Геометрия Галилея.

20 сентября 2018 г.

Содержание

Литература.

1. И.М. Яглом Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. Москва, 1969.

2. А.В. Хачатурян Геометрия Галилея. Москва, МЦНМО, 2005.

1. От единственной геометрии к множеству геометрий.

Геометрия, как и другие науки, возникла из повседневных потребностей освоения окружающего мира. Термин геометрия означает землемерие. Достаточно обширные геометрические факты были известны еще в Древнем Египте и Древнем Вавилоне за две тысячи лет до нашей эры. Греки сначала переняли уже накопленный геометрический опыт Египта и Вавилона, а затем пошли дальше. Они не удовольствовались констатацией факта: высота равнобедренного треугольника является медианой и биссектрисой. Они задавались вопросом: почему это так? Они требовали обоснования каждого факта. Так в геометрию вошло понятие доказательства. Накопленные факты требовали систематизации. Выдающуюся роль в этом деле сыграл Евклид (примерно 300 год до нашей эры). Его знаменитая книга Начала на протяжении двух тысячелетий была эталоном построения геометрии.

До девятнадцатого века была одна единственная геометрия – геометрия, описанная в Началах Евклида. Эта наука описывала свойства объектов окружающего мира. Один мир – одна геометрия. Никто и не задумывался о том, что возможна другая геометрия. Все началось с попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат, в отличие от остальных утверждений, которые принимались без доказательства, был слишком громоздким. Попытки доказать его начались еще во времена Евклида, и даже делались самим Евклидом. Попытки были безуспешными до первой половины девятнадцатого века. В первой половине 19 века у Н.И.Лобачевского (и не только у него одного) появилась следующая идея: заменить пятый постулат Евклида на его отрицание и начать выводить новые утверждения. Если пятый постулат Евклида выводится из остальных аксиом, то на каком-то шаге должно получиться противоречие. Другими словами, была сделана попытка доказать пятый постулат Евклида от противного. Н.И.Лобачевский, взяв отрицание пятого постулата, начал выводить теоремы. Он продвинулся достаточно далеко и не наткнулся на противоречие. Из этого он сделал вывод, что пятый постулат Евклида не зависит от остальных аксиом. Кроме того, он получил альтернативную геометрию, которую назвал воображаемой. Позднее она получила название геометрии Лобачевского.

В середине девятнадцатого века доказательство независимости пятого постулата, которое провел Н.И.Лобачевский, было достаточно строгим. Но в конце девятнадцатого века такой уровень строгости доказательства оказался недостаточным. Действительно, пусть Н.И.Лобачевский развил свою геометрию достаточно далеко и не встретил противоречия, но где гарантии, что следующая теорема не будет содержать противоречия. Возникла проблема обоснования геометрии. Существенный вклад в решение этой проблемы внесли Д.Гильберт, Э.Бельтрами, Ф.Клейн, А.Кэли и др. Для доказательства непротиворечивости геометрии было предложено построить ее модель, то есть взять уже построенную („достаточно надежную“) математическую теорию, с ее помощью задать основные объекты геометрии и основные отношения, затем проверяется выполнение всех аксиом. Если такая модель строится, то геометрия будет не противоречивой (если не противоречива математическая теория, с помощью которой строилась модель).

Одной из моделей геометрии Лобачевского является модель, для которой исходная математическая теория – это проективная геометрия. Это модель Кэли-Клейна. На проективной плоскости фиксируется овальная линия. Множество ее внутренних точек – это множество точек плоскости Лобачевского. Прямые – это хорды проективных прямых, лежащие внутри овальной линии. Отношения принадлежности и порядка задаются обычным образом. Отношение конгруэнтности вводится так: две фигуры на плоскости Лобачевского на модели Кэли-Клейна считаются конгруэнтными, если существует проективное преобразование, оставляющее инвариантной овальную линию и переводящее одну фигуру в другую. Такие преобразования моделируют движения плоскости Лобачевского. Непосредственная проверка показывает, что все четыре группы аксиом абсолютной геометрии в этой модели выполняются, а также выполняется аксиома Лобачевского. Это уже было достаточно строгое доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского, и геометрия Лобачевского стала стала равноправной с геометрией Евклида.

Итак, после открытия Н.И. Лобачевского наука получила две геометрии. Заметим, что еще задолго до появления геометрии Лобачевского была сферическая геометрия. Но она воспринималась как часть евклидовой геометрии, сводилась к трехгранным углам. Поэтому появление геометрии Лобачевского было переходом от одной геометрии к множеству геометрий.

Если геометрий уже две, может их существует больше? А если их много, то возникает вопрос: что такое геометрия? Ответ на этот вопрос дал Ф. Клейн в своей знаменитой Эрлангенской программе. Геометрия – это наука, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно той или иной группы преобразований. Используя такое определение геометрии, Ф.Клейн построил на базе проективной геометрии построил 9 различных геометрий. Он выделял в группе всех проективных преобразований подгруппы таких преобразований, которые оставляют инвариантной ту или иную фигуру проективной плоскости. В качестве такой фигуры он брал точку, прямую, овальную линию и др. Выделенные преобразования играли роль движений в новых геометриях.

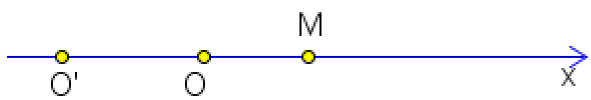
Используя подход к построению геометрии, предложенный Ф.Клейном, мы познакомимся с геометрией, которая возникла из потребностей физики – с геометрией Галилея.

2. Геометрия Галилея.

2.1. Возникновение геометрии Галилея из нужд физики.

Рассмотрим прямолинейное движение (то есть движение по прямой ℓ) материальной точки M. Наложим на эту прямую систему координат $(O, \vec{e})$ (O – начало системы и всего одна ось Ox). Пусть она движется относительно этой прямой с постоянной скоростью v. Пусть вдоль прямой расположена еще одна, неподвижная, система координат $(O', \vec{e})$. Пусть у точки O в момент времени $t = 0$ была координата a относительно второй системы координат. Тогда в момент времени t у нее будет координата $vt + a$. Обозначим через x координату точки M относительно первой системы координат и x' – относительно второй. Тогда

$$x'\vec{e} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = (a + vt)\vec{e} + x\vec{e}.$$



Присоединим к этой формуле еще возможность переноса начала отсчета времени $t' = t + b$.

Тогда мы получим преобразования Галилея, которые описывают переход от одной инерциальной системы (то есть движущейся равномерно и прямолинейно) отсчета к другой:

$$\begin{aligned} x' &= x + vt + a \\ t' &= t + b. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно принципу относительности Галилея (никакие механические эксперименты, производимые внутри физической системы, не могут обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы) все законы механики должны быть инвариантны относительно преобразований координат (2.1).

Замечание 2.1**.** На формулы (2.1) можно посмотреть с двух позиций: во-первых, как на формулы перехода от одной системы координат с переменными (x, t) к другой системе координат с переменными (x', t'), во-вторых, как на формулы некоторого преобразования множества точек обычной плоскости (была точка (x, t) относительно системы координат, после преобразования получилась точка с координатами (x', t') относительно той же системы координат).

Рассмотрим геометрию, которая описывает движения точки M вдоль прямой ℓ. Точкой этой геометрии будет „событие“ – положение точки M в момент времени t. Мы будем моделировать его точкой обычной евклидовой плоскости с координатами (x, t). Интерес в этой геометрии будут представлять фигуры и факты о них, которые инвариантны относительно преобразований вида (2.1). Эти преобразования будут движениями геометрии Галилея. Чтобы немного отвлечься от физики и приблизиться к геометрии, мы переобозначим переменные: t обозначим x, а x обозначим y. Тогда формулы движений геометрии Галилея будут иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= vx + y + b, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где a, b, v – некоторые константы.

Заметим, что преобразования вида (2.2) распадаются в композицию двух преобразований

$$\begin{aligned} x' &= x + a \qquad & x' &= x \\ y' &= y + b \qquad & y' &= vx + y. \end{aligned} \tag{2.3}$$

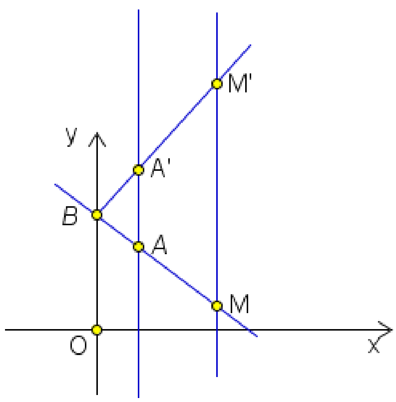
Первое преобразование – это параллельный перенос на вектор (a, b). Второе преобразование – это сдвиг в направлении оси Oy с коэффициентом v.

Замечание 2.2. Напомним, что такое сдвиг и как строятся образы точек при сдвиге. Сдвиг является частным случаем аффинного преобразования плоскости. Он имеет прямую инвариантных точек. Действительно, используя формулы (2.3), найдем инвариантные точки сдвига

$$\begin{cases} x = x \\ y = vx + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 0 \end{cases}$$

Значит, множество всех инвариантных точек сдвига задается уравнением $x = 0$. Это ось Oy.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и найдем ее образ при сдвиге по формулам (2.3). Получим $M'(x, vx + y)$. Тогда $\overrightarrow{MM'}(0, (v-1)x)$, то есть мы получили вектор, параллельный оси Oy. Итак, при сдвиге точки сдвигаются параллельно оси. При этом чем дальше от оси точка M, тем на большее расстояние она сдвигается.



Пусть сдвиг задан осью Oy и парой соответствующих точек $A \to A'$ (знаем, что точка A переходит при сдвиге в точку A'). Построим образ произвольной точки M при этом сдвиге. Точка M' будет лежать на прямой, параллельной оси Oy. С другой стороны, точка B (пересечение прямой AM и оси Oy) будет инвариантной, так как лежит на оси сдвига. Тогда прямая $A'M'$ (образ прямой AM при сдвиге) должна проходить через точку B. Значит, точка M' лежит на прямой BA'. Итак, точка M' – точка пересечения прямой, параллельной оси Oy, и прямой $A'B$.

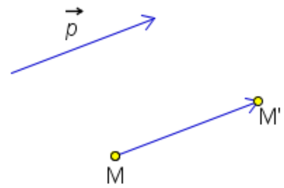
Итак, будем строить фигуры и рассматривать только те факты новой геометрии, которые инвариантны относительно параллельных переносов и сдвигов вдоль фиксированной раз и навсегда оси Oy (сдвиги, параллельные переносы и их композиции будут движениями геометрии Галилея). Свойства фигур, сохраняющиеся относительно параллельных переносов и сдвигов, будем называть *геометрическими свойствами фигур*. Фигуры будут называться *равными*, если существует движение плоскости Галилея (сдвиг, параллельный перенос или их композиция), которое переводит одну фигуру в другую. Точками этой геометрии будут точки евклидовой плоскости.

2.2. Математическое появление геометрии Галилея

Вспомним подход Ф. Клейна к определению понятия геометрии. Он предлагал определить геометрию, как науку, которая изучает фигуры и их свойства, инвариантные относительно тех или иных групп преобразований.

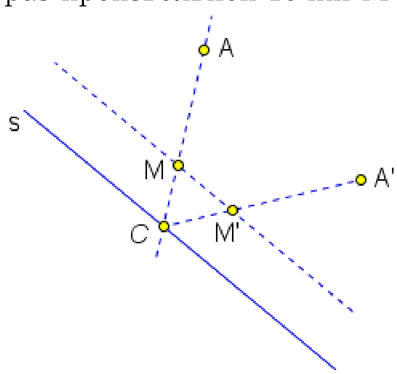
Рассмотрим аффинную плоскость. Как мы знаем из курса аналитической геометрии, *аффинным преобразованием плоскости* называется такое преобразование, которое три точки, лежащие на одной прямой переводит в три точки также лежащие на одной прямой (и при этом сохраняется простое отношение трех точек). Аффинные преобразования образуют группу.

Примером аффинного преобразования является параллельный перенос. Напомним, что это такое. Пусть фиксирован вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости.



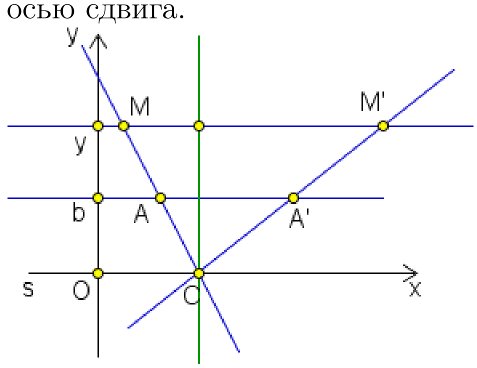
Параллельным переносом на вектор $\vec{p}$ называется преобразование плоскости, которое переводит точку M этой плоскости в точку точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$.

Другим примером аффинного преобразования является *родство*. Это аффинное преобразование, имеющее по крайней мере две инвариантные точки. В курсе аналитической геометрии доказывается, что родство имеет целую прямую инвариантных точек. Она называется *осью родства*. Если любая точка M при родстве переходит в точку M' такую, что вектор $\overrightarrow{MM'}$ параллелен оси родства, то оно называется *сдвигом*. Построение образов точек при сдвигах основано на двух их простых свойствах: 1) MM' параллельно оси; 2) если прямая a пересекает ось сдвига в точке C, то ее образ a' тоже проходит через C (так как на оси точки инвариантны). Чтобы задать сдвиг достаточно указать его ось и пару соответствующих точек A и A'. Тогда образ произвольной точки M строится следующим образом.



Точка M' лежит на прямой, проходящей через точку M и параллельной оси сдвига s. Кроме того, она лежит на прямой $A'C$.

Выведем формулы сдвига. Пусть он задается осью s и парой соответствующих точек A и A'. Выберем прямоугольную декартову систему координат следующим образом: ось Ox совпадает с осью сдвига.



Обозначим координаты точки $A(a, b)$. Координаты точки A' обозначим (c, b). Буквы a, c, b – это некоторые фиксированные числа, которые определяют сдвиг. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, $M'(x', y')$ – ее образ. Проведем в треугольнике $MM'C$ высоту как показано на рисунке. Тогда из подобия получим

$$\frac{MM'}{AA'} = \frac{y}{b}; \Leftrightarrow \frac{x' - x}{c - a} = \frac{y}{b}.$$

Откуда получаем, что $x' = x + \frac{c-a}{b}y$. Кроме того, заметим, что $y' = y$. Если точка M расположена ниже оси Oy, то аналогичные рассуждения приводят к такой же формуле (то же самое получаем, если точка A' расположена левее точки A). Обозначим $\frac{c-a}{b} = k$. Тогда формулы сдвига примут вид:

$$x' = x + ky;\ y' = y. \tag{2.4}$$

Если два сдвига имеют одну и ту же ось, они будут задаваться формулами (2.4) и отличаться друг от друга коэффициентом k.

Задача 2.1. Докажите, что композиция двух сдвигов с одной осью есть сдвиг с той же осью. Докажите, что композиция двух параллельных переносов является параллельным переносом. Докажите, что композиция сдвига и параллельного переноса с вектором, параллельным оси сдвига, является сдвигом с той же осью.

Следствие 2.1. Множество всех сдвигов с фиксированной осью, параллельных переносов и их всевозможных композиций является группой. Эта группа называется *группой Галилея.* Такие преобразования в прямоугольной декартовой системе координат, ось Ox которой совпадает с осью сдвигов, записываются в виде

$$x' = x + ky + a;\ y' = y + b.$$

Следуя Ф.Клейну, будем рассматривать и изучать только те фигуры (множества точек) на евклидовой плоскости и их свойства, которые инвариантны относительно группы Галилея. Преобразования группы Галилея становятся движениями этой геометрии, то есть позволяют выделять равные (точнее, конгруэнтные) фигуры. Это геометрия Галилея. Следуя обозначениям физиков, в качестве оси возьмем ось Oy, а коэффициент k будем обозначать v:

$$x' = x + a;\ y' = vx + y + b.$$

3. Расстояние между точками и угол между прямыми в геометрии Галилея.

3.1. Прямые в геометрии Галилея.

Прямыми в геометрии Галилея будут прямые евклидовой плоскости. Такое понятие прямой мы можем ввести, так как при параллельных переносах и сдвигах прямая переходит в прямую.

Действительно, как мы знаем из курса аналитической геометрии, прямая относительно системы координат задается уравнением

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0. \tag{3.1}$$

Находим образ этой прямой при сдвиге:

$$Ax' + B(y' - vx') + C = 0 \Leftrightarrow (A - Bv)x' + By' + C = 0. \tag{3.2}$$

Проверим, могут ли коэффициенты $(A - Bv)$ и B в полученном уравнении одновременно обращаться в нуль: если $B = 0$, то первый коэффициент будет A. Он не нуль в силу (3.1). Итак, уравнение (3.2) задает прямую (из курса аналитической геометрии знаем, что линейное уравнение, записанное относительно аффинной системы координат, задает прямую). Аналогичным образом доказывается, что параллельный перенос переводит прямую в прямую.

Значит, свойство множества точек плоскости быть прямой инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов, и наше определение прямой в геометрии Галилея корректно.

Рассмотрим прямые геометрии Галилея, параллельные оси Oy. Такая прямая имеет уравнение $x = a$, где a – константа.

Задача 3.1**.** Покажите, что при параллельных переносах и сдвигах прямая, параллельная оси Oy перейдет в прямую также параллельную оси Oy.

Таким образом, в геометрии Галилея свойство прямой быть параллельной оси Oy имеет геометрический смысл. Поэтому множество всех прямых делится на два класса – прямые, параллельные оси Oy, и остальные прямые. Прямые, параллельные оси Oy, называются *особыми прямыми*. Остальные прямые будем называть просто прямыми.

Задача 3.2**.** Покажите, что свойство прямой быть параллельной оси Ox не является геометрическим свойством.

Прямые в геометрии Галилея будем называть *параллельными*, если они не пересекаются. Покажем, что это геометрическое свойство прямых. Действительно, покажем, что параллельные прямые переходят в параллельные прямые при сдвиге (параллельный перенос рассмотрите самостоятельно). Рассмотрим две параллельные прямые

$$\ell:\ Ax + By + C_1 = 0; \qquad m:\ Ax + By + C_2 = 0.$$

Их образы будут задаваться уравнениями

$$\ell':\ (A - Bv)x' + By' + C_1 = 0; \qquad m':\ (A - Bv)x' + By' + C_2 = 0.$$

Коэффициенты при переменных пропорциональны, а свободные члены не пропорциональны, следовательно, прямые ℓ' и m' параллельны.

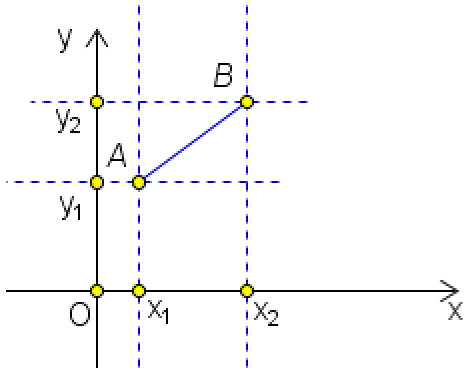
3.2. Расстояние между точками и угол между прямыми.

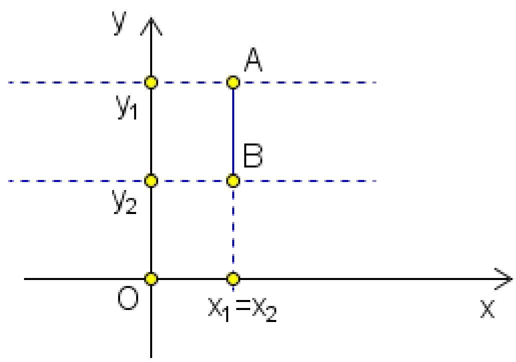
2.1. Расстояния между точками Пусть даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в геометрии Галилея. *Расстоянием* между точками A и B называется число $d(A, B)$

$$d(A, B) = x_1 - x_2.$$

Очевидно, что число $d(A, B)$ инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов, а значит, имеет геометрический смысл в геометрии Галилея. Заметим, что в геометрии Галилея расстояние может быть и отрицательным числом.

Заметим, что $d(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$ или точки A и B лежат на одной особой прямой.





Для таких точек определяется еще и *особое расстояние* по формуле

$$\delta(A, B) = y_1 - y_2.$$

Покажем, что особое расстояние имеет геометрический смысл в геометрии Галилея, то есть остается инвариантным относительно сдвигов и параллельных переносов. Действительно, так как точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ лежат на одной особой прямой, то $x_1 = x_2$. Тогда

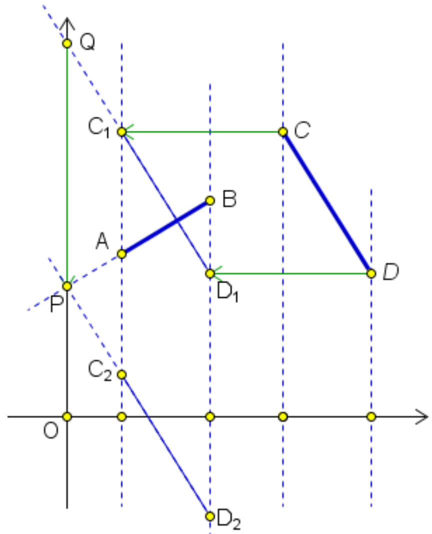
$$\delta(A', B') = y_1' - y_2' = vx_1 + y_1 + b - vx_2 - y_2 - b = y_1 - y_2 = \delta(A, B).$$

Легко видеть, что точки A и B плоскости Галилея совпадают тогда и только тогда, когда равно нулю расстояние $d(A, B)$ между ними и особое расстояние $\delta(A, B)$ между ними.

Заметим, что для точек, принадлежащих различным особым прямым особое расстояние не определяется, так как оно не будет инвариантным относительно композиций параллельных переносов и сдвигов вдоль оси Oy.

Отрезком называется Е-отрезок обыкновенной прямой. Как обычно, мы будем называть два отрезка *конгруэнтными*, если существует движение (в нашем случае сдвиг, параллельный перенос или их композиция), которые переводят один отрезок в другой. *Длиной отрезка* будем называть расстояние между его началом и концом. Выше мы уже показали, что если один отрезок переводится движением (сдвиг, параллельный перенос, их композиция) в другой, то их длины равны. Докажем обратное, что если два отрезка имеют равные длины (со знаком), то существует движение плоскости Галилея, которое переводит один отрезок в другой.

Пусть два отрезка AB и CD имеют равные длины в смысле Галилея, то есть их проекции (со знаком) на ось Ox равны.



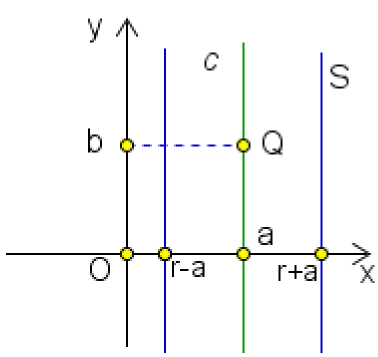
Нам нужно показать, что существует движение плоскости Галилея, которое переводит отрезок AB в отрезок CD. Совместим параллельным переносом полосы, в которых лежат данные отрезки. Это будет вектор $\overrightarrow{CC_1}$. Параллельный перенос на этот вектор отобразит отрезок CD в отрезок C_1D_1. Обозначим через P и Q точки пересечения с осью Oy прямых AB и C_1D_1 соответственно. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{QP}$. Он переведет отрезок C_1D_1 в отрезок C_2D_2. Тогда сдвиг с осью Oy и парой соответствующих точек $C_2 \to A$ переведет отрезок C_2D_2 в отрезок AB.

Итак, мы получили, что введенные понятия длины отрезка и движения согласованы, то есть отрезки имеют равные длины тогда и только тогда, когда они конгруэнтны (существует движение в смысле Галилея, переводящее один в другой).

Задача 3.3**.** Пусть существует движение в смысле Галилея, переводящее отрезок AB в отрезок CD. Верно ли, что существует движение в смысле Галилея, переводящее отрезок AB в отрезок DC (порядок концов меняется, а значит и меняется длина со знаком, хотя длины по модулю остаются равными)?

2.2. Окружность в геометрии Галилея *Окружностью* в геометрии Галилея называется множество точек плоскости, модуль расстояния от каждой из которых до данной точки Q равен данному положительному числу $r > 0$. Точка Q называется центром окружности, а число r – радиусом.

Выясним, как выглядит окружность. Пусть $Q(a, b)$. Тогда точка $M(x, y)$ принадлежит окружности S с центром в точке Q радиуса r тогда и только тогда, когда $|d(M, Q)| = r$, то есть $|x - a| = r$ Это пара двух особых прямых: $x = r + a$ и $x = r - a$.



Заметим, что окружность в геометрии Галилея имеет однозначно определенный радиус – это половина расстояния (евклидова) между изображающую эту окружность прямыми, но бесконечно много центров. Центром будет любая точка прямой c – это особая прямая, содержащая точку Q.

Задача 3.4**.** Докажите, что при параллельных переносах и сдвигах окружность переходит в окружность (следовательно, эту фигуру можно рассматривать в геометрии Галилея).

Заметим, что дугой окружности плоскости Галилея будет Е-отрезок особой прямой. *Длина дуги* AB окружности – это особое расстояние между точками A и B.

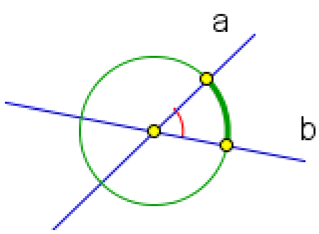
Задача 3.5**.** Докажите, что дуги окружностей имеют равные длины тогда и только тогда, когда существует движение в смысле Галилея, переводящее одну дугу в другую.

3.3. Середина отрезка и середина дуги окружности.

Серединой отрезка называется точка этого отрезка, которая разбивает его на два отрезка равной длины. Очевидно, что середина отрезка на плоскости Галилея совпадает с серединой Е-отрезка, который его изображает.

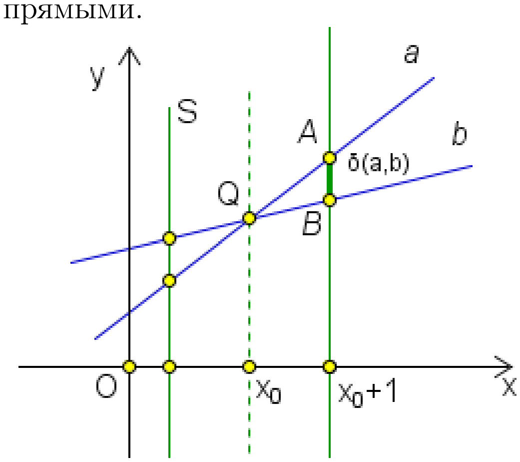
Аналогичное определение вводится и для середины дуги окружности на плоскости Галилея. *Серединой дуги окружности* называется точка этой дуги, которая делит ее на две дуги равной длины.

3.1. Угол между прямыми. Напомним,



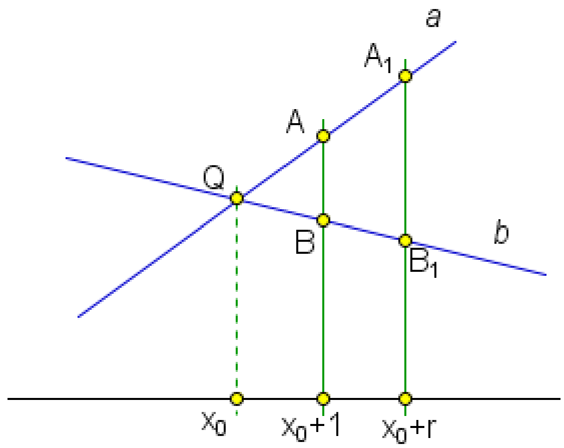
что в геометрии Евклида угол между двумя пересекающимися прямыми равен длине не большей дуги окружности единичного радиуса, заключенной между этими прямыми.

Аналогичным образом мы поступим и в геометрии Галилея. *Углом $\delta(a, b)$ между двумя прямыми a и b* называется длина дуги окружности единичного радиуса, заключенной между данными прямыми.



Заметим, что длина дуги окружности – это особое расстояние между точками A и B, в которых окружность геометрии Галилея пересекает данные прямые.

В геометрии Евклида величину угла можно вычислить с помощью окружности произвольного радиуса r. Хорошо известна формула: величина угла равна отношению длины дуги этой окружности к ее радиусу. Точно такая же формула действует и в геометрии Галилея



По определению $\angle(a,b) = \delta(A,B)$. Напомним, что $\delta(A,B)$ – это Е-длина Е-отрезка AB со знаком (плюс или минус). Тогда из подобия Е-треугольников QAB и QA_1B_1 получаем, что для Е-длин отрезков

$$\frac{AB}{1} = \frac{A_1B_1}{r}.$$

Откуда получаем требуемую формулу

$$\angle(a,b) = \delta(A,B) = \frac{A_1B_1}{r}.$$

Выведем формулу для вычисления угла между прямыми a и b. Пусть прямая a задается уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая b – уравнением $y = k_2x + b_2$. Обозначим их точку пересечения через $Q(x_0, y_0)$. Окружность S имеет уравнения $x = x_0 \pm 1$. Тогда точки пересечения A и B единичной окружности с прямыми a и b будут иметь вид:

$$A(x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + b_1);\ B(x_0 + 1, k_2(x_0 + 1) + b_2),$$

следовательно, так как $Q(x_0, y_0)$ принадлежит обеим прямым a и b, а значит, $y_0 = k_1x_0 + b_1 = k_2x_0 + b_2$,

$$\delta(a,b) = \delta(A,B) = k_1(x_0+1)+b_1-(k_2(x_0+1)+b_2) = (k_1x_0+b_1)-(k_2x_0+b_2)+k_1-k_2| = k_1-k_2.$$

Итак, формула для вычисления угла между пересекающимися прямыми имеет вид

$$\delta(a,b) = k_1 - k_2. \tag{3.3}$$

Также как и расстояние между точками, угол между двумя прямыми может быть числом отрицательным. При этом

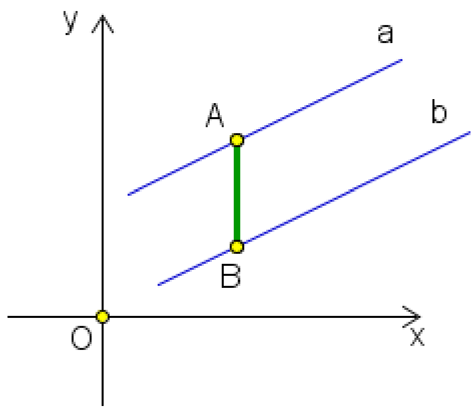
$$\delta(a,b) = -\delta(b,a),$$

то есть порядок прямых в определении угла важен.

Задача 3.6**.** Проверьте, что угол между пересекающимися прямыми инвариантен относительно параллельных переносов и сдвигов, а значит, является геометрической величиной.

Задача 3.7**.** Докажите, что если углы между двумя парами пересекающихся прямых равны, то существует движение (в смысле Галилея), которое переводит одну пару прямых в другую.

Используя формулу (3.3), мы можем доопределить угол между параллельными прямыми:



Так как прямые a и b параллельны, их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны, следовательно, формула (3.3) выдаст нуль для значения угла между параллельными прямыми. Для параллельных прямых мы можем определить расстояние – это особая длина отрезка любой особой прямой, заключенного между данными параллельными прямыми:

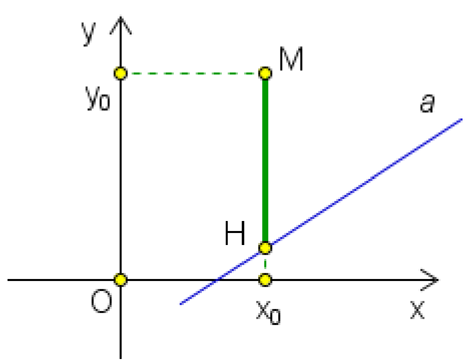
$$d(a,b) = \delta(A,B).$$

Очевидно, что если прямые a и b заданы уравнениями $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ соответственно, то формула для вычисления расстояния между параллельными прямыми примет вид

$$d(a,b) = b_1 - b_2.$$

Задача 3.8**.** Почему расстояние между параллельными прямыми определено так, как мы описали выше, а не как в евклидовой геометрии?

3.2. Расстояние от точки до прямойБудем называть *расстояние от точки M до прямой a* особое расстояние от M до точки пересечения прямой a с особой прямой, проходящей через точку M.



Такое определение объясняется следующими обстоятельствами: в евклидовой геометрии расстояние от точки до прямой – это длина самого короткого отрезка, соединяющего данную точку со всевозможными точками данной прямой. В нашем случае, если соединять точку M со всевозможными точками прямой a, то самое маленькое по модулю расстояние – нулевое – будет для отрезка MH. Поэтому мы берем именно этот отрезок, но чтобы не получать всегда число нуль, мы будем брать особое расстояние между точками M и H.

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки M до прямой a, если $M(x_0, y_0)$, $a:\ y = kx + b$. Так как особое расстояние между точками M и H – это разность их вторых координат, получаем

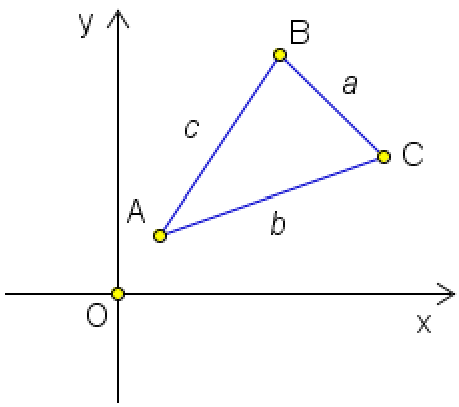
$$d(M,a) = \delta(M,H) = y_0 - kx_0 - b.$$

Теперь расстояние между параллельными прямыми мы можем описать как расстояние от любой точки одной из прямых до другой.

4. Треугольники в геометрии Галилея

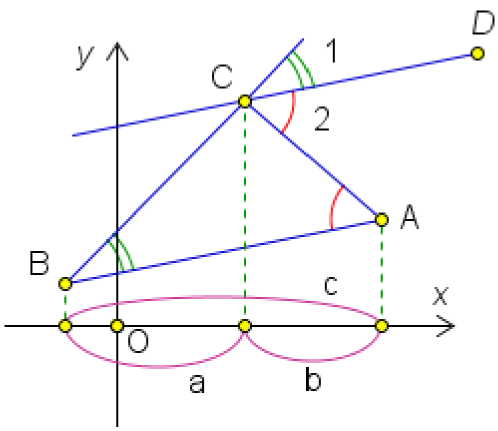
4.1. Стороны и углы треугольника

Треугольником на плоскости Галилея называется фигура, состоящая из трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой и трех отрезков (обыкновенных) прямых, соединяющих эти точки. Точки A, B, C называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.



Длины сторон треугольника ABC – это расстояния $BC \equiv d(B,C)$, $CA \equiv d(C,A)$, $AB \equiv d(A,B)$. Они могут быть как положительными, так и отрицательными. Будем называть эти величины *длинами сторон со знаком.* Абсолютные величины этих длин сторон будем называть *положительными длинами* и обозначать a, b, c. Величинами углов треугольника мы будем называть величины углов между прямыми, содержащими стороны треугольника. Так угол $\angle ABC$ – это угол между прямыми AB и BC (берется именно такой порядок).

В отличие от геометрии Евклида, в геометрии Галилея углы и стороны треугольника связаны между собой достаточно простыми соотношениями.



Выведем их. Если c – наибольшая из положительных длин сторон треугольника, то

$$a + b = c$$

Физический смысл этого равенства: точки A, B, C – это события, а расстояния между ними – это промежутки времени. Тогда промежуток времени между самым ранним событием и самым поздним равен сумме промежутков времени между ранним и средним, а также средним и поздним.

Если брать длины сторон треугольника со знаком, то для треугольника ABC с вершинами $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ получим

$$AB + BC + CA = (x_a - x_b) + (x_b - x_c) + (x_c - x_a) = 0.$$

Другими словами, периметр любого треугольника на плоскости Галилея равен нулю.

Аналогичным образом вычисляем сумму углов треугольника (используем формулу (3.3))

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0.$$

Итак, сумма углов любого треугольника на плоскости Галилея равна нулю.

Если брать абсолютные величины углов, то получим (см. рисунок)

$$\angle A + \angle B = \angle C.$$

4.2. Признаки равенства треугольников

Напомним, что фигуры называются *равными*, если существует движение (в геометрии Галилея это параллельные переносы, сдвиги и их композиции), которое переводит одну фигуру в другую.

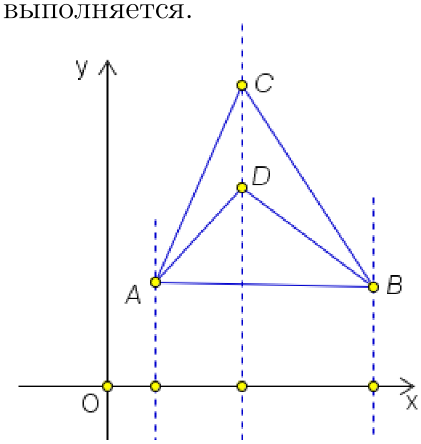
Два треугольника на плоскости Галилея называются *равными*, если существует движение этой плоскости, которое переводит один треугольник в другой.

Теорема 4.1. *(первый признак равенства треугольников) Пусть даны два треугольника* ABC *и* $A_1B_1C_1$*, такие, что* $AB = A_1B_1$*,* $AC = A_1C_1$ *и* $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$*. Тогда эти треугольники равны.*

Доказательство. Так как углы $\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$ равны, существует движение в смысле Галилея, которое переводит прямую AB в прямую A_1B_1 (точку A в точку A_1), а прямую AC в прямую A_1C_1. Так как $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, точка B перейдет в точку B_1, а точка C – в точку C_1. Таким образом, треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$. □

Задача 4.1. Докажите, что в геометрии Галилея верен признак равенства треугольников по стороне и прилегающим двум углам.

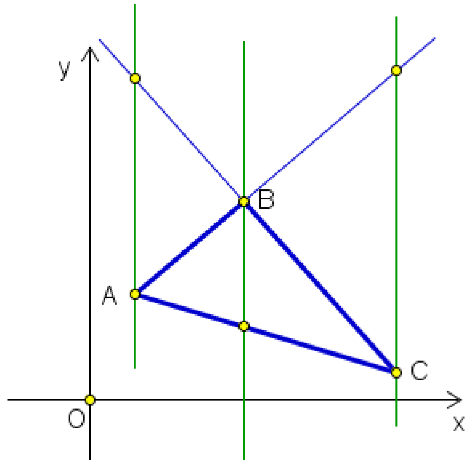
Замечание 4.1. Признак равенства треугольников по трем сторонам на плоскости Галилея не выполняется.



На этом рисунке изображены два треугольника, у которых длины сторон равны, но углы при вершине A не равны, так как не равны соответствующие этим углам особые расстояния.

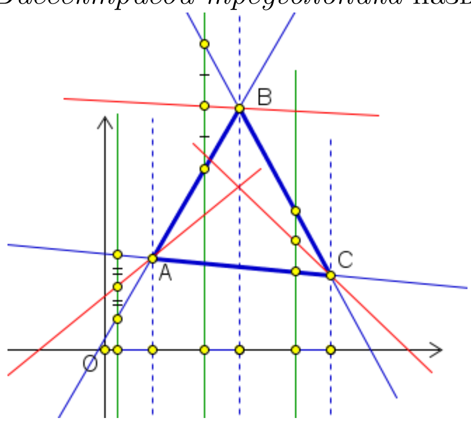
4.3. Высоты, биссектрисы, медианы треугольника.

Высотой треугольника на плоскости Галилея называется перпендикуляр, опущенный на прямую, содержащую сторону треугольника.



На рисунке изображен треугольник ABC и его высоты. Мы видим, что высоты треугольника – это дуги окружностей. При этом высоты треугольника в геометрии Галилея, в отличие от геометрии Евклида, не пересекаются.

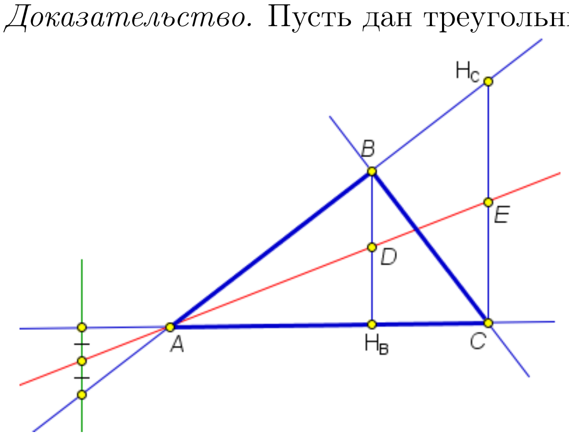
Биссектрисой треугольника называется прямая, которая делит его угол пополам.



Треугольник ABC. Проводим окружности единичного радиуса с центрами A, B и C. Отмечаем точки пересечения с прямыми AB, BC и AC. Делим пополам полученные Е-отрезки и проводим прямые (красные). Это будут биссектрисы углов треугольника. Они не пересекаются в одной точке.

Теорема 4.2. *Пусть дан треугольник ABC. Тогда биссектриса угла A этого треугольника проходит через середины высот, опущенных из вершин B и C этого треугольника. Другими словами, биссектриса каждого из углов треугольника проходит через середины высот, выходящих из двух других вершин треугольника.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC.



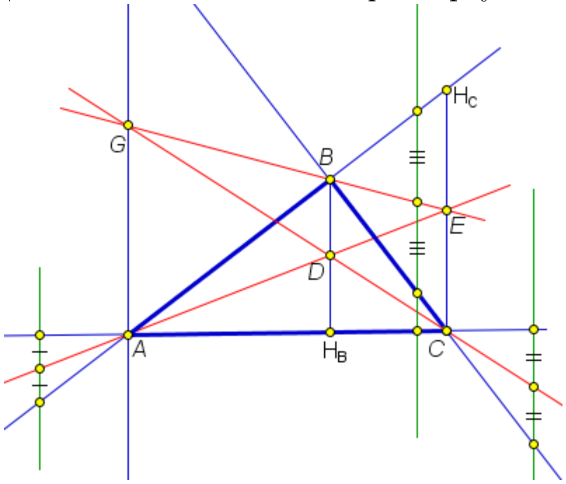
Посмотрите на картинку и проведите доказательство самостоятельно. □

Следствие 4.1. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются в середине высоты, выходящей из третьей вершины.

Теорема 4.3. *Биссектрисы углов треугольника попарно пересекаются, причем точки пересечения служат вершинами треугольника, стороны которого равны сторонам исходного тре-*

угольника, а углы вдвое меньше его углов.

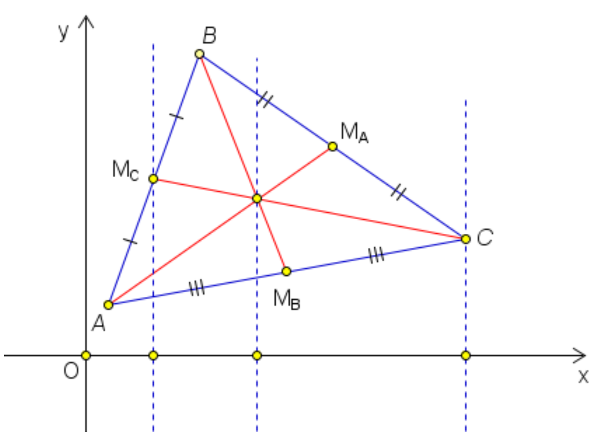
Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и точки пересечения его биссектрис.



Покажем, что треугольники ABC и GDE имеют равные стороны. Заметим, что отрезки AB и GD проектируются на ось Ox в один и тот же отрезок, значит, их длины равны. Аналогично для остальных сторон. Для доказательства соотношений между углами, вспомним, что угол измеряется длиной дуги единичной окружности.

Очевидно (если нет, то нарисуйте картинку и убедитесь в этом), что если брать окружность радиуса r, отличного от единицы, то величина угла (как и в случае геометрии Евклида) будет равна отношению длины дуги окружности радиуса r к ее радиусу r. В нашем случае, если мы пересечем стороны обоих углов окружностью некоторого радиуса, то отношение величин углов будет равно отношению длин дуг этой окружности, измеряющих углы. Так угол A треугольника ABC будет равен длине дуги BH_B, деленной на радиус этой окружности. Так как точка G лежит с точкой A на одной особой прямой, то дуга BD будет дугой той же окружности, что и BH_B. Так как D – середина BH_B, то угол A треугольника ABC в два раза больше угла G треугольника GDE. □

Напомним, что середина отрезка в геометрии Галилея и геометрии Евклида – это одна и та же точка. Поэтому медианы треугольника в геометрии Галилея будут выглядеть так же, как и в Евклидовой геометрии. Это будут Е-отрезки, соединяющие вершину треугольника и середину противоположной стороны. При этом, если вершина треугольника и середина противоположной стороны лежат на одной особой прямой, то медиана будет являться дугой окружности, а в противном случае отрезком.



Посмотрите на рисунок и докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2 : 1, считая от вершины.

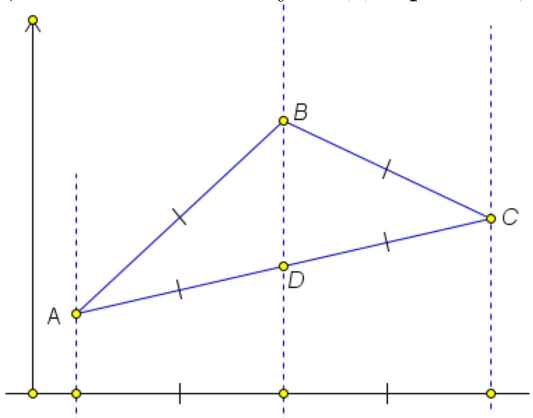
4.4. Равнобедренный треугольник.

Треугольник называется *равнобедренным*, если он имеет две равные стороны.

Задача 4.2. Докажите, что в равнобедренном треугольнике боковая сторона равна половине основания.

Теорема 4.4. *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

Доказательство. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$.



Тогда угол BAC равен отношению длины высоты BD (особое расстояние между точками B и D) к длине отрезка AD (расстояние между точками A и D на плоскости Галилея). Аналогично получаем для угла ACB

$$\angle ACB = \frac{\delta(D,B)}{d(C,D)}.$$

Тогда

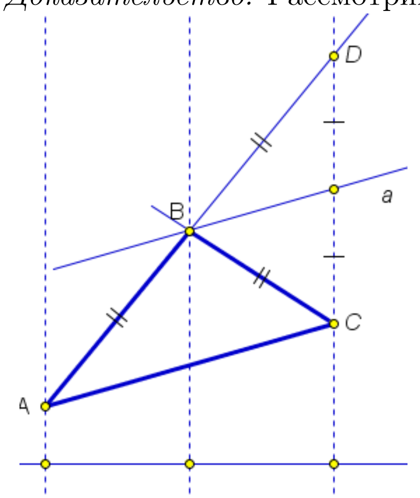
$$\frac{\delta(D,B)}{d(C,D)} = \frac{-\delta(B,D)}{-d(A,D)} = \angle ACB.$$

Итак, углы при основании равнобедренного треугольника равны. □

Задача 4.3. Докажите, что у равнобедренного треугольника медиана совпадает с высотой.

Теорема 4.5. *Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.*

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC.



Здесь работает теорема, обратная теореме Фалеса. Причем, если треугольник не равнобедренный, то биссектриса не будет параллельна основанию.

□

Заметим, что так как периметр треугольника на плоскости Галилея нулевой, то равносторонних треугольников на плоскости Галилея не существует.

4.5. Свойства треугольников

Средней линией треугольника называется отрезок, который соединяет середины двух его сторон.

Задача 4.4**.** Докажите, что средняя линия в треугольнике параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Теорема 4.6**.** *В любом треугольнике* ABC *имеет место равенства*

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{BC}{\angle BAC} = \frac{CA}{\angle CBA}.$$

Будем называть эти равенства теоремой синусов.

Доказательство. Обозначим координаты вершин треугольника через $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Тогда $AB = x_A - x_B$. Так как угол $\angle ACB$ – это угол между прямыми AC и BC и он вычисляется как разность угловых коэффициентов, получаем

$$\angle ACB = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{(y_C - y_A)(x_B - x_C) - (y_B - y_C)(x_C - x_A)}{(x_C - x_A)(x_B - x_C)}.$$

Тогда

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{(x_A - x_B)(x_C - x_A)(x_B - x_C)}{x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)}. \tag{4.1}$$

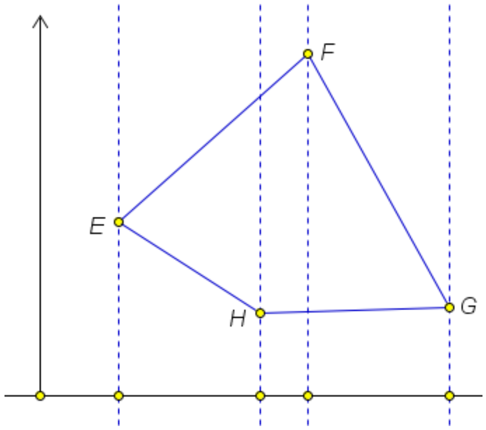
Две остальные дроби в теореме синусов получаются, если циклически переставить буквы A, B и C. При этом правая часть равенства (4.1) не меняется при этой перестановке букв. □

5. Четырехугольники в геометрии Галилея

Четырехугольником на плоскости Галилея называется фигура, которая состоит из четырех точек A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырех отрезков AB, BC, CD, DA, попарно соединяющих эти точки. При этом никакие два из данных отрезков не имеют общих внутренних точек. Отрезки AB, BC, CD, DA называются *сторонами четырехугольника.* Углами четырехугольника (так же как у треугольника) называются углы между прямыми, содержащими стороны четырехугольника. Например, угол $\angle ABC$ – это угол между прямыми AB и BC. Отрезки AC и BD называются *диагоналями* четырехугольника.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

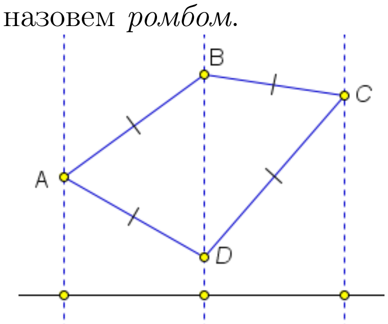
Задача 5.1**.** Докажите, что у параллелограмма противоположные стороны попарно равны. Докажите, что все четыре угла у параллелограмма равны между собой.



Заметим, что существуют четырехугольники с попарно равными противоположными сторонами, которые не являются параллелограммами.

Задача 5.2. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Будем называть *равносторонником* четырехугольник $ABCD$, у которого все стороны равны, то есть $AB = BC = AD = DC$. Равносторонник, который является параллелограммом, назовем *ромбом.*



На рисунке изображен равносторонник, который не является ромбом.

Задача 5.3. Докажите, что диагонали равносторонника перпендикулярны.

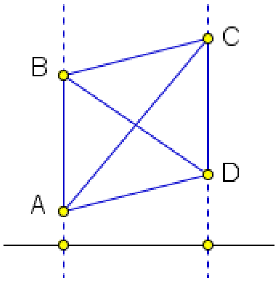
Решение. Пусть дан равносторонник $ABCD$. Так как $AB = AD$, точки B и D лежат на одной окружности с центром A. Более того, так как оба отрезка имеют точку A своим началом, то точки B и D лежат на одной особой прямой. Тогда диагональ BD (которая является дугой окружности) будет перпендикулярна диагонали AC (которая является отрезком). □

Трапецией называется четырехугольник две противоположные стороны которого параллельны, а две другие – нет. Для трапеции на плоскости Галилея имеют место следующие свойства:

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой (обыкновенной или особой).

Прямоугольником на плоскости Галилея называется фигура $ABCD$, четыре вершины которой соединены двумя параллельными отрезками BC и AD и двумя дугами AB и CD.



Прямоугольник не является четырехугольником из-за сторон AB и CD, которые являются дугами окружностей. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Все его углы прямые. Диагонали равны.

6. Цикл в геометрии Галилея.

В геометрии Евклида множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом α – это две дуги окружности. Если угол брать ориентированным, то получится окружность.

Найдем на плоскости Галилея множество точек (оно называется *циклом*), из которых данный отрезок виден под данным углом (Напомним, что угол на плоскости Галилея мы рассматриваем ориентированный). Пусть AB – данный отрезок. Обозначим $A(a, b)$, $B(c, d)$ и угол k (угол со знаком). Тогда требуемое множество точек $M(x, y)$ будет задаваться условием $\angle AMB = k$. По определению угла получаем, что k – это угол между прямыми AM и MB. Он вычисляется через угловые коэффициенты этих прямых по формуле

$$\frac{y-b}{x-a} - \frac{y-d}{x-c} = k.$$

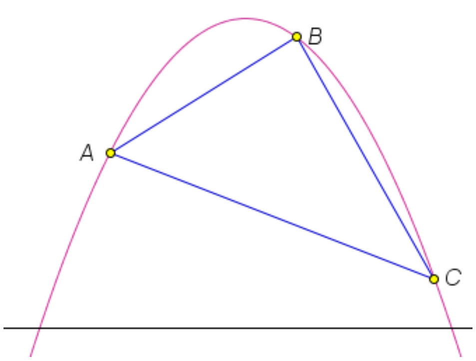
Преобразуем это равенство.

$$y = \frac{k}{a-c}x^2 + \left(\frac{b-d}{a-c} - k\frac{a+c}{a-c}\right)x + \frac{ad-bc+kac}{a-c}.$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вдоль оси Oy. Итак, цикл на плоскости Галилея – это парабола. Ее ветви могут быть направлены как вверх, так и вниз.

Задача 6.1. Покажите, что при сдвигах вдоль оси Oy и произвольных параллельных переносах парабола с ветвями, направленными вдоль оси Oy переходит в параболу с ветвями также направленными вдоль Oy. Другими словами, докажите, что свойство множества точек быть циклом является геометрическим на плоскости Галилея.

Задача 6.2. Будут ли существовать сдвиги, которые переводят параболу, ветви которой направлены вниз, в параболу, ветви которой направлены вверх? Другими словами, будет ли направленность ветвей цикла геометрическим свойством на плоскости Галилея?



Цикл называется *описанным около треугольника*, если все три вершины треугольника лежат на нем.

Теорема 6.1. *Около любого треугольника можно описать единственный цикл.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Введем координаты его вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Нам нужно доказать, что существует единственная парабола вида $y = ax^2 + bx + c$, такая что точки A, B, C лежат на ней. Нам нужно доказать, что коэффициенты a, b, c для этого всегда можно подобрать, причем единственным образом и $a \neq 0$.

Так как точки A, B, C должны лежать на параболе $y = ax^2 + bx + c$, их координаты должны удовлетворять этому уравнению. Тогда мы получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c:

$$\begin{cases} ax_A^2 + bx_A + c = y_A \\ ax_B^2 + bx_B + c = y_B \\ ax_C^2 + bx_C + c = y_C \end{cases} \tag{6.1}$$

Чтобы выяснить имеет ли эта система решения, вычислим определитель ее основной матрицы:

$$\begin{vmatrix} x_A^2 & x_A & 1 \\ x_B^2 & x_B & 1 \\ x_C^2 & x_C & 1 \end{vmatrix} =$$

Это определитель Вандермонда. Вычислим его непосредственно.

$$= x_A^2 x_B + x_C^2 x_A + x_B^2 x_C - x_C^2 x_B - x_B^2 x_A - x_A^2 x_C =$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$x_A^2(x_B - x_C) + x_B x_C(x_B - x_C) + x_A(x_C^2 - x_B^2) = (x_B - x_C)(x_A - x_B)(x_C - x_A).$$

Так как точки A, B, C образуют треугольник, никакие две из них не лежат на особой прямой, и значит, определитель Вандермонда в этом случае не равен нулю. Следовательно, система линейных уравнений имеет единственное решение. Докажем, что $a \neq 0$. Воспользуемся методом Крамера для решения системы линейных уравнений (6.1):

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 \\ y_B & x_B & 1 \\ y_C & x_C & 1 \end{vmatrix}}{(x_B - x_C)(x_A - x_B)(x_C - x_A)}.$$

Нам нужно показать, что определитель, который стоит в числителе дроби отличен от нуля. Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 \\ y_B & x_B & 1 \\ y_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = y_B x_C - x_B y_C - (y_A x_C - x_A y_C) + y_A x_B - x_A y_B. \tag{6.2}$$

С другой стороны, условие того, что три точки A, B, C лежат на одной прямой имеет вид

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}.$$

Раскроем пропорцию и приведем подобные

$$-y_A x_C - y_B x_A + y_B x_C = -y_A x_B - x_A y_C + x_B y_C.$$

Если перенести слагаемые в одну сторону, то мы в точности получим определитель (6.2). Итак, определитель (6.2) тогда и только тогда, когда точки A, B, C лежат на одной прямой. Так как в нашем случае эти точки – вершины треугольника, определитель не нуль и $a \neq 0$.

Итак, мы показали, что около любого треугольника на плоскости Галилеф можно описать цикл, причем только один. □

Говорят, что *прямая касается цикла*, если она имеет с ним две совпавшие (видим одну) общие точки. Цикл называется *вписанным* в треугольник, если он касается всех трех прямых, содержащих стороны треугольника.

Оказывается, что в любой треугольник можно вписать единственный цикл. Для доказательства этого факта, будем использовать принцип двойственности.

7. Принцип двойственности на плоскости Галилея

Построим взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскости Галилея. Поставим в соответствие

$$M(k,b) \leftrightarrow m : y = kx - b.$$

Проверим, что при таком соответствии выполняются следующие свойства:
1) если точка $A(k,b)$ лежит на прямой $\ell : y = px + c$, то прямая $a : y = kx - b$ содержит точку $L(p, -c)$ (и наоборот). Действительно, так как $A \in \ell$ получаем $b = pk + c$. Но условие принадлежности точки L прямой a выглядит точно так же: $-c = kp - b$.
2) расстояние от точки $A(k,b)$ до точки $B(p,c)$ равно углу между прямой $a : y = kx - b$ и прямой $b : y = px - c$ (и наоборот). Действительно, по формулам для вычисления расстояния и угла имеем: $d(A,B) = k - p = \angle(a,b)$.

Благодаря такому соответствию, мы можем взять истинное утверждение о точках, прямых, их принадлежности, расстоянии между точками и углах между прямыми и заменить слова

точка $\leftrightarrow$ прямая
лежит на $\leftrightarrow$ проходит через
расстояние $\leftrightarrow$ угол.

В результате мы получим тоже верное утверждение.

По принципу двойственности мы можем также строить фигуры, двойственные данным. Если мы доказали для исходной фигуры, что она может рассматриваться в геометрии Галилея (то есть свойство точек плоскости быть данной фигурой не меняется при сдвигах вдоль оси и параллельных переносах), то для двойственной ей фигуры это будет выполняться автоматически. Отдельного доказательства не потребуется.

Рассмотрим примеры двойственных фигур.

1. Возьмем пару параллельных прямых. Чтобы построить двойственную фигуру заменим термин параллельные прямые его расшифровкой: две прямые, которые не имеют ни одной точки, принадлежащей обеим прямым. Тогда по принципу двойственности получим: две точки, которые не имеют ни одной прямой, проходящей через каждую из них. Это точки, которые лежат на особой прямой (мы помним, что особые прямые – это не прямые, дуги окружностей). Такие точки для единообразия терминологии называют *параллельными*.

2. Пусть даны две параллельные прямые a и b. Как мы видели выше, расстояние между ними вычисляется по формуле $d(a,b) = b_1 - b_2$, где $a:\ y = kx + b_1$, $b:\ y = kx + b_2$. Пусть по принципу двойственности им ставятся в соответствие точки A и B. Выясним, какая характеристика точек A и B соответствует расстоянию $d(a,b)$. Имеем, для точек $A(k, -b_1)$, $B(k, -b_2)$. Это точки особой прямой. При этом их особое расстояние

$$\delta(A,B) = -b_1 + b_2 = -d(a,b).$$

Таким образом, расстоянию между параллельными прямыми по принципу двойственности соответствует особое расстояние между двойственными точками с обратным знаком. Отметим, что если прямая a была „выше “прямой b, то точка A будет „ниже “точки B.

3. Найдем фигуру, двойственную треугольнику. Определяем треугольник так: это три точки, не лежащие на одной прямой и три прямые, которые соединяют их. Двойственная фигура: три прямые, не проходящие через одну точку, и три точки, в которых попарно пересекаются эти прямые. Это тоже треугольник. Обозначим стороны треугольника a, b, c, а лежащие напротив них вершины A, B, C. Биссектриса угла A треугольника по принципу двойственности перейдет в середину стороны a, основание биссектрисы (точка пересечения биссектрисы и противоположной стороны) медиане треугольника.

Задача 7.1**.** Докажите, что равнобедренному треугольнику двойственен равнобедренный треугольник.

Теорема 7.1**.** *Фигура, двойственная циклу, является циклом.*

Доказательство. Рассмотрим цикл, который задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Он состоит из точек $(p, ap^2 + bp + c)$, где p пробегает все действительные числа. По принципу двойственности эти точки переходят в E-прямые

$$y = px - ap^2 - bp - c.$$

Из курса дифференциальной геометрии мы знаем, что существует единственная кривая, которая касается всех этих прямых. Эта кривая называется огибающей семейства прямых. Она будет двойственна исходному циклу. Покажем, что это будет цикл. Напомним, что если семейство кривых на евклидовой плоскости задается уравнением $F(x,y,p) = 0$, где p – параметр, то огибающая этого семейства задается уравнениями $F(x,y,p) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$. Если из них исключить параметр p, то получим общее уравнение огибающей. В нашем случае получаем

$$y = px - ap^2 - bp - c,\ x - 2ap - b = 0.$$

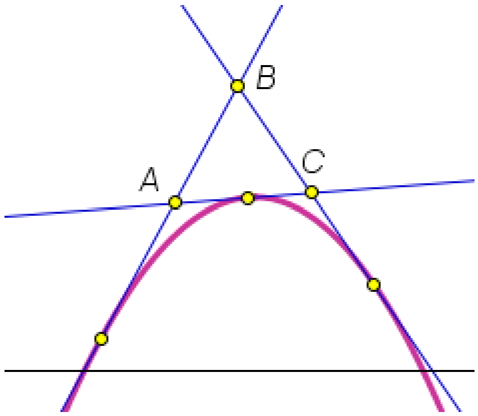
Из второго равенства выразим p и подставим в первое:

$$y = x\frac{x-b}{2a} - a\frac{(x-b)^2}{4a^2} - b\frac{x-b}{2a} - c.$$

Преобразуем

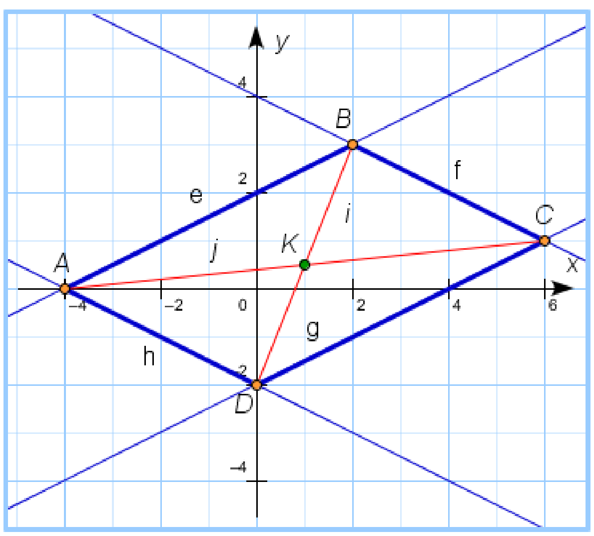
$$y = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x - c + \frac{b^2}{4a}.$$

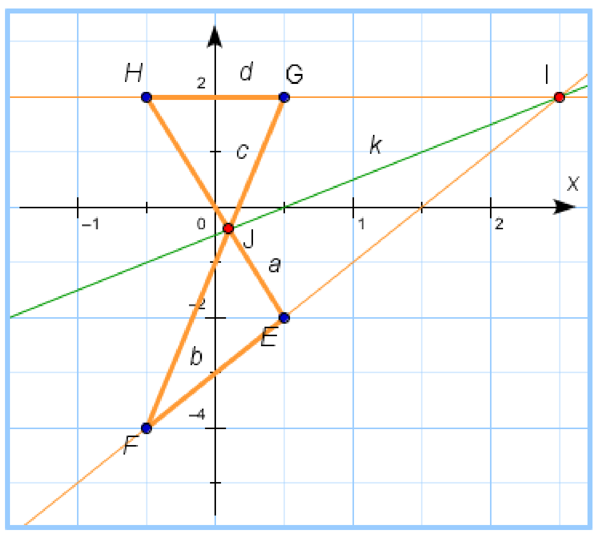
Это парабола с ветвями, расположенными вдоль оси Oy, то есть цикл. $\square$



Используя принцип двойственности автоматически получаем, что в любой треугольник можно вписать цикл.

4. Найдем фигуру, двойственную параллелограмму $ABCD$.

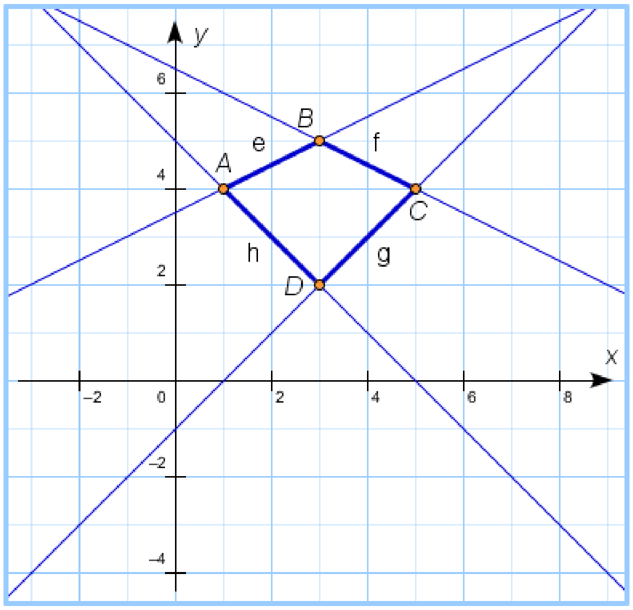


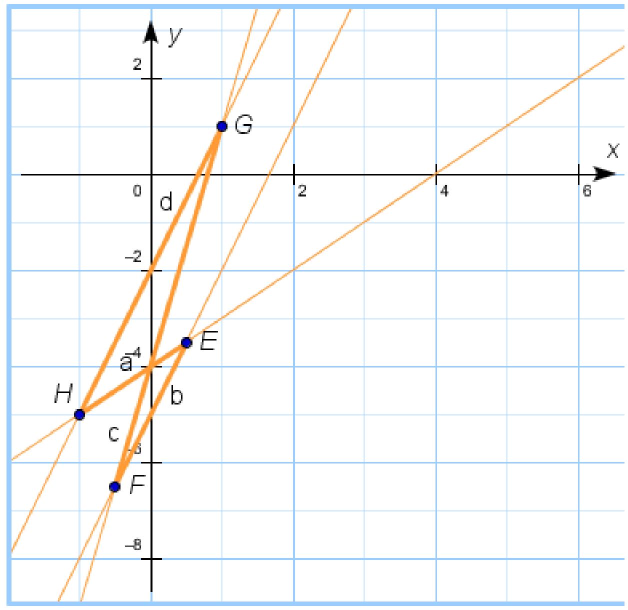


Рассмотрим конкретный пример. По принципу двойственности ставим в соответствие прямой e : $y = 0.5x+2$ точку $E(0.5, -2)$, и так далее. Мы получаем фигуру $EFGH$. Эта фигура называется *антипараллелограммом*. На рисунке изображены точки I и J, двойственные диагоналям AC и BD параллелограмма $ABCD$, а также прямая, двойственная точке K пересечения диагоналей AC и BD.

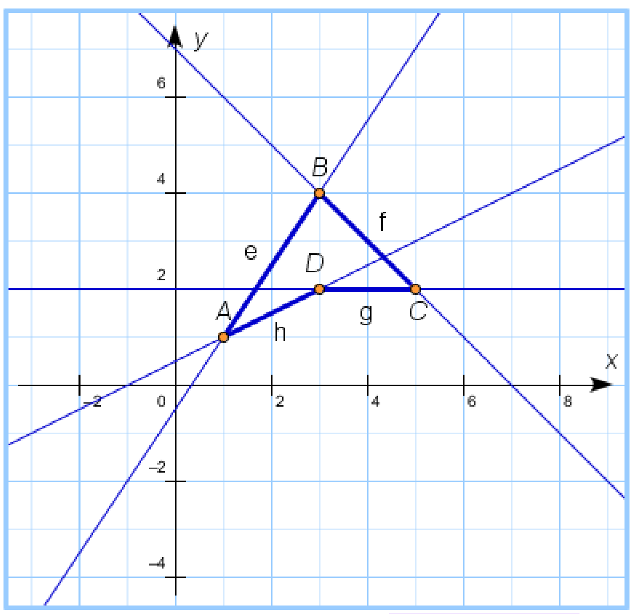
Так как у параллелограмма все четыре угла равны, у антипараллелограмма равны все четыре стороны.

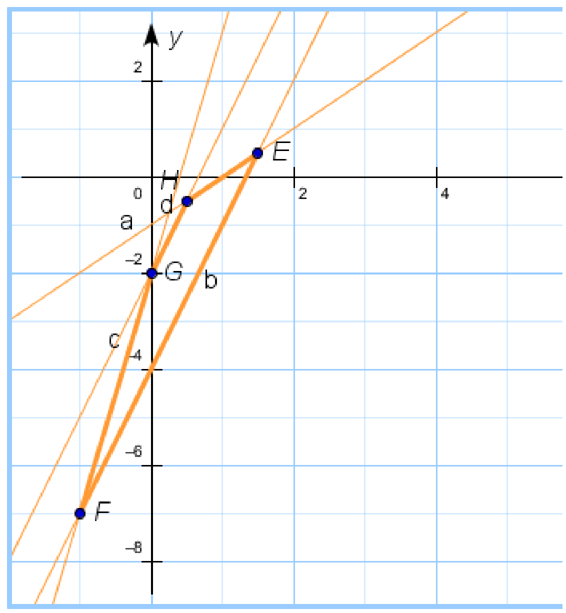
5. Найдем фигуру, двойственную равностороннику $ABCD$. Так как две противоположные вершины равносторонника параллельны, двойственная ему фигура будет иметь две параллельные стороны. На рисунке представлены фигуры, двойственные выпуклому равностороннику





и не выпуклому равностороннику:





Во втором случае мы получаем трапецию. (Посмотрите динамический рисунок Антипараллелограмм.)