + n + 1,$$

то $n^2 + n + 1$ – делитель числа $n^{44} + n + 1$, не равный 1 и самому числу. □

Задача 1.34**.** Разложите на множители многочлены

$$x^5 + x + 1;\ x^{10} + x^5 + 1.$$

Доказательство. Для первого многочлена применим тот же прием, что и в двух предыдущих задачах: возникает гипотеза, что он делится на $x^2 + x + 1$. Опять обозначаем через α, получаем, что $\alpha^3 = 1$ и тогда

$$\alpha^5 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

так как α – корень многочлена x^2+x+1. Аналогично для второго корня. Итак, мы получаем, что многочлен x^5+x+1 делится на x^2+x+1. Теперь делим столбиком.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^5 & & & +x & +1 & x^2+x+1 \\
\cline{6-6}
x^5 & +x^4 & +x^3 & & & x^3-x^2+1 \\
\cline{1-3}
 & -x^4 & -x^3 & +x & +1 & \\
 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & x^2 & +x & +1 & \\
 & & x^2 & +x & +1 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Таким образом, мы получили разложение на два множителя:

$$x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

Многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень. Ниже мы выведем формулы для вычисления корней кубического уравнения и тогда сможем разложить данный многочлен на три множителя с действительными коэффициентами.

Многочлен $x^{10}+x^5+1$ раскладывается на множители аналогичным образом:

$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

(деление уголком проведите самостоятельно). □

Для решения следующих задач нам потребуются два очевидных тождества

$$(x_1+\ldots+x_n)^2={x_1}^2+\ldots+{x_n}^2+2(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n), \tag{1.4}$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)((x+y+z)^2-3xy-3yz-3xz). \tag{1.5}$$

Задача 1.35**.** Найдите сумму квадратов корней степени 2017 из числа $2-i$.

Решение. Обозначим эти корни (их $n=2017$ штук) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Они являются корнями многочлена $x^n-(2-i)$. По формулам Виета получаем, что сумма корней равна нулю (для суммы корней нам нужен коэффициент при $n-1$ степени). Так же равна нулю сумма попарных произведений (коэффициент при $n-2$ степени). Тогда согласно формуле (1.4) нулю равна сумма квадратов. □

Задача 1.36**.** Найдите сумму кубов корня третьей степени из 8.

Решение. Корней третьей степени из 8 три штуки. Обозначим их a, b, c. Они являются корнями многочлена x^3-8. Применяем формулы Виета

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ac=0 \\ abc=8 \end{cases}$$

Тогда по формуле (1.5) получим

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3 \cdot 8 = 24.$$

$\square$

Задача 1.37. Числа a, b, c связаны равенством

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Докажите, что какие-либо два из них противоположны.

Доказательство. Данное равенство можно переписать в виде

$$abc = (a+b+c)(ab+bc+ac). \tag{1.6}$$

Пусть a, b, c являются корнями некоторого кубического уравнения

$$t^3 + pt^2 + qt + r = 0.$$

Тогда согласно теореме Виета равенство (1.6) можно переписать в виде

$$-r = q(-p).$$

Тогда кубическое уравнение принимает вид $t^3 + pt^2 + qt + pq = 0$ или

$$(t+p)(t^2+q) = 0,$$

то есть один из корней этого уравнения $-p$. Пусть это будет, например, $c = -p$ (буквы a, b, c входят симметрично в исходное равенство, поэтому без разницы какая из них будет $-p$). Тогда $c = a + b + c$, то есть $a = -b$. $\square$

7.1. Задачи для самостоятельного решения

1. *(необязательная) Докажите, что любой многочлен степени $n \geq 1$ с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами, имеющими действительные коэффициенты.

2. Разложите многочлен $x^{12} + x^6 + 1$ на множители.

3. Докажите, что число $n^{26} + n + 1$ при любом натуральном $n \neq 1$ является составным.

4. Сумма двух корней уравнения $x^3 - 2x^2 - 5x + \lambda = 0$ равна 1. Найдите λ и решите это уравнение.

5. Найдите сумму квадратов корней степени 22 из i. Найдите сумму кубов корней третьей степени из i.

8. Решение уравнений третьей и четвертой степени.

8.1. Теория и разобранные примерыФормулы для нахождения корней квадратного уравнения хорошо известны из школьного курса. Получим формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней. Заметим, что норвежский математик Н.Х. Абель доказал, что не существует формулы, позволяющей с помощью конечного числа действий (сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней) решить общее уравнение пятой или более высокой степени.

Рассмотрим уравнение третьей степени с комплексными коэффициентами

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Так как уравнение третьей степени, то $a_3 \neq 0$. Из основной теоремы алгебры следует, что оно всегда имеет три корня (вещественные или мнимые). Научимся находить эти корни.

Сначала немного упростим это уравнение. Так как $a_3 \neq 0$, можно разделить на a_3

$$x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0. \tag{1.7}$$

Оказывается, можно еще избавиться от слагаемого b_2x^2. Постараемся найти такую замену $y = x + a$, чтобы коэффициент при квадрате переменной был бы равен нулю. Подставляем в (1.7) $y = x + a$

$$(y + a)^3 + b_2(y + a)^2 + b_1(y + a) + b_0 = 0.$$

Вычисляем коэффициент при y^2 и приравниваем его нулю.

$$3a + b_2 = 0.$$

Итак, мы должны взять $a = -\frac{b_2}{3}$, то есть $y = x - \frac{b_2}{3}$. В результате мы получим уравнение

$$y^3 + c_1y + c_0 = 0,\ c_1, c_0 \in \mathbb{C}.$$

Обозначим опять переменную через x и обозначим $c_1 = p$, $c_0 = q$. Тогда уравнение примет вид

$$x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

Такое кубическое уравнение называется *неполным кубическим уравнением.*

Выведем формулы для решения неполного кубического уравнения. Положим в уравнении (1.8) $x = u + v$, где u, v – новые переменные. Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

или

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0. \tag{1.9}$$

Если потребовать, чтобы

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

то равенство (1.9) будет верным, а значит, будет верным и равенство (1.8), в котором $x = u+v$. Таким образом, если решить систему (1.10) (найти u, v), сложить их, то получим корень кубического уравнения (1.8).

Покажем, что любой корень кубического уравнения (1.8) мы можем получить из системы (1.10). Пусть x – корень уравнения (1.8). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u+v=x \\ uv=-\frac{p}{3}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Это формулы Виета для квадратного уравнения $y^2 - xy - \frac{p}{3} = 0$ с переменной y, а u и v являются корнями этого уравнения. Так как квадратное уравнение всегда имеет два (комплексные) решения, мы всегда можем найти u и v, удовлетворяющие требованиям (1.11), а значит, это те u и v, которые дают взятое нами решение x кубического уравнения.

Итак, решение неполного кубического уравнения мы свели к решению системы

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Из этой системы следует система

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Это опять формулы Виета для квадратного уравнения

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0,$$

а его корни – это u^3 и v^3. Это уравнение называется *разрешающим* для неполного кубического уравнения. Нам остается извлечь корни третьей степени из u^3 и v^3 (получится девять пар решений), выбрать из них те пары, которые в произведении дают $-\frac{p}{3}$ и посчитать $x = u+v$. Это будут корни кубического уравнения.

Решаем разрешающее уравнение

$$y_1=u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\ y_2=v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta},\ \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

и получаем формулу для вычисления корней кубического уравнения (формула Кардано)

$$x_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}},\ \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27},$$

значения кубических корней берутся такие, что их произведение равно $-\frac{p}{3}$.

Задача 1.38**.** Найдите все корни уравнения $x^3-3x+2=0$.

Решение. Сначала прикинем ответ. Уравнение такое, что сразу виден один корень – это -2. Тогда, разделив уголком многочлен x^3-3x+2 на двучлен $x+2$ получим частное x^2-2x+1. Значит, еще два корня – это дважды взятая 1. Теперь решаем.

Мы можем сразу воспользоваться формулой Кардано (сделайте это самостоятельно). А мы для того, чтобы лучше понять ее вывод еще раз проведем его для данного уравнения.

Пусть $x = u + v$. Подставляем в данное уравнение.

$$(u+v)^3 - 3(u+v) + 2 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) + 2 = (u^3 + v^3 + 2) + (3uv - 3)(u+v) = 0.$$

Составляем систему и ее следствие

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -2 \\ uv = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -2 \\ u^3 v^3 = 1. \end{cases}$$

Вспоминаем формулы Виета и восстанавливаем разрешающее уравнение

$$y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Находим его корни $y_{1,2} = -1$. Значит, $u^3 = v^3 = -1$. Далее, извлечем кубические корни и запишем их по парам так, чтобы в произведении они давали 1 (см. систему). Представляем -1 в тригонометрической форме: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ и применяем формулу для извлечения кубического корня. У нас получится три значения

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};\ u_1 = \cos\pi + i\sin\pi;\ u_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Для v получаем точно такие же значения. Теперь располагаем их в таблицу так, чтобы в каждой строке произведение было равно 1. Для этого удобно воспользоваться формулой умножения комплексный чисел в тригонометрической форме (модули умножаются, аргументы складываются). После чего вычислить значения косинусов и синусов.

u	v
-1	-1
$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Наконец, складываем соответствующие u и v. В результате получим $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1$. □

Посмотрим, как решать уравнения четвертой степени. Это метод Феррари. Рассмотрим уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Запишем его в виде $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$ и прибавим к обеим частям $\frac{a^2x^2}{4}$, чтобы в левой части выделить полный квадрат

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства сумму

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4},$$

чтобы в левой части получился полный квадрат

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\frac{y^2}{4}-d. \tag{1.14}$$

Трехчлен справа зависит от параметра y. Подберем его так, чтобы этот трехчлен был полным квадратом. Для того чтобы трехчлен Ax^2+Bx+C был полным квадратом достаточно, чтобы $B^2-4AC=0$. Действительно, при выполнении этого условия квадратный трехчлен Ax^2+Bx+C имеет два совпавших корня a. Тогда он представим в виде $(\sqrt{A}(x-a))^2$.

Следовательно, в правой части (1.14) надо подобрать y так, чтобы выполнялось равенство

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0.$$

Собираем коэффициенты при степенях y

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-(c^2+d(a^2-4b))=0.$$

Решая это уравнение, мы можем найти y_0, которое превратит правую часть уравнения (1.14) в полный квадрат. Тогда получим, что исходное уравнение четвертой степени приводится к виду

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}\right)^2=(mx+n)^2$$

Решение этого уравнения сводится к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=mx+n; \\ x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}=-mx-n. \end{array}\right.$$

Решая эти два уравнения, мы найдем все четыре корня исходного уравнения.

Задача 1.39. Решите уравнение $x^4+2x^3+2x^2+x-6=0$.

Решение. Оставляем слева первые два слагаемые, остальные переносим направо

$$x^4+2x^3=-2x^2-x+6.$$

Прибавляем к обеим частям x^2, чтобы слева выделить полный квадрат

$$(x^2+x)^2=-x^2-x+6.$$

Прибавляем к обеим частям $(x^2+x)y+\frac{y^2}{4}$ и слева сразу выделяем полный квадрат, а справа собираем коэффициенты при степенях x

$$\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2=x^2(y-1)+x(y-1)+\frac{y^2}{4}+6. \tag{1.15}$$

Требуем, чтобы справа тоже был полный квадрат (это условие $B^2-4AC=0$)

$$(y-1)^2-4(y-1)\left(\frac{y^2}{4}+6\right)=0.$$

Нам повезло, и уравнение решается легко: выносим $y-1$ за скобку

$$(y-1)(y-1-y^2-24)=0.$$

Нам нужен всего один корень. Берем $y=1$ и подставляем в уравнение (1.15)

$$\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

В результате получаем совокупность квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ x^2+x+2=0, \end{array}\right.$$

которые решать умеем. □

8.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнения 1) $x^3-6x+4=0$, 2) $x^3+3x-2i=0$.

2. Решите уравнения 1) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$, 2) $x^4+12x+3=0$.

9. Симметрические многочлены двух переменных

9.1. Теория и разобранные примеры При решении кубических уравнений мы столкнулись с системой уравнений

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\frac{p}{3}. \end{cases}$$

В эту систему переменные u и v входят симметрично, то есть если обозначить u через v, а v через u, то система не изменится. В этом пункте мы посмотрим приемы с помощью которых решаются такие системы уравнений.

Многочлен от двух переменных x и y называется *симметрическим*, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Например, многочлен x^2y+yx^2 – симметрический, а x^3-2y^2 – нет.

Многочлены

$$\sigma_1=x+y;\ \sigma_2=xy$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Многочлены вида x^2+y^2, x^3+y^3, …, x^n+y^n, … называются *степенными суммами*. Введем для них обозначения

$$s_1=x+y;\ s_2=x^2+y^2;\ s_3=x^3+y^3;\ \ldots,\ s_n=x^n+y^n.$$

Теорема 1.11. *Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$.*

Доказательство. Докажем сначала, что любую степенную сумму $s_n = x^n + y^n$ можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2. Проведем доказательство методом математической индукции.

При $n = 1$ имеем $s_1 = x + y = \sigma_1$, а при $n = 2$ получаем

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = {\sigma_1}^2 - 2\sigma_2.$$

Пусть утверждение верно для всех $k \leq n$, то есть степенная сумма s_k представима в виде многочлена от σ_1 и σ_2. Докажем его для степенной суммы s_{n+1}. Рассмотрим

$$\sigma_1 s_n = (x + y)(x^n + y^n) = x^{n+1} + y^{n+1} + xy^n + yx^n = s_{n+1} + xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = s_{n+1} + \sigma_2 s_{n-1}.$$

Тогда

$$s_{n+1} = \sigma_1 s_n - \sigma_2 s_{n-1}. \tag{1.16}$$

По предположению индукции s_n и s_{n-1} представимы в виде многочленов от σ_1 и σ_2, следовательно, в виде такого многочлена представим и s_{n+1}.

Рассмотрим теперь произвольный симметрический многочлен от двух переменных x и y. Он содержит одночлены двух видов. Во-первых, одночлены вида (переменные входят в одинаковых степенях)

$$ax^k y^k = a(xy)^k = a{\sigma_2}^k.$$

Во-вторых, одночлены, в которых x и y имеют разные степени. Пусть симметрический многочлен содержит одночлен $bx^k y^\ell$, где $k \neq \ell$. Пусть $k < \ell$. Чтобы многочлен не менялся при замене x и y местами, он должен содержать и одночлен вида $bx^\ell y^k$. Тогда получаем в данном симметрическом многочлене сумму вида

$$bx^k y^\ell + bx^\ell y^k = bx^k y^k (x^{\ell-k} + y^{\ell-k}) = b{\sigma_2}^k s_{\ell-k}.$$

По доказанному выше степенная сумма $s_{\ell-k}$ представима в виде многочлена от σ_1 и σ_2. $\square$

Из доказательства теоремы мы видим, что для представления симметрического многочлена в виде многочлена от σ_1 и σ_2, нам нужны выражения степенных сумм s_n через σ_1 и σ_2. Выведем их, используя формулу (1.16). У нас уже есть

$$s_1 = \sigma_1;\ s_2 = {\sigma_1}^2 - 2\sigma_2.$$

Вычисляем

$$s_3 = \sigma_1({\sigma_1}^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Аналогичным образом получите самостоятельно еще формулы

$$\begin{gathered} s_4 = {\sigma_1}^4 - 4{\sigma_1}^2\sigma_2 + 2{\sigma_2}^2; \\ s_5 = {\sigma_1}^5 - 5{\sigma_1}^3\sigma_2 + 5\sigma_1{\sigma_2}^2. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Замечание 1.5. В рассмотренном нами методе представления степенных сумм в виде многочлена от σ_1 и σ_2 есть существенный недостаток: чтобы найти разложение s_n, нужно знать все предыдущие разложения для s_k, $k < n$. Существует формула (формула Варинга), которая позволяет получать разложение s_n сразу. Если заинтересовались, то ее вывод можно посмотреть в [11], стр. 15. С помощью этого метода получите выражения для следующих степенных сумм.

Выражения степенных сумм $s_n = x^n + y^n$ через $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$

s_1	σ_1	s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$
		...	....

Задача 1.40. Дан симметрический многочлен

$$f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y.$$

Представьте его в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов σ_1 и σ_2.

Решение. Для многочлена $f(x, y)$ сначала запишем его одночлены с одинаковыми степенями x и y, а затем пары одночленов, которые переходят один в другой при замене $x \leftrightarrow y$.

$$f(x, y) = -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) + 2(xy^4 + x^4y) - 5(xy^3 + x^3y) =$$

Первые два одночлена уже можем заменить, а из остальных скобок выносим все, что можем

$$= -{\sigma_2}^3 - 7{\sigma_2}^2 + (x^5 + y^5) + 3x^2y^2(x + y) + 2xy(x^3 + y^3) - 5xy(x^2 + y^2) =$$

Теперь подставляем выражения для степенных сумм

$$= -{\sigma_2}^3 - 7{\sigma_2}^2 + ({\sigma_1}^5 - 5{\sigma_1}^3\sigma_2 + 5\sigma_1{\sigma_2}^2) + 3{\sigma_2}^2\sigma_1 + 2\sigma_2({\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - 5\sigma_2({\sigma_1}^2 - 2\sigma_2)$$

Осталось только раскрыть скобки и привести подобные. Проделайте это самостоятельно. □

Посмотрим применение симметрических многочленов для решения уравнений, систем уравнений и разложения многочленов на множители.

Задача 1.41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Левые части уравнений представляют из себя степенные суммы. Поэтому мы можем заменить их многочленами от σ_1 и σ_2. Это будут новые переменные.

$$\begin{cases} {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35 \\ \sigma_1 = 5. \end{cases}$$

Откуда получаем $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 6$. Возвращаемся к переменным x и y:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Легко видеть, что пара (x, y) будет решением этой системы тогда и только тогда, когда x, y – корни квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$ (в одну сторону это следует из формул Виета, а в другую – из решения системы методом выражения одной переменной через другую). В результате получаем ответ $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. □

С помощью замены неизвестных некоторые системы уравнений можно привести к симметрической системе уравнений. Например, в системе

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 5 \\ xy^2 - x^2y = 1, \end{cases}$$

заменив y на $-z$ приходим к симметричной системе

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = 5 \\ xz^2 + x^2z = 1. \end{cases}$$

Есть системы, в которых такие замены менее очевидны:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 81x^4 + 16y^4 = 6817. \end{cases}$$

Здесь нужно подставить $3x = u$, $-2y = v$. Тогда система примет симметричный вид

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 6817. \end{cases}$$

Введением вспомогательных неизвестных можно свести уравнение с одним неизвестным к симметричной системе двух уравнений с двумя неизвестными.

Задача 1.42**.** Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{x} = u$, $\sqrt[4]{97 - x} = v$. Тогда получим уравнение $u + v = 5$. Кроме того,

$$u^4 + v^4 = x + (97 - x) = 97.$$

Получаем симметричную систему

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97. \end{cases}$$

Решаем, вводя σ_1 и σ_2:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ {\sigma_1}^4 - 4{\sigma_1}^2\sigma_2 + 2{\sigma_2}^2 = 97 \end{cases}$$

Сразу получаем $\sigma_1 = 5$. А σ_2 находится из квадратного уравнения $2{\sigma_2}^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$. Тогда

$$(\sigma_2)_{1,2} = 25 \pm \sqrt{25^2 - 264} = 25 \pm 19.$$

Итак, мы получаем совокупность двух систем

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 44; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6. \end{cases}$$

Первая система выдает квадратное уравнение $z^2 - 5z + 44 = 0$, которое не имеет действительных корней. Вторая система выдает квадратное уравнение $z^2 - 5z + 6 = 0$. Его корни $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Опять получаем совокупность двух систем

$$\begin{cases} (u =)\sqrt[4]{x} = 2; \\ (v =)\sqrt[4]{97 - x} = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} (u =)\sqrt[4]{x} = 3; \\ (v =)\sqrt[4]{97 - x} = 2; \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x = 16$, а из второй $x = 81$. □

Посмотрим задачи, в которых нужно составить квадратное уравнение, корнями которого являются корни данного квадратного уравнения.

Задача 1.43**.** Дано квадратное уравнение $x^2 + 6x + 10 = 0$. Составьте новое квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней данного уравнения (не решая исходное квадратное уравнение).

Решение. Обозначим корни данного квадратного уравнения через x_1, x_2, а корни искомого – через y_1, y_2. Тогда по теореме Виета получим

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -6; \ \sigma_2 = x_1x_2 = 10,$$

и, аналогично,

$$y_1 + y_2 = -p; \ y_1y_2 = q.$$

По условию задачи, имеем $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Тогда

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -s_2 = -({\sigma_1}^2 - 2\sigma_2) = -16;$$

$$q = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = {\sigma_2}^2 = 100. \tag{1.18}$$

Тогда искомое квадратное уравнение имеет вид $y^2 - 16y + 100 = 0$. □

С помощью симметрических многочленов можно решать неравенства, возвратные уравнения, раскладывать многочлены на множители. Подробности посмотрите в [11]. Очень понятная и хорошая книга.

Мы посмотрим еще несколько примеров применения симметрических многочленов к решению задач различного типа.

Задача 1.44. Упростите выражение

$$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}.$$

Решение. Применяем формулы для степенных сумм

$$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}=\frac{{\sigma_1}^7-({\sigma_1}^7-7{\sigma_1}^5\sigma_2+14{\sigma_1}^3{\sigma_2}^2-7\sigma_1{\sigma_2}^3}{{\sigma_1}^5-({\sigma_1}^5-5{\sigma_1}^3\sigma_2+5\sigma_1{\sigma_2}^2}=$$
$$=\frac{7}{5}\frac{\sigma_1\sigma_2({\sigma_1}^4-2{\sigma_1}^2\sigma_2+{\sigma_2}^2)}{\sigma_1\sigma_2({\sigma_1}^2-\sigma_2)}=\frac{7}{5}({\sigma_1}^2-\sigma_2)=\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2).$$

□

Замечание 1.6. Аналогичная теория симметрических многочленов строится для многочленов трех переменных (см. [11]).

9.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Решите системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=8; \\ x^2+y^2=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+xy=7; \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3-y^3=19(x-y); \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$$

2. Решите системы уравнений

$$\begin{cases} x^5-y^5=3093; \\ x-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}; \\ x+y=13. \end{cases}$$

3. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1;$$
$$\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}.$$

4. $*$ (необязательное) Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2+6x+10=0$.

5. $*$ (необязательное) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Вычислите значение выражения $x_1^k+x_2^k$ при $k=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$.

6. $*$ (необязательное) Докажите, что если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

7. $*$ (необязательное) Упростите выражение

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

8. Докажите тождество

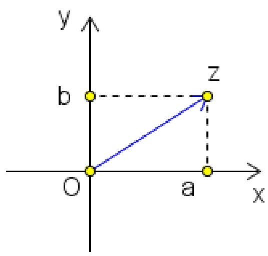
$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

9. $*$ (необязательное) Получите тождества, аналогичные тождеству из предыдущей задачи, для других степеней. Попробуйте вывести тождество для n-ой степени.

10. *(необязательное) Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

10.1. Теория и разобранные примеры

Аналогично тому как мы изображаем вещественные числа точками прямой, мы можем изображать комплексные числа точками плоскости. Берем прямоугольную декартову систему координат и ставим в соответствие комплексному числу $z = a+bi$ точку с координатами (a, b).

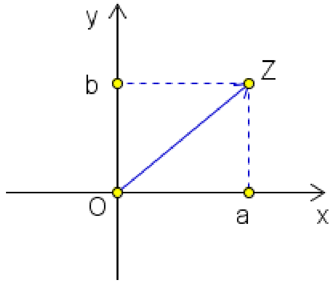


Заметим, что каждому комплексному числу мы можем однозначно поставить в соответствие точку плоскости и, наоборот, каждой точке плоскости можем поставить в соответствие комплексное число. При этом разным комплексным числам ставятся в соответствие разные точки. Таким образом, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости.

Построим взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством векторов, параллельных плоскости. Комплексному числу $z = a+bi$ ставим в соответствие точку Z и строим вектор $\overrightarrow{OZ}$. Таким образом, каждому комплексному числу ставится в соответствие вектор. Также каждому вектору, параллельному плоскости, ставится в соответствие комплексное число. Берем вектор и откладываем его от начала системы координат, берем его конец Z, смотрим какие координаты (a, b) у точки Z и строим комплексное число $z = a+bi$ по этим координатам.

Вещественные числа a мы можем отождествить с комплексными числами вида $z = a + 0i$. Тогда вещественным числам будут соответствовать точки оси Ox. Поэтому она называется *вещественной осью*. Комплексные числа вида $z = 0 + bi$ называются *чисто мнимыми* и им ставятся в соответствие точки оси Oy. Поэтому ось Oy называется мнимой осью.

Итак, взаимно однозначное соответствие приводит к следующей геометрической интерпретации комплексных чисел: каждое комплексное число $z = a + bi$ геометрически изображается на плоскости как точка $Z(a, b)$ или как вектор $\overrightarrow{OZ}$ с началом в начале координат и с концом в точке Z с координатами (a, b).



Тогда модуль комплексного числа z может быть проинтерпретирован как длина вектора $\overrightarrow{OZ}$. Действительно,

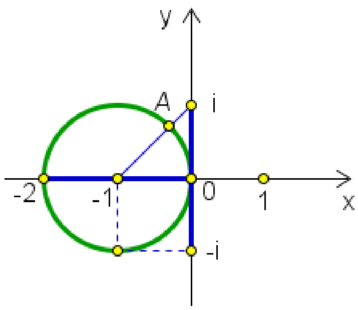
$$|\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{a^2+b^2} = |z|.$$

Задача 1.45**.** ([5], 32.38) Среди корней уравнения $\bar z + 1 = \frac{1}{z+1}$ найдите корень а) у которого действительная часть наименьшая; б) у которого мнимая часть наименьшая; в) который ближе всего расположен к началу координат; г) который ближе всего расположен к числу i.

Сразу заметим, что $z \neq -1$. Попробуем найти корни этого уравнения. Так как не понятно, как выражать комплексную переменную z в данном случае, уходим в вещественные числа, подставив $z = x + iy$. Таким образом, мы перейдем от уравнения с одной комплексной неизвестной к уравнению с двумя вещественными неизвестными. Получаем

$$(x+1-iy)(x+1+iy) = 1 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Мы видим, что это уравнение окружности с центром в точке $(-1, 0)$ и радиусом 1.



Ее точки (точнее, их координаты) являются корнями этого уравнения. Мы видим, что корень -2 имеет наименьшую действительную часть. Наименьшая мнимая часть у корня $-1-i$. Ближе всего к началу координат находится корень 0 (совпадает с ним).

Наконец, посмотрим, какой корень ближе к i. Если рассуждение, приведенное ниже, покажется сложным, то вычислите координаты точки A (ближайшей к i, см. рисунок) следующим образом: напишите уравнение прямой, проходящей через точки $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и найдите координаты точек пересечения этой прямой с окружностью, выберите нужную и запишите полученные координаты в виде комплексного числа. Мы будем рассуждать несколько иначе. Чтобы найти точку A мы соединили точку -1 и i отрезком. Он наклонен к оси Ox под углом 45^0. Если бы окружность была с началом в начале координат, то точка A имела бы координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Но так как окружность сдвинута на единицу влево, то точка A будет иметь координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Замечание 1.7**.** В последней задаче мы видели, что окружность с центром в точке $(-1, 0)$ радиуса 1 можно задать не только с помощью привычного уравнения $(x+1)^2 + y^2 = 1$, но и с помощью уравнения, использующего комплексные числа: $(z+1)(\bar z + 1) = 1$. Оказывается любую окружность и прямую можно задать с помощью комплексных чисел. Подробное изложение аналитической геометрии и теории преобразований с использованием комплексных чисел приведено в книгах [12] и [13]. □

10.2. Задачи для самостоятельного решения

1. $*$ (необязательное) ([5], 33.4) Изобразите на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих заданному условию а) действительная часть равна -2; б) мнимая часть равна 3 или 4; в) $Re\, z = Im\, z$; г) $Re\, z = (Im\, z)^2$.

2. $*$ (необязательное) ([10], стр. 95) Точки z_1, z_2, z_3 – три вершины параллелограмма. Найдите четвертую вершину.

3. $*$ (необязательное) ([10], стр. 95, необязательная) Докажите, что три различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ – действительное число.

2. Дополнительные главы математического анализа

1. *(необязательное) Предел числовой последовательности.

1.1. Теория и разобранные примерыФункцию вида $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{N}$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью. Обозначение (y_n).

Основные способы задания последовательности – аналитический и рекуррентный.

Пусть последовательность (y_n) задана так: $y_n = n^2$. Это аналитический метод.

В качестве примера рекуррентного задания последовательности приведем арифметическую прогрессию: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, где a и d – заданные числа, d – это разность арифметической прогрессии.

Еще один пример последовательности, которая задана рекуррентно:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_n = y_{n-2} + y_{n-1}.$$

Это последовательность Фибоначчи. Аналитически последовательность Фибоначчи задается так:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Последовательность $y_n = C$, где C – некоторое постоянное число, называют постоянной или стационарной.

Задача 2.1**.** Последовательность (y_n) задана рекуррентно $y_1 = a$, $y_n = y_{n-1}^2 - 4y_{n-1} + 4$, $n > 1$. При каких значениях параметра a последовательность является стационарной?

Решение. Последовательность будет стационарной, если $y_n = y_{n-1} = a$. Тогда получаем $a^2 - 5a + 4 = 0$, то есть $a = 1$ или $a = 4$. □

Задача 2.2**.** ([5], стр. 200, 37.21) Задайте формулой n-го члена и рекуррентным способом: а) возрастающую последовательность всех четных натуральных чисел, не делящихся на 4; б) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 5.

Решение. а) Числа данной последовательности должны делится на 2 и не должны делиться на 4, то есть не давать нуль в остатке при делении на 4. Тогда возможный остаток от деления – 2. Получаем аналитическое задание этой последовательности: $y_n = 4(n-1) + 2$. Чтобы записать рекуррентное задание этой последовательности, заметим, что она является арифметической прогрессией с разностью 4. Тогда получаем: $y_1 = 2$, $y_n = y_{n-1} + 4$.

б) Аналитическая задание: $y_n = 13(n-1)+5$. Рекуррентное задание: $y_1 = 5$, $y_n = y_{n-1}+13$. □

Последовательность (y_n) называется ограниченной сверху, если существует число M, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_n \leq M$.

Последовательность (y_n) называется ограниченной снизу, если существует число m, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $y_n \geq m$.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то она называется ограниченной последовательностью.

Задача 2.3**.** Исследуйте последовательность на ограниченность:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Все члены последовательности больше или равны 1. Следовательно, эта последовательность ограничена снизу.

Выясним, будет ли она ограничена сверху. Рассмотрим

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Поскольку $\sqrt{n}$ можно выбрать больше любого заданного числа M, то и y_n можно выбрать больше любого заданного числа M. Значит, последовательность не ограничена сверху.

Последовательность, ограниченная и сверху и снизу, называется ограниченной. Ее можно определить так: последовательность (x_n) называется ограниченной, если существует положительное число M, такое, что $|x_n| < M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность называется возрастающей (убывающей), если каждый ее член (кроме первого) больше (меньше) предыдущего.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Задача 2.4**.** Исследуйте на монотонность последовательность $y_n = \frac{n^2}{5^n}$.

Решение. Найдем разность y_{n+1} и y_n

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 5n^2}{5^{n+1}} = \frac{2n + 1 - 4n^2}{5^{n+1}} < 0,$$

так как $y = 2x + 1$ – линейная функция и она растет медленнее квадратичной функции $y = 4x^2$. При этом уже при $n = 1$ линейная функция выдает 3, а квадратичная – 4. □

Число a называется пределом последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, |x_n - a| < \varepsilon.$$

В школьном учебнике (Мордкович) это определение приведено в таком виде: Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены послдовательности, начиная с некоторого номера.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

Задача 2.5. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение. Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ получим

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

□

Задача 2.6. Последовательность $y_n = n$ расходящаяся.

Решение. Рассмотрим произвольное фиксированное число a. Покажем, что оно не может быть пределом этой последовательности. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда все члены последовательности, для которых $n > a + 1$, удовлетворяют неравенству $|n - a| > |a + 1 - a| = 1$. Получаем, что определение предела не выполняется и последовательность расходится. □

Сформулируем свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 2.1. *1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. 1. Предположим, что последовательность (x_n) имеет два различных предела a и b. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что интервалы $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не пересекаются. По определению предела для любого ε (в частности, для того, которое мы взяли) существуют $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $n > N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon$ и $n > N_2$ $|x_n - b| < \varepsilon$. Возьмем $n > max\{N_1, N_2\}$. Для таких n получаем, что $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $x_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Мы получили противоречие, так как эти два интервала не пересекаются.

2. Пусть последовательность (x_n) сходится и ее предел равен a. Возьмем в определении предела $\varepsilon = 1$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ $|x_n - a| < 1$, то есть $a - 1 < x_n < a + 1$, следовательно, $|x_n| < |a| + 1$. Возьмем в качестве $M = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|, |a| + 1\}$. Тогда $|x_n| < M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность будет ограниченной. □

Пока мы умеем определять сходимость и расходимость последовательностей только по определению (расходимость еще по свойствам). Посмотрим, как еще можно выяснить сходимость последовательности.

Последовательность (x_n) называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 2.2. *(Критерий Коши) Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Задача 2.7. Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ не имеет предела.

Решение. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши такая последовательность не имеет предела. □

Теорема 2.3. *(теорема Вейерштрасса) Для того чтобы неубывающая (невозрастающая) последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху (снизу).*

Посмотрим ее применение на примере.

Задача 2.8. Исследовать заданную рекуррентно последовательность $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$, $x_1 = 13$ на сходимость

Решение. Предположим, что предел существует. Выясним, чему он может быть равен. Обозначим $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a = \lim_{n\to\infty} \sqrt{12 + x_n} = \sqrt{12 + a}.$$

Решаем полученное уравнение $a^2 - a - 12 = 0$, получаем $a_1 = -3$, $a_2 = 4$. Первое решение не подходит, так как все члены последовательности положительны. Значит, если предел существует, то он равен 4.

Далее, докажем, что эта последовательность ограничена снизу и монотонно убывает. Покажем, что $x_n > 4$ методом математической индукции. Имеем $x_1 = 13 > 4$. Пусть для k верно, что $x_k > 4$. Проверим это неравенство для x_{k+1}

$$x_{k+1} = \sqrt{12 + x_k} > \sqrt{12 + 4} = 4.$$

Итак, первое утверждение доказано.

Проверяем монотонное убывание

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{12 + x_n} - x_n = \frac{(\sqrt{12 + x_n} - x_n)(\sqrt{12 + x_n} + x_n)}{(\sqrt{12 + x_n} + x_n)} = \frac{-x_n^2 + x_n + 12}{(\sqrt{12 + x_n} + x_n)} = \frac{-(x_n + 3)(x_n - 4)}{(\sqrt{12 + x_n} + x_n)} < 0.$$

Итак, последовательность ограничена сверху и монотонно убывает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса она сходится к 4. □

Чтобы вычислять пределы последовательностей, используют следующую теорему.

Теорема 2.4. *Пусть (x_n), (y_n) – числовые последовательности. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то*

а) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

б) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

в) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, *если* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $b \neq 0$.

Доказательство. Докажем первое свойство. Остальные доказываются аналогично. Берем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из определения предела для первой последовательности для $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\, \forall n > N_1\, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для второй последовательности для того же $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\, \forall n > N_2\, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n > N$ получим

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По определению получаем, что $a + b$ – предел. □

Используя эти свойства, можно вычислять пределы последовательностей

Задача 2.9**.** ([5], стр. 208, 38.19,38.21) Вычислите пределы последовательностей

$$x_n = \frac{n^2(2n+5) - 2n^3 + 5n^2 - 13}{n(n+1)(n-7) + (1-n)};\ x_n = \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n}{2^n - 6 \cdot 4^n}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+5) - 2n^3 + 5n^2 - 13}{n(n+1)(n-7) + (1-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 - 13}{n^3 - 6n^2 - 8n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{n} - \frac{13}{n^3}}{1 - \frac{6}{n} - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Вычислим второй предел аналогичным образом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n}{2^n - 6 \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

□

Задача 2.10**.** Даны числа b_1 и q, такие, что $b_1 \neq 0$, $|q| < 1$. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} S_n,\ S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Решение. Вычисляем предел, используя свойства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1}{q - 1} \lim_{n\to\infty} (q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1}(0 - 1) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

□

Задача 2.11**.** Сумма геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов – 40,5. Найдите пятый член прогрессии.

Решение. Сумма вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$. Получаем одно уравнение: $\frac{b_1}{1-q} = 9$.

Последовательность квадратов $b_1^2, b_2^2, \ldots$ тоже является геометрической прогрессией с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Тогда получаем $\frac{b_1^2}{1-q^2} = 40,5$. Решаем систему и находим b_1 и q. Тогда $b_5 = b_1 q^4$. □

Задача 2.12**.** (необязательная) Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Мы докажем, что предел этой последовательности существует. Он обозначается e – число Эйлера.

Докажем сначала вспомогательное утверждение: $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > -1$. (это неравенство иногда называют неравенством Бернулли).

При $n = 1$ это неравенство очевидно справедливо. Пусть оно справедливо для n. Докажем его для $n + 1$.

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha.$$

Используя это неравенство, покажем, что последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является убывающей. Пусть $n \geq 2$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1.$$

Получаем, что эта последовательность убывает. Так как все члены последовательности положительны, она ограничена снизу. Тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность имеет предел. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Итак, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. *(необязательное) ([5], стр. 200, 37.21) Задайте формулой n-го члена и рекуррентным способом: в) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, делящихся на 3 и на 7 (одновременно); г) возрастающую последовательность всех четных натуральных чисел, делящихся на 3 и на 5 одновременно.

2. *(необязательное) ([5], стр. 203, 37.41) Является ли ограниченной снизу последовательность: б) $y_n = \frac{n^2}{n+1}$, г) $y_n = ((-1)^n + 1)n^2$?

3. *(необязательное) ([5], стр. 203, 37.42) Является ли ограниченной сверху последовательность: б) $1, -1, 1, -2, 1, -3, \ldots$, в) $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+2}$?

4. *(необязательное) Используя теорему Вейерштрасса, докажите, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ сходится.

5. *(необязательное) Задайте последовательность $x_n = q^n$, $|q| < 1$ рекуррентно и, используя теорему Вейерштрасса, докажите, что эта последовательность сходится. Найдите предел этой последовательности.

6. *(необязательное) ([5], стр. 208, 38.19) Найдите пределы последовательностей

$$x_n = \frac{(2n+1)(3n-4)-6n^2+12n}{n+5};\ x_n = \frac{3\cdot 5^n - 7\cdot 4^n}{2^n + 6\cdot 5^n}.$$

7. *(необязательное) ([5], стр. 208, 38.37) Решите уравнение $\frac{1}{x}+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$, если известно, что $|x|<1$.

2. Предел функции.

2.1. Теория и разобранные примерыПусть дана функция $y=f(x)$. Для нее можно обобщить понятие предела последовательности (напомним, что последовательностью мы назвали функцию натурального аргумента).

Определение предела на бесконечности (по Коши). Пусть функция $y=f(x)$ задана на некотором числовом промежутке. Число A называется пределом функции f на бесконечности, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall|x|>\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Число A называется пределом функции f на плюс бесконечности, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x>\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$.

Аналогичным образом определяется предел функции на минус бесконечности:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x<-\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(все x берутся из того промежутка, на котором определена функция).

Свойства и приемы вычисления пределов функции на бесконечности точно такие же как при вычислении пределов последовательностей.

Задача 2.13. Вычислите $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^2+1}{5x^2-2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^2+1}{5x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-1+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{2}{x}}=-\frac{1}{5}.$$

□

Определение предела в точке (по Коши): говорят, что функция $y=f(x)$, определенная на множестве $E\subset\mathbb{R}$, стремится к A при x стремящемся к a, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in E\,|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Обозначение $\lim_{x\in E,x\to a}f(x)=A$. Если множество E понятно из контекста, то его в обозначении не пишут.

Задача 2.14. Пусть $E=\mathbb{R}\setminus 0$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Докажите, что $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

Доказательство. Действительно, при заданном ε берем $\delta=\varepsilon$ и тогда для $|x|<\delta=\varepsilon$, $x\in E$ получим $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|\delta=\varepsilon$. □

Задача 2.15. Используя определение предела, докажите, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x+1-2| = |x-1|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$. Для x, таких, что $|x-1| < \delta$ получим

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \delta = \varepsilon.$$

Определение предела выполнено. □

Для вычисления пределов используют свойства, аналогичные свойствам для вычисления пределов последовательностей.

Теорема 2.5. *1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функция $f(x) \pm g(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный $B \pm C$.*

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функция $f(x)g(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный BC.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $C \neq 0$) имеет в точке x_0 предел, равный $\frac{B}{C}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству такой же теоремы для последовательностей.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Все элементарные функции (функции, которые получаются из простейших элементарных функций с помощью арифметических операций и композиций) являются непрерывными в каждой точке своей области определения.

Посмотрим, как этот факт применяется к вычислению пределов.

Задача 2.16. Вычислите $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. В числителе и знаменателе при подстановке -2 получается нуль, следовательно, нужно дробь преобразовать (говорят, что нужно раскрыть эту неопределенность).

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4} =$$

Теперь применяем теорему

$$= \frac{-2+4}{4+2+4} = \frac{1}{6}.$$

□

Задача 2.17. Найдите $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$.

Решение. Так как функция элементарная (следовательно, непрерывная) и $\frac{\pi}{2}$ принадлежит ее области определения, получаем, что предел равен значению этой функции в точке $\frac{\pi}{2}$, то есть равен 1. □

Задача 2.18. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножаем и числитель и знаменатель на сопряженное

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)x} = \frac{1}{2}.$$

□

Задача 2.19. Найдите $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{3}{x^3-1}\right)$.

Решение. Здесь неопределенность $\infty - \infty$. Приведем к общему знаменателю и сократим, чтобы избавиться от неопределенности.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x^2+x+1)} = 0.$$

□

Задача 2.20. Найдите $\lim_{x\to 4} \left(\frac{8}{x^2-16} - \frac{1}{x-4}\right)$.

Решение. А здесь первое слагаемое разложим в сумму двух дробей. В данном случае ответ очевиден, но мы покажем общий прием. Итак, нам нужно разложить на два слагаемых выражение $\frac{8}{x^2-16} = \frac{8}{(x-4)(x+4)}$. Применяем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4} = \frac{8}{x^2-16}.$$

Нам нужно найти A и B. Приводим левую часть равенства к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$Ax + 4A + Bx - 4B = 8$$

для всех x. Тогда получаем систему $A + B = 0$, $4A - 4B = 8$. Откуда получаем, что $A = 1$, $B = -1$. Возвращаемся к пределу

$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{8}{x^2-16} - \frac{1}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{-1}{x+4} = -\frac{1}{8}.$$

□

Приведем еще одну полезную теорему для вычисления пределов. На жаргоне она называется теоремой о двух милиционерах.

Теорема 2.6. *Пусть даны три функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и функции $f(x)$ и $h(x)$ при $x \to a$ имеют предел C. Тогда функция $g(x)$ также имеет предел при $x \to a$ и он равен C.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела для функции $f(x)$ имеем

$$\exists \delta_1 > 0\, \forall x\, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow C - \varepsilon < f(x) < C + \varepsilon.$$

Аналогично для $h(x)$

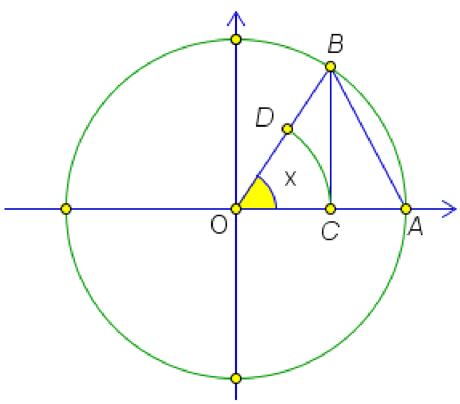
$$\exists \delta_2 > 0\, \forall x\, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow C - \varepsilon < h(x) < C + \varepsilon.$$

Так как $f(x) \le g(x) \le h(x)$, то для $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ получим, что $C - \varepsilon < g(x) < C + \varepsilon$. Это определение предела. □

Используя эту теорему, докажем первый замечательный предел.

Теорема 2.7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos^2 x$ и $\frac{\sin x}{x}$ – четные функции.



Берем тригонометрический круг (радиус равен 1). Тогда площадь треугольника OAB меньше площади сектора OAB, то есть

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin x < \frac{\pi \cdot 1^2}{2\pi} \cdot x,$$

откуда получаем, что $\frac{\sin x}{x} < 1$.

Рассмотрим окружность радиуса $OC = \cos x$. Тогда площадь сектора OCD меньше площади треугольника OAB, то есть

$$\frac{\pi(\cos x)^2}{2\pi} x < \frac{1}{2} \sin x,$$

то есть $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x}$.

Итак, мы получаем, что

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Крайне левая функция при $x \to 0$ стремится к 1. Крайне правая функция – постоянная – тоже стремится к 1. Значит, функция $\frac{\sin x}{x}$ тоже стремится к 1. □

Задача 2.21. Найдите предел $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{7x}$.

Решение. Заменим переменную: $\operatorname{arctg} 3x = t$. При $x \to 0$, $\operatorname{arctg} 3x \to 0$, то есть $t \to 0$. Выражаем $x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t$. Вычисляем предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{7x} = \lim_{t\to 0} \frac{3t}{7\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{3}{7}\frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = \frac{3}{7} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{7}$$

$\square$

Задача 2.22. Найдите $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Перейдем от тангенса к синусу и косинусу.Синус будет стремиться к 1. Применим подстановку $1 - x = t$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\cos(\frac{\pi}{2}(1-t))} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t} =$$

Подгоняем к первому замечательному пределу.

$$= \lim_{\frac{\pi}{2}t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}t \cdot \frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi}{2}t} = \frac{2}{\pi}.$$

$\square$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Выше мы определили число e как предел последовательности $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двум целыми числами $n \leq x < n+1$. Делим, прибавляем 1 и возводим это равенство в степень:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Переходим к пределу при $x \to +\infty$ (а значит и $n \to +\infty$) и получаем в крайних частях e, а значит и искомый предел равен e.

Для случая $x \to -\infty$ делаем подстановку $t = -x$ и сводим все к первому случаю.

Задача 2.23. Найдите $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

Решение. Делаем подстановку $t = \frac{x}{k}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k =$$

В случае непрерывной функции можем менять знак этой функции и предела (работает определение непрерывной функции)

$$\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k = e^k.$$

$\square$

Задача 2.24. Найдите $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$.

Решение. Преобразуем к такому виду, чтобы появился второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}.$$

□

Неопределенность 1^∞ раскрывается по формуле

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=e^{\lim_{x\to a}((u(x)-1)v(x))}.$$

Поясним, как эту формулу можно получить из второго замечательного предела (доказательство не строгое). Действительно, методом подстановки из второго замечательного предела получаем, что

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

где α – функция от x (главное, чтобы она стремилась к 0). Далее, искомый предел преобразуем к виду, в котором применим полученный выше «обобщенный» второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to a,u(x)-1\to 0}\left(((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{(u(x)-1)v(x)}=e^{\lim_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}.$$

Посмотрим применением этой формулы.

Задача 2.25. Найти $\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$.

Решение. Применяем формулу и сначала вычисляем предел (приемы уже нам знакомы)

$$\lim_{x\to 3}\left(\left(\frac{19-4x}{5x-8}-1\right)\frac{16-3x}{2x-6}\right)=-\frac{9}{2}.$$

Тогда ответ получается $\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}=e^{-\frac{9}{2}}$. □

Задача 2.26. Найдите $\lim_{x\to-\infty}(5-2x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

Решение. К предыдущей идее (см. формулу) прибавляется возможность менять местами предел и непрерывную функцию

$$\lim_{x\to-\infty}(5-2x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x}=\ln\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x}=$$

Сначала убеждаемся, что неопределенность вида 1^∞

$$=\ln\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}\right)^{5-2x}=$$

и применяем формулу для раскрытия этой неопределенности

$$\ln e^{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}-1\right)^{5-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-2x}{x-2}=-2.$$

Последний предел вычисляем уже известными способами. □

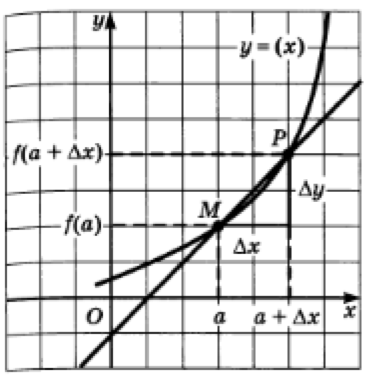
2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. ([5], стр. 215, 39.16) Вычислите $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^3+18}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{x^4+2x+1}$.
2. *(необязательное) ([20], стр. 60) Используя определение предела, докажите, что $\lim_{x\to6}(2x-5)=7$, $\lim_{x\to0}\cos x=1$.
3. ([20], стр. 62) Вычислите пределы: а) $\lim_{x\to1}\frac{x^5+x+1}{x^6+x^3+1}$, б) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$.
4. Найдите $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})$, $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.
5. *(необязательное) Докажите, что $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$.
6. Найдите $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$.
7. Используя первый замечательный предел, найдите $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{ctg}x(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$.

3. Производная функции одной переменной.

3.1. Теория и разобранные примеры

Пусть дана функция $y=f(x)$ и ее график.



Выберем на графике точку $M(a,f(a))$. Пусть в этой точке к графику функции проведена касательная (предполагаем, что она существует). Найдем ее угловой коэффициент.

Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a+\Delta x$. Ордината этой точки $f(a+\Delta x)$. Тогда угловой коэффициент секущей MP, то есть тангенс угла наклона секущей к оси Ox, равен $k_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

По определению касательная – это предельное положение секущей при $P\to M$. Чтобы найти угловой коэффициент касательной, нужно устремить Δx к нулю. Тогда получим

$$k=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

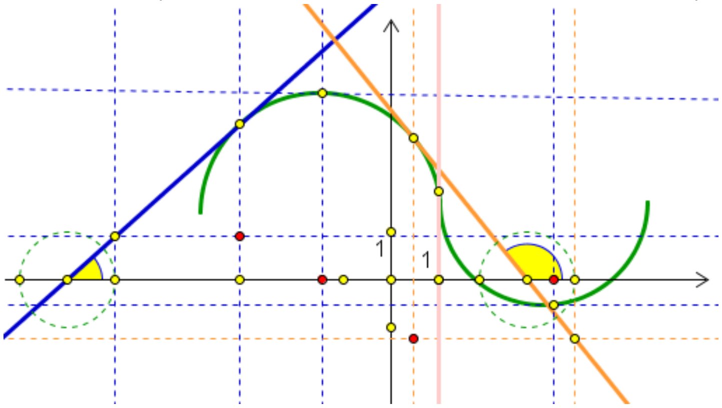
Этот предел (если он существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$.

Дадим полное определение производной функции. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x и некоторой ее окрестности. Тогда производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to0$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Задача 2.27. Изобразить график производной функции, если функция задана своим графиком.

Решение. Пусть нарисован график какой-либо функции (зеленая кривая).



Пользуемся геометрическим смыслом производной – это тангенс угла наклона касательной. Сначала рисуем две касательные, которые параллельны оси Ox. В этих точках угол наклона касательной нулевой и точки графика производной находятся на оси Ox (красные точки). Берем синюю касательную (слева). Угол ее наклона острый. Чтобы построить тангенс угла ее наклона, берем окружность единичного радиуса и проводим в точке пересечения касательной и оси Ox. Достраиваем до прямоугольного треугольника. Прилежащий катет у него будет единичным. Тогда второй катет будет равен тангенсу угла наклона касательной. Это ордината точки графика производной. Осталось только перенести этот отрезок к абсциссе.

Посмотрим как строится точка графика производной в случае, когда угол наклона касательной тупой (правая касательная). Построения такие же, но так как угол тупой, то ордината точки графика производной отрицательна. Следовательно, полученный отрезок нужно отложить вниз от оси Ox.

Посмотрим на розовую касательную. Она вертикальна. В этой точке у данной функции производной не существует. При приближении касательной к этой точке слева угол наклона остается тупым и приближается к прямому. Значит, слева от розовой прямой график производной уходит вниз на бесконечность, стремясь к розовой прямой. Аналогичная ситуация справа. На рисунке изображено несколько точек графика производной. Если их соединить плавной линией, то получится изображение графика производной данной функции. $\square$

Научимся вычислять производные элементарных функций. Для этого по определению производной придется вычислить производные простейших элементарных функций, а затем доказать свойства взятия производных.

В качестве примера посмотрим, как доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$. Остальные простейшие элементарные функции доказываются аналогичным образом.

Фиксируем x и вычисляем
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} =$$
применяем формулу косинуса суммы и $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos\Delta x)-\sin x\sin\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cos x 2\sin^2\frac{\Delta x}{2}-\sin x\sin\Delta x}{\Delta x} =$$

почленно делим и применяем первый замечательный предел. При этом помним, что $\sin x$ и $\cos x$ – константы, так как x зафиксировано.

$$= \cos x \cdot 0 \cdot 1 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Полную таблицу производных простейших элементарных функций легко найти в интернете.

Напомним правила дифференцирования:

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (правило Лейбница).
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
4. $(kf(x))' = kf'(x)$;
5. $(f(y(x)))' = f'(y) \cdot y'(x)$ (дифференцирование сложной функции).

из нее легко получается правило дифференцирования обратной функции

6. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $y = y(x)$.

где $k \in \mathbb{R}$, функции $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются дифференцируемыми в точке x.

Доказательства этих свойств простые (даже приведены в школьном учебнике [18]). Посмотрите их самостоятельно.

Напомним еще один прием вычисления пределов, который связан с производной функции: правило Лопиталя - Бернулли.

Теорема 2.8**.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, обращаются в нуль (или бесконечно большие) в этой точке и существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to a$, то существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных.*

Доказательство приводить не будем.

Правило Лопиталя позволяет раскрыть неопределенность вида $0 : 0$ и $\infty : \infty$.

Задача 2.28**.** Найдите $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln^3 x}$.

Решение. Неопределенность вида $\infty : \infty$. Применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln^3 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3\ln^2 x} =$$

Опять неопределенность такого же вида. Применяем еще раз правило Лопиталя

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{6\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{6} x = +\infty.$$

□

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in X$, то вычисляя ее производную в каждой такой точке, мы получаем новую функцию $y = f'(x)$ на множестве X. Если в точке $x \in X$ эта функция имеет производную, то она обозначается $f''(x)$ и называется второй производной функции $f(x)$ в точке x. Продолжая процесс, мы можем получить n-ю производную.

В качестве примера задачи на производную n-го порядка приведем задачу из статьи В.И.Арнольда „Математический тривиум “.

Задача 2.29**.** Вычислите сотую производную $\frac{x^2+1}{x^3-x}$.

Решение. Используя метод неопределенных коэффициентов разложим дробь $\frac{x^2+1}{x^3-x}$ в сумму дробей

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и пользуемся тем, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x^3-x}$$

В результате получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

решением которой является $A=-1$, $B=C=1$. Тогда данная функция представляется в виде

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Берем первую производную

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Берем вторую производную

$$f''(x) = -2\frac{1}{x^3} + 2\frac{1}{(x-1)^3} + 2\frac{1}{(x+1)^3}$$

Берем третью производную

$$f'''(x) = -2\cdot 3\frac{1}{x^4} + 2\cdot 3\frac{1}{(x-1)^4} + 2\cdot 3\frac{1}{(x+1)^4}$$

Используя метод математической индукции, легко убедиться, что

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n!\frac{1}{x^{n+1}} + (-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{(n+1)}} + (-1)^n n!\frac{1}{(x+1)^{n+1}}$$

Подставляя $n=100$ получим требуемый ответ. □

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. * (необязательная) Нарисуйте какой-нибудь график и изобразите график производной.

2. * (необязательная) Используя определение производной, докажите, что $(3x+5)'=3$, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sin x)' = \cos x$.

3. * (необязательная) Докажите правила вычисления производных.

4. Вычислите производные функций: 1) $y=\operatorname{tg}\sin x$, 2) $y=(\sin^2 x+1)^2 e^x$, 3) $y=\lg\frac{10-x}{x+2}$.

5. Найдите сотую производную $\frac{1}{x^2+3x+2}$.

4. Первообразная и неопределенный интеграл

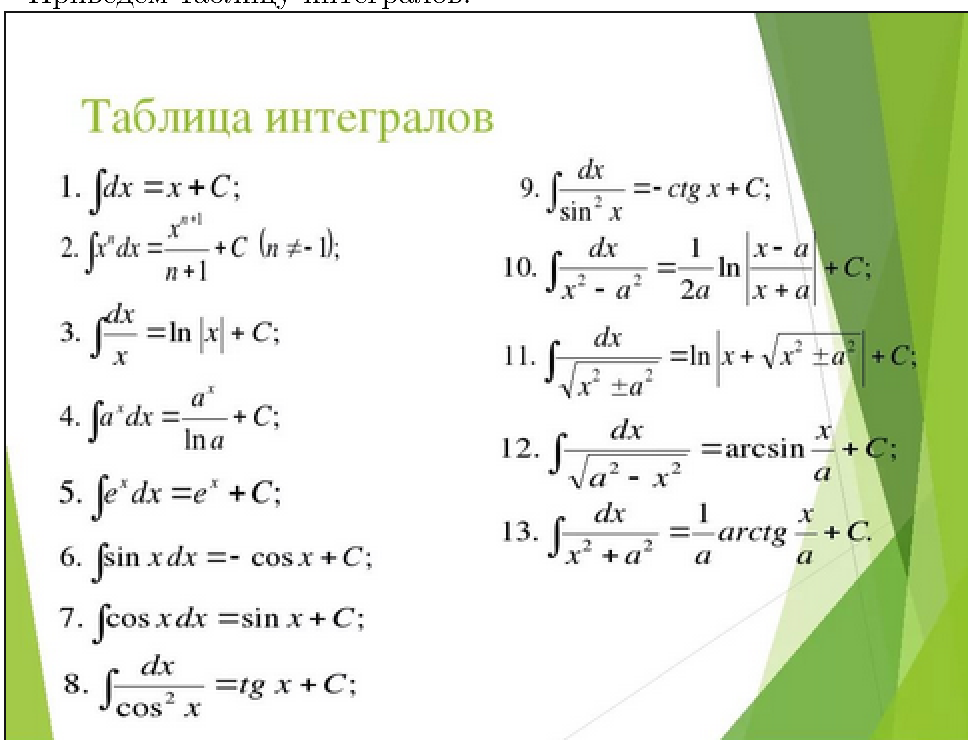
4.1. Теория и разобранные примеры Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – константа, также является первообразной для $f(x)$. Выражение $F(x)+C$, где C – произвольная константа, называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Так как интегрирование является операцией обратной дифференцированию, мы можем получить таблицу неопределенных интегралов из таблицы производных. Отметим только один момент. В таблице первообразных написано, что $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$ (хотя в таблице производных $(\ln x)' = \frac{1}{x}$). Покажем, что это так. Если $x > 0$, то все очевидно. Пусть $x < 0$. Тогда $\ln|x| = \ln(-x)$ и, дифференцируя, получаем $-\frac{1}{x} = \frac{1}{|x|}$.

Приведем таблицу интегралов.



В отличие от дифференцирования, интегрирование технически сложнее. Посмотрим ряд приемов нахождения неопределенных интегралов.

1 метод. Отметим, что интеграл суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов этих функций и константа выносится за знак интеграла. (Доказательство непосредственно по определению).

Задача 2.30. Найдите $\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx$.

Решение. Применяем указанное свойство: разбиваем суммы и выносим константы, а далее смотрим в таблицу неопределенных интегралов.

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx = 5\int \cos x dx - 3\int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+1} dx =$$
$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

□

Задача 2.31. Вычислите $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. Вычислить сразу, как в предыдущем примере не получится. Значит, придется преобразовать. Нужна сумма двух дробей с синусом и косинусом в квадрате в знаменателях. Тогда сработают табличные интегралы. Вспоминаем основное тригонометрическое тождество.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

□

Задача 2.32. Вычислите $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение в сумму двух дробей. В данном случае разложение очевидно, если возникают трудности в разложении, то можно применить метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Далее применяем свойство для интегрирования суммы и таблицу интегралов. □

2 метод. (метод подстановки). Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 2.9. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке и пусть X – множество множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$, то есть на T определена сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда если на множество X функция $f(x)$ имеет первообразную, то справедлива формула*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если функция $\varphi(t)$ строго монотонна, то эту формулу можно применять и справа налево (возвращаться от переменной t к переменной x).

Задача 2.33. Вычислите $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Решение. Вспоминаем определение котангенса и далее применяем подстановку.

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

□

Задача 2.34. Вычислите $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Обозначать за новую переменную нужно корень. Но какой? Сделаем так, чтобы корни оказались одинаковыми.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2} = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x} \\ x=t^6,\ dx=6t^5dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3} =$$
$$= 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int (t^2-t+1+\frac{1}{t+1})dt \quad (2.1)$$

Это уже табличные интегралы. Проинтегрируйте и вернитесь к x самостоятельно. □

Посмотрим еще один пример, в котором подстановка используется два раза

Задача 2.35. Вычислите $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $x \in [-a,a]$, a – положительная константа.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x = a\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $dx = a\cos tdt$.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C =$$

Возвращаемся к x

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Тогда

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

□

3 метод. (интегрирование по частям) Правило Лейбница для дифференцирования произведения функций $d(uv) = udv + vdu$ перепишем в виде $udv = d(uv) - vdu$ и проинтегрируем:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям.

Задача 2.36. Найдите $\int x\cos xdx$.

Решение. Имеем

$$\int x\cos xdx = \left\{ \begin{array}{l} u=x,\ dv=\cos xdx \\ du=dx,\ v=\sin x \end{array} \right\} = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x+\cos x+C$$

□

Задача 2.37. Найдите $\int \ln xdx$.

Решение. Здесь тоже применяется интегрирования по частям.

$$\int \ln xdx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln x\ dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx,\ v=x \end{array} \right\} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

□

Задача 2.38. Найдите $\int e^{ax}\cos bx dx$, где a, b – константы.

Решение. Применим интегрирование по частям два раза

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax},\ dv = \cos bx dx \\ du = ae^{ax},\ v = \frac{1}{b}\sin bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax},\ dv = \sin bx dx \\ du = ae^{ax},\ v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right).$$

В крайне правой части цепочки равенств мы получили точно такой же интеграл, как и в крайне левой. Выразим его

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{be^{ax} + ae^{ax}}{a^2+b^2} + C.$$

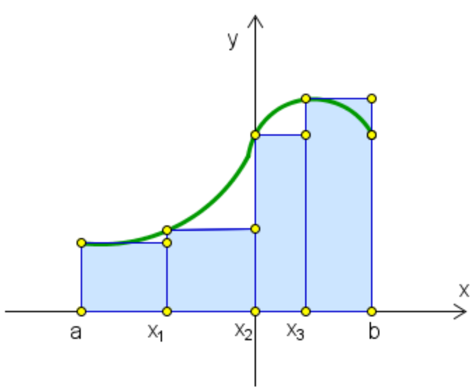
□

4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. ([20], стр. 110) Вычислите $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$, $\int \frac{x^4}{1+x^2}$, $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.
2. ([20], стр. 116) Вычислите $\int \operatorname{tg} x dx$, $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$, $\int e^{\cos x}\sin x dx$.
3. ([23], стр. 294) Применяя метод интегрирования по частям, найдите $\int \operatorname{arctg} x dx$, $\int x^2 \sin x dx$, $\int e^{2x}\cos x dx$.
4. ([23], стр. 294) Применяя метод интегрирования по частям, найдите $\int e^{ax}\sin bx dx$.

5. Определенный интеграл. Вычисление площадей.

5.1. Теория и разобранные примеры Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_i: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ на равные части (вообще говоря, равенство отрезков требовать не обязательно).



Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и осью Ox будет приближенно равна сумме площадей закрашенных прямоугольников. Чем больше точек в разбиении тем точнее можно вычислить площадь криволинейной трапеции.

Эта площадь вычисляется так:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Предел этих сумм при $n \to \infty$, если он существует, будет равен площади криволинейной трапеции. Этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$

и обозначается так:
$$\int_a^b f(x)dx.$$
Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$
где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Задача 2.39. Вычислите $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x \cos 2x dx$.

Решение. Сначала интегрируем так же как в случае неопределенного интеграла. Произведение тригонометрический функций весьма неприятно. Хотелось бы перейти к сумме этих функций и желательно, чтобы эти функции были в первых степенях. Применяем формулу двойного аргумента и формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{2}-4x)\cos 3x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-7x)) = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sin 7x)dx =$$
Применяем табличные интегралы и правило Ньютона-Лейбница
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos x - \frac{1}{7}\cos 7x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}.$$
□

Задача 2.40. Найдите $\int_{-1}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $9-x^2=t$, $-2xdx=dt$ и не забудем пересчитать пределы интегрирования
$$\int_{-1}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_8^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}}\Big|_8^1 = \frac{9}{4}.$$
□

Еще одна полезная формула
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
Ее легко проверить, используя формулу Ньютона-Лейбница.

Задача 2.41. Найдите $\int_{-1}^{2} x|x|dx$.

Решение. Разобьем отрезок на два: $[-1;0]$ и $[0,2]$. Тогда
$$\int_{-1}^2 x|x|dx = \int_{-1}^0 (-x^2)dx + \int_0^2 x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = (-0-\frac{1}{3}) + (\frac{8}{3}-0) = \frac{7}{3}.$$
□

Эту же задачу можно решить проще, если воспользоваться такими свойствами определенных интегралов:

1. Если $f(x)$ – четная функция на отрезке $[-a;]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ – нечетная функция на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Эти формулы тоже легко доказываются с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

Посмотрим применение определенных интегралов к вычислению площадей фигур, ограниченных графиками функций.

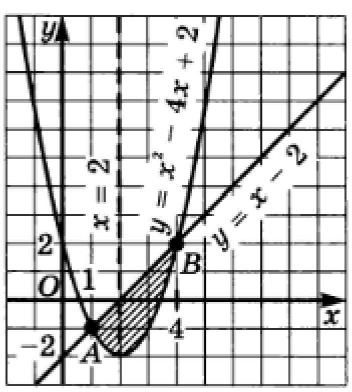
Если график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$ находится выше оси Ox, то из определения определенного интеграла следует, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, осью Ox и двумя вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b, (криволинейная трапеция) равна значению определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две функции $f(x)$, $g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ для всех x из этого отрезка и нам нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и двумя вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b. Поднимем эту фигуру так, чтобы оба графика были над осью Ox. Площадь фигуры при этом не изменится, а вычисляться она будет как разность площадей криволинейных трапеций, определяемых каждым из графиков. Тогда получим

$$S = \int_a^b (f(x)+m)dx - \int_a^b (g(x)+m)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx + mx|_a^b - mx|_a^b = \int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

Задача 2.42**.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Сначала изобразим графики функций, чтобы определиться какой выше, а какой ниже.



Прямую строим по двум точкам $(2,0)$, $(0,2)$. Для параболы найдем вершину: $y' = 2x - 4 = 0$, то есть для вершины $x = 2$, $y = -2$. Ветви направлены вверх.Понятно, что прямая выше, парабола ниже. Нужны точки пересечения.

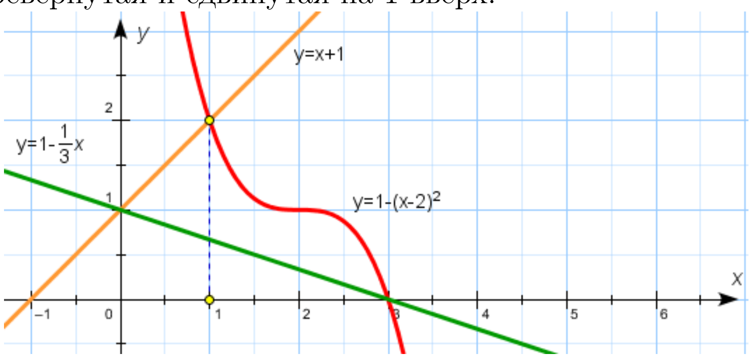
У общих точек значения игреков, найденных из уравнений параболы и прямой, одинаковые. Значит, получаем уравнение $x^2 - 4x + 2 = x - 2$, то есть $x^2 - 5x + 4 = 0$. По теореме Виета сразу видны корни: 4, 1. В результате получаем отрезок $[1,4]$. Вертикальные прямые $x = 1$ и $x = 4$, сверху график прямой, а снизу график параболы. Применяем формулу

$$S = \int_1^4 (x - 2 - x^2 + 4x - 2)dx = 4,5.$$

Вычисление определенного интеграла не составляет труда. □

Задача 2.43. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = 1 - \frac{1}{3}x$, $y = 1 - (x - 2)^3$.

Решение. Начнем с последнего графика – это кубическая парабола, сдвинутая на 2 вправо, перевернутая и сдвинутая на 1 вверх.



Два остальных графика – это прямые. Точки пересечения здесь хорошо видны. Если не видны сразу, то вычисляем как в предыдущей задаче. Получаем отрезок $[0,3]$. Чтобы применить формулу для вычисления площади, этот отрезок нам нужно будет разбить на две части: $[0,1]$ и $[1,3]$. На каждом из отрезков применяем формулу для вычисления площади и результаты складываем.

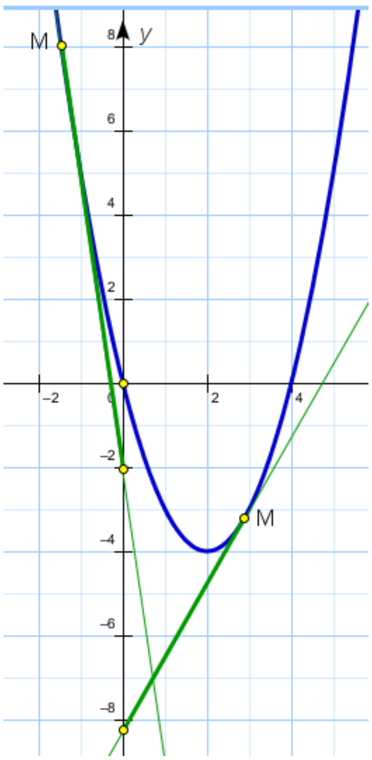
$$S_1 = \int_0^1 (x + 1 - (1 - \frac{1}{3}x))dx = \int_0^1 \frac{4}{3}xdx = \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$S_2 = \int_1^3 (1 - (x-2)^3 - 1 + \frac{1}{3}x)dx = \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{1}{6}x^2\bigg|_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{9}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

Наконец, $S = S_1 + S_2 = 2$. □

Задача 2.44. Найдите все такие точки M графика функции $y = x^2 - 4x$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проходящей через точку M, и осью ординат, равна 72.

Решение. Изобразим параболу. Ее вершина в точке $(2, -4)$ (опять находим производную и приравниваем ее к нулю). Рисуем касательную. Для нее возможны два случая: изображены на рисунке справа и слева. Рассмотрим правый случай.



Обозначим абсциссу точки M через x_0. Тогда ордината будет $x_0^2 - 4x_0$. Уравнение касательной (вспоминаем, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0 равен $f'(x_0)$) будет иметь вид

$$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0);\ y = x_0^2-4x_0+(2x_0-4)(x-x_0).$$

Парабола сверху, касательная снизу. Применяем формулу.

$$S = \int_0^{x_0}(x^2-4x-x_0^2+4x_0-(2x_0-4)x+2x_0^2-4x_0)dx =$$
$$= \int_0^{x_0}(x^2 - 2x_0x + x_0^2)dx = \frac{x^3}{3} - x_0x^2 + x_0^2x\Big|_0^{x_0} =$$
$$= \frac{x_0^3}{3} - x_0^3 + x_0^3 = \frac{1}{3}x_0^3.$$

По условию $\frac{1}{3}x_0^3 = 72$. Тогда $x_0 = 6$. Находим ординату этой точки: $y = 36 - 24 = 12$. Второй случай рассмотрите самостоятельно.

□

5.2. Задачи для самостоятельного решения

1. ([24], стр. 130) Вычислите $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 4x \cos x dx$, $\int_1^{\sqrt{12}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx$.
2. ([24], стр. 130) Вычислите $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$.
3. ([20], стр. 127) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.
4. ([20], стр. 130) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
5. ([24], стр. 134) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+2)^3+3$, $y = -4x$, $y = -\frac{2}{3}x$.
6. ([24], стр. 135) Найдите все точки N графика функции $y = 6x - x^2$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проходящей через точку N, и осью ординат, рана $\frac{125}{3}$.

6. * (необязательное) Дифференциальные уравнения

6.1. Теория и разобранные примеры 1. Начнем с задач, которые приводят к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

Задача 2.45**.** Найдите кривую, проходящую через точку $N(0, 2)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен произведению координат точки касания.

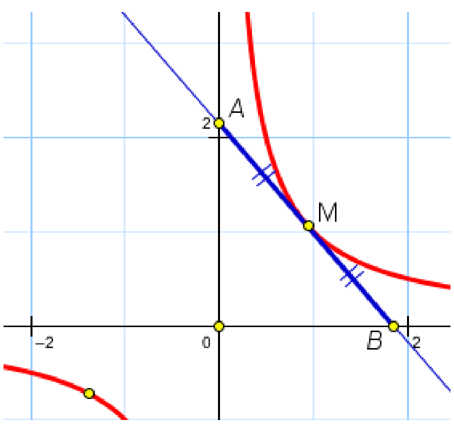
Решение. Пусть кривая задается функцией $y = f(x)$. Тогда условие задачи мы можем записать в виде уравнения $f'(x) = xf(x)$ или $y' = xy$. Это дифференциальное уравнение. Попытаемся его решить. Преобразуем $\frac{y'}{y} = x$ и проинтегрируем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int xdx.$$

Левый интеграл можно преобразовать к виду $\int \frac{df(x)}{f(x)}$. Вычисляем интегралы левой и правой частей $\ln|f(x)| = \frac{x^2}{2} + C$ или $|f(x)| = e^C e^{\frac{x^2}{2}}$. Обозначим константу $e^C = D$. Тогда все кривые, удовлетворяющие дифференциальному уравнению будут иметь вид $|f(x)| = De^{\frac{x^2}{2}}$. Тогда $f(x) = \pm De^{\frac{x^2}{2}}$. Найдем ту, которая проходит через точку $N(0,2)$. Подставляем координаты точки в уравнение кривой: $2 = \pm D$. Итак, мы получили две кривые: $y = 2e^{\frac{x^2}{2}}$ и $y = -2e^{\frac{x^2}{2}}$. □

Задача 2.46. Найдите кривую, проходящую через точку $P(a,b)$ и такую, что для любой ее точки отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

Решение. Пусть кривая задается функцией $y = f(x)$. Фиксируем на ней точку M с абсциссой x_0.



Тогда тангенс угла наклона касательной будет $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, а сама касательная будет иметь уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем ее точки пересечения с осью Ox: $y = 0$. Тогда $x = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$. Так как точка касания должна быть серединой, то по формуле нахождения координат середины отрезка (полусумма координат концов) находим

$$x_0 = \frac{0 + x_0 - \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}}{2};\ x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Так как точка M была произвольной, то переобозначим x_0 на x и получим дифференциальное уравнение вида:

$$x = -\frac{f(x)}{f'(x)};\ x = -\frac{y}{y'}.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

и проинтегрируем его. Вспоминаем, что мы делали в предыдущей задаче и пишем ответ $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$, $C > 0$, или, снимая логарифм, получаем $|y| = \frac{C}{|x|}$. Снимая модули мы получим $\pm C$, которое обозначим новой буквой $D = \pm C$. Эта константа уже может быть любой. Тогда уравнение примет вид $y = \frac{D}{x}$. Для нахождения значения константы D применяем начальное условие: кривая должны проходить через точу $P(a,b)$, то есть $b = \frac{D}{a}$. Откуда получаем $D = ab$. Итак, ответ $y = \frac{ab}{x}$ – это гипербола. □

В двух рассмотренных задачах мы получали так называемые дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Метод решения таких дифференциальных уравнений: игреки в одну сторону, иксы – в другую сторону уравнения и интегрируем обе части.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Это дифференциальные уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.2}$$

Пусть $P(x)$ – первообразная для функции $p(x)$. Тогда производная функции $e^{P(x)} \cdot y$ имеет вид

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = e^{P(x)}p(x) \cdot y + e^{P(x)}y' = e^{P(x)}(y' + p(x)y).$$

Из этого мы видим, что если обе части линейного дифференциального уравнения умножить на $e^{P(x)}$, то левая часть примет вид $(e^{P(x)} \cdot y)'$, а для правой $e^{P(x)}q(x)$ обозначим через $S(x)$ первообразную. Тогда исходное уравнение примет вид

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = (S(x))'.$$

Если производные функций равны, то их первообразные отличаются на константу:

$$e^{P(x)} \cdot y = S(x) + C;\ y = e^{-P(x)}(S(x) + C).$$

Итак, чтобы решить линейное дифференциальное уравнение вида (2.2), нужно 1) найти первообразную $p(x)$, 2) найти первообразную для функции $q(x)e^{P(x)}$, 3) записать ответ по полученной формуле.

Задача 2.47**.** Решите уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x^3$, $x > 0$.

Решение. В этом уравнении $p(x) = -\frac{3}{x}$. Тогда $P(x) = -3\ln x$ (модуль с икса сняли сразу из-за ограничения $x > 0$). Найдем функцию

$$q(x)e^{P(x)} = x^3e^{-3\ln x} = x^3(e^{\ln x})^{-3} = 1,$$

откуда $S(x) = x$. Пишем ответ $y = e^{3\ln x}(x + C) = x^3(x + C)$. □

Задача 2.48**.** Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения

$$x^2y' + 5xy + 4 = 0,\ y(\frac{1}{2}) = 62.$$

Решение. Сначала приведем данное уравнение к виду (2.2), разделив на x^2 (очевидно $x \neq 0$).

$$y' + \frac{5}{x}y = -\frac{4}{x^2}.$$

Теперь применяем алгоритм решения. Находим $P(x) = 5\ln|x|$. Так как нас интересует точка с абсциссой $\frac{1}{2} > 0$, то мы будем искать решения в ее окрестности, то есть решать дифференциальное уравнение в предположении $x > 0$. В этом случае модуль с x снимается с плюсом. Находим

$$q(x)e^{P(x)} = -\frac{4}{x^2}e^{5\ln x} = -4x^3.$$

Находим первообразную от этой функции: $-x^4$. Пишем общее решение

$$y = x^{-5}(-x^4 + C).$$

Наконец, находим частное решение: $62 = \frac{C - \frac{1}{16}}{\frac{1}{32}}$, откуда $C = 2$. Итак, ответ $y = \frac{2 - x^4}{x^5}$. □

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называют однородными уравнениями первого порядка.

Задача 2.49**.** Решите уравнение

$$y' = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}},\ k = const. \tag{2.3}$$

Решение. Обозначим $u = \frac{y}{x}$. Тогда $y = ux$ и

$$y' = (ux)' = u'x + u.$$

Подставим это в уравнение (2.3).

$$u'x + u = \frac{k + u}{1 - ku};\ u'\frac{1 - ku}{1 + u^2} = \frac{k}{x}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Найдем первообразные левой и правой частей. Правая часть очевидна: $k \ln |x|$. Разберемся с левой частью. Вычислим неопределенный интеграл.

$$\int u'\frac{1 - ku}{1 + u^2}dx = \int \frac{1 - ku}{1 + u^2}du = \int \left(\frac{1}{1 + u^2} - \frac{ku}{1 + u^2}\right) du =$$

первый интеграл табличный, а второй вычислим подстановкой $t = u^2$, $dt = 2udu$

$$= \operatorname{arctg} u - \frac{k}{2} \ln |1 + u^2| + \tilde{C}.$$

Итак, получаем $(\operatorname{arctg} u - \frac{k}{2} \ln |1 + u^2|)' = u'\frac{1 - ku}{1 + u^2}$. Первообразные левой и правой частей уравнения найдены. Эти первообразные должны отличаться на константу. Эту константу для удобства дальнейших преобразований мы запишем в виде $-k \ln C$ (Могли обозначить и D, сказав, что D пробегает все вещественные значения, но выражение $-k \ln C$ тоже пробегает все вещественные значения, следовательно, мы ничем себя не ограничили). Получаем

$$\operatorname{arctg} u - \frac{k}{2} \ln |1 + u^2| = k \ln |x| - k \ln C.$$

Преобразовываем это выражение и вместо u подставляем $u = \frac{y}{x}$.

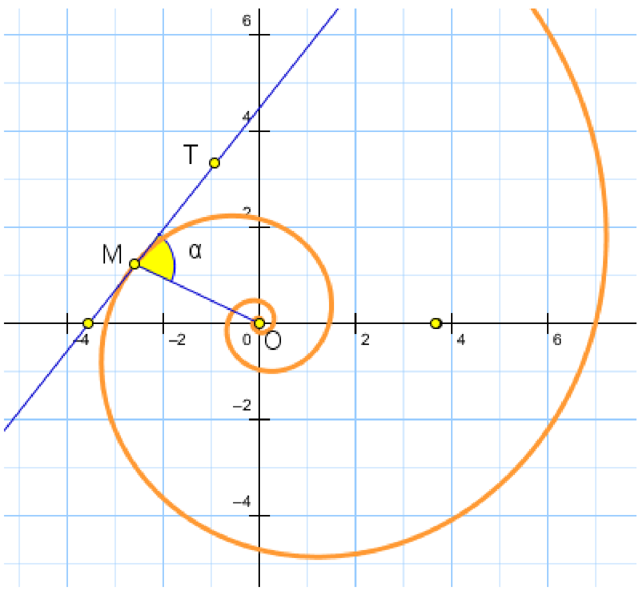
$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{k}{2} \ln \frac{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) x^2}{C^2};\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{k}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{C^2}.$$

Это решение, но заданное в неявном виде. Оно не удобно. Перейдем к полярным координатам, чтобы задать получившуюся кривую в явном виде. Напомним, что если на плоскости задана правая прямоугольная декартова система координат Oxy, то, взяв ее начало и вектор $\vec{i}$, можно каждую точку M плоскости (кроме O) взаимно однозначно обеспечить парой чисел (r, φ). Число r – это длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а φ – ориентированный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM}$. Используя тригонометрию легко увидеть, что эти два набора координат точки связаны между собой формулами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi; \quad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Воспользуемся этими формулами в нашем случае и перейдем к полярным координатам.

$$\varphi = \frac{k}{2}\ln\frac{r^2}{C^2};\ \frac{\varphi}{k} = \ln\frac{r}{C};\ r = Ce^{k^{-1}\varphi}.$$



Это логарифмическая спираль. Она обладает следующим свойством: в любой ее точке угол между касательной к ней и лучом, соединяющим точку касания и начало системы координат, постоянен и равен α. Это требование и привело к составлению того дифференциального уравнения, которое мы решали. Действительно, пусть искомая кривая задается функцией $y = f(x)$ и координаты точки касания M будут $(x, f(x))$. Направляющий вектор касательной будет иметь координаты $(1, f'(x))$, а вектор $\overrightarrow{OM}(x, f(x))$. Тогда по формуле для вычисления тангенса направленного угла между прямыми получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ f(x) & f'(x) \end{vmatrix}}{x + f(x)f'(x)}.$$

Обозначая $\operatorname{tg}\alpha = k$ и $f'(x) = y'$, получим дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}}.$$

□

6.2. Задачи для самостоятельного решения

1. *(необязательное) ([24], стр. 134) Найдите кривую, проходящую через точку $M(2, \frac{1}{2})$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен отношению ординаты этой точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.

2. *(необязательное) ([10], стр. 47) Найдите решение уравнения $\cos y \cdot y' = 1 + x^2$, удовлетворяющее условию $y(0) = \frac{\pi}{6}$.

3. *(необязательное) ([10], стр. 59) Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения $2y' - y = e^x$, $y(0) = 5$.

4. *(необязательное) ([10], стр. 59) Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$