Геометрия Лобачевского.

20 сентября 2018 г.

Содержание

Литература.

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, Том 2, Москва, Просвещение, 1988.

2. Гусева Н.И. и др. Геометрия Том 2, Москва, Академия, 2013.

3. Я.П. Понарин Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. Москва, 2004.

4. Я.П. Понарин Элементарная геометрия Том 1 Москва, 2004.

5. А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко Курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, 2000.

6. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов Геометрия, часть 2, Санкт-Петербург, 1997.

7. Л.С.Атанасян Геометрия Лобачевского, Москва, Просвещение, 2001.

8. А.И. Обухова История элементарной геометрии.

1. Абсолютная геометрия. Пятая группа аксиом.

Напомним, как строится абсолютная геометрия. Берется три группы основных понятий (точки, прямые, плоскости) и вводятся основные отношения (принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности). Эти отношения удовлетворяют соответственно четырем группам аксиом. Геометрия, которая получается в результате, называется *абсолютной геометрией*. Нас будет интересовать только геометрия на плоскости (планиметрия). Поэтому нам потребуются только точки и прямые. Количество аксиом при этом уменьшится. Напомним их.

I группа аксиом – аксиомы принадлежности точек прямым.

I_1. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует прямая a, проходящая через эти точки.

I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, которая проходит через них.

I_3. На каждой прямой лежит по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

В этой группе аксиом новые объекты не появляются.

II группа аксиом – аксиомы порядка. Это отношение между точками одной прямой называется отношением «лежать между» и обозначается $A - B - C$.

II_1. Если $A - B - C$, то это три различные точки одной прямой и $C - B - A$.

II_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует точка C, такая, что $A - B - C$.

II_3. Среди любых трех различных точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

После этих трех аксиом можно ввести понятие отрезка. Гильберт называется отрезком пару точек A и B. Мы назовем отрезком пару точек A и B и множество всех точек C, лежащих между ними. Кстати, что точки, лежащие между A и B, существует еще нужно доказать. Точки A и B называются концами отрезка AB, а точки, лежащие между ними, называются внутренними точками этого отрезка.

II_4 (аксиома Паша) Пусть A, B, C – три точки плоскости, не лежащие на одной прямой и a – прямая этой плоскости, которая не проходит ни через одну из них. Если прямая проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит через внутреннюю точку отрезка AC или BC.

Аксиомы второй группы позволяют ввести понятие треугольника, луча, полуплоскости, угла. Треугольник – это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Луч определяется сложнее. Доказывается теорема о том, что любая точка O прямой делит множество точек этой прямой (без точки O) на два множества: две точки принадлежат одному множеству тогда и только тогда, когда точка O не лежит между ними и принадлежат разным множествами тогда и только тогда, когда точка O лежит между ними. Каждое из этих множеств называется *лучом.* Точка O называется *началом луча* (для каждого из двух полученных лучей). Сами лучи называются *взаимно дополнительными.* Заметим, что по такому определению начало луча самому лучу не принадлежит.

Угол определяется уже попроще. *Угол* – это фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом. Общая точка этих лучей называется *вершиной угла.* Лучи называются *сторонами* угла. Заметим, что вершина угла углу не принадлежит.

Угол называется *развернутым*, если его стороны являются взаимно дополнительными лучами. Также вводятся понятия смежных углов и вертикальных углов. Углы называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие – взаимно дополнительные лучи. Два угла называются *вертикальными*, если их стороны являются попарно взаимно дополнительными лучами.

Для не развернутого угла вводится понятие внутренней области угла.

III группа аксиом – аксиомы конгруэнтности. (В дальнейшем мы будем использовать термин равенство как синоним конгруэнтности).

III_1. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что $AB = A'B'$.

Эта аксиома позволяет на данном луче откладывать отрезок, равный данному.

III_2. Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$. (Отрезки конгруэнтные по отдельности третьему отрезку, конгруэнтны между собой.)

III_3. Пусть $A-B-C$, $A'-B'-C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Тогда $AC = A'C'$. (Отрезки конгруэнтные по кускам, конгруэнтны целиком.)

III_4. Пусть даны угол $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k', исходящий из точки O', такой, что $\angle hk = \angle h'k'$.

Эта аксиома позволяет от данного луча в данную полуплоскость откладывать угол, равный данному.

Дается определение конгруэнтных треугольников. Треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$, если все их соответствующие стороны и соответствующие углы конгруэнтны.

III_5. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Это почти что первый признак равенства треугольников. А точнее аксиома, из которой он достаточно легко следует. И именно он доказывается здесь первым. За ним доказываются второй и третий признаки равенства треугольников.

Вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен смежному.

Появляются понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Появляются понятия медианы, высоты и биссектрисы треугольника, равнобедренный и равносторонний треугольники.

Основной теоремой этой группы аксиом является такая: через данную точку проходит единственный перпендикуляр к данной прямой.

Следствием этой теоремы является построение двух не пересекающихся прямых. Берем точку A, не лежащую на прямой a. Опускаем из точки A перпендикуляр AH на прямую a, а затем к прямой AH восстанавливаем перпендикуляр b в точке A. Прямые a и b не пересекаются. Это доказывает, что через каждую точку, не лежащую на прямой можно провести прямую, не пересекающую данную. Разговор о том, сколько таких прямых может быть мы сможем вести только в пятой группе аксиом. А пока

IV группа аксиомы непрерывности. Из две: аксиома Кантора и аксиома Архимеда. Они позволяют ввести измерение отрезков и углов. В этой группе аксиом доказывается теорема Саккери-Лежандра: если выполняются четыре группы аксиом, то сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых углов (то есть быть больше π).

Геометрия, которая построена на перечисленных четырех группах аксиом, называется *абсолютной геометрией.*

На пятой группе аксиом идет развилка. Пятая группа аксиом содержит всего одну аксиому. Возьмем пятый постулат Евклида: и всякий раз, когда две прямые, пересеченные третьей, образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, они пересекаются, причем пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых. В этом случае мы получим евклидову геометрию, которую хорошо знаем со школьных времен. Эквивалентом пятого постулата Евклида является аксиома о параллельной: через любую точку, не лежащую на прямой, проходит не более одной прямой, не пересекающая данную. Вместе с утверждением о существовании прямой, которая проходит через данную точку и не пересекает данную прямую (доказали в третьей группе аксиом) мы получаем, что через каждую точку, не лежащую на прямой проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Такие прямые называются параллельными в геометрии Евклида. Напомним, что эквивалент аксиомы – это утверждение, которым мы можем заменить аксиому, получив ту же самую геометрию (то есть эквивалент $\Leftrightarrow$ аксиома).

Возьмем отрицание аксиомы о параллельной: через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную. Это аксиома Лобачевского. Если ею дополнить четыре группы аксиом абсолютной геометрии, мы получим геометрию Лобачевского. Именно ее мы и будем рассматривать в этом курсе.

Чтобы доказать, что та или иная геометрия, построенная на наборе аксиом, не противоречива, нужно построить ее модель. Другими словами, нужно взять объекты, уже построенные в рамках какой-то другой непротиворечивой теории, сказать, какие из этих объектов будут играть роль точек, какие прямых, какие плоскостей и сказать, как будут задаваться отношения между ними. Затем проверить, что при этом выполняются все аксиомы. Тем самым доказывается непротиворечивость новой теории. Непротиворечивость теории (в частности, геометрии) можно доказать только относительно, то есть относительно какой-то другой уже построенной теории. В самом начале этого пути стоит арифметика натуральных чисел.

Для геометрии Лобачевского мы построим модель, использую евклидову плоскость. Эта модель не только позволит убедиться в непротиворечивости геометрии Лобачевского, но еще и даст возможность изображать чертежи объектов, которые мы будем изучать. Как и в евклидовой геометрии картинка помогаем проводить доказательства.

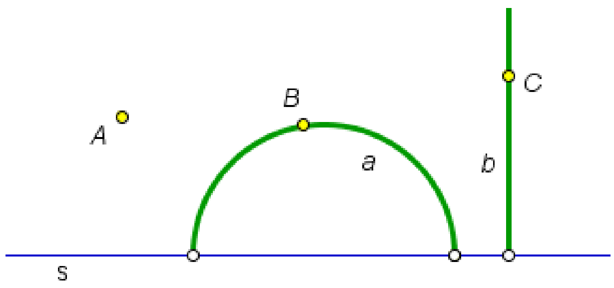
2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Точки и прямые. Первая группа аксиом.

Будем считать, что евклидова плоскость σ у нас уже построена (будем называть ее Е-плоскостью). Ее точки будем называть *Е-точками*, а ее прямые – *Е-прямыми*. Говоря об отношениях на евклидовой плоскости мы тоже будем добавлять букву Е.

Возьмем на Е-плоскости σ Е-прямую s. Назовем ее *абсолютом.* Эта Е-прямая делит плоскость σ на две Е-полуплоскости. Договоримся рисовать Е-прямую s горизонтально. Тогда эти полуплоскости условно назовем верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю Е-полуплоскость. Обозначим ее Λ. Прямая s называется *абсолютом.*

Будем называть Е-полуплоскость Λ плоскостью в геометрии Лобачевского, короче, *плоскостью.* (У нас будет только одна плоскость, так как мы ограничимся построением планиметрии Лобачевского). Точки Е-полуплоскости Λ будем называть точками в геометрии Лобачевского, короче, *точками.*

Прямыми в геометрии Лобачевского, короче, *прямыми*, будем называть перпендикулярные Е-лучи с началом на абсолюте и Е-полуокружности Е-окружностей с центрами на абсолюте.

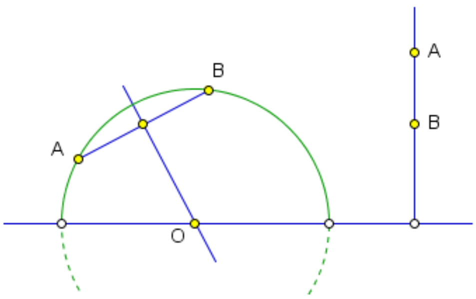


На рисунке изображены три точки A, B и C, а также две прямые a и b. Прямая a представляет из себя Е-полуокружность. Обратите внимание, что концы Е-полуокружности выколоты. Они не являются точками плоскости Λ. Прямая b представляет из себя Е-луч. Итак, мы смоделировали основные объекты.

Будем говорить, что точка M принадлежит прямой m, если соответствующая Е-точка M принадлежит Е-полуокружности (либо Е-лучу) m. Тем самым мы смоделировали отношение принадлежности точек прямым. Наша следующая задача проверить выполнение аксиом первой группы. Так как мы ограничиваемся планиметрией Лобачевского, то проверить нам нужно только аксиомы, относящиеся к планиметрии.

I_1, I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует единственная прямая, которой они принадлежат.

Доказательство. Возьмем две произвольные различные точки A и B. Е-точки A и B могут располагаться только двумя по существу разными способами: Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s и Е-прямая AB не перпендикулярна Е-прямой s.



Если Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s, то проводим ее и берем луч, лежащий в модели. Если не перпендикулярна, то проводим серединный перпендикуляр к Е-отрезку AB и выходим на центр O Е-окружности. Берем нужную полуокружность.

Единственность прямой AB следует из однозначной определенности Е-луча и Е-окружности с центром на s, проходящей через две заданные точки. □

I_3. На каждой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

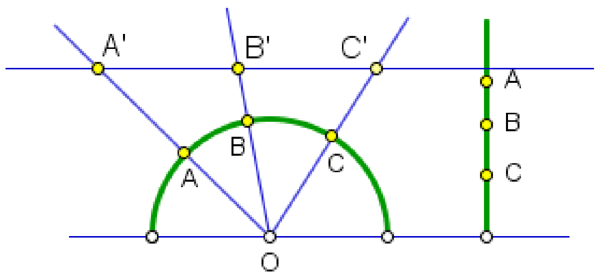
Доказательство. Берем произвольную прямую. Это либо Е-полуокружность, либо Е-луч, перпендикулярный абсолюту. Как доказывалось в евклидовой геометрии, на любом Е-луче и любой Е-окружности существует бесконечно много точек. Следовательно, две уж точно найдется.

Докажем, что существует три точки, не лежащие на одной прямой. Берем любой Е-луч h и две разные точки на нем. Обозначим их A и B. Возьмем точку C

из верхней полуплоскости так, чтобы она не принадлежала лучу h. Если предположить, что точки A, B, C лежат на одной прямой, то получим, что через них проходит Е-полуокружность с центром на абсолюте. Тогда через точки A и B проходит две прямые, что противоречит I_2. Значит, точки A, B, C – три точки не лежащие на одной прямой. □

3. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Вторая группа аксиом.

Смоделируем отношение лежать между. Пусть дана прямая a, которая изображена как Е-полуокружность. Ее центр обозначим O. Проведем произвольную Е-прямую, параллельную абсолюту. Точки пересечения этой Е-прямой с Е-лучами OA, OB, OC обозначим соответственно A', B', C'. Будем говорить, что точка B лежит между точками A и C на прямой a, если Е-точка B' лежит между Е-точками A' и C'. Если прямая a изображается Е-лучом, то будем говорить, что точка B лежит между точками A и C, если Е-точка B лежит между точками A и C.



Будем в этом случае обозначать $A-B-C$. Посмотри на аксиомы.

II_1. Если $A-B-C$, то A, B и C – три различные точки прямой и $C-B-A$.

Доказательство. Если прямая изображена Е-лучом, то выполнение этой аксиомы непосредственно следует из того, что она выполняется на евклидовой плоскости.

Пусть прямая изображается Е-дугой. Тогда в силу выполнимости этой аксиомы на евклидовой плоскости мы получаем, что A', B', C' – три различные точки Е-прямой и $C'-B'-A'$. Откуда по определению отношения лежать между получаем $C-B-A$. □

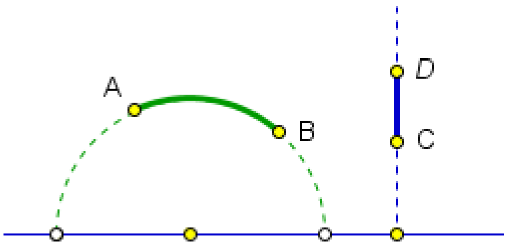
II_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует по крайней мере еще одна точка C на прямой AB, такая, что $A-B-C$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда прямая AB изображается Е-полуокружностью (центр этой Е-полуокружности обозначим как обычно O). Берем вспомогательную Е-прямую, параллельную абсолюту и строим точки A' и B'. Так как на евклидовой плоскости эта аксиома выполняется, то существует точка C', такая, что $A'-B'-C'$. Тогда строим точку C как точку пересечения Е-луча OC' и Е-полуокружности. Нужная точка C найдена. □

II_3. Среди трех точек одной прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

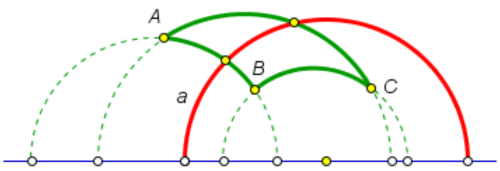
Доказательство. Рассмотрим случай Е-полуокружности. Берем точки A, B, C на ней и опять берем вспомогательную Е-прямую и строим точки A', B', C'. Так как на евклидовой плоскости среди точек A', B', C' не более одной лежит между двумя другими, то значит, и среди точек A, B, C не более одной лежит между двумя другими. □

Теперь мы можем ввести понятия отрезка.



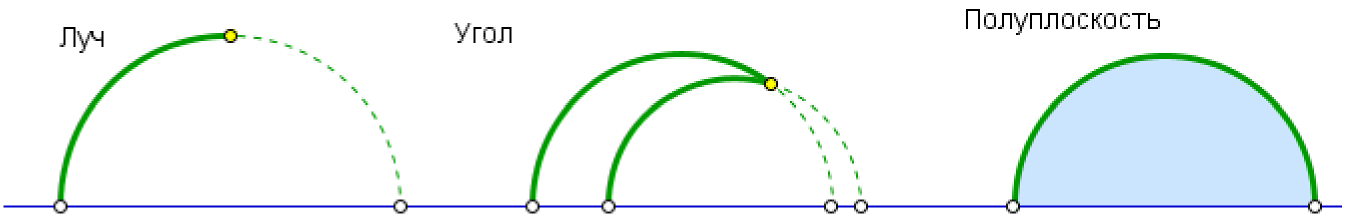
На рисунке изображены отрезки AB и CD.

II_4. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и a – прямая, лежащая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит через точку отрезка AC или BC.



Доказательство основывается на теореме из евклидовой геометрии: две окружности пересекаются тогда и только тогда, когда одна из них проходит через внутреннюю точку другой окружности. Пусть прямая a пересекает отрезок AB. Тогда либо точка A будет внутренней для Е-окружности a, либо B. Пусть это точка B. Тогда если точка C является внутренней для Е-окружности a, то пересечет AC, в противном случае – BC.

Теперь можно изобразить луч, полуплоскость, угол.



Луч – жирная зеленая линия. Дополнительный к нему луч – пунктирная линия. Угол изображен жирными зелеными линиями. Пунктирными линиями изображены вертикальный к нему угол и два смежный (постарайтесь их увидеть). Одна полуплоскость закрашена голубым. Все не закрашенное – дополнительная полуплоскость.

Задача 3.1. Изобразите угол в случае, когда одна из его сторон лежит на Е-луче. Изобразите полуплоскости в случае, когда их граница изображена Е-лучом.

Задача 3.2. Изобразите угол и его внутренний луч. Рассмотрите случаи, когда обе стороны угла – Е-полуокружности; одна из сторон – Е-луч. Изобразите в обоих случаях отрезок с концами на сторонах угла.

4. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Третья группа аксиом.

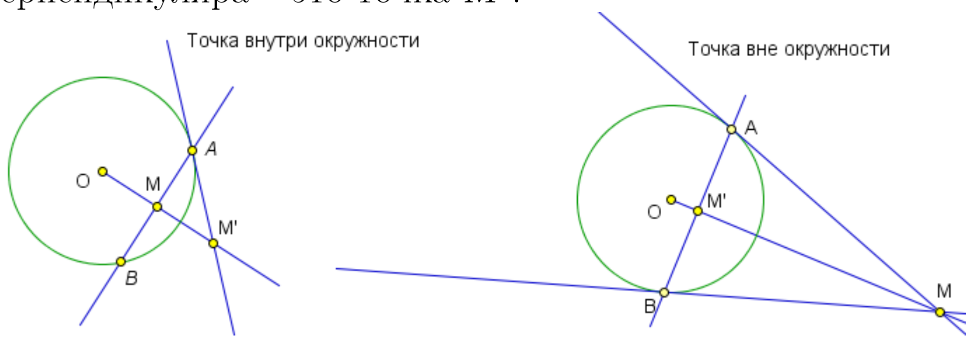
4.1. Инверсия плоскости. Определение.

Рассмотрим евклидову плоскость σ. Фиксируем на ней точку O и окружность ω радиуса R с центром в этой точке. Отображение I множества $\sigma \setminus O$ на себя, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', такую, что

$$1)\, M' \in [OM); \quad 2) OM \cdot OM' = R^2$$

называется *инверсией*. Точка O называется *центром инверсии*, R – *радиусом инверсии*, а окружность ω называется *окружностью инверсии*.

Образ точки M строится следующим образом: 1) если точка внутри окружности. Строим луч OM и проводим через M перпендикуляр к этому лучу. Через точку пересечения перпендикуляра с окружностью проводим касательную к ней. Пересекаем касательную с лучом OM. Получаем точку M'.
2) если точка вне окружности. Строим луч OM. Через M проводим касательную к окружности и из точки касания опускаем перпендикуляр на OM. Основание перпендикуляра – это точка M'.



Динамический рисунок Инверсия можно посмотреть здесь
http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25

Задача 4.1. Докажите, что точка M', построенная по указанному алгоритму действительно является образом точки M при инверсии.

Указания. Используйте тот факт, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, является прямым. Рассмотрите подобные треугольники.

Задача 4.2. Докажите, что инверсия I является инволютивным преобразованием, то есть $I^2 = id$. Из этого следует, что обратным преобразованием для инверсии является она же сама.

Точка M будет инвариантной точкой инверсии тогда и только тогда, когда она лежит на окружности инверсии.

Действительно, если точка инвариантна, то $M' = M$. Тогда из второго условия в определении инверсии получаем, что $OM^2 = R^2$, то есть $OM = R$ и M лежит на окружности инверсии ω.

Обратно, пусть точка M лежит на окружности инверсии (то есть $OM = R$). Тогда из второго условия определения инверсии получаем: $R \cdot OM' = R^2$. Тогда $OM' = R$, то есть точка M' тоже лежит на окружности инверсии. Так как M' лежит еще и на луче OM, то точки M и M' совпадают. Значит, точка M инвариантна.

Итак, множество всех точек, инвариантных относительно инверсии – это окружность инверсии.

Посмотрим, что будет происходить с прямыми и окружностями при инверсии. Проще всего для исследования инверсии применять комплексные числа. Для продолжения построения модели Пуанкаре нам потребуется такое понятие евклидовой геометрии как инверсия (евклидовой) плоскости. В этом пункте мы временно забываем про геометрию Лобачевского, все объекты относятся к евклидовой геометрии (букву E добавлять не будем). Инверсию будем изучать с помощью комплексных чисел. Поэтому начнем с воспоминаний о комплексных числах.

4.2. Комплексные числа. Уравнения прямых и окружностей.

Напомним, что комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел, которые удобно записать так: $z = a+ib$, где $i^2 = -1$. Правила сложения и умножения комплексных чисел выглядят так:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2);\ z_1 z_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Сложение и умножение комплексных чисел коммутативно. Сопряженным комплексному числу z называется комплексное число

$$\bar{z} = a - ib.$$

С помощью операции комплексного сопряжения удобно отлавливать среди комплексных чисел вещественные и чисто мнимые числа.

Комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$. Действительно, пусть $z = a + ib$. Тогда

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

Аналогичным образом доказывается, что комплексное число z является чисто мнимым (то есть имеет вид $z = ib$) тогда и только тогда, когда $\bar{z} = -z$.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется вещественное число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Тогда легко видеть, что

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = z\bar{z}.$$

Рассмотрим плоскость с прямоугольной декартовой системой координат. Тогда каждая точка M плоскости обеспечивается парой координат, которые мы обозначим (x, y). Из этой пары можно соорудить комплексное число $z = x+iy$. Это число мы будем называть комплексно координатой точки M и писать $M(z)$. Аналогичным образом каждый вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ обеспечивается комплексной координатой $p_1 + ip_2$, которую мы будем обозначать буквой p и писать $\vec{p}(p)$.

Рассмотрим прямую, которая проходит через точку $M_0(z_0)$, где $z_0 = x_0 + iy_0$, (x_0, y_0) – это вещественные координаты точки M_0 в прямоугольной декартовой системе координат, параллельно вектору $\vec{p}(p)$, $p = p_1+ip_2$. Тогда параметрические уравнения этой прямой (в вещественных числах) будут иметь вид

$$x = x_0 + p_1t,\ y = y_0 + p_2t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Умножим второе уравнение на i и сложим с первым. Тогда мы получим параметрическое уравнение прямой в комплексных числах

$$z = z_0 + pt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Получим из параметрического уравнения прямой (в комплексных числах) общее уравнение прямой (в комплексных числах). Для этого умножим его на $\bar{p}$: $\bar{p}z = z_0\bar{p} + |p|^2t$. Комплексно сопряжем его $p\bar{z} = \bar{z}_0p + |p|^2t$. (с последним слагаемым ничего не произошло при комплексном сопряжении, так как оно является вещественным). Тогда мы получим систему уравнений

$$\bar{p}z = z_0\bar{p} + |p|^2t,\ p\bar{z} = \bar{z}_0p + |p|^2t.$$

Вычтем из первого второе

$$\bar{p}z - p\bar{z} = \bar{p}z_0 - p\bar{z}_0$$

Умножим обе части на i и обозначим $-pi = u$, $-i(\bar{p}z_0 - p\bar{z}_0) = b$. Заметим, что

$$\bar{u} = \overline{-pi} = -\bar{p}(-i) = i\bar{p},$$

то есть коэффициент перед z будет равен $\bar{u}$. Кроме того, для числа b получаем

$$\bar{b} = \overline{-i(\bar{p}z_0 - p\bar{z}_0)} = i(p\bar{z}_0 - \bar{p}z_0) = b,$$

то есть b – вещественное число. Тогда уравнение прямой примет вид

$$u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Это общее уравнение прямой. Можно показать, что любое уравнение такого вида будет задавать прямую.

Задача 4.3. Напишите параметрическое и общее уравнение прямой (в комплексных числах), проходящей через точки $A(i)$ и $B(2-i)$.

Решение. Заметим сначала, что в теории все уравнения прямой мы выводили опираясь на ее точку и направляющий вектор. В данной же задаче есть две точки. Делаем из них направляющий вектор $\overrightarrow{AB}$. Вспоминаем, что координаты вектора в комплексных числах вычисляются по той же схеме, что и в вещественных: конец минус начало. Значит, (комплексная) координата $\overrightarrow{AB}(2-2i)$. Следовательно, параметрическое уравнение прямой в комплексных числах будет иметь вид (смотрим на формулу и подставляем наши данные)

$$z = i + (2-2i)t.$$

Теперь нужно перейти к общему уравнению прямой. Поступаем также как при выводе общего уравнения прямой в общем виде: берем комплексно сопряженное к параметрическому уравнению, умножаем каждое из них так, чтобы при вычитании из одного уравнения другого избавится от t:

$$z(2+2i) = i(2+2i) + (2-2i)(2+2i)t; \quad \bar{z}(2-2i) = -i(2-2i) + (2+2i)(2-2i)t.$$

Вычитаем и получаем

$$z(2+2i) - \bar{z}(2-2i) - 4i = 0.$$

Умножим на i, чтобы свободный член был вещественным (можно этого и не делать, то что мы уже получили тоже уравнение прямой)

$$z(-2+2i) + \bar{z}(-2-2i) + 4 = 0 \Leftrightarrow z(-1+i) - \bar{z}(1+i) + 2 = 0.$$

$\square$

Выведем уравнение окружности в комплексных числах. Чтобы было проще начнем с окружности с центром в точке $O(0)$ радиуса r. В вещественных координатах уравнение такой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Если бегающая по окружности точка $M(x, y)$, то ее комплексная координата будет $z = x + iy$. Тогда в левой части уравнения окружности стоит $|z|^2$ или, как мы видели выше это тоже самое, что $z\bar{z}$. Тогда получаем уравнение окружности с центром в нуле в комплексной координате имеет вид

$$z\bar{z} = r^2.$$

Перейдем к общему случаю и выведем уравнение окружности с центром в точке $Q(z_0)$ радиуса r. В вещественных числах уравнение такой окружности будет иметь вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,\ z_0 = x_0 + iy_0.$$

Это уравнение мы можем записать в виде

$$|z - z_0|^2 = r^2. \tag{4.1}$$

Действительно, $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$, следовательно,
$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Уравнение окружности (4.1) мы можем переписать в виде

$$(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2, \Leftrightarrow\ (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

Это уравнение окружности будем называть *каноническим.*

Раскроем скобки в каноническом уравнении окружности и перенесем все слагаемые в левую часть.

$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

Обозначим $-z_0 = u$, $z_0\bar{z}_0 - r^2 = b$. Тогда $-\bar{z}_0 = \bar{u}$ и уравнение окружности примет вид

$$z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение окружности будем называть *общим.* Можно показать, что любое уравнение такого вида (с условием $u\bar{u} - b > 0$) задает окружность. Причем, если окружность задана таким уравнением, то легко вычислить ее центр и радиус

$$z_0 = -u,\ r = \sqrt{u\bar{u} - b}.$$

Задача 4.4. Напишите каноническое уравнение окружности и общее уравнение окружности с центром $Q(-1 - i)$ радиуса 2.

Решение. Смотрим на каноническое уравнение окружности и подставляем в него наши данные:

$$(z - (-1 - i))(\bar{z} - (-1 + i)) = 4.$$

Раскрываем скобки, чтобы получить общее уравнение окружности:

$$z\bar{z} - (-1 + i)z + (1 + i)\bar{z} - 2 = 0.$$

□

Задача 4.5. Окружность задана уравнением $z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 3 = 0$. Найдите координаты ее центра и радиус.

Решение. Вспоминаем формулы: $z_0 = -u$ (центр – это коэффициент перед $\bar{z}$ с противоположным знаком), $r^2 = z_0\bar{z}_0 - b$. Вычисляем

$$z_0 = -i; \quad r^2 = (-i)\overline{(-i)} - (-3) = 4,$$

то есть центр $Q(-i)$, а радиус $r = 2$. □

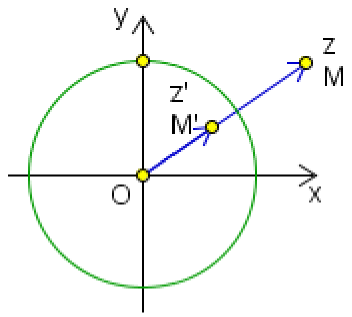
Общие уравнения прямой и окружности можно объединить в одно:

$$\varepsilon z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0, \; b \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon = 0$ для прямой и $\varepsilon = 1$ для окружности.

4.3. Образы прямых и окружностей при инверсии.

Выведем формулу для инверсии в комплексных числах. Пусть дана окружность радиуса R с центром O. Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O. Точка $M(x, y)$ будет задаваться комплексным числом $z = x+iy$. Точка $M'(x', y')$ (ее образ при инверсии) будет задаваться комплексным числом z'. Так как векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ сонаправлены, их комплексные координаты отличаются на положительный вещественный множитель. (Докажите это самостоятельно, используя вещественные координаты векторов и их сонаправленность).



Тогда $z' = \lambda z$, где λ – некоторое положительное вещественное число, которое нужно найти. Мы знаем из определения инверсии, что $OM \cdot OM' = R^2$. Длина отрезка OM – это модуль комплексного числа z, а длина отрезка OM' – это модуль комплексного числа z'. Тогда получим

$$|z||z'| = R^2.$$

Подставляем $z' = \lambda z$ и учитываем, что $|\lambda z| = \lambda|z|$ (очевидное равенство, если представлять комплексные числа как векторы и учесть положительность λ). Тогда

$$\lambda|z|^2 = R^2 \Leftrightarrow \lambda z\bar{z} = R^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{R^2}{z\bar{z}}.$$

Подставляем найденное λ в $z' = \lambda z$, сокращаем на z и получаем формулу инверсии в удобной системе координат (центр системы в центре окружности инверсии)

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{4.2}$$

Задача 4.6. Докажите, что если центр окружности инверсии находится в точке $Q(z_0)$, а радиус ее равен R, то формулы инверсии будут иметь вид

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0.$$

Указания. Сонаправленные векторы будут иметь координату $\overrightarrow{OM'}(z' - z_0)$ и $\overrightarrow{OM}(z - z_0)$.

Выясним, в какие множества точек переходят прямые и окружности при инверсии. Выберем систему координат так, чтобы ее центр находился в центре окружности инверсии. Тогда инверсия будет задаваться формулой 4.2.

Напомним, что прямые и окружности в комплексных числах можно задать единым уравнением

$$\varepsilon z\bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

где при $\varepsilon = 0$ получаем прямую, а при $\varepsilon = 1$ получаем окружность.

Чтобы найти образ прямой (окружности) при инверсии, берем уравнение инверсии, выражаем z и подставляем в уравнение (4.3)

$$\varepsilon\frac{R^4}{z'\bar{z}'} + u\frac{R^2}{z'} + \bar{u}\frac{R^2}{z'} + b = 0$$

или, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, так как $z \neq 0$ (центр инверсии при определении инверсии выбросили), получаем

$$\varepsilon R^4 + uR^2\bar{z}' + \bar{u}R^2z' + bz'\bar{z}' = 0.$$

Это будет уравнение образа. Уберем у переменной штрихи (обозначим ее z) и проанализируем, что же получилось

$$\varepsilon R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2z + bz\bar{z} = 0.$$

1) Если изначально у нас была прямая, причем проходящая через центр инверсии ($\varepsilon = 0$ – прямая, $b = 0$ – проходящая через центр инверсии, то есть $u\bar{z} + \bar{u}z = 0$), то мы получаем

$$uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2z = 0 \Leftrightarrow u\bar{z} + \bar{u}z = 0,$$

то есть мы получили ту же самую прямую. Итак, при инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, (а точнее множество точек прямой без центра инверсии) переходит в себя.

2) Если изначально у нас была прямая, не проходящая через центр инверсии ($\varepsilon = 0$ – прямая, $b \neq 0$ – не проходящая через центр инверсии, то есть $u\bar{z}+\bar{u}z+b = 0$), то мы получим

$$uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2z + bz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{uR^2}{b}\bar{z} + \frac{\bar{u}R^2}{b}z + z\bar{z} = 0.$$

Это уравнение окружности. Так как свободный члена равен нулю, то окружность проходит через начало координат, то есть через центр инверсии. Итак, при инверсии прямая, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, (точнее в множество точек окружности без центра инверсии) проходящую через центр инверсии.

3) Рассмотрим окружность, проходящую через центр инверсии ($z\bar{z}+u\bar{z}+\bar{u}z=0$). Она переходит в

$$R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z = 0 \Leftrightarrow R^2 + u\bar{z} + \bar{u}z = 0.$$

прямую, не проходящую через центр инверсии (так как $R^2 \neq 0$).

4) Наконец, окружность, не проходящая через центр инверсии ($z\bar{z}+u\bar{z}+\bar{u}z+b=0$, $b \neq 0$) переходит в

$$R^4 + uR^2\bar{z} + \bar{u}R^2 z + bz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{R^4}{b} + \frac{uR^2}{b}\bar{z} + \frac{uR^2}{b}z + z\bar{z} = 0$$

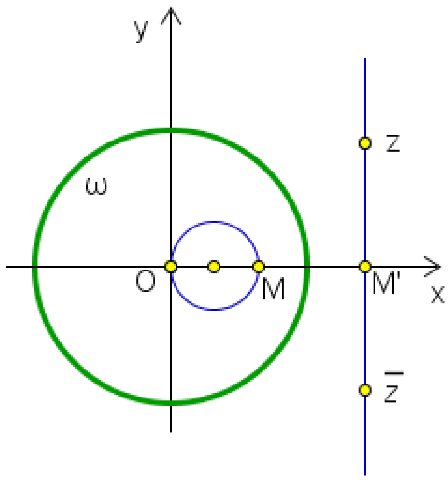
окружность, не проходящую через центр инверсии.

Запишем результат исследования следующим образом (легче будет запомнить)

$$\ell \ni O \to \ell; \quad \ell \not\ni O \to \Omega \ni O; \quad \Omega \ni O \to \ell \not\ni O; \quad \Omega \not\ni O \to \Omega' \not\ni O.$$

В качестве следствия проведенных рассуждений получим взаимное расположение прямой (окружности), ее образа при инверсии и центра инверсии.

Пусть дана окружность Ω, проходящая через центр инверсии. Исследуя во что она перейдет (это оказалась прямая ℓ), мы выбирали систему координат с началом в центре инверсии, чтобы вычисления были проще. Упростим себе еще больше жизнь: возьмем ось Ox системы координат так, чтобы она проходила через центр данной окружности. Тогда в уравнении данной окружности Ω коэффициент u будет вещественным числом (он с точностью до знака совпадает с координатой центра окружности), а значит, в уравнении прямой ℓ



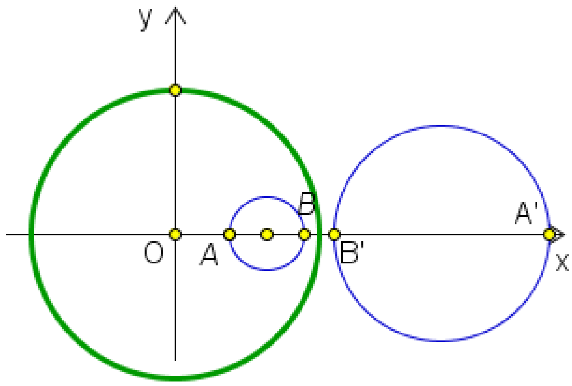
$$R^2 + u\bar{z} + \bar{u}z = 0$$

коэффициенты при z и $\bar{z}$ будут равными числами $u = \bar{u}$ (если u вещественно). Тогда вместе с каждой своей точкой z эта прямая содержит комплексно сопряженную точку $\bar{z}$.

Эти наблюдения дают способ построения образа окружности Ω, проходящей через центр инверсии: нужно построить образ точки M (диаметрально противоположной к точке O) и через эту точку провести прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей центр инверсии и центр окружности Ω.

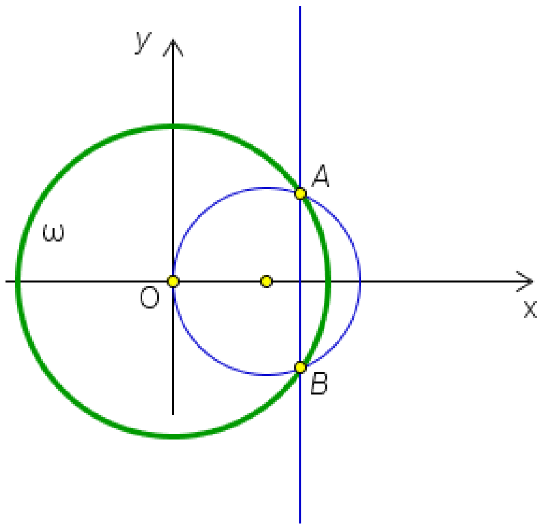
Если нужно построить образ прямой, не проходящей через центр инверсии, то действия проводятся в обратном порядке: через центр инверсии проводят прямую, перпендикулярную данной, берут точку пересечения M', строят ее образ M при данной инверсии, на отрезке OM как на диаметре строят окружность.

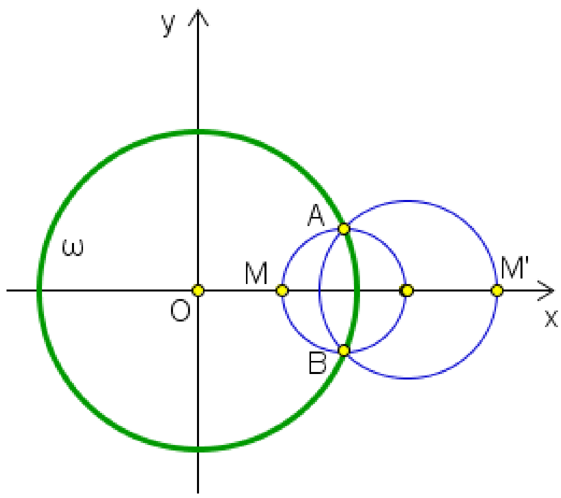
Рассуждая аналогичным образом (проведите рассуждения самостоятельно) получаем способ построения образа окружности, не проходящей через центр инверсии.



Нужно построить образы A' и B' двух точек A и B пересечения данной окружности с прямой, соединяющей центр инверсии с центром данной окружности (синяя окружность внутри окружности инверсии). На отрезке $A'B'$ как на диаметре построить окружность. Она будет образом данной окружности при инверсии.

Заметим, что если данная окружность пересекает окружность инверсии, то построения упрощаются.





В первом случае точки A и B исходной (синей) окружности являются инвариантными. Так как эта окружность проходит через центр инверсии, она переходит в прямую, проходящую через точки A и B. Проводим прямую. В этом же случае, если дана прямая, пересекающая окружность инверсии в двух точках A и B, то эти точки инвариантны. Образ прямой – окружность, проходящая через центр инверсии и точки A и B. Строим по трем точкам окружность.

Во втором случае дана окружность (синяя), пересекающая окружность инверсии в двух точках A и B. Тогда достаточно построить образ точки M при инверсии и провести через точки A, B, M' окружность – это будет образ данной окружности.

А как строить образ прямой (окружности), если она касается окружности инверсии?

Задача 4.7. Пусть инверсия задана окружностью с центром в начале системы координат и радиусом 1. Найдите образ окружности с центром в точке $Q(-i)$ радиуса 2 при этой инверсии.

Решение. Решение полностью повторяет наши рассуждения на занятии, в которых мы исследовали, во что переходят прямые и окружности при инверсии.

Начинаем с формулы инверсии. Так как центр инверсии в начале координат, то мы можем воспользоваться выведенной на занятии формулой такой инверсии

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Теперь пишем уравнение данной окружности с центром в точке $Q(-i)$ радиуса 2. Начинаем с канонического, а затем раскрываем скобки:

$$(z+i)(\bar{z}-i) = 4; \quad z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 4 = 0.$$

Чтобы найти образ этой окружности, нужно в ее уравнении перейти z к z' (то, что получится и будет уравнением образа окружности). Для такого перехода из уравнений инверсии нужно выразить z через z' (а если мы вспомним, что инверсия является инволютивным преобразованием, то просто можем переписать формулу, заменив z на z', а z' на z):

$$z = \frac{1}{\bar{z}'}; \quad \bar{z} = \frac{1}{z'}$$

(мы сразу взяли комплексное сопряжение к полученному равенству, чтобы при подстановке не ошибиться) Теперь подставляем выраженные z и z' в уравнение окружности:

$$\frac{1}{z'\bar{z}'} - i\frac{1}{\bar{z}'} + i\frac{1}{z'} - 4 = 0.$$

Мы можем избавиться от знаменателя, так как он не нулевой (он равен нулю только при $z' = 0$, а эту точку мы выбросили при определении инверсии)

$$1 - iz' + i\bar{z}' - 4z\bar{z} = 0.$$

Делим на -4 и стираем штрихи, чтобы было более привычный вид уравнения

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}iz - \frac{1}{4}i\bar{z} + z\bar{z} = 0.$$

Это уравнение окружности. Самостоятельно определите ее центр и радиус. □

4.4. Инвариантные окружности инверсии

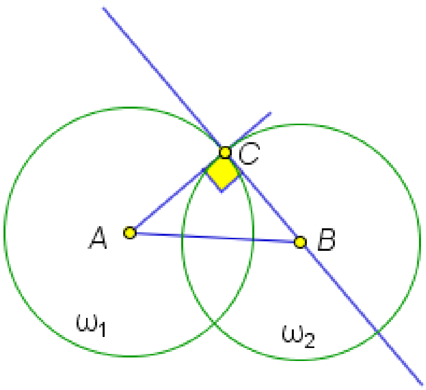
В предыдущих пунктах мы уже выяснили, какие точки плоскости и какие прямые плоскости будут инвариантными при инверсии.

- точка плоскости будет инвариантной тогда и только тогда, когда она лежит на окружности инверсии;
- прямая будет инвариантной тогда и только тогда, когда она проходит через центр инверсии.

Поставим аналогичный вопрос для окружностей: какие окружности будут инвариантными (то есть переходят с себя) при инверсии.

Для ответа на этот вопрос нам потребуется новое понятие. Напомним, что *углом* между окружностями в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

Две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если угол между ними прямой. (то есть угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения прямой)

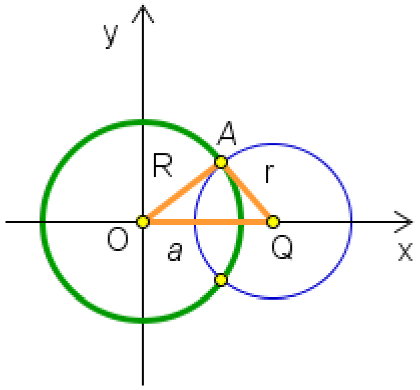


Из определения ортогональных окружностей и определения касательной к окружности сразу следует, что две окружности ортогональны тогда и только тогда, когда касательные к ним в точке их пересечения проходят через их центры. (Смотрим на картинку: касательная в точке C к окружности ω_1 проходит через центр B окружности ω_2 и наоборот.)

Если вспомнить теорему Пифагора и обратную к ней, то получим еще один критерий ортогональности окружностей: две окружности ортогональны тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между центрами окружностей равен сумме квадратов радиусов этих окружностей.

Теорема 4.1. *Окружность является инвариантной при инверсии тогда и только тогда, когда это окружность инверсии, либо окружность, ортогональная окружности инверсии.*

Доказательство. Пусть дана инверсия (центр O, радиус R) и окружность ω (центр Q, радиус r). Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало находилось в центре инверсии, а ось Ox совпадала бы с прямой, проходящей через центр данной окружности ω и центр окружности инверсии.



Тогда инверсия будет задаваться уравнением $z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а данная окружность будет задаваться уравнением $(z-a)(\bar{z}-a) = r^2$, где $Q(a)$. Так как центр окружности Q лежит на оси Ox, то координата a является вещественным числом. Раскрывая скобки, мы получим

$$z\bar{z} - az - a\bar{z} + a^2 - r^2 = 0.$$

Находим образ этой окружности при инверсии:

$$\frac{R^4}{z'\bar{z}'} - \frac{aR^2}{\bar{z}'} - \frac{aR^2}{z'} + a^2 - r^2 = 0.$$

Приводим к общему знаменателю и делим на $a^2 - r^2$ (это число не нуль, так как данная окружность не проходит через центр инверсии, то есть через начало координат)

$$z'\bar{z}' - \frac{aR^2}{a^2-r^2}z' - \frac{aR^2}{a^2-r^2}\bar{z}' + \frac{R^4}{a^2-r^2} = 0.$$

Окружность ω будет инвариантной тогда и только тогда, когда уравнения ее и ее образа будут одинаковыми, то есть

$$a = \frac{aR^2}{a^2-r^2}; \Leftrightarrow\ a^2 - r^2 = R^2.$$

Если $a \neq 0$, то это условие ортогональности окружности ω и окружности инверсии. Если $a = 0$, то $r^2 = R^2$ и центр данной окружности в нуле, то есть данная окружность совпадает с окружностью инверсии. Итак, мы получаем: окружности будет инвариантной относительно инверсии тогда и только тогда, когда это окружность инверсии или окружность, ортогональная окружности инверсии. $\square$

Для построения инвариантных окружностей нам потребуется следующая теорема

Теорема 4.2. *Если окружность проходит через две соответственно инверсные точки, то она будет инвариантной при данной инверсии.*

Доказательство. Пусть окружность инвариантна. Тогда по определению инвариантной окружности для любой точки этой окружности ее образ будет принадлежать ей же. Значит, инвариантная окружность проходит через пару соответственно инверсных точек.

Обратно, пусть данная окружность ω (с центром в точке Q) проходит через две соответственно инверсные точки A и A' инверсии (центр O). Так как инверсия инволютивное преобразование, то образ ω' окружности ω также будет проходить через точки A и A', значит ее центр будет лежать на серединном перпендикуляре к AA'. Так как центр ω' должен лежать на прямой OQ, то получаем, что центр ω и центр ω' совпадают. Так как обе окружности проходят через точку A, то и сами окружности совпадают. Значит, ω инвариантна. □

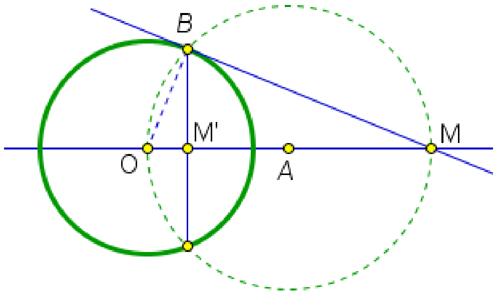
Задача 4.8. Пусть окружность ω с центром Q при инверсии переходит в окружность ω' с центром S. Докажите, что точка S не является образом Q при данной инверсии.

4.5. Задание инверсии различными способами.

Из определения инверсии следует, что для ее задания нужно указать окружность инверсии (то есть нужно знать точку – центр инверсии – и радиус). Другими словами, зная окружность инверсии, мы можем построить образ любой точки при этой инверсии.

Выясним, какими еще способами можно задать инверсию.

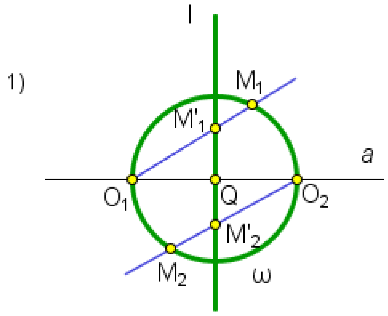
1. Инверсию можно задать центром O и парой соответствующих точек M и M'. Другими словами, если известен центр инверсии и пара соответствующих точек, то можно построить окружность инверсии.

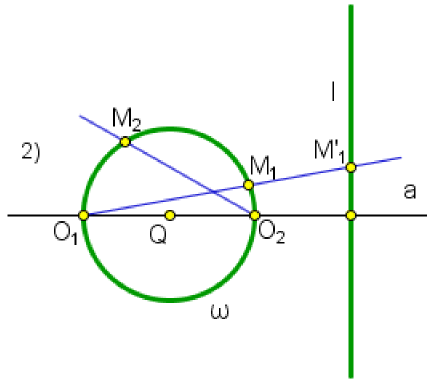


Построим на отрезке OM как на диаметре окружность, а через точку M' проведем прямую a, перпендикулярную OM. Тогда точка пересечения B окружности и прямой a будет точкой, принадлежащей окружности инверсии.

Чтобы убедиться, что мы получили действительно нужную окружность, заметим, что угол OBM будет прямым (он вписан в окружность и опирается на диаметр). Значит, MB – касательная к окружности с точкой касания B. Смотрим на алгоритм построения образа точки при инверсии и видим, что жирная зеленая окружность будет окружностью инверсии, при которой точка M перейдет в точку M'.

2. Пусть даны окружность ω и прямая ℓ, а также известно, что окружность ω при данной инверсии переходит в прямую ℓ. Нужно построить окружность инверсии. Как мы видели выше, центр инверсии должен в этом случае лежать на окружности ω и на одной прямой, проходящей через центр ω перпендикулярно прямой ℓ. Рассмотрим два случая: 1) прямая проходит через центр окружности, 2) прямая не проходит через центр окружности. В обоих случаях, проводя эту через центр ω перпендикулярно ℓ прямую a, мы получаем две точки пересечения с окружностью ω.

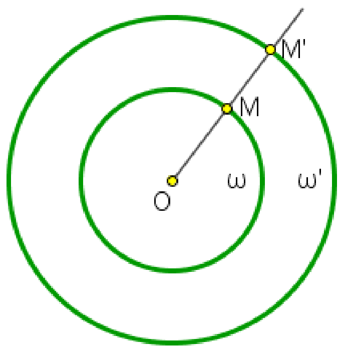




Но в первом случае подходят обе точки O_1 и O_2 на роль центра инверсии, а во втором случае подходит только точка O_1. Действительно, если провести луч через точку O_1 (O_2), то этот луч должен пересекать как окружность ω, так и прямую ℓ. Точки пересечения будут соответственно инверсными точками. Во втором случае для точки O_2 такого не происходит. Поэтому она не годится.

Итак, мы построили центр инверсии и получили две точки, соответствующие при инверсии. Тогда действуя далее как в первом способе задания инверсии, мы получим окружность инверсии. Тогда сможем строить образы любых точек при этой инверсии.

3. Пусть даны две окружности ω и ω'. Нужно задать инверсию, которая переводит ω в ω'. Рассмотрим сначала случай концентрических окружностей.



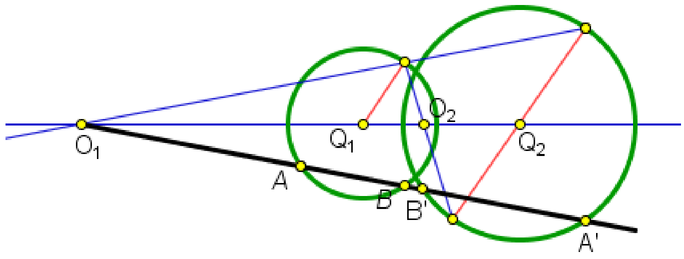
Обозначим их общий центр через O и проведем произвольный луч с началом в точке O. Он пересечет окружности в точках M и M'. Тогда инверсия с центром в точке O и парой соответствующих точек M и M' переводит окружность ω в окружность ω'. Окружность инверсии строится как в первом случае задания инверсии.

Задача 4.9. (необязательная) Существует ли не инвариантная при инверсии окружность, которая переходит в окружность такого же радиуса?

Рассмотрим случай не концентрических окружностей различных радиусов. Приведем без доказательства теорему из книги Понарина.

Теорема 4.3. *Для двух не концентрических окружностей не равных радиусов центром инверсии будет хотя бы один из их центров гомотетии.*

Если окружности пересекаются (в двух различных точках), то подходят оба центра гомотетии.

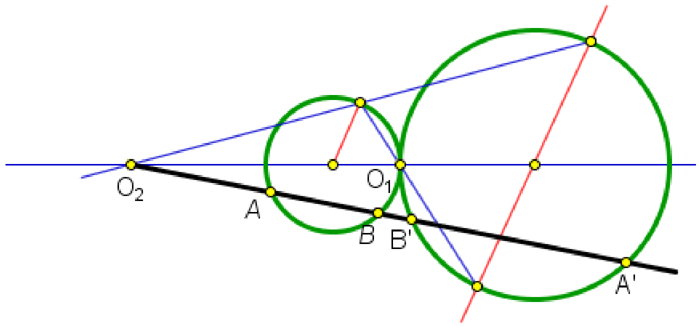


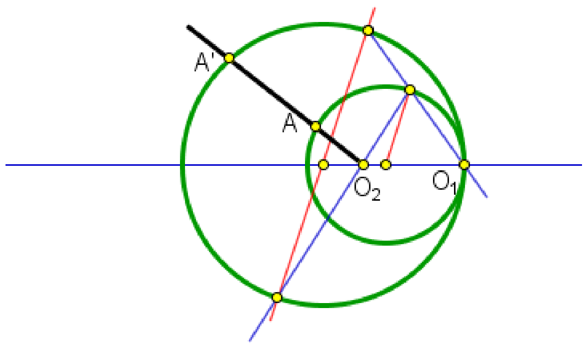
На рисунке показано, как построить оба центра гомотетии O_1 и O_2. (В одной окружности проводится диаметр, а в другой – параллельный ему радиус. Конец радиуса, принадлежащих окружности соединяется с концами диаметра.

Точки пересечения полученных прямых с прямой центров данных окружностей являются искомыми точками.) Они же являются центрами инверсий, переводящих одну окружность в другую. Чтобы найти пару соответствующих точек при инверсии, проведем луч через центр инверсии (на рисунке взята точка O_1). Этот луч пересечет каждую окружность в двух точках. Мы получим две пары соответствующих точек. Чтобы понять, какая точка для какой будет соответствующей, нужно вспомнить, что чем ближе находится точка к центру инверсии, тем дальше от центра инверсии находится ее образ. Значит, расставляем обозначения точек A, A', B, B' как показано на рисунке. Самостоятельно поставьте соответствующие при инверсии точки для случая O_2.

Если окружности не пересекаются или касаются, то из двух центров гомотетий на роль центра инверсии подходит только один. Посмотрим какой.

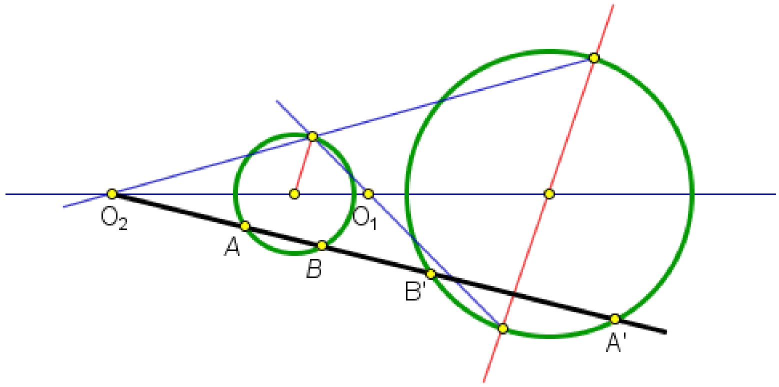
Начнем с касающихся окружностей. Они могут касаться внешним и внутренним образом.





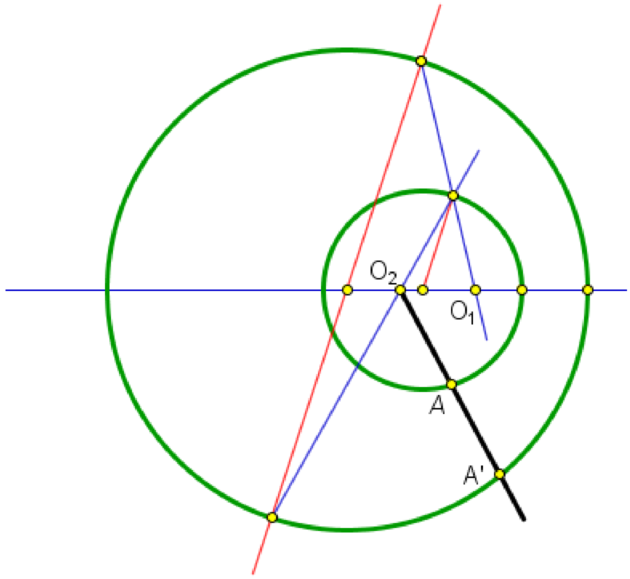
Строим второй центр гомотетии как в предыдущем случае. Если окружности касаются, то один из центров гомотетии совпадает с точкой касания. Он не подходит на роль центра инверсии (почему?)

Остался случай не пересекающихся окружностей. Здесь тоже возможны два случая: окружности не пересекаются внешним и внутренним образом. Если окружности не пересекаются внешним образом, то подходит только один из их центров гомотетий. На рисунке он обозначен O_2. (Почему не подходит второй центр гомотетии?)



Как и выше получаем соответствующие точки инверсии.

Наконец, посмотрим случай, когда окружности не пересекаются внутренним образом.



Из двух центров гомотетий подходит только точка O_2 на роль центра инверсии. Если предположить, что точка O_1 может быть центром инверсии, то эта инверсия будет переводить точки первой окружности в точки второй окружности точно также как гомотетия. Используя формулы инверсии и гомотетии можно показать, что это невозможно.

Во всех случаях расположения окружностей мы снова свели задание инверсии к центру и паре соответствующих точек. Значит поставленная задача полностью решена.

4.6. Композиция инверсий с другими преобразованиями евклидовой плоскости

Напомним, что на евклидовой плоскости есть такие преобразования как параллельный перенос и гомотетия.

Параллельный перенос на вектор $\vec{p}$ – это преобразование плоскости, которое каждой точке M этой плоскости ставит в соответствие такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Обозначение $T_{\vec{p}}$.

Гомотетия с центром S и коэффициентом $m \neq 0$ – это преобразование плоскости, которое каждой точке M этой плоскости ставит в соответствие точку M', такую, что $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$. Обозначение H_S^m.

Для этих преобразований в основном курсе геометрии мы выводили формулы (они легко получаются из определений) относительно произвольной аффинной системы координат:

$$T_{\vec{p}}: \begin{cases} x' = x + p_1; \\ y' = y + p_2 \end{cases}; \quad H_S^m: \begin{cases} x' = m(x - x_0) + x_0; \\ y' = m(y - y_0) + y_0, \end{cases}$$

где $\vec{p}(p_1, p_2)$, $S(x_0, y_0)$. Возьмем прямоугольную декартову систему координат и перейдем к комплексной координате $z = x + iy$. Тогда формулы параллельного переноса и гомотетии примут вид

$$T_{\vec{p}}: \; z' = z + p; \quad H_S^m: \; z' = m(z - z_0) + z_0,$$

где $p = p_1 + ip_2$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Покажем, что любую гомотетию с положительным коэффициентом можно представить в виде композиции двух инверсий с тем же центром.

Пусть дана гомотетия H_O^m, $m > 0$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат с началом в центре гомотетии. Рассмотрим инверсию I_1 с центром в той же точке O и произвольно выбранным радиусом R. Тогда формулы данной гомотетии и выбранной инверсии будут иметь вид

$$H_O^m: \; z' = mz; \quad I_1: \; z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Рассмотрим их композицию: $H_O^m \circ I_1$. Выясним, что это будет за преобразование. Для этого заметим, что при этом преобразовании точка z сначала под действием инверсии переходит в точку $\tilde{z} = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а затем эта точка $\tilde{z}$ под действием гомотетии переходит в точку $z' = m\tilde{z}$. Тогда композиция переводит точку z в точку

$$z' = \frac{mR^2}{\bar{z}}.$$

Это уравнение инверсии I_2 с центром O и радиусом $R\sqrt{m}$. Тогда получаем

$$H_O^m \circ I_1 = I_2; \; H_O^m = I_2 \circ (I_1)^{-1} = I_2 \circ I_1.$$

Задача 4.10. Докажите, что композиция любых двух инверсий с общим центром будет гомотетией с тем же центром.

Указания. Запишите формулы данных инверсий и найдите формулу, задающую их композицию.

Задача 4.11. Докажите, что любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух гомотетий с различными центрами и взаимно обратными коэффициентами. Выясните, как связаны между собой центры этих гомотетий и вектор параллельного переноса.

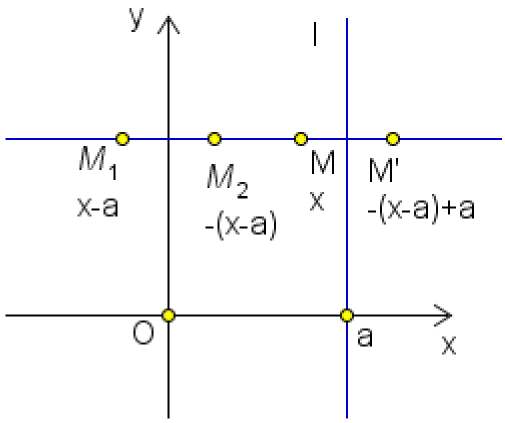
Указания. Если $T_{\vec{p}} = H_Q^m \circ H_O^{m^{-1}}$, то $(1-m)\overrightarrow{OQ} = \vec{p}$.

Задача 4.12. Докажите, что композиция двух любых гомотетий с разными центрами и взаимно обратными коэффициентами будет параллельным переносом.

4.7. Осевая симметрия как предельный случай инверсии.

Далее нам еще потребуется осевая симметрия. Пусть на евклидовой плоскости фиксирована прямая ℓ. Напомним, что *осевой симметрией* называется преобразование, которое каждой точке M, лежащей на ℓ, ставит в соответствие ее же, а любой точке M, не лежащей на ℓ, ставит в соответствие точку M', такую, что прямая MM' перпендикулярна ℓ и середина отрезка MM' лежит на ℓ.

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы прямая ℓ была бы перпендикулярна оси Ox. Обозначим абсциссу точки пересечения прямой ℓ и оси Ox через a.



Нам потребуются уравнения такой осевой симметрии. В основном курсе геометрии мы выводили общее уравнение осевой симметрии в прямоугольной декартовой системе координат. Мы можем его вспомнить, написать уравнение прямой ℓ и, подставив его в формулы, получить формулы нашей осевой симметрии. Но что делать, если общие формулы не вспоминаются? Давайте посмотрим на рисунок. Возьмем точку M и обозначим ее вещественные координаты (x, y). Очевидно, что для ее образа при осевой симметрии с осью ℓ вторая координата не поменяется, то есть $y' = y$. Половина дела сделана. Теперь разбираемся с первой координатой. Все было бы легко, если бы прямая ℓ совпадала бы с осью Oy. Тогда первая координата бы просто меняла знак.

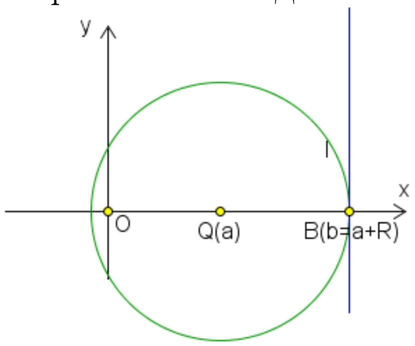
Поэтому мысленно переносим точку M вместе с прямой ℓ влево (переходим к точке M_1 с первой координатой $x - a$), отражаем от оси (M_2 с координатой $-(x - a)$) и возвращаемся обратно (точка M' с координатой $-(x - a) + a$). Итак, мы получили, что $x' = -x + 2a$. В вещественных координатах уравнения осевой симметрии имеют вид

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y. \end{cases}$$

Переходим к комплексным координатам $M(z)$, $z = x + iy$ переходит в $M'(z')$, $z' = x' + iy'$. Умножаем второе уравнение осевой симметрии и складываем с первым $z' = -x + iy + 2a$. Вспоминаем, что $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Тогда

$$z' = -\bar{z} + 2a.$$

Используя полученную формулу, покажем, что осевую симметрию можно рассматривать как предельный случай инверсии. Действительно, рассмотрим инверсию с центром на оси Ox. Обозначим координату центра инверсии через a. Радиус инверсии как всегда R.



Обозначим через B точку пересечения окружности инверсии и оси Ox. Обозначим ее координату $b = a + R$. Тогда уравнение инверсии $z' = \frac{R^2}{\bar{z}-a} + a$ мы можем записать в виде

$$z' = \frac{(b-a)^2}{\bar{z}-a} + a = \frac{\bar{z} + \frac{b^2}{a} - 2b}{\frac{\bar{z}}{a} - 1}.$$

Мы привели сначала оба слагаемые к общему знаменателю, а затем и числитель и знаменатель разделили на a. Устремим a к бесконечности. Тогда окружность устремится к прямой ℓ, а инверсия к преобразованию, которое будет задаваться формулой

$$z' = -\bar{z} + 2b.$$

Это формула осевой симметрии с осью ℓ. Таким образом, об осевой симметрии мы можем говорить как о предельном случае инверсии, то есть инверсии относительно окружности с бесконечно удаленным центром.

4.8. Третья группа аксиом

Возвращаемся в модель Пуанкаре. Третья группа аксиом – это аксиомы конгруэнтности. Договоримся конгруэнтность также называть равенством. Мы должны сейчас сказать, какие фигуры в модели плоскости Лобачевского мы будем называть равными.

Будем называть *Л-движениями* инверсии с центрами на абсолюте, осевые симметрии с осями, перпендикулярными абсолюту, параллельные переносы с векторами, параллельными абсолюту, гомотетии с положительными коэффициентами и центрами на абсолюте и их всевозможные конечные композиции.

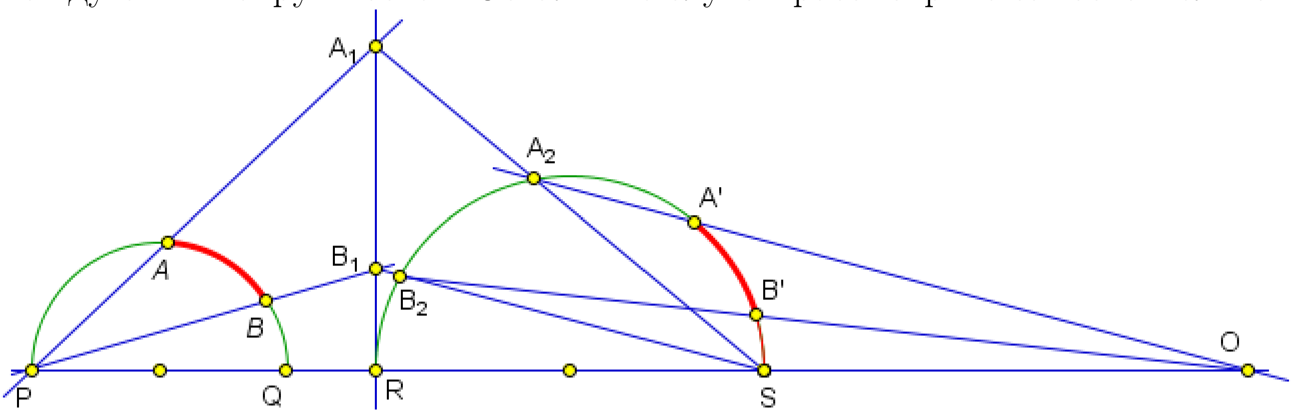
Как мы видели выше все преобразования, перечисленные в определении Л-движений можно свести к композиции инверсий (напомним, что осевую симметрию мы можем рассматривать как предельный случай инверсии). Тогда мы можем дать альтернативное определение Л-движения как композиции конечного числа инверсий (начиная с одной инверсии).

Теперь мы можем ввести отношение равенства фигур. Будем называть две фигуры в модели *равными*, если существует Л-движение, переводящее одну фигуру в другую.

Проверим выполнимость аксиом третьей группы.

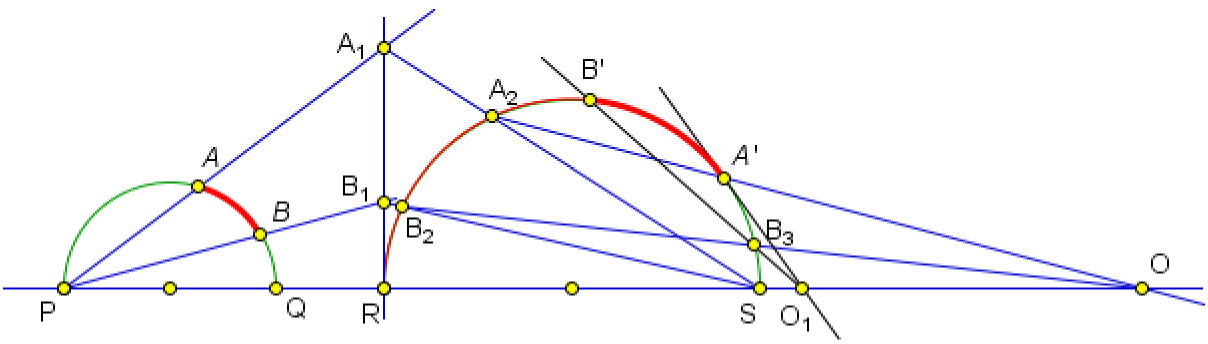
III_1. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что $AB = A'B'$.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB и луч с началом в точке A' изображаются дугами Е-окружностей. Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.



Отрезок AB и луч с началом в точке A' изображены на рисунке красным. Построим цепочку инверсий, которые переведут отрезок AB в нужный нам отрезок $A'B'$. Сначала рассмотрим инверсию с центром в Е-точке P, которая переводит Е-точку Q в Е-точку R. Так как Е-окружность, на которой лежит отрезок AB, проходит через центр инверсии, она перейдет в Е-прямую, перпендикулярную Е-прямой PR и проходящую через Е-точку R. Точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1. Теперь рассмотрим инверсию с центром в Е-точке S, для которой точка R будет инвариантной. Тогда Е-прямая A_1B_1 перейдет в окружность с диаметром RS. Строим A_2 и B_2 – образы точек A_1 и B_1. Осталось отобразить инверсией Е-точку A_2 в Е-точку A'. Тогда B_2 перейдет в искомую точку B'. Получаем, что Е-окружность с радиусом RS должны переходить в себя, а A_2 должна перейти в A'. Такая инверсия существует (как мы видели выше) и ее центр будет пересечением Е-прямых A_2A' и RS. Получаем Е-точку O и строим образ точки B_2, то есть точку B'. Итак, мы построили отрезок $A'B'$, конгруэнтный отрезку AB на заданном луче.

Поменяем данный луч с началом в точке A' на дополнительный к нему. Посмотрим, как в этом случае построить отрезок, равный данному.



Первые три инверсии такие же как в первом случае. Четвертая инверсия должна перебросить точку B_3 на дополнительный луч. Значит, она должна перевести окружность с диаметром RS в себя, точку A перевести в себя. Получаем, что окружность инверсии должны быть ортогональна к данной окружности и точка A' должна лежать на окружности инверсии. Значит, центр окружности инверсии будет точкой пересечения касательной в точке A' к окружности с диаметром RS и абсолюта. (Посмотрите динамический рисунок Аксиомы 3 группа на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25)

Замечание 4.1**.** Это не единственный набор Л-движений, который позволил отложить на данном луче отрезок, равный данному. Попробуйте, используя кроме инверсий еще и гомотетии упростить построения.

Задача 4.13**.** Пусть отрезок AB принадлежит Е-лучу, а луч с началом A' принадлежит Е-окружности. Постройте отрезок $A'B'$ на данном луче, равный отрезку AB. А как построить равный отрезок, если AB на Е-окружности, а A' – на Е-луче?

III_2. Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$.

Так как отрезки $A'B'$ и AB равны, существует цепочка инверсий $I_1 \circ \ldots \circ I_r$, которая переводит первый отрезок во второй. Аналогично, существует цепочка инверсий $\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s$, которая переводит $A''B''$ в AB. Тогда цепочка инверсий

$$(\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s)^{-1} \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r = \tilde{I}_s \circ \ldots \circ \tilde{I}_1 \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r$$

переведет отрезок $A'B'$ в отрезок $A''B''$. Следовательно, они равны.

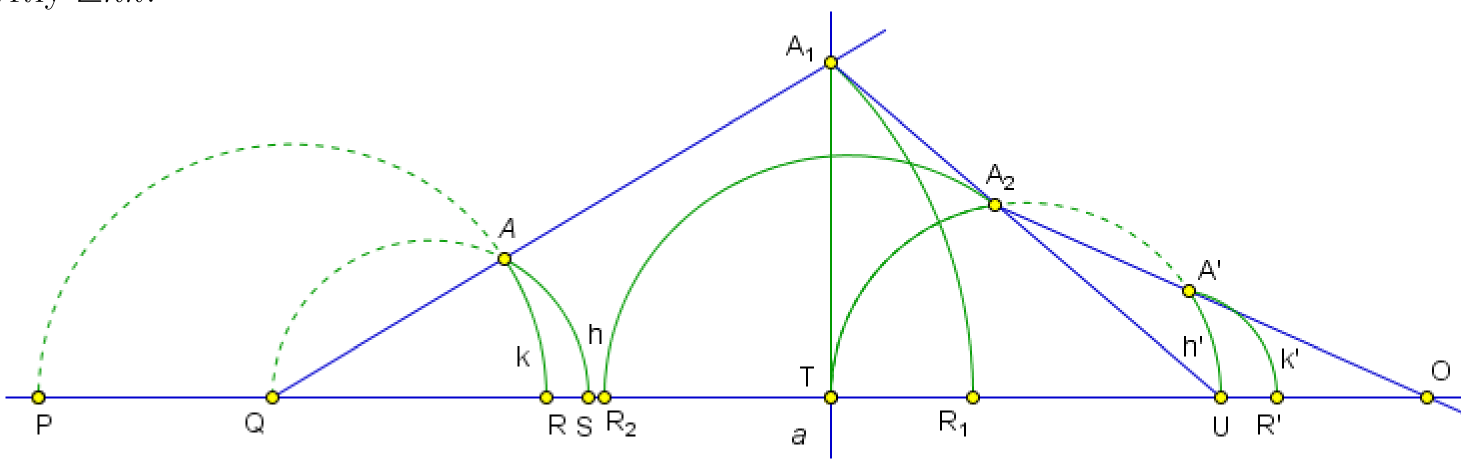
III_3. Пусть $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Тогда $AC = A'C'$.

Так как AB равен $A'B'$, существует последовательность инверсий, переводящая AB в $A'B'$. При этом луч $[BC)$ перейдет в луч $[B'C')$. Если предположить, что при этом точка C перейдет в точку C'', отличную от C', то на данном луче получим два отрезка, равный данному. Это противоречие. Следовательно, C перейдет в C', а значит, отрезок AC перейдет в отрезок $A'C'$, то есть они равны.

Переходим к углам.

III_4. Пусть даны $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k', исходящий из точки O', такой, что $\angle hk = \angle h'k'$.

Покажем, как мы можем отложить от данного луча h' угол, равный данному углу $\angle hk$.



Сначала получим цепочку инверсий, которая переводила бы луч h данного угла $\angle hk$ в луч h'. Переводить будем аналогично случаю построения отрезка, равного данного. Сначала отобразим Е-окружность QS инверсией с центром Q и соответствующими точками $S \to T$. Эта Е-окружность перейдет в Е-прямую a, точка A перейдет в точку A_1, а точка S в точку T. Значит, луч h перейдет в луч A_1T. Затем, переводим Е-прямую a в Е-окружность TU. Центр инверсии будет U, а точка T будет инвариантной. При такой инверсии точка A_1 перейдет в точку A_2 и луч A_1T перейдет в луч A_2T. Осталось перевести луч A_2T в луч h'. Для этого нужна инверсия, которая оставит окружность TU инвариантной, а точку A_2 переведет в точку A'. Это инверсия с центром O (вспоминаем, что окружность, проходящая через две инверсные точки, является инвариантной). Мы получили последовательность из трех инверсий, которые перевели луч h в луч h'. Теперь теми же инверсиями переводим луч k:

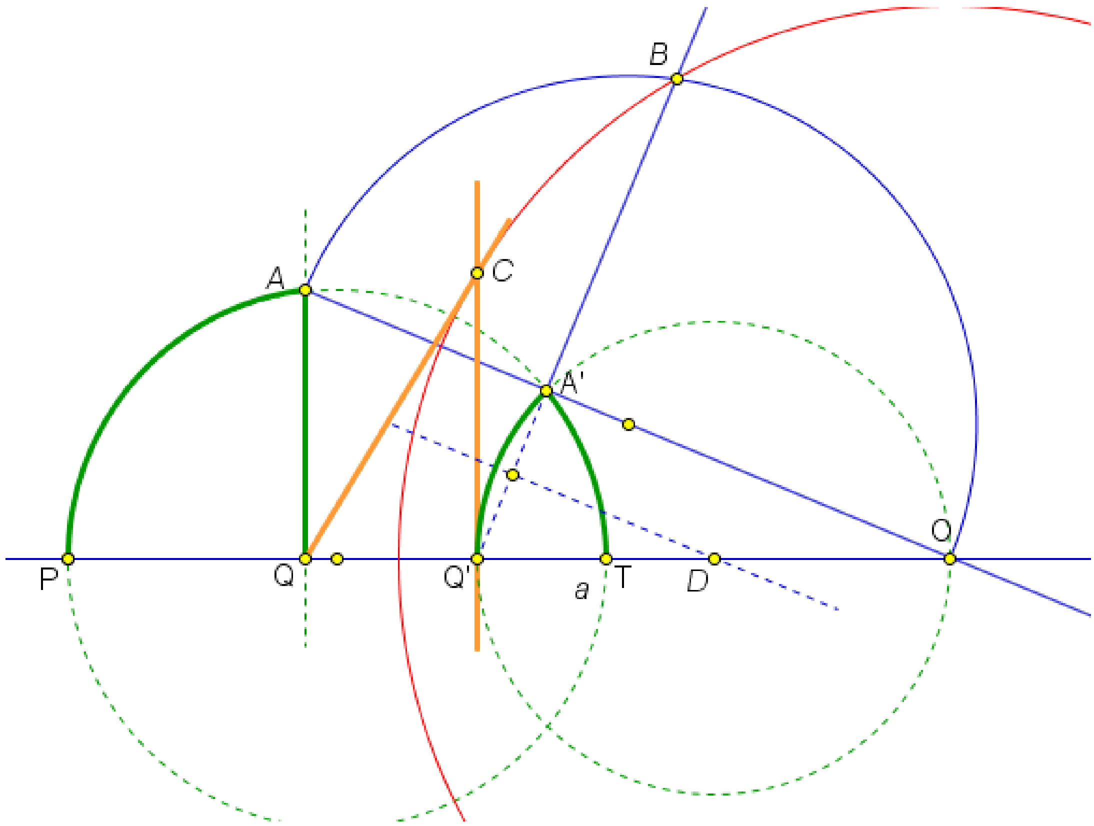
$$k \to A_1R_1 \to A_2R_2 \to A'R' = k'.$$

Подробные построения можете посмотреть на динамическом рисунке Аксиомы 3 группы на сайте.

Замечание 4.2**.** Мы указали способ построения угла, равного данного в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Заметим, что при этом построении мы не указали, в какую полуплоскость мы откладываем угол. Что делать, если луч k' оказался не в той полуплоскости, которая нужна?

Задача 4.14**.** Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' во внутреннюю полуплоскость угол, равный данному.

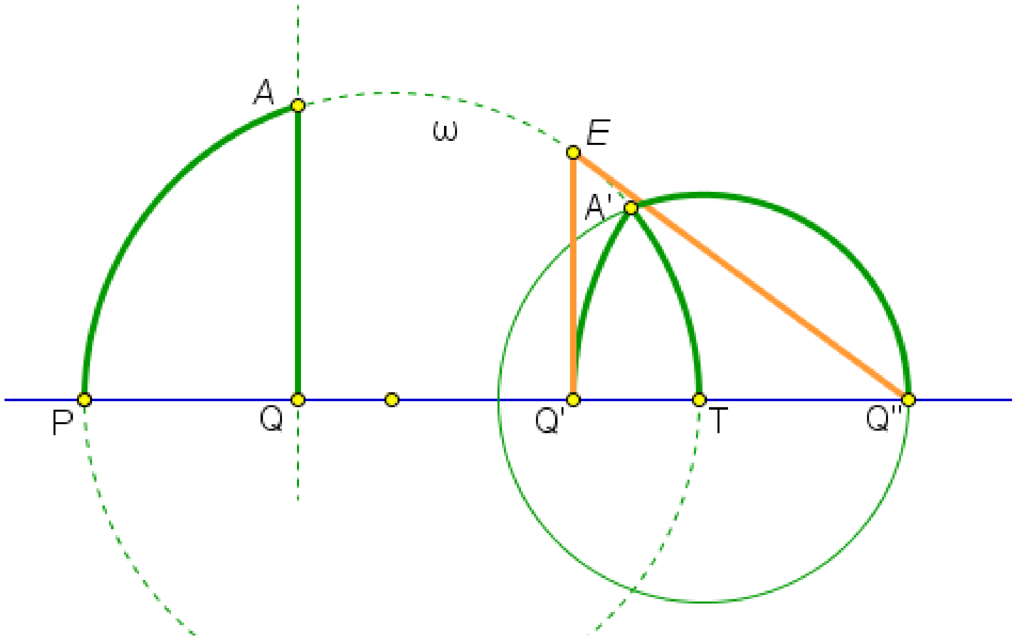
Решение. Нам нужно найти одно или несколько Л-движений, последовательное выполнение которых перевело бы луч AP в луч $A'T$, а луч AQ в какой-то луч во внутренней полуплоскости.



Заметим, что лучи AP и $A'Q$ находятся на одной Е-окружности (зеленая пунктирная). Поэтому рассмотрим инверсию, при которой эта Е-окружность переходит в себя, а точка A в точку A'. Ее центр будет на пересечении AA' с абсолютом. Это точка O. Нам нужно построить саму окружность этой инверсии. Заметим, что она задается центром O и парой соответствующих точек A и A'. Мы это уже умеем делать. На AO как на диаметре строим Е-окружность (синяя) и пересекаем ее с перпендикуляром (к AO) в точке A'. Получим точку B. Проводим красную окружность с центром в точке O радиуса OB – это окружность инверсии. Нам осталось перевести этой инверсией вторую сторону данного угла, то есть луч AQ. Для этого нам достаточно построить образ точки Q при этой инверсии. Строим стандартным образом: проводим из точку Q касательную к окружности инверсии и из точки касания опускаем перпендикуляр на Е-луч OQ (оранжевые Е-прямые). Получаем точку Q'. Так как Е-прямая AQ не проходила через центр инверсии, то при этой инверсии она перейдем в Е-окружность. Следовательно, нам нужно соединить точки A' и Q' дугой Е-окружности. Это и будет искомая сторона угла. □

Задача 4.15. Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' во внешнюю полуплоскость угол, равный данному.

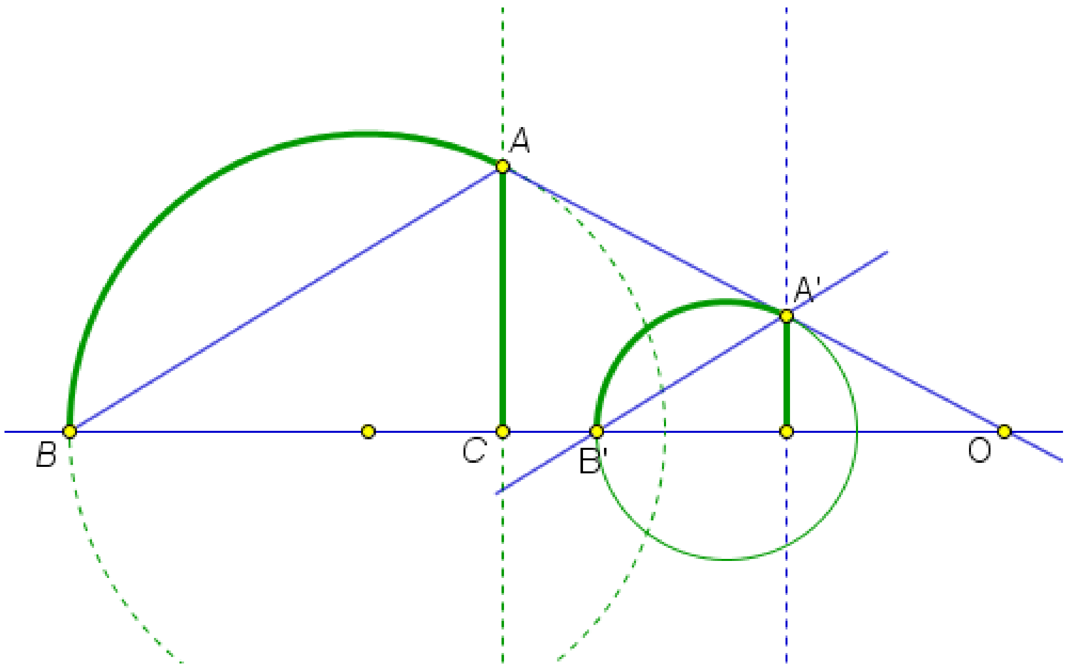
Решение. Задача такая же как предыдущая, но отложить угол теперь нужно во внешнюю полуплоскость. Решить ее можно, например, так. Сначала, как в предыдущей задаче, мы откладываем угол во внутреннюю полуплоскость.



И получаем угол $Q'A'T$. Теперь нам нужно каким-то Л-движением оставить на месте луч $A'T$ и перебросить во внешнюю полуплоскость луч $A'Q'$. Это опять инверсия с окружностью инверсии ω. Строим образ точки Q'. Это будет точка Q'' и проводим дугу $A'Q''$. Тогда угол $TA'Q''$ искомый. □

Задача 4.16. Пусть дан угол с вершиной A. Нужно отложить от луча с вершиной A' а) в левую, б) в правую полуплоскость угол, равный данному.

Решение. Пусть даны такие углы.



Мы помним, что кроме инверсий у нас есть еще Л-движения. Посмотрим, как они работают в решении задач.

Воспользуемся гомотетией, которая переводит A в A'. Ее центр O. Так как при гомотетии, Е-прямая, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную Е-прямую, то сторона AC данного угла при этой гомотетии перейдет в нужный луч с началом в A'. Осталось построить образ Е-дуги AB при этой гомотетии. Строим образ точки B (как на первом курсе) и проводим через точки A' и B' Е-окружность.

Если нужно отложить угол в правую полуплоскость, то воспользуемся осевой симметрией с осью, перпендикулярной абсолюту (она тоже будет Л-движением). Что это будет за осевая симметрия в данном случае? Постройте образ Е-дуги $A'B'$ при этой осевой симметрии самостоятельно. □

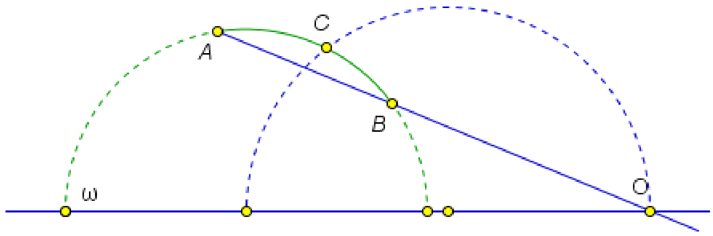
Замечание 4.3**.** Когда у нас появится четвертая группа аксиом, мы сможем указать более простой способ построения угла, равного данному.

Задача 4.17**.** III_5. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Проверьте выполнение этой аксиомы в модели самостоятельно.

Задача 4.18**.** Пусть дан отрезок AB. Постройте его середину C.

Решение. Рассмотрим случай, когда отрезок AB располагается на Е-окружности ω. Случай, когда отрезок AB располагается на Е-луче, рассмотрите самостоятельно.



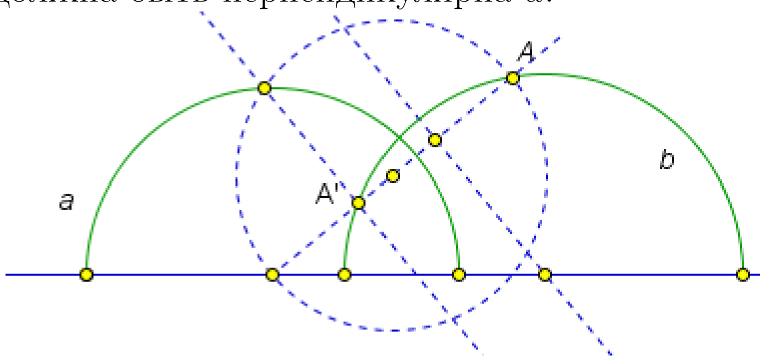
Как и на евклидовой плоскости, задачи на построение на модели плоскости Лобачевского начинаются с анализа. Пусть точка C построена. Тогда отрезок AC равен отрезку CB. Следовательно, должна существовать последовательность инверсий, переводящая отрезок AC в отрезок CB. Смотрим, нельзя ли обойтись одной инверсией. Точка C должна переходить в себя (то есть являться инвариантной), а точка A должна переходить в точку B. Рассмотрим инверсию I, для которой точки A и B соответствуют друг другу. Тогда окружность, содержащая эти точки перейдет в себя, а ее точка пересечения с окружностью инверсии будет инвариантной. Это и будет точка C. Следовательно, нам нужно построить окружность инверсии, для которой точка A переходит в точку B, а ее центр лежит на абсолюте.

Центр инверсии O получается как пересечение Е-прямой AB и абсолюта. Далее, так как Е-окружность ω инвариантна, она ортогональна окружности инверсии. Как мы видели в теме инверсия, это означает, что радиус каждой из этих Е-окружностей будет касательной к другой из них. Значит, нам нужно из точки O провести касательную к окружности ω. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Напомним, что в третьей группе аксиом вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он равен смежному. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образую прямой угол.

Задача 4.19. Дана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой. Постройте прямую, перпендикулярную a и проходящую через точку A.

Решение. Начинаем с анализа. Пусть искомая прямая b построена. Эта прямая должна быть перпендикулярна a.

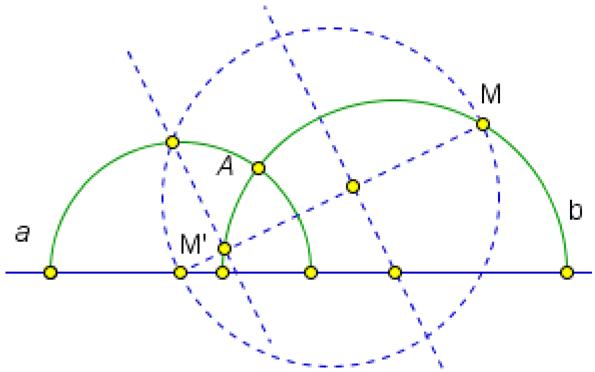


Тогда при инверсии с Е-окружностью a Е-окружность b должна переходить в себя, то есть она должна проходить через две инверсные точки.

Следовательно, для построения Е-окружности b нужно построить образ A' точки A при инверсии относительно Е-окружности a и провести через точки A и A' Е-окружность с центром на абсолюте. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Задача 4.20. Докажите, что инверсия моделирует осевую симметрию.

Решение. Напомним определение осевой симметрии.



Пусть дана прямая a. Преобразование плоскости, которое каждой точке $M \in a$ ставит в соответствие ее же, а каждой точке $M \notin a$ ставит в соответствие точку M', такую, что $MM' \perp a$ и середина отрезка MM' принадлежит a.

Рассмотрим прямую a на модели и точку $M \in a$. Тогда при инверсии с Е-окружностью a точка M будет инвариантной, то есть перейдет в себя. Пусть $M \notin a$. При инверсии она перейдет в точку M', такую, что Е-окружность b с центром на абсолюте, проходящая через точки M и M' будет инвариантной. Эта Е-окружность является прямой MM', которая перпендикулярна a. Кроме того, точка A пересечения Е-окружности a и Е-окружности b будет инвариантной. Тогда при инверсии отрезок MA перейдет в отрезок $M'A$, то есть A является серединой отрезка MM'. □

Задача 4.21. Постройте прямоугольный треугольник и проведите медиану к его гипотенузе.

5. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Четвертая группа аксиом

Эта группа аксиом состоит из двух аксиом: Архимеда и Кантора.

IV_1. (аксиома Архимеда) Пусть AB и CD – какие-нибудь отрезки. Тогда на прямой AB существует конечное множество точек A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_n, таких, что выполняются условия: а) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, $\ldots$, $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$; б) $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$; в) $A - B - A_n$.

IV_2. (аксиома Кантора) Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего и, кроме того, для любого отрезка CD найдется натуральное число n, такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков данной последовательности.

Мы опустим проверку выполнения этих аксиом в модели Пуанкаре.

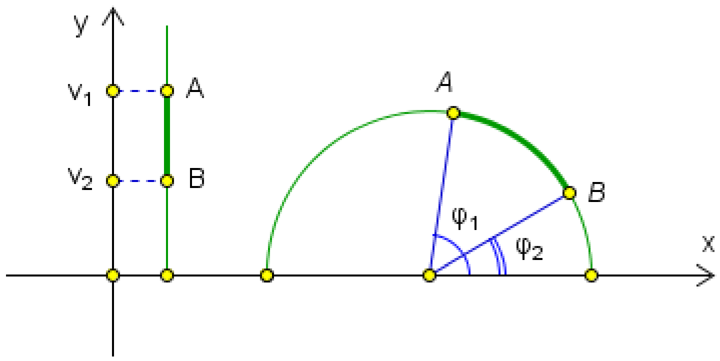
Говорят, что установлено измерение отрезков, если определено отображение $\ell : L \to \mathbb{R}_+$ из множества всех отрезков в множество положительных вещественных чисел, которое удовлетворяет условиям:

1) если отрезки AB и $A'B'$ конгруэнтны, то $\ell(AB) = \ell(A'B')$;

2) если $A - B - C$, то $\ell(AB) + \ell(BC) = \ell(AC)$;

3) существует отрезок PQ, такой, что $\ell(PQ) = 1$.

Введем отображение ℓ в нашем случае.



Введем систему координат как показано на рисунке. Если отрезок AB лежит на Е-полуокружности, то обозначим через φ_1 и φ_2 углы между положительным направление оси Ox и радиусом Е-окружности, проведенным в соответствующую точку.

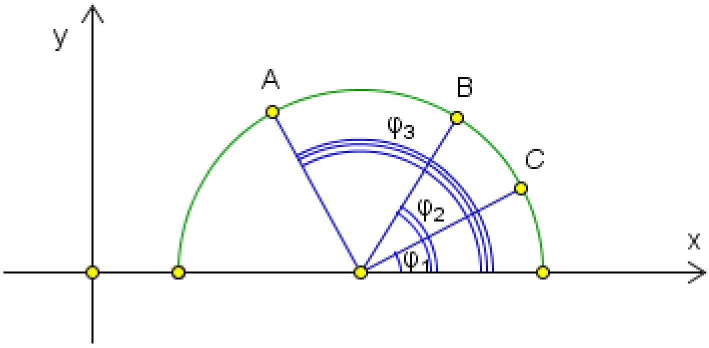
Если отрезок AB лежит на Е-луче, то обозначим через v_1 и v_2 координаты точек A и B соответственно в выбранной системе координат.

Положим по определению

$$1)\,\ell(AB) = \left|\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}\right|;\ 2)\,\ell(AB) = \left|\ln\frac{v_1}{v_2}\right|.$$

Эти формулы выводятся с помощью дифференциальной геометрии и теории функций комплексного переменного. Там же доказывается, что при этом конгруэнтные отрезки имеют равные длины. Подробности можете посмотреть в [5]. Доказательство равенства длин конгруэнтных отрезков методами элементарной геометрии можно посмотреть в [6].

Доказательство двух оставшихся условий измерения отрезков продемонстрируем на примерах. Докажем второе условие в случае, когда точки A, B, C лежат на Е-окружности. Пусть они располагаются так, как показано на рисунке.



Тогда

$$\ell(AB) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_3/2}{\operatorname{tg} \varphi_2/2}; \ \ell(BC) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_2/2}{\operatorname{tg} \varphi_1/2}.$$

Модули сняли, так как при логарифмы будут положительны (угол в числителе больше угла в знаменателе, тангенс функция возрастающая и логарифм числа, большего 1, положителен).

По свойствам логарифма получаем

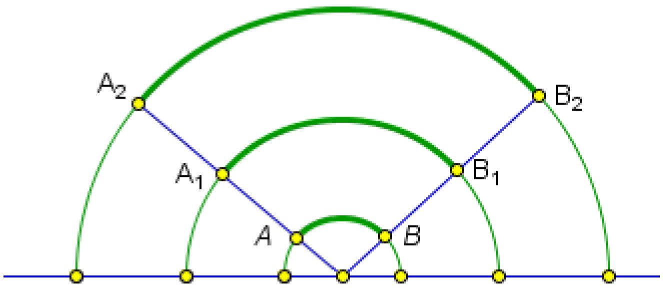
$$\ell(AB)+\ell(BC) = \ln(\operatorname{tg} \varphi_3/2) - \ln(\operatorname{tg} \varphi_2/2) + \ln(\varphi_2/2) + \ln(\varphi_1/2) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_3/2}{\operatorname{tg} \varphi_1/2} = \ell(AC).$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи.

Проверим третье условие. Возьмем две точки P и Q на Е-луче. Пусть $P(v_1)$, $Q(v_2)$ (предположим, что P выше Q, то есть $v_1 > v_2$). Потребуем, чтобы $\ell(P, Q) = 1$. Тогда $\ln \frac{v_1}{v_2} = 1$, то есть $v_1 = ev_2$. Возьмем Q с $v_2 = 1$ (такая точка есть), а P с $v_1 = e$. (Такая точка тоже есть на модели.) Это будут искомые точки, для которых длина отрезка PQ будет 1.

Итак, мы ввели измерение длин отрезков на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

На рисунке приведены примеры отрезков равной длины.



Отрезки AB, A_1B_1, A_2B_2 имеют одинаковые длины на плоскости Лобачевского, так как они лежат на гомотетичных Е-окружностях, а гомотетию можно получить как композицию двух инверсий.

Значит, один отрезок переходит в другой при помощи цепочки инверсий, то есть они конгруэнтны, следовательно имеют равные длины. (Также равенство длин можно доказать, заметив, что углы φ_1 и φ_2 у всех трех отрезков одинаковые). Мы видим, что чем ближе к абсолюту, тем евклидова длина дуги, моделирующей отрезок плоскости Лобачевского, меньше.

Если зафиксировать точку A, а точку B устремить к абсолюту, то в формуле

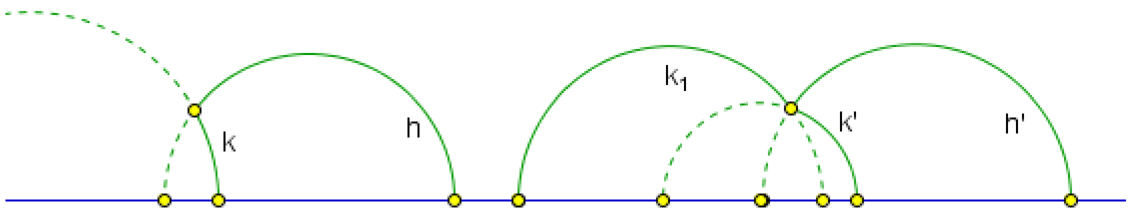
$$\ell(AB) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \right|$$

Е-угол φ_1 будет постоянным, а Е-угол φ_2 будет уменьшаться. Так как тангенс – функция возрастающая, знаменатель дроби будет уменьшаться и логарифм увеличиваться в бесконечность.

5.1. Измерение величин углов

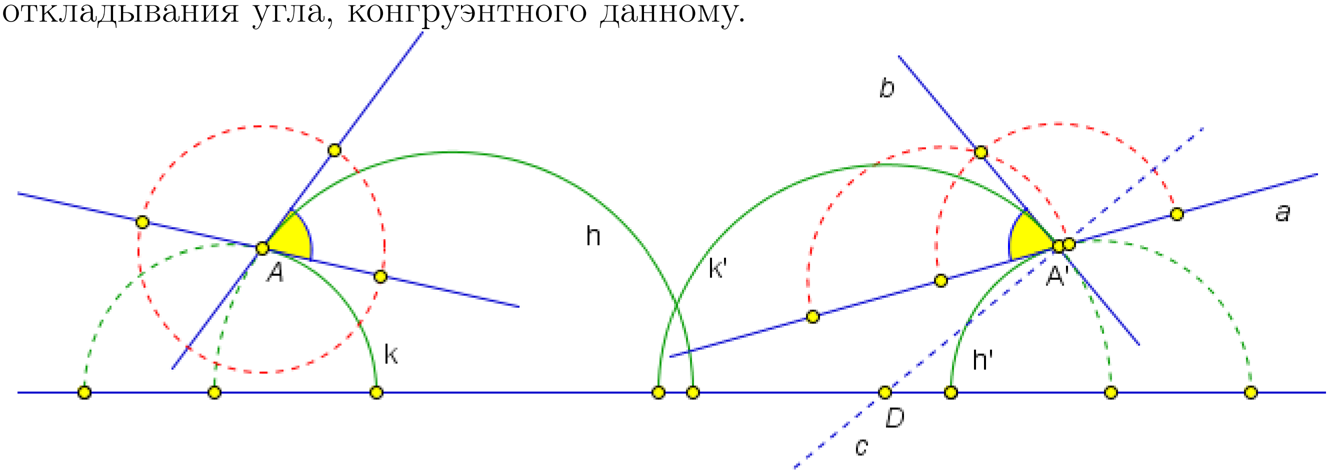
Перейдем к углам. *Величиной угла AOB* модели Пуанкаре плоскости Лобачевского будем называть величину Е-угла между дугами окружностей, которые изображают этот угол.

Так как инверсия сохраняет Е-величину угла, мы получаем, что конгруэнтные углы имеют равные величины. Верно и обратное, если величины углов равны, то они конгруэнтны.



Действительно, пусть даны два угла $\angle hk$ и $\angle h'k'$ равной величины. Тогда существует цепочка инверсий, которая луч h переводит в луч h'. Эта же цепочка инверсий переведет луч k в луч k_1, такой, что величины углов $\angle hk$ и $\angle h'k_1$ равны. Тогда луч k_1 либо совпадает с лучом k', либо попадет в другую полуплоскость с границей, содержащей луч h'. Так как инверсии сохраняют углы, величины углов $\angle hk$ и $\angle h'k_1$ будут равны. В первом случае мы получили цепочку инверсий, которая переводит первый угол во второй, а во втором случае нужно еще применить инверсию с Е-окружностью, содержащей Е-дугу h'. При этом луч h' перейдет в себя, а луч k_1 перейдет в k'.

Итак, величина угла в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и его евклидова величина совпадают. Благодаря этому мы можем получить простой алгоритм откладывания угла, конгруэнтного данному.

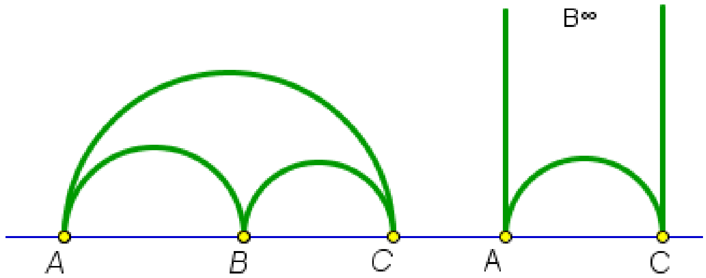


Строим касательные к Е-дугам h и k в точке A. Мы получаем величину угла $\angle hk$

– это отмеченный на рисунке угол между касательными. Проводим касательную в точке A' к Е-дуге h'. Это Е-прямая a. От нее в нужную полуплоскость (в которую хотим отложить луч k') откладываем Е-угол, равный углу между касательными в точке A. Построение этого угла (хорошо известно из школьного курса геометрии) изображено на рисунке красными пунктирными линиями. В результате получаем прямую b. Это будет касательная к искомой Е-дуге k'. Чтобы построить эту дугу, нам нужно в точке A' провести перпендикуляр к b. Тогда получим точку D – центр Е-окружности, содержащей k'. В результате получаем угол $\angle h'k'$, конгруэнтный углу $\angle hk$.

5.2. Решение задач (необязательно)

Идеальным треугольником назовем фигуру,

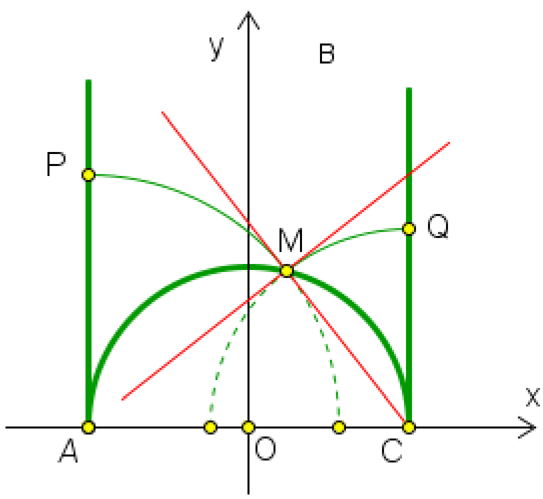


состоящую либо из трех Е-полуокружносте AB, BC, AC, где точки A, B, C лежат на аб солюте, либо из двух Е-лучей AB^∞, CB^∞ Е-полуокружности AC, где точки A и C ле жат на абсолюте.

Точки A, B, C (они не принадлежат модели плоскости Лобачевского!) условно будем называть вершинами абсолютного треугольника.

Задача 5.1. В модели Пуанкаре (в ней фиксирована декартова система координат и введена комплексная координата) дан идеальный треугольник с вершинами в точках абсолюта $A(-1)$, $C(1)$, B^∞. Из точки $M(\frac{21}{29} + i\frac{20}{29})$ на стороне AC опустим перпендикуляры MP и MQ на стороны AB и CB соответственно. Найдите угол PMQ.

Решение. Изобразим картинку.



Как мы видели, величина угла в модели Пуанкаре совпадает с величиной угла по Евклиду, то есть величина угла PMQ равна углу между касательными, проведенными в точке M к Е-окружностям, изображающим этот угол. Значит, нам нужно найти направляющие векторы этих касательных и вычислить угол между ними. Это будут векторы, перпендикулярные радиусам Е-окружностей, проведенных в точку M.

Так как центры рассматриваемых Е-окружностей находятся соответственно в точках A и C, получаем, что (из координаты конца вычитаем координату начала)

$$\overrightarrow{AM}\left(-\frac{8}{29}+i\frac{20}{29}\right); \quad \overrightarrow{CM}\left(\frac{50}{29}+i\frac{20}{29}\right).$$

Тогда перпендикулярные векторы будут иметь координаты

$$\vec{p}\left(\frac{20}{29}+i\frac{8}{29}\right); \quad \vec{q}\left(-\frac{20}{29}+i\frac{50}{29}\right).$$

(Перейдите к вещественным координатам и проверьте, что скалярные произведения $\overrightarrow{AM}\vec{p}$ и $\overrightarrow{CM}\vec{q}$ будут нулевыми).

Наконец, находим скалярное произведение

$$\vec{p}\vec{q}=-\frac{20}{29}\cdot\frac{20}{29}+\frac{8}{29}\cdot\frac{50}{29}=0.$$

Итак, угол PMQ прямой. □

Задача 5.2. В модели Пуанкаре (в ней фиксирована декартова система координат и введена комплексная координата) дан идеальный треугольник с вершинами в точках абсолюта $A(-1)$, $C(1)$, B^{∞}. Из точки $M\left(\frac{12}{13}+i\frac{5}{13}\right)$ на стороне AC опустим перпендикуляры MP и MQ на стороны AB и CB соответственно. Найдите угол PMQ.

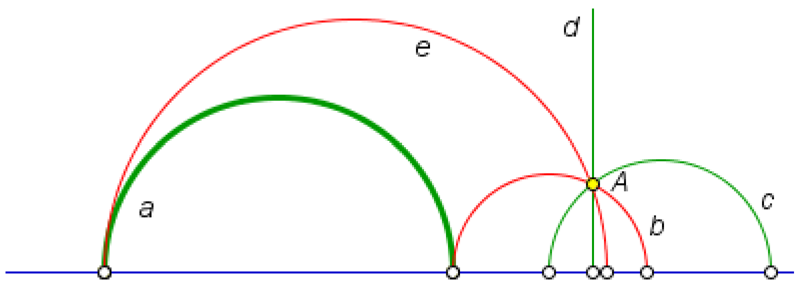
6. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Пятая группа аксиом

6.1. Аксиома Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые.

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы – аксиомы Лобачевского.

V^*. Через точку, не лежащую на данной прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную.

Проиллюстрируем, что эта аксиома выполняется в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

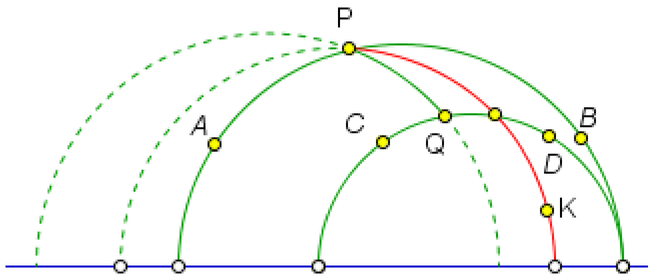


На рисунке изображено несколько прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a. Следовательно, аксиома Лобачевского в модели Пуанкаре выполняется.

Обратите внимание на прямые b и e. Они выделяются среди других прямых, не пересекающих прямую a. Эти прямые называются параллельными прямой a. Дадим строгое определение параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

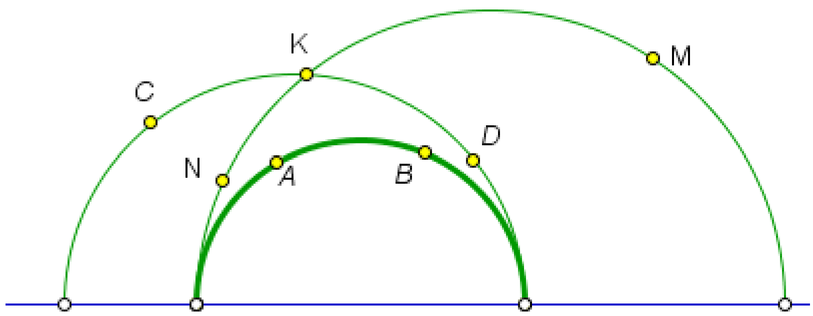
Сначала вспомним определение направления на прямой. Рассмотрим на прямой множество всех лучей. На этом множестве задается отношение эквивалентности: два луча h и k называются сонаправленными, если либо $h \subset k$, либо $k \subset h$. В противном случае лучи называются противоположно направленными. Это отношение разбивает все лучи прямой на два класса эквивалентности: в каждом классе лежат сонаправленные между собой лучи, а лучи разных классов противоположно направленные. Каждый из этих классов называется направлением на прямой. Обозначать направленные прямые будем также, например AB, а направление будем считать от первой буквы ко второй.

Будем говорить, что направленные прямые AB и CD параллельны (в направлении точек B и D), если 1) эти прямые не пересекаются, 2) для любой точки P на прямой AB и любой точки Q на прямой CD любой внутренний луч PK угла QPB пересекает луч QD.



На рисунке изображены параллельные прямые AB и CD.

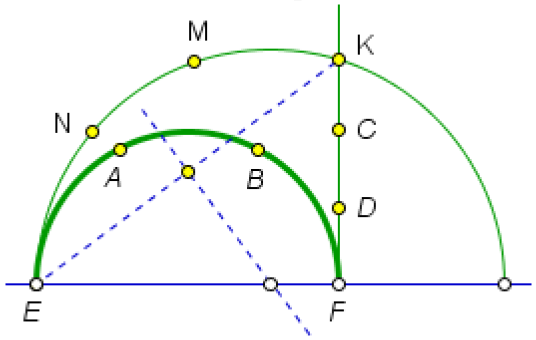
Рассмотрим направленную прямую BA (та же прямая AB только выбрано другое направление). Для нее тоже существует параллельная прямая. Это прямая MN.

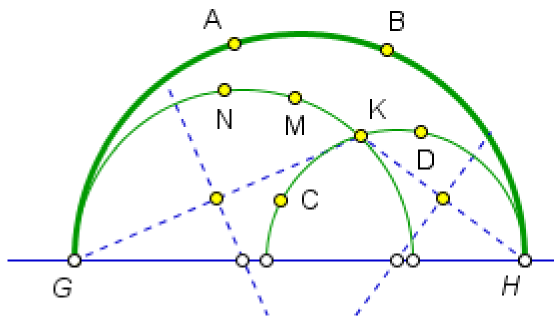


Если фиксировать точку K, не лежащую на прямой AB, то существует единственная направленная прямая CD, проходящая через точку K, и параллельная направленной прямой AB, и единственная направленная прямая MN, проходящая через точку K и параллельная направленной прямой BA. Доказательство этого факта можно посмотреть в учебнике [1], а мы посмотрим, как через данную точку K построить прямую, параллельную направленной прямой AB.

Задача 6.1. На модели даны прямая AB и точка K, не лежащая на ней. Построить направленные прямые CD и MN, проходящие через K и параллельные направленным прямым AB и BA соответственно.

Решение. Рассмотрим два возможных случая.





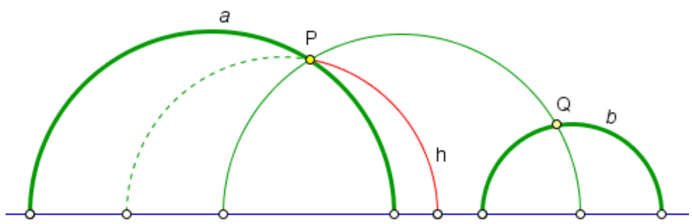
1. Пусть точка K лежит на Е-луче, перпендикулярном абсолюту и проходящем через точку пересечения Е-окружности AB и абсолюта F. Тогда прямая CD будет совпадать с этим Е-лучом. Прямая MN должна изображаться Е-дугой, которая проходит через точку K и вторую точку пересечения Е-окружности AB с абсолютом E. Для построение центра искомой Е-окружности строим серединный перпендикуляр к EK и проводим Е-окружность. Получаем прямую MN.

2. Точка K не лежит на перпендикулярах к абсолюту проходящих через точки G и H. В этом случае нам нужно построить две Е-окружности. Строим их также, как в предыдущем случае. □

Две прямые a и b (не направленные) называются *параллельными*, если на них можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны в выбранном направлении.

Как мы видели, среди прямых, не пересекающих данную, кроме параллельных есть еще один тип прямых.

Прямые плоскости Лобачевского, которые не пересекаются и не параллельны называются *расходящимися.* Для них нарушается второе условие из определения параллельных прямых:

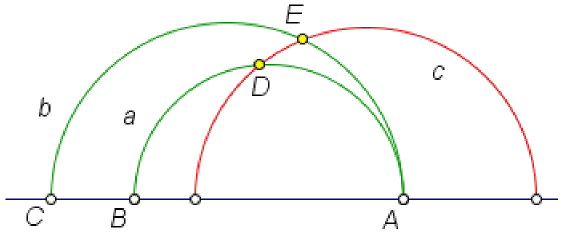


На рисунке изображены расходящиеся прямые a и b. Для любого выбора точек P и Q на этих прямых мы всегда можем найти внутренний луч h, который не пересекает a.

Используя модель, докажем выполнение некоторых свойств параллельных и расходящихся прямых.

Задача 6.2. Используя модель Пуанкаре, покажите, что параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра.

Решение. Пусть даны две параллельные прямые a и b.



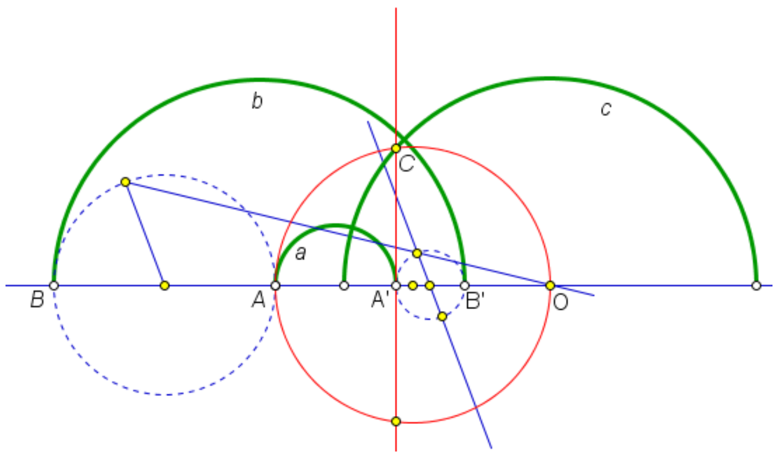
Предположим, что у них есть общий перпендикуляр c. Так как Е-окружность a перпендикулярна Е-окружности c, то она инвариантна при инверсии с Е-окружностью c. Аналогично для Е-окружности b. Точка A, лежащая на Е-окружности a, с одной стороны, должна при этой инверсии перейти в точку Е-окружности b, а, с другой стороны, должна перейти в точку, лежащую на прямой, соединяющей центр инверсии и точку A, то есть должна перейти в какую-то точку синей прямой (абсолюта). Значит, точка A переходит в точку C.
Теперь посмотрим на точку A как на точку Е-окружности b. Рассуждая аналогично, получаем, что она должна перейти в точку B. Итак, при инверсии одна и та же точка должна перейти в две различные точки. Это противоречие. Следовательно, общего перпендикуляра у параллельных прямых не существует. □

Задача 6.3. Прямые, параллельные в одном направлении, расходятся в другом.

Как мы доказывали в основном курсе геометрии две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Построим его в модели.

Задача 6.4. Постройте общий перпендикуляр двух расходящихся прямых.

Решение. Пусть даны две расходящиеся прямые a и b.



Если общий перпендикуляр двух расходящихся прямых существует, то он должен быть осью симметрии этих прямых. Обратимся к модели. Осевая симметрия в модели Пуанкаре – это инверсия относительно окружности. Другими словами, наша задача свелась к нахождению инверсии, при которой Е-окружности a и b каждая перейдет в себя. Значит, нам нужна инверсия, центр которой лежит на абсолюте и при которой точка A переходит в точку A', а точка B переходит в B'.

Наша задача свелась к нахождению инверсии по двум парам соответственно инверсных точек. Временно забываем о геометрии Лобачевского, работаем с евклидовой плоскостью. Инверсия, которую мы ищем, будет переводить окружность, построенную на Е-отрезке AB в окружность, построенную на отрезке $A'B'$ как на диаметре. Значит, нам нужно найти инверсию, переводящую одну окружность в другую. Как мы видели выше, для двух окружностей, не имеющих общих точек, один из центров гомотетий будет центром инверсии. Как мы видели, в ситуации, которая реализуется на рисунке это будет центр гомотетии с положительным коэффициентом. Строим центр (синие линии) и строим радиус (красные линии) окружности инверсии (как мы это делали в теме инверсия).

Итак, мы получаем, что при инверсии с Е-окружностью c Е-окружности a и b инвариантны, следовательно, ортогональны c, следовательно, c есть искомый общий перпендикуляр. □

Задача 6.5. Постройте общий перпендикуляр двух расходящихся прямых в случаях: 1) они изображаются Е-полуокружностями, которые не пересекаются внешним образом; 2) одна прямая изображается Е-лучом, а другая Е-полуокружностью.

Задача 6.6. Постройте ось симметрии двух параллельных прямых. Рассмотрите различные случаи изображения прямых.

Для параллельных прямых в основном курсе геометрии была введена секущая равного наклона. Пусть даны параллельные прямые a и b. *Секущей равного наклона* (или *равнонаклонной*) называется прямая, образующая с ними равные внутренние односторонние углы. Мы доказывали, что через каждую точку одной из двух параллельных прямых проходит единственная секущая равного наклона.

Задача 6.7. Постройте секущую равного наклона двух параллельных прямых, проходящую через данную точку на одной из двух параллельных прямых.

Решение. Пусть даны две параллельные прямые a и b. Как мы знаем из курса геометрии, секущая равного наклона перпендикулярна оси симметрии параллельных прямых. Тогда при этой осевой симметрии прямая a переходит в b, а секущая равного наклона в себя. Тогда данная точка A перейдет в точку также принадлежащую секущей равного наклона. Так как осевая симметрия моделируется инверсией, нам нужно сначала построить ось симметрии данных прямых (это будет окружность инверсии), а затем надо найти образ точки A при данной инверсии. Тогда Е-окружность с центром на абсолюте, проходящая через точки A и A' будет искомой секущей равного наклона.

Посмотрите динамический рисунок Секущая равного наклона на
http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25 □

Задача 6.8**.** Постройте секущую равного наклона для двух данных прямых, проходящую через данную точку, не лежащую на данных прямых.

Задача 6.9**.** Приведите пример двух параллельных прямых, для которых ось симметрии изображалась бы Е-лучом.

Могут ли быть две параллельные прямые, которые изображаются Е-полуокружностями, а их ось симметрии изображается Е-лучом? Ответ обосновать.

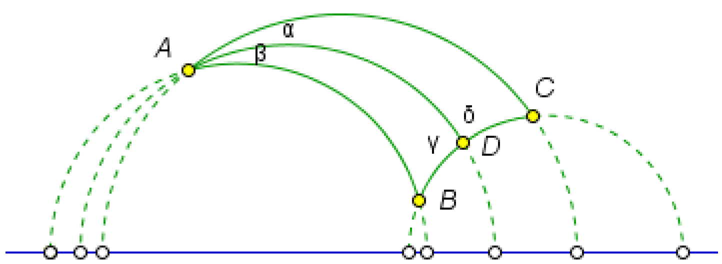
6.2. Эквиваленты аксиомы Лобачевского.

При построении евклидовой геометрии мы познакомились с эквивалентами пятого постулата Евклида. Это утверждения, которыми можно заменить постулат Евклида и получить ту же евклидову геометрию. Чтобы получить эквиваленты аксиомы Лобачевского, нужно построить отрицание к эквивалентам пятого постулата Евклида. Посмотрим несколько таких примеров.

1. Эквивалент V: Сумма углов хотя бы одного треугольника (а следовательно, всех треугольников) равна двум прямым (то есть 180^0).

Напомним, что в четвертой группе аксиом доказывается, что треугольник в абсолютной геометрии не может иметь суммы углов большей двух прямых. Тогда отрицание данного эквивалента будет следующим: сумма углов любого треугольника плоскости Лобачевского меньше двух прямых (то есть меньше 180^0).

Покажем, что треугольники плоскости Лобачевского могут иметь различные суммы углов.



Вычислим сумму углов треугольников ABD и ACD

$$\sigma_{ABD}+\sigma_{ACD} = (\alpha+\hat{C}+\delta)+(\beta+\gamma+\hat{B}) =$$

Воспользуемся тем, что $\alpha + \beta = \hat{A}$, $\gamma + \delta = \pi$.

Тогда

$$\sigma_{ABD} + \sigma_{ACD} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \pi = \sigma_{ABC} + \pi.$$

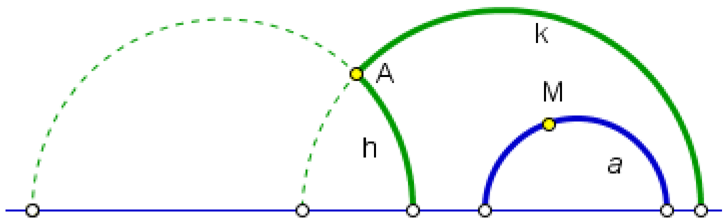
Сумма углов треугольника ABD меньше π и

$$\sigma_{ABD} + (\sigma_{ACD} - \pi) = \sigma_{ABC}.$$

В скобках стоит отрицательное число и $\sigma_{ABD} > \sigma_{ABC}$. Итак, мы нашли два треугольника с разными суммами углов. □

2. Эквивалент V: Любая прямая, проходящая через любую внутреннюю точку угла пересекает хотя бы одну его сторону (аксиома Лоренца).

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Существует прямая, проходящая через внутреннюю точку угла и не пересекающая ни одной его стороны.

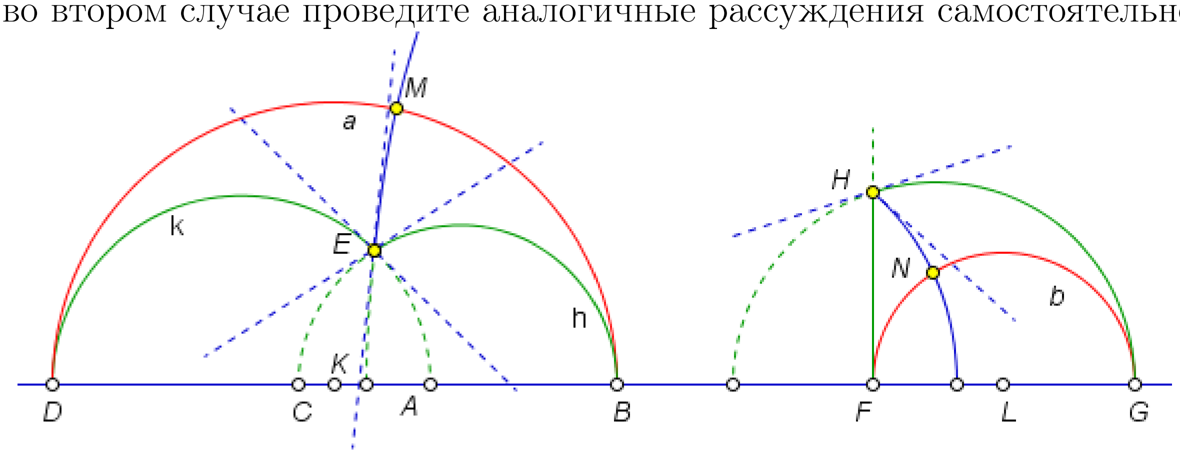


Изобразим такую прямую в модели Пуанкаре. Прямая a проходит через внутреннюю точку M угла $\angle hk$ и не пересекает ни одной из сторон угла.

Итак, мы увидели, что для не развернутых углов на плоскости Лобачевского существуют прямые, проходящие через внутреннюю точку угла и не пересекающие сторон этого угла. Оказывается, что для любого не развернутого угла существует прямая, которая параллельна обеим его сторонам. Такая прямая называется *заградительной прямой* угла.

Задача 6.10**.** Постройте заградительную прямую не развернутого угла. Покажите, что она перпендикулярна биссектрисе этого угла.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) обе стороны угла изображаются Е-дугами, 2) одна из сторон угла изображается Е-лучом. Подробно рассмотрим первый случай, во втором случае проведите аналогичные рассуждения самостоятельно.



Пусть K – середина отрезка DB. Построим Е-окружность с центром K и радиусом KB. Полученная Е-дуга a будет заградительной прямой угла $\angle hk$.

Изобразим биссектрису угла $\angle hk$. Для этого разделим угол между касательными к Е-дугам h и k пополам (получим Е-луч n) и проведем Е-окружность, которая касается Е-луча n. Эта Е-окружность будет содержать биссектрису EM.

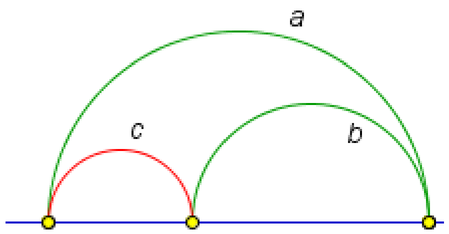
Покажем, что биссектриса угла $\angle hk$ перпендикулярна заградительной прямой. Действительно, если рассмотреть инверсию с Е-окружностью EM, то точка E перейдет в себя (лежит на окружности инверсии), а Е-окружность k перейдет в Е-окружность h (так как они образовывают равные углы с Е-окружностью инверсии). Следовательно, угол DME перейдет в угол BME, то есть конгруэнтен смежному, значит, прямой. □

Заградительной прямой двух пересекающихся прямых называется ненаправленная прямая, которая параллельна как одной так и другой прямой.

Если две прямые пересекаются, то они образуют четыре (неразвернутых) угла. Тогда заградительные прямые данных пересекающихся прямых будут заградительными прямыми этих углов. Таким образом, две пересекающиеся прямые имеют четыре заградительные прямые.

Задача 6.11. Изобразите две пересекающиеся прямые и их заградительные прямые в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

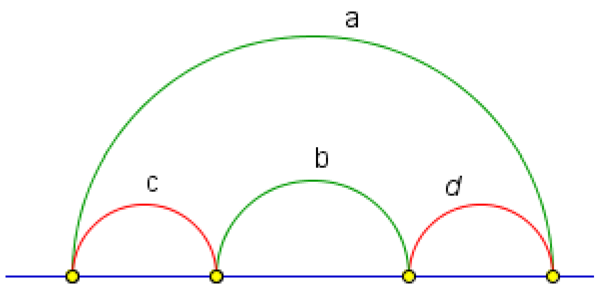
Заградительной прямой двух параллельных прямых a и b называется прямая c, параллельная обеим прямым a и b, причем направление параллельности $c\|a$ и $c\|b$ не совпадают с направлением параллельности $a\|b$.



Такая заградительная прямая единственная. Для параллельных прямых каждая из трех прямых a, b, c является заградительной для двух других прямых.

Задача 6.12. Изобразите заградительную прямую двух параллельных прямых, если одна из них изображается Е-лучом.

Заградительной прямой двух расходящихся прямых a и b называется прямая c, которая параллельна a и b, причем a и b находятся в одной полуплоскости относительно c.



Для расходящихся прямых a и b существует две заградительные прямые. На рисунке они обозначены c и d.

3. Эквивалент V: Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой непременно пересекутся (постулат Лежандра).

Эквивалент аксиомы Лобачевского: существуют перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, которые не пересекаются.

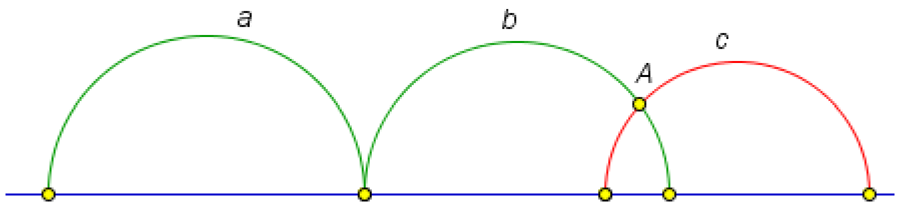
Задача 6.13. Постройте перпендикуляр и наклонную к прямой, которые не пересекаются.

4. Эквивалент V: Точки, равноудаленные от данной прямой и лежащие по одну ее сторону, образуют прямую.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Точки, равноудаленные от данной прямой и лежащие по одну ее сторону, образуют линию, отличную от прямой. Это будет эквидистанта. Мы познакомимся с ней позже.

5. Эквивалент V: Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, непременно пересечет и другую.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых может не пересечь другую.



Прямая c пересекает прямую b, но не пересекает прямую a.

6. Эквивалент V: Для всякого треугольника существует описанная окружность.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Не для всякого треугольника существует описанная окружность.

Позже мы покажем, что серединные перпендикуляры (именно их точка пересечения в евклидовой геометрии является центром описанной окружности и обеспечивает ее существование) на плоскости Лобачевского не всегда пересекаются.

7. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.

Напомним, что понятие треугольника было введено во второй группе аксиом.

Еще во второй группе аксиом наряду с понятием треугольника мы можем ввести понятие четырехугольника. Пусть даны четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четыре отрезка AB, BC, CD, AD, попарно не имеющие общих внутренних точек. Четырехугольник $ABCD$ называется *двупрямоугольником*, если он имеет два прямых угла A и B. Сторона AB называется *основанием* двупрямоугольника. Четырехугольник $ABCD$ называется *трипрямоугольником* или *четырехугольником Ламберта*, если он имеет три прямых угла.

Замечание 7.1. Если в качестве пятой группы аксиом взять аксиому Евклида, то двупрямоугольник будет трапецией с прямыми углами при основаниях, в частности, будет прямоугольником. Четырехугольник Ламберта будет прямоугольником. Если в качестве пятой группы аксиом взять аксиому Лобачевского, то двупрямоугольник и четырехугольник Ламберта будут иметь ряд свойств, отличных от свойств прямоугольников на евклидовой плоскости. Находясь в третьей группе аксиом мы посмотрим на свойства, которые будут общими для прямоугольников и двупрямоугольников плоскости Лобачевского.

Задача 7.1. Изобразите двупрямоугольник и четырехугольник Лабмерта на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

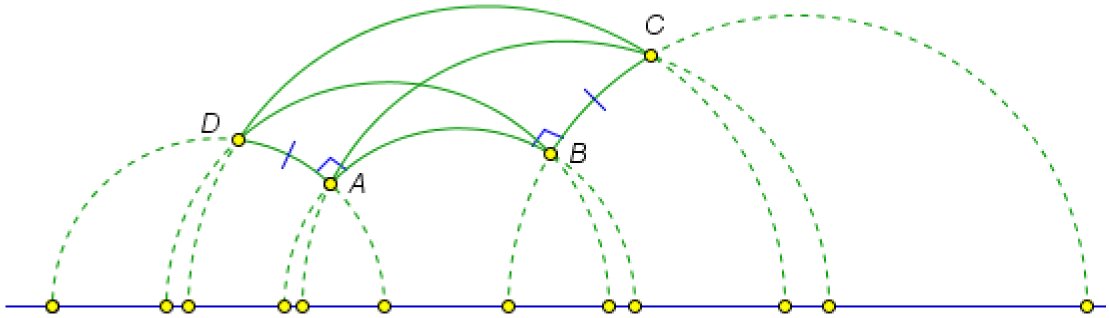
Четырехугольником Саккери называется двупрямоугольник, у которого стороны, прилегающие к прямым углам равны.

Задача 7.2. Изобразите четырехугольник Саккери.

Четырехугольники Саккери обладают следующими свойствами:

1^0. Углы C и D четырехугольника Саккери с основанием AB равны.

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник Саккери.



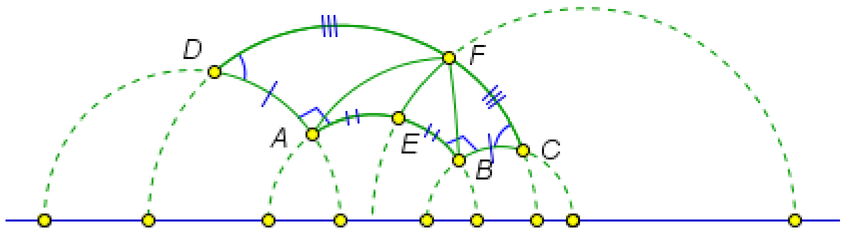
Проведем его диагонали DB и AC. Тогда треугольники DBA и CAB равны по первому признаку. (Напомним, что четыре признака равенства треугольников доказываются в третьей группе аксиом и они являются общими как для евклидовой геометрии, так и для геометрии Лобачевского). Тогда DB и AC конгруэнтны. Следовательно, треугольнике DBC и CAD равны по третьему признаку. Откуда получаем равенство углов. □

Задача 7.3. Пусть у двупрямоугольника $ABCD$ с основанием AB углы C и D равны. Докажите, что $ABCD$ является четырехугольником Саккери.

Отметим, что в случае евклидовой геометрии четырехугольник Саккери будет прямоугольником.

2^0. Серединный перпендикуляр к основанию AB четырехугольника Саккери является также серединным перпендикуляром к стороне CD.

Доказательство. Пусть дан четырехугольник Саккери $ABCD$ с основанием AB. Рассмотрим отрезок EF, который соединяет середины сторон AB и CD.



Покажем, что этот отрезок перпендикулярен обеим сторонам. Рассмотрим треугольники ADF и BCF. Они равны по первому признаку. Тогда равны стороны AF и BF. Тогда равны треугольники AFE и BFE по третьему признаку. Получаем равенство смежных углов AEF и BEF. Следовательно, они прямые. Если провести отрезки ED и EC, то аналогичные рассуждения показывают, что углы DFE и CFE также равны, следовательно, прямые. □

Следствие 7.1. Основание четырехугольника Саккери и противоположная ему сторона являются расходящимися прямыми.

Задача 7.4. Докажите, что средняя линия треугольника лежит на прямой расходящейся с основанием треугольника. Докажите, что средняя линия треугольника меньше половины основания треугольника.

Из вершин треугольника опускаем на среднюю линию перпендикуляры, доказываем равенство треугольников и выходим на четырехугольник Саккери

Задача 7.5. Используя метод от противного, докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, не равна половине гипотенузы.

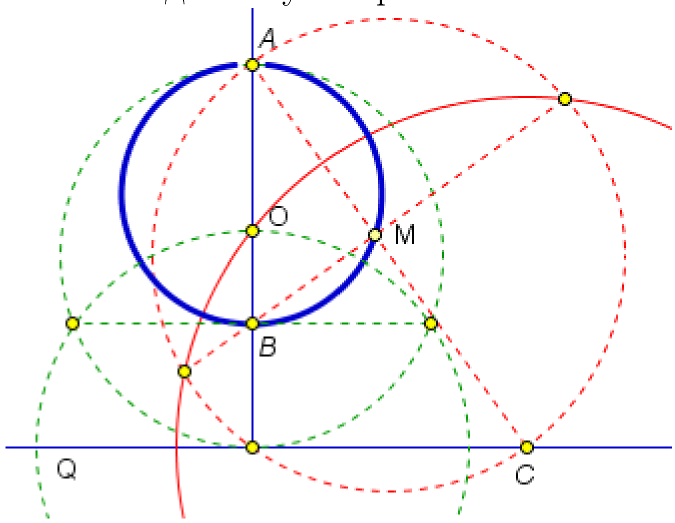
8. Окружность, эквидистанта и орицикл в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

8.1. Окружность.

Напомним, что окружность Ω в плоскости Лобачевского определяется также как и на евклидовой плоскости. Окружностью называется множество точек плоскости Лобачевского, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром. Расстояние мы можем задать с помощью отрезка PQ. Тогда для построения точек окружности Ω нужно взять точку O (центр окружности), провести прямую через эту точку и отложить от точки O на этой прямой в обе стороны отрезки, конгруэнтные PQ. Проводим еще одну прямую через точку O и опять откладываем отрезки, конгруэнтные PQ.

Еще один способ построения точек окружности Ω основан на следующем свойстве окружности: любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Другими словами, если взять на окружности произвольную точку A, провести через центр окружности O прямую и отразить точку A от этой прямой, то мы попадем опять на окружность. Вспоминаем, что осевая симметрия на модели Пуанкаре – это инверсия. Значит, чтобы построить точки окружности, нужно взять точку O – центр окружности, взять точку A, такую, что отрезок OA равен радиусу окружности, провести через точку O прямую Q (Е-дугу с центром на абсолюте) и построить образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. В результате получим еще одну точку данной окружности. (Посмотрите динамический рисунок Окружность, эквидистанта, орицикл.)

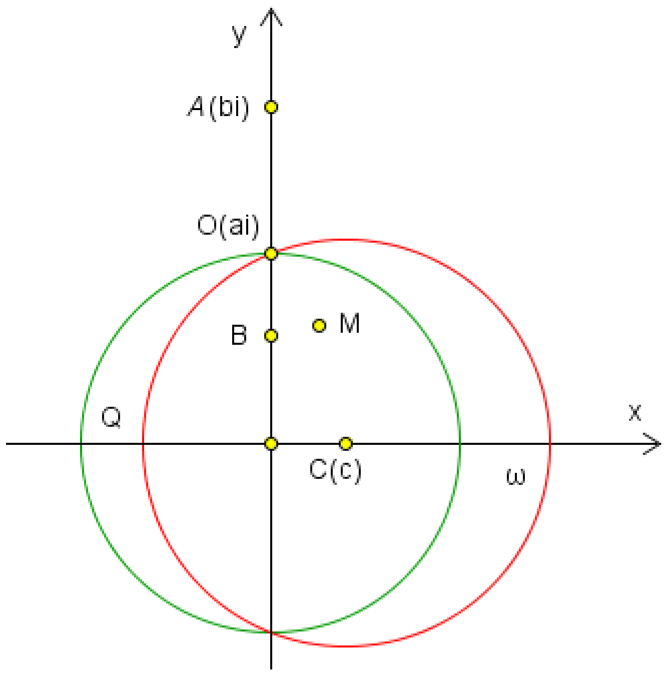
Возникает вопрос: какой линией евклидовой плоскости изображается окружность в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.



Возьмем точку O – центр окружности Ω и точку A, так, чтобы они лежали на Е-луче (удобно задаем себе радиус окружности с помощью отрезка OA). Сначала построим диаметрально противоположную точку B. Для этого нам потребуется Е-окружность Q, проходящая через точку O с центром в точке пересечения Е-луча OA и абсолюта. Строим стандартным образом образ точки A при этой инверсии.

Для построения произвольной точки M искомой окружности будем двигать точку C по абсолюту, проводить Е-окружности с центром в точке C и проходящие через точку O, и находить образы точки A относительно этих инверсий. Мы видим, что получается линия, похожая на Е-окружность, но центр у нее не в точке O. Докажем это аналитически.

Введем систему координат как показано на рисунке.



Точки A и O лежат на оси y, то есть на мнимой оси, а значит им соответствую чисто мнимые числа, которые мы обозначим $O(ai)$, $A(bi)$. Найдем, какое комплексное число соответствует точке B. Она является образом точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. Формула этой инверсии имеет вид

$$z' = \frac{a^2}{\bar{z}}$$

(очевидно, что радиус Е-окружности Q равен a).

Тогда точке B сопоставляется чисто мнимое число $\frac{a^2}{-bi} = \frac{a^2}{b}i$. Инверсия относительно Е-окружности ω с центром в точке $C(c)$ будет иметь формулу

$$z' = \frac{|c - ai|^2}{\bar{z} - c} + c = \frac{c^2 + a^2}{\bar{z} - c} + c.$$

Тогда точке M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности ω) будет соответствовать комплексное число

$$z = \frac{a^2 + c^2}{-bi - c} + c.$$

Окружность ω будет меняться, следовательно, будет меняться число c и за ним следом будет меняться число z. Получаем множество точек M. Множество всех точек M и образует искомую нами окружность (в смысле Лобачевского). Мы подозреваем, что это множество изображается Е-окружностью с диаметром AB и радиусом $\frac{AB}{2}$ (в смысле Евклида). Центр этой Е-окружности будет в точке, которой соответствует комплексное число

$$\frac{bi + \frac{a^2}{b}i}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2b}i.$$

Радиус этой Е-окружности будет

$$\frac{b - \frac{a^2+b^2}{2b}}{=} \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Уравнение такой Е-окружности в комплексных числах имеет вид

$$(z - \frac{a^2 + b^2}{2b}i)(\bar{z} + \frac{a^2 + b^2}{2b}i) = \left(\frac{b^2 - a^2}{2b}\right)^2. \tag{8.1}$$

Чтобы проверить принадлежность точки M этой Е-окружности, нужно убедиться, что соответствующее ей комплексное число удовлетворяет этому уравнению. Подставляем в левую часть уравнения (8.1) комплексное число, соответствующее M и преобразовываем полученное выражение. Должны получить то, что стоит справа в (8.1).

$$\left(\frac{a^2+c^2}{-c-bi}+c-\frac{a^2+b^2}{2b}i\right)\left(\frac{a^2+c^2}{-c+bi}+c+\frac{a^2+b^2}{2b}i\right)=$$

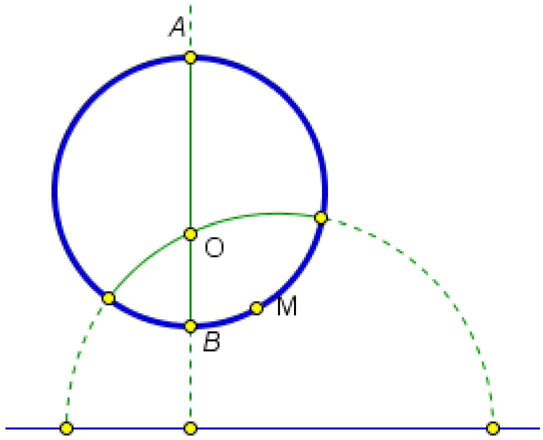
Преобразуем первую скобку, вторая будет ей комплексно сопряжена и получится автоматически.

$$\frac{a^2+c^2}{-c-bi}+c-\frac{a^2+b^2}{2b}i=\frac{a^2c-b^2c-a^2bi-bc^2i}{-(b^2+c^2)}-\frac{a^2+b^2}{2b}i=$$
$$=\frac{2bc(a^2-b^2)+(a^2-b^2)(c^2-b^2)i}{-2b(b^2+c^2)}=\frac{(a^2-b^2)}{-2b(b^2+c^2)}(2bc+(c^2-b^2)i). \quad (8.2)$$

Возвращаемся к прерванной цепочке равенств

$$=\left(\frac{(a^2-b^2)}{-2b(b^2+c^2)}\right)^2(4b^2c^2+(c^2-b^2)^2)=\left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2.$$

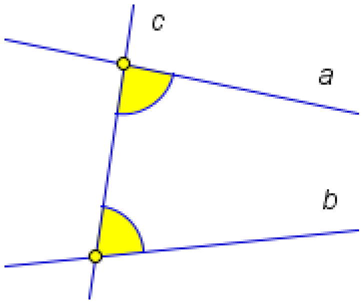
Мы получили то, что ожидали. Таким образом, мы показали, что все точки окружности Ω лежат на Е-окружности. Можно показать, что любая точка этой Е-окружности будет точкой окружности Ω.



Итак, мы получили, что окружность Ω в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского изображается Е-окружностью, но центры их не совпадают. На рисунке изображена окружность Ω, ее центр O и два диаметра AB и CD.

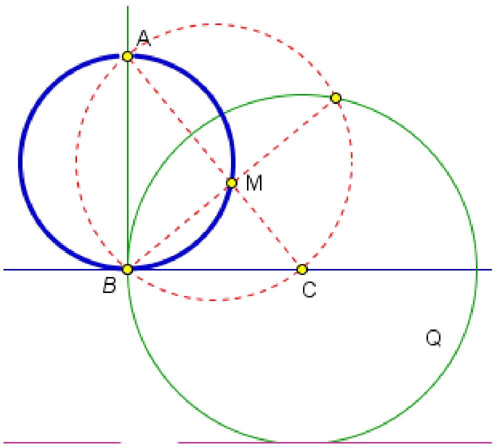
8.2. Орицикл.

Напомним определение орицикла.



Секущей равного наклона двух прямых a и b на плоскости Лобачевского называется прямая c, которая при пересечении с ними образует равные односторонние углы.

Пусть дано семейство направленных прямых, любые две из которых параллельны. Будем говорить, что точки A и B плоскости Лобачевского находятся в отношении Δ, если прямая AB является секущей равного наклона к прямым данного семейства, проходящим через точки A и B. Отношение Δ является отношением эквивалентности. Множество всех точек плоскости Лобачевского разбивается на классы эквивалентности по этому отношению. Каждый из классов называется *орициклом.* В курсе геометрии Лобачевского бакалавриата было доказано, что любая прямая из семейства параллельных прямых, задающих орицикл, является его осью симметрии. Другими словами, если взять точку на орицикле и отобразить ее осевой симметрией с осью из данного пучка параллельных прямых, то попадем опять на тот же орицикл. Используя это свойство, можно построить точки орицикла.



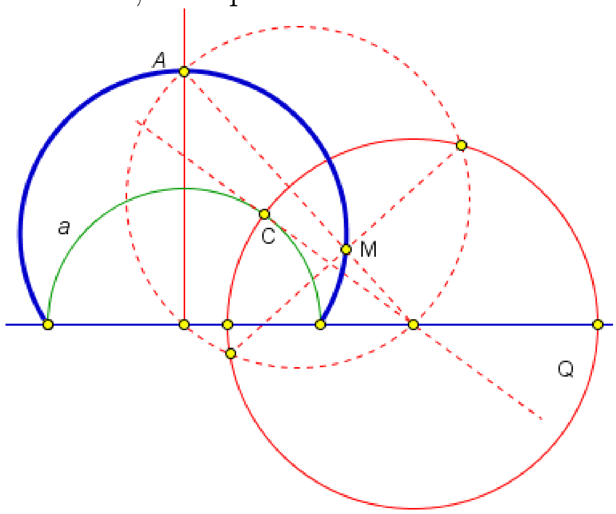
Рассмотрим пучок параллельных прямых. На рисунке изображены две такие прямые – это Е-луч и Е-дуга Q, проходящие через точку B. Возьмем точку A (может быть выбрана произвольно на плоскости Лобачевского). Построим еще одну точку, принадлежащую орициклу, который проходит через A. Строим точку M – образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка орицикла. Двигаем точку C – центр окружности Q – вдоль абсолюта и строим относительно получающихся окружностей образы точки A. Это будут точки орицикла. Построив несколько точек, мы можем выдвинуть гипотезу, что орицикл в модели Пуанкаре изображается окружностью. Докажем это. Так как Е-прямая AB является касательной к любой окружности Q, красная пунктирная окружность (построена на AC как на диаметре) всегда проходит через точку B. Из алгоритма построения образа точки при инверсии следует, что AM перпендикулярно BM. Следовательно, угол AMB прямой и точка M является точкой окружности с диаметром AB. Можно показать и обратное, что любая точка Е-окружности с диаметром AB является образом точки A относительно некоторой окружности Q, то есть будет точкой орицикла.

Итак, орицикл изображается Е-окружностью, касающейся абсолюта, без точки касания.

Задача 8.1. Выясните, как будет выглядеть орицикл для пучка параллельных прямых, изображаемых Е-лучами.

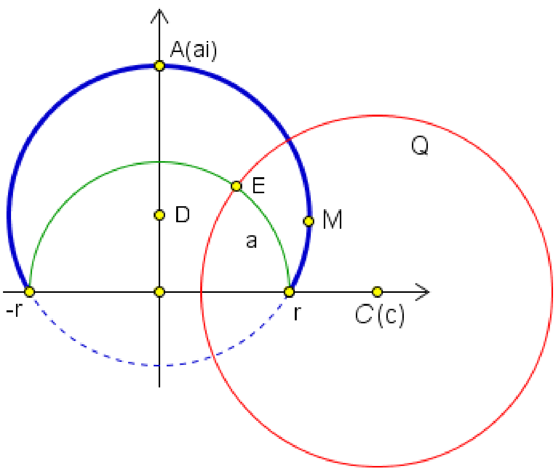
8.3. Эквидистанта

Напомним определение эквидистанты. Пусть на плоскости Лобачевского дана прямая a и отрезок MN. Множество точек, принадлежащих одной полуплоскости относительно a и находящихся на расстоянии MN от нее, называется *эквидистантой*. Прямая a называется базой эквидистанты. Другими словами, эквидистанта – это множество точек плоскости, которое получается следующим образом: через каждую точку базы проводим прямую, перпендикулярную ей, и откладываем на этой прямой отрезок, равный MN. В курсе бакалавриата было доказано, что каждая такая прямая является осью симметрии эквидистанты. Используя это свойство, построим несколько точек эквидистанты в модели Пуанкаре.



База a изображена зеленым. Возьмем Е-окружность Q, ортогональную Е-окружности a. Найдем образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка M эквидистанты. Меняя окружность Q и строя образы точки A относительно этих окружностей, мы можем построить точки эквидистанты. Опять возникает гипотеза, что эквидистанта изображается Е-окружностью.

Докажем это. Вводим систему координат, как показано на рисунке.



Обозначаем комплексные числа, которые соответствуют точкам (см. рисунок). Мы подозреваем, что эквидистанта будет изображаться дугой Е-окружности с центром в точке D, равноудаленной от точек r, $-r$ и $A(ai)$. Расстояние здесь обычное евклидово, поэтому комплексное число di, которое соответствует точке D, будет вычисляться так:

$$\sqrt{r^2 + d^2} = a - d.$$

Выражаем отсюда d и получаем

$$d = \frac{a^2 - r^2}{2a}.$$

Итак, нам нужно показать, что точка M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q) попадает на Е-окружность с радиусом DA (он равен $a - \frac{a^2-r^2}{2a}$ и центром D (ей соответствует комплексное число $\frac{a^2-r^2}{2a}i$. Другими словами, нам нужно убедиться, что комплексное число, соответствующее M удовлетворяет уравнению

$$(z - \frac{a^2 - r^2}{2a}i)(\bar{z} + \frac{a^2 - r^2}{2a}i) = \left(a - \frac{a^2 - r^2}{2a}\right)^2. \tag{8.3}$$

Найдем z. Окружность Q ортогональна a, следовательно, по условию ортогональности ее радиус равен $\sqrt{c^2 - r^2}$. Тогда формула инверсии будет иметь вид

$$z' = \frac{c^2 - r^2}{\bar{z} - c} + c.$$

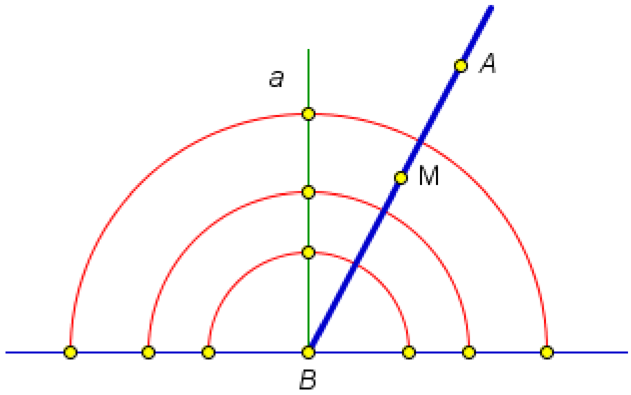
Подставляем комплексное число, задающее A

$$z = \frac{c^2 - r^2}{-c - ai} + c = \frac{(r^2 + aci)(c - ai)}{c^2 + a^2} = \frac{c(r^2 + a^2) + a(c^2 - r^2)i}{c^2 + a^2}.$$

Тогда, подставляя это z в левую часть уравнения (8.3) и проводя преобразования, получим правую часть этого уравнения. (Проведите подробные вычисления самостоятельно.) Таким образом, мы показали, что любая точка данной эквидистанты лежит на Е-окружности. Можно показать, что любая точка синей дуги Е-окружности является образом точки A при инверсии относительно некоторой окружности Q, следовательно, является точкой эквидистанты.

Итак, мы показали, что эквидистанта, у которой база изображается дугой Е-окружности, изображается в модели Пуанкаре дугой Е-окружности.

Посмотрим, как будет выглядеть эквидистанта, если ее база изображается Е-лучом.



Если база – Е-луч a, то ортогональные ей прямые будут изображаться дугами Е-окружностей с центром в начале этого Е-луча. Тогда если точка A принадлежит эквидистанте, то ее образы относительно этих Е-окружностей будут лежать на Е-луче BA. Обратно, для любой точки Е-луча BA найдется окружность с центром в точке B, такая, что относительно этой окружности в данную точку отобразится точка A. Итак, мы показали, что в случае, когда база эквидистанты изображается Е-лучом, эквидистанта изображается тоже Е-лучом, но уже не перпендикулярным абсолюту.

Задача 8.2**.** На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $2i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

Задача 8.3**.** На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $3i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

Задача 8.4**.** На верхней полуплоскости (модель плоскости Лобачевского) нарисован треугольник с вершинами в точках $(1+i)$, $1.5i$, $(-1+i)$. Какую линию (окружность, орицикл, эквидистанту можно описать около этого треугольника?

9. Замечательные точки и замечательные прямые треугольника на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

Замечательными прямыми треугольника называются прямые, содержащие биссектрисы, высоты, медианы треугольника, а также прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точки пересечения соответствующих групп замечательных прямых называются *замечательными точками* треугольника.

9.1. Биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника является объектом абсолютной геометрии (то есть геометрии, построенной на первых четырех группах аксиом). Понятие биссектрисы угла вводится в третьей группе аксиом. Теорема о пересечении биссектрис треугольника в одной точке также является теоремой абсолютной геометрии. Она также доказывается в третьей группе аксиом. Значит, эта теорема верна и в геометрии Лобачевского. (Посмотрите динамический рисунок Замечательные прямые треугольника.)

Используя теорему о точке пересечения биссектрис треугольника, доказывается теорема об окружности, вписанной в треугольник: в любой треугольник можно вписать окружность.

9.2. Медианы треугольника.

Медиана треугольника является объектом абсолютной геометрии. Она определяется в третьей группе аксиом (для нее нужно понятие конгруэнтности отрезков, сам треугольник возникает уже во второй группе аксиом). Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке в евклидовой геометрии доказывается с помощью подобия, то есть для ее доказательства существенен пятый постулат Евклида. Но, оказывается эта теорема верна также и в геометрии Лобачевского. Ее доказательство проводится с помощью тригонометрии.

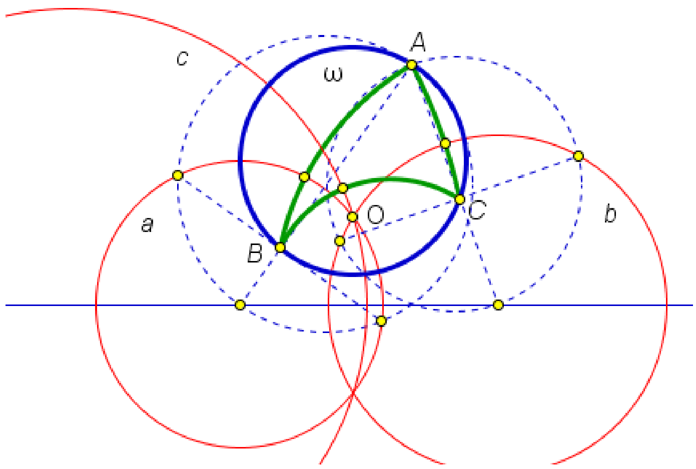
Задача 9.1. Постройте треугольник в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и три его медианы.

9.3. Серединные перпендикуляры треугольника.

Понятие серединного перпендикуляра также как и понятия медианы и биссектрисы вводится в третьей группе аксиом. Но в отличие от них серединные перпендикуляры треугольника в геометрии Лобачевского не обязательно пересекаются в одной точке. Доказывается, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат к одному пучку прямых, то есть либо все три пересекаются в одной точке, либо все три параллельны, либо все три расходятся. (доказательство можно посмотреть в [7])

Построим в модели Пуанкаре примеры треугольников для всех трех случаев.

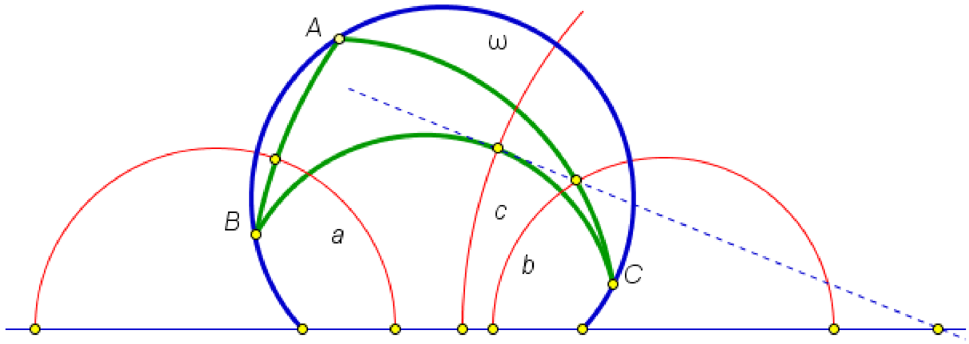
Сначала рассмотрим пересекающиеся серединные перпендикуляры.



Изображаем два серединных перпендикуляра a и b, которые пересекаются в точке O. Берем произвольную точку A и инверсией отображаем ее от Е-окружности a и Е-окружности b (синие пунктирные линии). Тогда получим еще две точки B и C искомого треугольника. Так как инверсия в модели Пуанкаре моделируем осевую симметрию, мы по получаем нужный треугольник ABC и два серединных перпендикуляра к его сторонам.
Изобразим третий серединный перпендикуляр c. Так как он должен проходить через точку O, нам нужно построить еще одну его точку. Построим середину стороны BC (как это делается, см. задачу выше). Двух точек достаточно, чтобы изобразить дугу с центром на абсолюте.

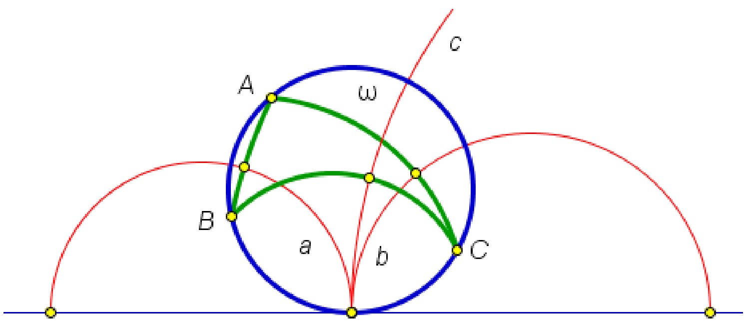
Около треугольника, серединные перпендикуляры которого пересекаются в одной точке, можно описать окружность. Чтобы изобразить ее, строим Е-окружность, проходящую через точки A, B, C. Это окружность ω.

Рассмотрим расходящиеся серединные перпендикуляры.



Опять берем два серединных перпендикуляра a и b, которые теперь расходятся, и точку A между ними.

Отображаем точку A относительно Е-окружностей a и b инверсией и получаем треугольник ABC. Строим серединный перпендикуляр c к стороне BC и изображаем эквидистанту, описанную около треугольника.



Аналогичным образом строим треугольник ABC с параллельными серединными перпендикулярами a, b, c и строим описанный около него орицикл ω.