Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры (научный семинар).

7 мая 2015 г.

Обозначения и термины.

1. id – тождественное преобразование;
2. $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на многообразии M;
3. $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M;
4. δ_{ab}, δ_b^a – дельта Кронекера; равна 1, если $a = b$ и равна нулю в противном случае;
5. I_n – единичная матрица порядка n;
6. Эндоморфизм – это $C^\infty(M)$-линейное отображение вида $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$.

Глава 1. Почти эрмитовы структуры.

§1.1. Определение и простейшие свойства.

Пусть M – гладкое многообразие.

Пара тензорных полей (J, g) на многообразии M называется почти эрмитовой структурой, если J – антиинволютивный эндоморфизм (то есть тензорное поле типа (1,1), для которого $J^2 = -id$), а g – риманова метрика, согласованная с ним (то есть $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$). Эндоморфизм J называется *почти комплексной структурой.* Гладкое многообразие M, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием.*

Если в условии согласованности заменить векторное поле X на векторное поле JX, то в силу антиинволютивности J получим

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0. \tag{1.1}$$

Пусть ∇ – произвольная связность на многообразии M. Тогда, дифференцируя условие антиинволютивности J и тождество (1.1), получим

$$\nabla_X(J)(JY) + J\nabla_X(J)Y = 0; \quad \nabla_Z(g)(JX, Y) + g(\nabla_Z(J)X, Y) + \nabla_Z(g)(X, JY) + g(X, \nabla_Z(J)Y) = 0.$$

В частности, для римановой связности метрики g (то есть для связности, в которой $\nabla g = 0$ и ее кручение S тождественно равно нулю) последнее тождество примет вид

$$g(\nabla_Z(J)X, Y) + g(X, \nabla_Z(J)Y) = 0.$$

§1.2. Построение А-базисов.

Пусть M – гладкое многообразие и на нем фиксирована почти эрмитова структура (J, g). Рассмотрим произвольную точку $m \in M$ и касательное пространство $T_m(M)$ в ней. На тензорные поля J и g посмотрим как на гладкие сечения соответствующих векторных расслоений (тензорное поле J каждой точке многообразия M ставит в соответствие тензор J_m типа (1,1), а тензорное поле g – тензор g_m типа (2,0)). В результате в касательном пространстве $T_m(M)$ получаем оператор комплексной структуры (иначе говоря, комплексную структуру) J_m и евклидово скалярное произведение g_m. Пара (J_m, g_m) является эрмитовой структурой на векторном пространстве $T_m(M)$.

Так как для любого ненулевого вектора $e_1 \in T_m(M)$ пара векторов $(e_1, J_m e_1)$ является линейно независимой, мы можем построить базис вида

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n, J_m e_1, \ldots, J_m e_n). \tag{1.2}$$

Следовательно размерность касательного пространства к почти эрмитову многообразию, а значит и самого эрмитова многообразия, должна быть четной. Поэтому будем обозначать размерность многообразия M через $2n$. Таким образом, мы видим, что $T_m(M)$ имеет структуру $2n$-мерного вещественного векторного пространства.

Кроме того, в касательном пространстве $T_m(M)$ можно ввести структуру n-мерного комплексного векторного пространства. Умножение на комплексное число векторов из $T_m(M)$ будет определяться по формуле

$$zX = \alpha X + \beta J_m X,\ X \in T_m(M),\ z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}.$$

Базисом будет система векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ из системы (1.2).

Напомним, что для любого вещественного векторного пространства, в частности, для касательного пространства $T_m(M)$ можно построить комплексификацию, то есть множество всевозможных конечных формальных сумм вида $z^\alpha X_\alpha$, где z^α – комплексные числа, а X_α – векторы из $T_m(M)$. Комплексификация обозначается $T_m^{\mathbb{C}}(M)$. Это $2n$-мерное комплексное векторное пространство. Умножение на комплексные числа задается по формуле

$$z(z^\alpha X_\alpha) = (zz^\alpha)X_\alpha.$$

Любой базис касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как вещественное векторное пространство, будет базисом комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ (но уже комплексным базисом). Обратите внимание, что операции умножения на комплексные числа в комплексных векторных пространствах $T_m(M)$ и $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ различны! Тензоры, определенные на вещественном векторном пространстве $T_m(M)$ можно продолжить по линейности на комплексификацию. Нас будут интересовать тензоры J_m и g_m. Поэтому приведем соответствующие формулы только для них. Обозначим их $J_m^{\mathbb{C}}$ и $g_m^{\mathbb{C}}$ соответственно. Это будут отображения вида $J_m^{\mathbb{C}} : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to T_m^{\mathbb{C}}(M)$ и $g_m^{\mathbb{C}} : T_m^{\mathbb{C}}(M) \times T_m^{\mathbb{C}}(M) \to \mathbb{C}$, которые задаются формулами

$$J_m^{\mathbb{C}}(z^\alpha X_\alpha) = z^\alpha J_m(X_\alpha);\ g_m^{\mathbb{C}}(z^\alpha X_\alpha, \tilde{z}^\beta \tilde{X}_\beta) = z^\alpha \tilde{z}^\beta g_m(X_\alpha, X_\beta).$$

Эти отображения называются *комплексификациями тензоров* J_m и g_m.

На комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ определены два проектора $\sigma : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to T_m^{\mathbb{C}}(M)$ и $\bar{\sigma} : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to T_m^{\mathbb{C}}(M)$ по формулам

$$\sigma = \frac{1}{2}(id - iJ_m^{\mathbb{C}});\ \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + iJ_m^{\mathbb{C}}).$$

Образами этих проекторов будут собственные подпространства D_J^i и D_J^{-i} линейного оператора $J_m^{\mathbb{C}}$, отвечающие собственным значениям i и $-i$ соответственно. Так как проекторы σ и $\bar{\sigma}$ являются взаимно дополнительными, комплексификация касательного пространства распадается в прямую сумму этих подпространств:

$$T_m^{\mathbb{C}}(M) = D_J^i \oplus D_J^{-i}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим теперь отображения $\sigma|_V : T_m(M) \to T_m^{\mathbb{C}}(M)$ и $\bar{\sigma}|_V : T_m(M) \to T_m^{\mathbb{C}}(M)$, которые задаются формулами

$$\sigma = \frac{1}{2}(id - iJ_m);\ \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + iJ_m).$$

Хотя множество $T_m(M)$ можно рассматривать как подмножество в $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, отождествляя вектор $X \in T_m(M)$ с формальной суммой вида $1X$, комплексные структуры (правила умножения на комплексные числа) в этих множествах разные, а значит, говорить об отображении $\sigma|_V$ как о сужении отображения σ в обычном смысле этого термина мы не можем. Особенно отчетливо это видно для отображения $\bar{\sigma}$. Действительно, как мы знаем, отображение $\bar{\sigma}$ является комплексно линейным, а отображение $\bar{\sigma}|_V$ является комплексно антилинейным. Но, не смотря на это, для любого вектора $X \in T_m(M)$ имеет место следующее равенство

$$\sigma(X) = \sigma(1X) = \frac{1}{2}(X - iJ_m^{\mathbb{C}}(1X)) = \frac{1}{2}(X - iJ_m X) = \sigma|_V(X).$$

Образами отображений $\sigma|_V$ и $\bar{\sigma}|_V$ по-прежнему остаются векторные подпространства D_J^i и D_J^{-i} соответственно, но кроме этого, они (в отличие от σ и $\bar{\sigma}$) являются изоморфизмом и антиизоморфизмом векторных пространств. В частности, эти отображения переводят базисы касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как комплексное n-мерное пространство, в базисы подпространств D_J^i и D_J^{-i}.

В комплексном n-мерном пространстве $T_m(M)$ определена эрмитова форма

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g_m(X, Y) + ig(X, J_m Y).$$

Рассмотрим базисы (e_a), $a = 1, \ldots, n$ ортонормированные относительно этой формы, то есть $\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab}$ и применим к ним проекторы $\sqrt{2}\sigma|_V$ и $\sqrt{2}\bar{\sigma}|_V$. Мы получим базис (ε_a) пространства D_J^i и базис $(\varepsilon_{\hat{a}})$ пространства D_J^{-i}, где $\hat{a} = n+1, \ldots, 2n$, $\hat{a} = a + n$. Тогда в силу (1.3) система векторов $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$ будет образовывать базис комплексного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, который называется *адаптированным базисом* или, короче, *A-базисом*. Пусть буквы первой части латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots$ пробегают значения $1, \ldots, n$, буквы второй части латинского алфавита $i, j, k, \ell, \ldots$ пробегают значения $n+1, \ldots, 2n$. Кроме того, $\hat{a} = a + n$. Учитывая это, A-базис будем обозначать следующими способами

$$(\varepsilon_1, \ldots, e_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}) = (\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}) = (\varepsilon_i).$$

Векторные подпространства D^i_J и D^{-i}_J являются комплексно сопряженными, то есть получаются одно из другого с помощью инволютивного антилинейного оператора $\tau : T^{\mathbb{C}}_m(M) \to T^{\mathbb{C}}_m(M)$, действующего по формуле

$$\tau(z^\alpha X_\alpha) = \bar{z}^\alpha X_\alpha,$$

где черта над комплексными числами z^α обозначает обычное комплексное сопряжение. При этом для векторов А-базиса получаем соотношения

$$\tau(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\hat{a}};\ \tau(\varepsilon_{\hat{a}}) = \varepsilon_a. \tag{1.4}$$

Пусть дано два А-базиса (ε_i) и $(\tilde{\varepsilon}_i)$ в комплексификации $T^{\mathbb{C}}_m(M)$. Выясним, как выглядит матрица перехода от одного базиса к другому. Сначала заметим, что векторы $(\tilde{\varepsilon}_a)$, принадлежащие векторному подпространству D^i_J, не будут иметь в своем разложении векторов $\varepsilon_{\hat{a}}$ (так как они в другом подпространстве). Значит матрица перехода будет иметь блочный вид $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. При этом в силу (1.4) матрицы A и B будут комплексно сопряжены, то есть $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Можно показать, что матрица A является матрицей перехода от базиса (e_a) к базису $(\tilde{e}_a)$ комплексного векторного пространства $T_m(M)$. Это те базисы, из которых получились А-базисы (ε_i) и $(\tilde{\varepsilon}_i)$ при отображениях $\sigma|_V$ и $\bar{\sigma}|_V$. Так как базисы (e_a) и $(\tilde{e}_a)$ были ортонормированными относительно эрмитовой формы $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, матрица перехода A должна быть эрмитовой, то есть принадлежать группе $U(n)$. Тогда матрицу C можно отождествить с матрицей A и говорить, что матрица перехода от одного А-базиса к другому является унитарной.

§1.3. Главное расслоение А-реперов и компоненты тензорных полей на нем.

Напомним, что *А-репером* на почти эрмитовом многообразии M называется система $p = (m, \varepsilon_i)$, состоящая из точки m многообразия M и А-базиса (ε_i) комплексификации касательного пространства $T^{\mathbb{C}}_m(M)$, где

$$\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma|_V(e_a);\ \varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}|_V(e_a),$$

(e_a) базис комплексного n-мерного векторного пространства $T_m(M)$, ортонормированный относительно эрмитовой формы $\langle\langle,\rangle\rangle$.

Четверка $(B^AM, M, U(n), \pi)$, где B^AM множество всех А-реперов, является главным расслоением со структурной группой $U(n)$ и может быть рассмотрена как подрасслоение главного расслоения всех вещественных реперов $(BM, M, GL(2n,\mathbb{R}), \pi)$.

Определим понятие компонент тензорного поля на пространстве расслоения А-реперов для почти комплексной структуры J и римановой метрики g. Это системы функций на многообразии B^AM, определяемые формулами

$$J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i) = J^j_i(p)\varepsilon_j;\ g_{ij}(p) = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j),\ p = (m, \varepsilon_i) \in B^AM.$$

Обычно обозначение точки $p \in B^AM$ опускают и пишут J^j_i и g_{ij}.

Выясним, как выглядят эти функции на пространстве расслоения А-реперов. Начнем с почти комплексной структуры J и запишем компоненты J^j_i в виде матрицы, где верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца. Заметим, что векторы ε_a являются собственными векторами линейного оператора $J^{\mathbb{C}}_m$, отвечающими собственному значению i, то есть $J^{\mathbb{C}}_m\varepsilon_a = i\varepsilon_a$. Тогда $J^j_a(p)\varepsilon_j = i\varepsilon_a$, откуда мы получаем первые n столбцов матрицы (J^j_i). Рассуждая аналогично, получим вторые n столбцов из равенства $J^j_{\hat{a}}(p)\varepsilon_j = -i\varepsilon_{\hat{a}}$. Объединяя результаты, получим матрицу

$$(J^j_i) = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix}.$$

По-другому мы можем записать полученные соотношения в виде

$$J^a_b = i\delta^a_b;\ J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -i\delta^b_a;\ J^{\hat{a}}_b = J^a_{\hat{b}} = 0.$$

Вычислим компоненты римановой метрики g. Сначала отметим, что ортонормированность базиса (e_a) относительно эрмитовой формы $\langle\langle X,Y\rangle\rangle = g_m(X,Y) + ig(X, J_mY)$, то есть равенство $\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab}$ дает следующие равенства

$$g_m(e_a, e_b) = \delta_{ab};\ g_m(e_a, J_me_b) = g_m(J_me_a, e_b) = 0;\ g_m(J_me_a, J_me_b) = \delta_{ab}.$$

Теперь вычисляем g_{ij}. Начнем с g_{ab}, учитывая полученные равенства.

$$g_{ab} = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = g^{\mathbb{C}}_m(\sqrt{2}\sigma|_V(e_a), \sqrt{2}\sigma|_V(e_b)) = \frac{1}{2}(g_m(e_a,e_b) - g_m(J_me_a, J_me_b) - ig_m(e_a, J_me_b) - ig_m(J_me_a, e_b)) = 0.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$g_{ab} = 0;\ g_{\hat{a}\hat{b}} = 0;\ g_{\hat{a}b} = \delta^a_b;\ g_{a\hat{b}} = \delta^b_a.$$

Этот результат можно записать в матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Глава 2. Почти контактные метрические структуры.

§2.1. Определение и простейшие свойства.

Пусть M – гладкое многообразие.

Четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ тензорное поле типа (1,1), ξ – векторное поле, η – дифференциальная 1-форма, g – риманова метрика, удовлетворяющая соотношениям

$$1)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \quad 2)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 3)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 4)\, \eta(\xi) = 1;$$

$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{2.1}$$

называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M.

Гладкое многообразие M, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.*

Непосредственно из определения вытекают следующие тождества, которые понадобятся в дальнейшем. Подставим в равенство 5) из определения вместо векторного поля Y векторное поле ξ (можем это сделать, так как равенство верно для любого векторного поля, в частности, для ξ). Далее воспользуемся равенствами 2) и 4). В результате получим

$$g(X, \xi) = \eta(X).$$

Это означает, что дифференциальная 1-форма η получается из векторного поля ξ с помощью операции опускания индекса. Подставим теперь в это равенство вместо векторного поля X векторное поле ξ. Получим

$$g(\xi, \xi) = 1.$$

Это означает, что векторное поле единичное, то есть в каждой точке многообразия M длина вектора ξ_m (относительно евклидовой структуры g_m касательного пространства $T_m(M)$) равна 1.

И еще одно свойство. Вычислим $\Phi^3 + \Phi$ с учетом 1) из (2.1).

$$\Phi^3 + \Phi = (-id + \xi \otimes \eta) \circ \Phi + \Phi = (\xi \otimes \eta) \circ \Phi. \tag{2.2}$$

Нам нужно выяснить, чему равно последнее выражение в цепочке равенств. Сначала получим формулу для значения тензорного поля $\xi \otimes \eta$ на векторном поле X (напомним, что мы можем рассматривать тензорные поля типа (1,1) как эндоморфизмы). Нам потребуются две формулы: $X(\omega) = \omega(X)$, которая позволяет рассматривать векторное поле как тензорное поле типа (0,1), и $L(X, \omega) = \omega(L(X))$, которая позволяет рассматривать тензорное поле типа (1,1) как эндоморфизм. Возвращаемся к тензорному произведению $\xi \otimes \eta$. Для любой 1-формы ω имеем

$$\xi \otimes \eta(X, \omega) = \xi(\omega)\eta(X) = (\eta(X)\xi)(\omega).$$

С другой стороны,

$$\xi \otimes \eta(X, \omega) = \omega((\xi \otimes \eta)(X)) = (\xi \otimes \eta)(X)(\omega).$$

Таким образом, получаем

$$(\eta(X)\xi)(\omega) = (\xi \otimes \eta)(X)(\omega).$$

Это равенство верно для любой 1-формы ω. Тогда можем снять омегу.

$$(\xi \otimes \eta)(X) = \eta(X)\xi. \tag{2.3}$$

Возвращаемся к последнему выражению цепочки равенств (2.4)

$$(\xi \otimes \eta) \circ \Phi(X) = \eta(\Phi X)\xi = 0$$

в силу 3) из (2.1). Итак, мы получили

$$\Phi^3 + \Phi = 0. \tag{2.4}$$

Тензорные поля типа (1,1), которые удовлетворяют этому тождеству, называются *структурами Яно.* Мы показали, что почти контактная метрическая структура (а точнее ее структурный эндоморфизм Φ) является структурой Яно.

§2.2. Построение A-базисов.

Пусть M – гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная фиксированная точка, $T_m(M)$ – касательное пространство в этой точке.

Рассмотрим два отображения

$$\mathfrak{l} : T_m(M) \to T_m(M); \quad \mathfrak{m} : T_m(M) \to T_m(M),$$

которые задаются формулами

$$\mathfrak{l} = -\Phi_m^2; \quad \mathfrak{m} = \xi_m \otimes \eta_m,$$

где $\Phi_m = \Phi(m)$, $m \in M$ – значение тензорного поля Φ, рассматриваемого как гладкое сечение векторного расслоения тензоров типа (1,1), в точке m. Это тензор типа (1,1) на касательном пространстве $T_m(M)$. Аналогичным образом определяются тензоры ξ_m (вектор) и η_m (ковектор).

Отображения $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ являются $\mathbb{R}$-линейными, так как они получены из тензоров (линейных отображений) с помощью тензорных операций. Кроме того, с учетом формул (2.4) и (2.3) получим

$$\mathfrak{l}^2 = \Phi_m^4 = \Phi_m^3 \circ \Phi_m = -\Phi_m^2 = \mathfrak{l};$$

$$\mathfrak{m}^2(X) = (\xi_m \otimes \eta_m)^2(X) = (\xi_m \otimes \eta_m)(\eta_m(X)\xi_m) = \eta_m(X)\eta_m(\xi_m)\xi_m = \eta_m(X)\xi_m = \xi_m \otimes \eta_m(X) = \mathfrak{m}(X),\ X \in T_m(M).$$

Это означает, что линейные отображения $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ являются проекторами. Согласно 1) из (2.1) эти проекторы являются взаимно дополнительными. Обозначим векторные подпространства

$$\operatorname{Im} \mathfrak{l} = \mathfrak{L};\ \operatorname{Im} \mathfrak{m} = \mathfrak{M}.$$

Из общей теории проекторов мы знаем, что векторное пространство распадается в прямую сумму образов взаимно дополнительных проекторов, то есть в нашем случае

$$T_m(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}.$$

Выясним размерности подпространств $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$. Пусть $X \in \mathfrak{M}$ – произвольный вектор. Так как $\mathfrak{M} = \operatorname{Im} \mathfrak{m}$, существует вектор $Y \in T_m(M)$, такой что $X = \mathfrak{m}(Y)$. Тогда

$$X = \mathfrak{m}(Y) = (\xi_m \otimes \eta_m)(Y) = \eta_m(Y)\xi_m.$$

Другими словами, любой вектор $X \in \mathfrak{M}$ коллинеарен вектору ξ_m, то есть вектор ξ_m образует базис векторного подпространства $\mathfrak{M}$, то есть оно одномерно.

Рассмотрим произвольный вектор $X \in \mathfrak{L}$. Тогда $X = -\Phi_m^2(Y)$ для некоторого $Y \in T_m(M)$. Из этого следует (воспользуемся тождеством 3) из определения почти контактной метрической структуры), что

$$\eta_m(X) = -\eta_m \circ \Phi_m^2(Y) = 0. \tag{2.5}$$

Далее,

$$\Phi_m^2(X) = -id(X) + (\xi_m \otimes \eta_m)(X) = -X + \eta_m(X)\xi_m = -X.$$

Другими словами, оператор Φ_m в сужении на векторное подпространство $\mathfrak{L}$ является оператором комплексной структуры (или, короче, комплексной структурой). Следовательно, векторное подпространство $\mathfrak{L}$ является четномерным. Обозначим эту размерность $2n$. Тогда размерность касательного пространства $T_m(M)$, а значит и самого почти контактного метрического многообразия будет $2n+1$. Мы видим, что необходимым условием существования почти контактной метрической структуры на гладком многообразии является его нечетномерность.

Как мы видели, на векторном подпространстве $\mathfrak{L}$ определяется комплексная структура $(\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}$. Кроме того, из тождества 5) определения почти контактной метрической структуры следует, что для любых векторов $X, Y \in \mathfrak{L}$ имеем

$$g_m((\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}X, (\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}Y) = g_m(X,Y) - \eta_m(X)\eta_m(Y) = g_m(X,Y).$$

Другими словами, пара $((\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}, g_m)$ является эрмитовой структурой на векторном подпространстве $\mathfrak{L}$. Следовательно, на нем мы можем провести такие же построения, какие мы проводили для касательного пространства почти эрмитова многообразия. В частности, рассмотрим комплексификацию $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ векторного пространства $\mathfrak{L}$. Прямую сумму $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$ будем обозначать $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ и называть комплексификацией касательного пространства $T_m(M)$:

$$T_m^{\mathbb{C}}(M) = \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{M}^{\mathbb{C}}.$$

На комплексификации $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ определяются два взаимно дополнительных проектора

$$\sigma|_V = \frac{1}{2}(id - i(\Phi_m)|_{\mathfrak{L}});\ \bar{\sigma}|_V = \frac{1}{2}(id + i(\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}).$$

Образами этих проекторов будут подпространства собственных векторов оператора $(\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}^{\mathbb{C}}$, отвечающие собственным значениям i и $-i$ соответственно. Обозначим эти подпространства D^i_Φ и D^{-i}_Φ соответственно.

Так как для любого вектора $z^\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$ имеем

$$\Phi^{\mathbb{C}}_m(z^\alpha X_\alpha) = \Phi^{\mathbb{C}}_m(z\xi_m) = z\Phi_m(\xi_m) = 0(z\xi_m) = 0z^\alpha X_\alpha,$$

векторное подпространство $\mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$ тоже будет собственным подпространством оператора $\Phi^{\mathbb{C}}_m$, отвечающим собственному значению 0. Итак, мы получаем, что комплексификация $T^{\mathbb{C}}_m(M)$ касательного пространства $T_m(M)$ распадается в прямую сумму собственных подпространств:

$$T^{\mathbb{C}}_m(M) = D^i_\Phi \oplus D^{-i}_\Phi \oplus D^0_\Phi.$$

Проекторами на эти подпространства будут следующие отображения

$$\pi = \sigma|_V \circ \mathfrak{l} = -\frac{1}{2}(\Phi^2_m + i\Phi_m);\ \bar\pi = \bar\sigma|_V \circ \mathfrak{l} = \frac{1}{2}(-\Phi^2_m + i\Phi_m);\ \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \xi_m \otimes \eta^{\mathbb{C}}_m.$$

Как мы видели выше, на векторном пространстве $\mathfrak{L}$ определяется эрмитова структура $((\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}, (g_m)|_{\mathfrak{L}})$. Следовательно, оно несет структуру n-мерного комплексного векторного пространства и в нем мы можем рассматривать базисы (e_a), ортонормированные относительно эрмитовой формы $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g_m(X, Y) + ig_m(X, (\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}(Y))$, $X, Y \in \mathfrak{L}$. Обозначим

$$\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma|_V(e_a);\ \varepsilon_{\hat a} = \sqrt{2}\bar\sigma|_V(e_a).$$

Система векторов $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat a})$ будет образовывать базис комплексификации $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$. Добавим к ним вектор ξ_m, который также будем обозначать ε_0. Тогда система векторов

$$(\xi_m \equiv \varepsilon_0, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat a}) \tag{2.6}$$

будет образовывать базис комплексификации $T^{\mathbb{C}}_m(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Он называется *адаптированным базисом*, или короче *A-базисом.*

Пусть индексы $a, b, c, d, \dots$ (первая часть латинского алфавита) пробегают значения $1, \dots, n$, индексы $i, j, k, \ell, \dots$ (вторая часть латинского алфавита) пробегают значения $0, 1, \dots, n, n + 1, \dots, 2n$ и $\hat a = a + n$, то есть $\hat a, \dots$ пробегают значения $n + 1, \dots, 2n$. Тогда коротко А-базис можно обозначить так: (ε_i).

Выясним, как выглядит матрица перехода от одного А-базиса к другому. Так как вектор ξ_m один и тот же во всех А-базисах, первый столбец матрицы перехода будет иметь вид $1, 0, \dots, 0$ (так как $\xi_m = 1\xi_m + 0\varepsilon_1 + \dots$). Векторы $\tilde\varepsilon_a$ и $\tilde\varepsilon_{\hat a}$ нового базиса будут раскладываться только по векторам ε_a и $\varepsilon_{\hat a}$ старого базиса и не будут содержать в своем разложении вектора ξ_m, так как все они принадлежат векторного подпространству $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ и оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на число. Наконец, заметим, что системы векторов $(\tilde\varepsilon_a, \tilde\varepsilon_{\hat a})$ и $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat a})$ – это А-базисы из первой главы, а для них матрица перехода имеет вид $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar A \end{pmatrix}$, где A – унитарная матрица. Тогда матрица перехода от одного репера (2.6) к другому такого же вида будет иметь вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \bar A \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A – унитарная матрица порядка n и черта обозначает комплексное сопряжение всех элементов матрицы. Так как матрица C может быть отождествлена с унитарной матрицей A, матрица D может быть отождествлена с матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Такие матрицы являются элементами группы Ли, которая обозначается $\{e\} \times U(n)$.

§2.3. Главное расслоение А-реперов и компоненты тензорных полей на нем.

Пусть M – почти контактное метрическое многообразие. Назовем *А-репером* набор $p = (m, \varepsilon_i)$, где $m \in M$, (ε_i) – А-базис в комплексификации $T^{\mathbb{C}}_m(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Обозначим B^AM множество всех А-реперов. Тогда четверка $(B^AM, M, \{e\} \times U(n), \pi)$, где $\pi : B^AM \to M$ (отображение, ставящее каждому А-реперу в соответствие его вершину m), будет главным расслоением реперов.

Определим и вычислим компоненты тензорных полей (Φ, ξ, η, g) почти контактной метрической структуры на пространстве расслоения А-реперов. Компоненты тензорных полей определяются аналогично случаю почти эрмитова многообразия:

$$\Phi^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j) = \Phi^i_j(p)\varepsilon_i;\ \xi_m = \xi^i(p)\varepsilon_i;\ \eta_i(p) = \eta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i);\ g_{ij}(p) = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j),$$

где $p = (m, \varepsilon_i) \in B^AM$ – произвольный А-репер. Получаем системы функций (обозначение репера p будем опускать для краткости) на пространстве расслоения А-реперов B^AM

$$\{\Phi^i_j\};\ \{\xi^i\};\ \{\eta_i\};\ \{g_{ij}\},$$

которые называются *компонентами* соответствующих тензорных полей на пространстве расслоения А-реперов.

Начнем вычисления с $\{\Phi^i_j\}$. Из определения компонент тензорного поля Φ следует, что они представляют собой матрицу линейного оператора. Для ее нахождения нужно подействовать этим оператором по очереди на вектора базиса, полученные векторы разложить по тому же базису и коэффициенты разложения записать по столбцам в матрицу. Так как вектор ξ_m является собственным вектором Φ_m с собственным значением 0, а векторы ε_a и $\varepsilon_{\hat{a}}$ – собственными векторами $\Phi^{\mathbb{C}}_m$ с собственными значениями i и $-i$ соответственно, матрица будет иметь вид

$$(\Phi^i_j) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 \\ 0 & 0 & -iI_n \end{array} \right).$$

Другими словами, компоненты эндоморфизма Φ в А-реперах имеют вид

$$\Phi^0_0 = 0;\ \Phi^0_a = \Phi^a_0 = 0;\ \Phi^0_{\hat{a}} = \Phi^{\hat{a}}_0 = 0;\ \Phi^a_{\hat{b}} = \Phi^{\hat{a}}_b = 0;\ \Phi^a_b = i\delta^a_b;\ \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -i\delta^b_a. \tag{2.7}$$

Для векторного поля ξ и 1-формы η с учетом (2.5) получаем

$$\xi^0 = 1;\ \xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0;\ \eta_0 = 1;\ \eta_a = \eta_{\hat{a}} = 0.$$

Наконец, для римановой метрики g с учетом равенств $g_{00} = g_m(\xi_m, \xi_m) = 1$ и того, что $((\Phi_m)|_{\mathfrak{L}}, (g_m)|_{\mathfrak{L}})$ – эрмитова структура (а значит, применимы результаты первой главы) получаем

$$g_{00} = 1;\ g_{a0} = g_{0a} = 0;\ g_{0\hat{a}} = g_{\hat{a}0} = 0;\ g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0;\ g_{\hat{a}b} = g_{b\hat{a}} = \delta^a_b.$$

Эти результаты можно записать в виде матрицы

$$(g_{ij}) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{array} \right).$$

В заключение этого параграфа посмотрим, как связаны между собой компоненты векторного поля ξ и 1-формы η. Выше мы получили следующее соотношение между ними: $\eta(X) = g(X, \xi)$. Оно означает, что 1-форма η получена из векторного поля ξ операцией опускания индекса. Запишем это тождество в компонентах тензорных полей на пространстве расслоения А-реперов. В левой и правой частях тождества $\eta(X) = g(X, \xi)$ стоят равные гладкие функции, заданные на многообразии M. Возьмем их значения в произвольной точке m и воспользуемся соотношением между тензорными полями, заданными как гладкие сечения и как полилинейные отображения $(\eta(X)(m) = \eta_m(X_m))$: $\eta_m(X_m) = g_m(X_m, \xi_m)$. Чтобы иметь возможность подставить вместо вектора X_m комплексный вектор ε_a, нужно комплексифицировать тензоры η_m и g_m. В результате получаем $\eta^{\mathbb{C}}_m(X_m) = g^{\mathbb{C}}_m(X_m, \xi_m)$. Теперь вместо вектора X_m подставим вектора ε_a и $\varepsilon_{\hat{a}}$ из А-репера. По определению компонент в А-репере получим

$$\eta_a = \eta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a) = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, \xi_m) = g_{ai}\xi^i = g_{a0}\xi^0 + g_{ab}\xi^b + g_{a\hat{b}}\xi^{\hat{b}} = 0 + 0 + \delta^b_a\xi^{\hat{b}} = \xi^{\hat{a}}.$$

Аналогично рассуждая, можно получить выражение для $\eta_{\hat{a}}$. Объединяя результаты, имеем

$$\eta_a = \xi^{\hat{a}};\ \eta_{\hat{a}} = \xi^a.$$

§2.4. Первая группа структурных уравнений почти контактного метрического многообразия. Структурные тензоры.

Пусть M – почти контактное метрическое многообразие. Обозначим через ∇ риманову связность метрики g, через θ – ее форму связности, через $\{\theta^i_j\}$ тензорные компоненты формы связности, через $\{\omega^k\}$ – тензорные компоненты формы смещения.

По основной теореме тензорного анализа для эндоморфизма Φ получим

$$d\Phi^i_j + \Phi^k_j\theta^i_k - \Phi^i_k\theta^k_j = \Phi^i_{j,k}\omega^k. \tag{2.8}$$

Напомним, что $\{\Phi^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения А-реперов. Они определяются по формуле

$$(\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \Phi^i_{j,k}(p)\varepsilon_i.$$

Расписываем уравнения (2.8) для различных значений индексов

1. $i = a$, $j = b$

$$d\Phi^a_b + \Phi^k_b\theta^a_k - \Phi^a_k\theta^k_b = \Phi^a_{b,k}\omega^k.$$

Учитываем (2.7) и не пишем заведомо нулевые слагаемые.

$$\Phi^c_b\theta^a_c - \Phi^a_c\theta^c_b = \Phi^a_{b,k}\omega^k$$
$$i\delta^c_b\theta^a_c - i\theta^c_b = \Phi^a_{b,k}\omega^k$$

В силу линейной независимости базисных форм ω^k получим $\Phi^a_{b,k} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$.

$$d\Phi^{\hat{a}}_b + \Phi^k_b\theta^{\hat{a}}_k - \Phi^{\hat{a}}_k\theta^k_b = \Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k.$$

Учитываем (2.7) и не пишем заведомо нулевые слагаемые.

$$\Phi^c_b\theta^{\hat{a}}_c - \Phi^{\hat{a}}_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b = \Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$$
$$2i\theta^{\hat{a}}_b = \Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$$

В силу линейной независимости базисных форм ω^k получим $\theta^{\hat{a}}_b = -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$.

3. $i = a$, $j = 0$.

$$d\Phi^a_0 + \Phi^k_0\theta^a_k - \Phi^a_k\theta^k_0 = \Phi^a_{0,k}\omega^k.$$

Учитываем (2.7) и не пишем заведомо нулевые слагаемые.

$$-\Phi^a_c\theta^c_0 = \Phi^a_{0,k}\omega^k.$$
$$-i\delta^a_c\theta^c_0 = \Phi^a_{0,k}\omega^k.$$

В силу линейной независимости базисных форм ω^k получим $\theta^a_0 = i\Phi^a_{0,k}\omega^k$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. В результате получим

$$\begin{array}{ll} \Phi^a_{b,k} = 0; & \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \\ \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k; & \theta^a_{\hat{b}} = \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k; \\ \theta^a_0 = i\Phi^a_{0,k}\omega^k; & \theta^{\hat{a}}_0 = -i\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k; \\ \theta^0_a = -i\Phi^0_{a,k}\omega^k; & \theta^0_{\hat{a}} = i\Phi^0_{\hat{a},k}\omega^k; \\ \Phi^0_{0,k} = 0; & \end{array} \tag{2.9}$$

Применяем основную теорему тензорного анализа к римановой метрике g и учитываем, что в римановой связности ковариантный дифференциал римановой метрики будет равен нулю.

$$dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим

$$\begin{array}{ll} \theta^0_0 = 0; & \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \theta^a_b = 0; \\ \theta^{\hat{a}}_b + \theta^{\hat{b}}_a = 0; & \theta^a_{\hat{b}} + \theta^b_{\hat{a}} = 0; \\ \theta^0_a + \theta^{\hat{a}}_0 = 0; & \theta^0_{\hat{a}} + \theta^a_0 = 0. \end{array} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) в (2.10), получим:

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0 \Rightarrow -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{b}}_{a,k}\omega^k - \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k = 0.$$

В силу линейной независимости форм ω^k получим $\Phi^{\hat{b}}_{a,k} = -\Phi^{\hat{a}}_{b,k}$. Рассуждая аналогично для остальных равенств, получим

$$\begin{array}{ll} \Phi^{\hat{b}}_{a,k} = -\Phi^{\hat{a}}_{b,k}; & \Phi^b_{\hat{a},k} = -\Phi^a_{\hat{b},k}; \\ \Phi^0_{a,k} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,k}; & \Phi^0_{\hat{a},k} = -\Phi^a_{0,k}; \end{array} \tag{2.11}$$

Рассмотрим первую группу структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j$. Распишем ее для различных значений i и введем обозначения $\omega^{\hat{a}} = \omega_a$, $\omega^0 = \omega$.

1. $i = a$.

$$\begin{aligned} d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \theta^a_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \theta^a_0 \wedge \omega = \\ = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k \wedge \omega^{\hat{b}} - i\Phi^a_{0,k}\omega^k \wedge \omega = \\ = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{i}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}\omega \wedge \omega_b - i\Phi^a_{0,c}\omega^c \wedge \omega - i\Phi^a_{0,\hat{b}}\omega_b \wedge \omega - i\Phi^a_{0,0}\omega \wedge \omega = \\ = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + C^{ab}\omega_b \wedge \omega + C^a{}_b\omega^b \wedge \omega, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$C^{ab}{}_c = -\tfrac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; \quad C^{abc} = \tfrac{i}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad \tilde{C}^{abc} = \tfrac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}; \quad C^{ab} = -i\Phi^a_{0,\hat{b}} + \tfrac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}; \quad C^a{}_b = -i\Phi^a_{0,b}. \tag{2.12}$$

2. $i = \hat{a}$

$$\begin{aligned} d\omega^{\hat{a}} = -\theta^{\hat{a}}_b \wedge \omega^b - \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \theta^{\hat{a}}_0 \wedge \omega = \\ = \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k \wedge \omega^b + \theta^b_a \wedge \omega_b + i\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k \wedge \omega = \\ = \theta^b_a \wedge \omega_b - \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\omega_c \wedge \omega^b + \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\omega \wedge \omega^b + i\Phi^{\hat{a}}_{0,b}\omega^b \wedge \omega + i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}\omega_b \wedge \omega + i\Phi^{\hat{a}}_{0,0}\omega \wedge \omega = \\ = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + C_{ab}\omega^b \wedge \omega + C_a{}^b\omega_b \wedge \omega, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$C_{ab}{}^c = \tfrac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad C_{abc} = -\tfrac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}; \quad \tilde{C}_{abc} = -\tfrac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \quad C_{ab} = i\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \tfrac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}; \quad C_a{}^b = i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}. \tag{2.13}$$

3. $i = 0$.

$$\begin{aligned} d\omega = -\theta^0_b \wedge \omega^b - \theta^0_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \theta^0_0 \wedge \omega = \\ = i\Phi^0_{[b,a]}\omega^a \wedge \omega^b + i\Phi^0_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^a + i\Phi^0_{b,0}\omega \wedge \omega^b - i\Phi 0_{\hat{b},a}\omega^a \wedge \omega_b - i\Phi 0_{[\hat{b},\hat{a}]}\omega_a \wedge \omega_b - i\Phi^0_{\hat{b},0}\omega \wedge \omega_b = \\ D_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + D^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + D^b_a\omega^a \wedge \omega_b + D_b\omega^b \wedge \omega + D^b\omega_b \wedge \omega, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$D_{ab} = -i\Phi^0_{[a,b]}; \quad D^{ab} = i\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]}; \quad D^b_a = -i\Phi^0_{\hat{b},a} - i\Phi^0_{a,\hat{b}}; \quad D_b = -i\Phi^0_{b,0}; \quad D^b = i\Phi^0_{\hat{b},0}.$$

Следствие 2.1. Имеем $D^b_a = C_a{}^b - C^b{}_a$.

Доказательство. В силу обозначений (2.13) и соотношений (2.11) получим

$$D^b_a = -i\Phi^0_{\hat{b},a} - i\Phi^0_{a,\hat{b}} = i\Phi^b_{0,a} + i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = C_a{}^b - C^b{}_a.$$

□

По основной теореме тензорного анализа для формы η получим

$$d\eta_i - \eta_j\theta^j_i = \eta_{i,j}\omega^j.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\eta_{a,b} = i\Phi^0_{a,b}; \quad \eta_{\hat{a},\hat{b}} = -i\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}; \quad \eta_{a,0} = i\Phi^0_{a,0} = -D_a; \quad \eta_{\hat{a},0} = -i\Phi^0_{\hat{a},0} = -D^a; \quad \eta_{0,j} = 0.$$

$$\eta_{a,\hat{b}} = i\Phi^0_{a,\hat{b}} = -i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = -C_a{}^b.$$

Добавляем к списку еще два вида компонент

$$\eta_{a,\hat{b}} = -C_a{}^b; \quad \eta_{\hat{a},b} = -C^a{}_b.$$

Определим структурные тензоры. На данный момент у нас имеется шесть групп функций на пространстве расслоения A-реперов: $\{C^{ab}{}_c, C_{ab}{}^c\}$, $\{\tilde{C}^{abc}, \tilde{C}_{abc}\}$, $\{C^{ab}, C_{ab}\}$, $\{D^{ab}, D_{ab}\}$, $\{C^a{}_b, C_a{}^b\}$, $\{D^a, D_b\}$. Каждый такой набор определяет тензорное поле на многообразии M.

Начнем с $\{C^{ab}{}_c, C_{ab}{}^c\}$. Определим отображение

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

по формуле

$$B(X,Y)(m) = C^{ab}{}_c(p)X^{\hat{b}}(p)Y^c(p)\varepsilon_a + C_{ab}{}^c(p)X^b(p)Y^{\hat{c}}(p)\varepsilon_{\hat{a}}, \tag{2.14}$$

где значения всех функций правой части равенства берутся в произвольном A-репере $p = (m, \varepsilon_i)$ с вершиной в точке m. Такое определение требует доказательства корректности. Во-первых, нужно доказать, что значение правой части равенства не зависит от выбора репера p. Во-вторых, нужно убедиться, что вектор $B(X,Y)(m)$ является вещественным (что достаточно очевидно). Мы докажем оба утверждения, записав равенство (2.14).

Согласно введенным обозначениям (2.12) и (2.13) получим (обозначения точки m и комплексификации тензоров мы будем опускать из-за громоздкости выкладок)

$$B(X,Y) = -\frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}X^{\hat{b}}Y^c\varepsilon_a + \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}X^bY^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} =$$

Рассмотрим отдельно выражение $\Phi^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a$. По определению компонент $\nabla\Phi$ имеем

$$(\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c) = \Phi^0_{\hat{b},c}\varepsilon_0 + \Phi^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},c}\varepsilon_{\hat{a}}. \tag{2.15}$$

Третье слагаемое в правой части равно нулю в силу (2.9). Применим к обеим частям полученного равенства проектор $\mathfrak{l}$. Так как мы имеем дело с векторами комплексификации $T^{\mathbb{C}}_m(M)$, то и $\mathfrak{l}$ нужно комплексифицировать. Так как $\varepsilon_0 \equiv \xi_m$ и ξ_m принадлежит ядру $\mathfrak{l}$, а ε_a принадлежит образу $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$, получим

$$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)) = \Phi^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a.$$

Аналогично

$$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}})) = \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Продолжаем прерванную цепочку равенств, опуская обозначения $\mathbb{C}$ и m.

$$= \frac{i}{2}\mathfrak{l}\left(-(\nabla\Phi)(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)X^{\hat{b}}Y^c + (\nabla\Phi)(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}})X^bY^{\hat{c}}\right) =$$

Воспользуемся комплексной линейностью комплексификаций тензоров, а также разложением

$$X_m = X^0\varepsilon_0 + X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \mathfrak{m}(X) + \pi(X) + \bar{\pi}(X).$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получим

$$= \frac{i}{2}\mathfrak{l}\left(-(\nabla\Phi)(X^{\hat{b}}\varepsilon_{\hat{b}},Y^c\varepsilon_c) + (\nabla\Phi)(X^b\varepsilon_b,Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}})\right) = -\frac{i}{2}\Phi^2\left(-(\nabla\Phi)(\bar{\pi}X,\pi Y) + (\nabla\Phi)(\pi X,\bar{\pi}Y)\right).$$

Итак, восстанавливая опущенные значки комплексификации и точки m, запишем полученное равенство

$$B(X,Y)(m) = -\frac{i}{2}(\Phi^{\mathbb{C}}_m)^2\left(-(\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\bar{\pi}X_m,\pi Y_m) + (\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\pi X_m,\bar{\pi}Y_m)\right).$$

Напомним, что $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2_m + i\Phi_m)$, $\bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2_m + i\Phi_m)$. Тогда, опять опуская значки $\mathbb{C}$ и m

$$\begin{aligned}B(X,Y) = -\frac{i}{8}\Phi^2\left(-(\nabla\Phi)(-\Phi^2X + i\Phi X, -\Phi^2Y - i\Phi Y) + (\nabla\Phi)(-\Phi^2X - i\Phi X, -\Phi^2Y - i\Phi Y)\right) = \\ -\frac{i}{8}\Phi^2(-\nabla\Phi(\Phi^2X,\Phi^2Y) - \nabla\Phi(\Phi X,\Phi Y) + \nabla\Phi(\Phi^2X,\Phi^2Y) + \nabla\Phi(\Phi X,\Phi Y) - i\nabla\Phi(\Phi^2X,\Phi Y) + \\ + i\nabla\Phi(\Phi X,\Phi^2Y) - i\nabla\Phi(\Phi^2X,\Phi Y) + i\nabla\Phi(\Phi X,\Phi^2Y)) = \\ = -\frac{1}{4}\left(\nabla\Phi(\Phi^2X,\Phi Y) - \nabla\Phi(\Phi X,\Phi^2Y)\right).\end{aligned}$$

Опять восстанавливая значок точки m, а значок комплексификации уже исчез, получим

$$B(X,Y)(m) = -\frac{1}{4}\left((\nabla\Phi)_m(\Phi^2_mX_m,\Phi_mY_m) - (\nabla\Phi)_m(\Phi_mX_m,\Phi^2_mY_m)\right).$$

Так как это равенство верно для любой точки m, получаем соотношение для тензорных полей (заодно переходя от ковариантного дифференциала к ковариантной производной). Итак, первый структурный тензор B задается формулой

$$B(X,Y) = -\frac{1}{4}(\Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X) - \Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X)).$$

Замечание 2.1. Полученное равенство не совпадает с равенством полученным в монографии В.Ф. Кириченко, но оно тоже правильное. Чтобы получить равенство, которое получено в монографии запишем равенство (2.15) в виде

$$(\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c) = \Phi^0_{\hat{b},c}\varepsilon_0 + \Phi^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},c}\varepsilon_{\hat{a}} = \mathfrak{m}((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)) + \pi((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)) + \bar{\pi}((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)).$$

Тогда $\Phi^a_{\hat{b},c}\varepsilon_a = \pi((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c))$. Аналогично получаем $\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\pi}((\nabla\Phi)^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}))$. Тогда продолжая цепочку равенств (2.15), получим

$$\begin{aligned}B(X,Y) = \frac{i}{2}(-\pi(\nabla\Phi)(\bar{\pi}X,\pi Y) + \bar{\pi}(\nabla\Phi)(\pi X,\bar{\pi}Y)) = \\ = \frac{i}{16}((\Phi^2 + i\Phi)\nabla\Phi(-\Phi^2X + i\Phi X, -\Phi^2Y - i\Phi Y) + (-\Phi^2 + i\Phi)\nabla\Phi(-\Phi^2X - i\Phi X, -\Phi^2Y + i\Phi Y)) = \\ = -\frac{1}{8}(\Phi\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi^2X) + \Phi\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) - \Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X)).\end{aligned}$$

Итак, еще одна формула, задающая первый структурный тензор имеет вид

$$B(X,Y) = -\frac{1}{8}(\Phi\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi^2X) + \Phi\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) - \Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X))$$

Из этой формулы легко видеть, что $B(\Phi X, Y) = -\Phi B(X,Y) = -B(X, \Phi Y)$.

Из формулы (2.14) получаем, что компоненты тензорного поля B все равны нулю, кроме компонент $B^a_{\hat{b}c} = C^{ab}{}_c$ и $B^{\hat{a}}_{b\hat{c}} = C_{ab}{}^c$. Действительно, берем значения тензорных полей в формуле (2.14), комплексифицируем и подставляем векторы ε_i, ε_j

$$B^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = C^{ab}{}_c(p)(\varepsilon_i)^{\hat{b}}(p)(\varepsilon_j)^c(p)\varepsilon_a + C_{ab}{}^c(p)(\varepsilon_i)^b(p)(\varepsilon_j)^{\hat{c}}(p)\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Рассматриваем возможные значения свободных индексов i и j.

1. $i = 0$, $j = 0$.

$$B^k_{00}\varepsilon_k = C^{ab}{}_c(\varepsilon_0)^{\hat{b}}(\varepsilon_0)^c\varepsilon_a + C_{ab}{}^c(\varepsilon_0)^b(\varepsilon_0)^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} = 0.$$

Откуда получаем $B^k_{00} = 0$.

2. $i = d$, $j = 0$.

$$B^k_{d0}\varepsilon_k = C^{ab}{}_c(\varepsilon_d)^{\hat{b}}(\varepsilon_0)^c\varepsilon_a + C_{ab}{}^c(\varepsilon_d)^b(\varepsilon_0)^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} = 0.$$

Откуда получаем $B^k_{d0} = 0$.

3. $i = \hat{d}$, $j = f$.

$$B^k_{\hat{d}f}\varepsilon_k = C^{ab}{}_c(\varepsilon_{\hat{d}})^{\hat{b}}(\varepsilon_f)^c\varepsilon_a + C_{ab}{}^c(\varepsilon_{\hat{d}})^b(\varepsilon_f)^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}} = C^{ab}{}_c\delta^d_b\delta^c_f\varepsilon_a = C^{ad}{}_f\varepsilon_a.$$

Таким образом, $B^0_{\hat{d}f}\varepsilon_0 + B^a_{\hat{d}f}\varepsilon_a + B^{\hat{a}}_{\hat{d}f}\varepsilon_{\hat{a}} = C^{ad}{}_f\varepsilon_a$. В силу линейной независимости базисных векторов получим $B^0_{\hat{d}f} = 0$, $B^a_{\hat{d}f} = C^{ad}{}_f$, $B^{\hat{a}}_{\hat{d}f} = 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Следующий структурный тензор определяется следующим образом (он тоже является тензорным полем типа (2,1))

$$C(X,Y)(m) = \tilde{C}^{abc}(p)X^{\hat{b}}(p)Y^{\hat{c}}(p)\varepsilon_a + \tilde{C}_{abc}(p)X^b(p)Y^c(p)\varepsilon_{\hat{a}},$$

где $p = (m, \varepsilon_i)$ – произвольный A-репер с вершиной в точке m, а функции $\tilde{C}^{abc}$ и $\tilde{C}_{abc}$ такие же как C^{abc} и C_{abc} только без альтернации. На критерии принадлежности классам эта замена не влияет также как в случае почти эрмитовых структур, а инвариантные выражения становятся в два раза короче.

Опять получим инвариантную запись для этого структурного тензора. Опять, опуская значки $\mathbb{C}$ и m, получим

$$C(X,Y) = \frac{i}{2}(\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\varepsilon_a - \Phi^{\hat{a}}_{b,c}X^bY^c\varepsilon_{\hat{a}}) = \frac{i}{2}(\mathfrak{l}(\nabla\Phi(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}))X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}} - \mathfrak{l}(\nabla\Phi(\varepsilon_b, \varepsilon_c))X^bY^c) =$$
$$= -\frac{i}{2}\Phi^2(\nabla\Phi(\bar{\pi}X, \bar{\pi}Y) - \nabla\Phi(\pi X, \pi Y)) = -\frac{1}{4}(\Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X)).$$

Рассуждая аналогично замечанию 2.1, получим альтернативную формулу для тензорного поля C

$$C(X,Y) = \frac{i}{2}(\pi\nabla\Phi(\bar{\pi}X, \bar{\pi}Y) - \bar{\pi}\nabla\Phi(\pi X, \pi Y)) =$$
$$= -\frac{1}{8}(\Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X) - \Phi\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi^2X) + \Phi\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X)).$$

Определим отображение $D : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$D(X)(m) = C^{ab}X^{\hat{b}}\varepsilon_a + C_{ab}X^b\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Восстанавливаем инвариантный вид этого отображения (опять опускаем значки $\mathbb{C}$ и m).

$$D(X) = (-i\Phi^a_{0,\hat{b}} + \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},0})X^{\hat{b}}\varepsilon_a + (i\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0})X^b\varepsilon_{\hat{a}} =$$

По определению компонент ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ в A-реперах имеем

$$\nabla\Phi(\xi, \varepsilon_{\hat{b}}) = \Phi^0, 0, \hat{b}\varepsilon_0 + \Phi^a_{\hat{b},0}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}\varepsilon_{\hat{a}} \Rightarrow \Phi^a_{\hat{b},0}\varepsilon_a = \pi\nabla\Phi(\xi, \varepsilon_{\hat{b}});$$

$$\nabla\Phi(\varepsilon_{\hat{b}}, \xi) = \Phi^0_{\hat{b},0}\varepsilon_0 + \Phi^a_{\hat{b},0}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},0}\varepsilon_{\hat{a}}; \Rightarrow \Phi^a_{\hat{b},0}\varepsilon_a = \mathfrak{l}\nabla\Phi(\varepsilon_{\hat{b}}, \xi);$$

$$\nabla\Phi(\xi, \varepsilon_b) = \Phi^0_{0,b}\varepsilon_0 + \Phi^a_{0,b}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{0,b}\varepsilon_{\hat{a}}; \Rightarrow \Phi^{\hat{a}}_{0,b}\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\pi}\nabla\Phi(\xi, \varepsilon_b);$$

$$\nabla\Phi(\varepsilon_b, \xi) = \Phi^0_{b,0}\varepsilon_0 + \Phi^a_{b,0}\varepsilon_a + \Phi^{\hat{a}}_{b,0}\varepsilon_{\hat{a}}; \Rightarrow \Phi^{\hat{a}}_{b,0}\varepsilon_{\hat{a}} = \mathfrak{l}\nabla\Phi(\varepsilon_b, \xi).$$

Возвращаемся к цепочке равенств.

$$= i(-\pi\nabla\Phi(\xi,\bar\pi X)+\frac{1}{2}\mathfrak{l}\nabla\Phi(\bar\pi X,\xi)+\bar\pi\nabla\Phi(\xi,\pi X)-\frac{1}{2}\mathfrak{l}\nabla\Phi(\pi X,\xi)) = -\frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\nabla_\xi(\Phi)(\Phi X)).$$

Если вместо $\mathfrak{l}$ ставить π, получается формула на одно слагаемое длиннее и с двойками. Итак,

$$D(X) = -\frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\nabla_\xi(\Phi)(\Phi X)).$$

Определим отображение $E:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$E(X)(m) = C^a{}_bX^b\varepsilon_a + C_a{}^bX^{\hat b}\varepsilon_{\hat a}.$$

Тогда

$$E(X) = -i\Phi^a_{0,b}X^b\varepsilon_a + i\Phi^{\hat a}_{0,\hat b}X^{\hat b}\varepsilon_{\hat a} =$$

По определению компонент ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ в А-реперах имеем

$$\nabla\Phi(\xi,\varepsilon_b) = \Phi^0_{0,b}\varepsilon_0+\Phi^a_{0,b}\varepsilon_a+\Phi^{\hat a}_{0,b}\varepsilon_{\hat a};\Rightarrow\ \Phi^a_{0,b}\varepsilon_a = \pi\nabla\Phi(\xi,\varepsilon_b);$$

$$\nabla\Phi(\xi,\varepsilon_{\hat b}) = \Phi^0_{0,\hat b}\varepsilon_0+\Phi^a_{0,\hat b}\varepsilon_a+\Phi^{\hat a}_{0,\hat b}\varepsilon_{\hat a};\Rightarrow\ \Phi^{\hat a}_{0,\hat b}\varepsilon_{\hat a} = \bar\pi\nabla\Phi(\xi,\varepsilon_{\hat b}).$$

Возвращаемся к цепочке равенств.

$$= -i\pi\nabla\Phi(\xi,\pi X)+i\bar\pi\nabla\Phi(\xi,\bar\pi X) = \frac{i}{4}((\Phi^2+i\Phi)\nabla\Phi(\xi,-\Phi^2X-i\Phi X)+(-\Phi^2+i\Phi)\nabla\Phi(\xi,-\Phi^2X+i\Phi X)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi).$$

Итак,

$$E(X) = \frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi).$$

Определим отображение $F:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$F(X) = -i\Phi^0_{a,b}X^b\varepsilon_{\hat a}+i\Phi^0_{\hat a,\hat b}X^{\hat b}\varepsilon_a,$$

где вместо D^{ab} и D_{ab} мы берем аналогичные отображения, но без альтернаций. Восстанавливаем инвариантный вид. Заметим, что нижний индекс a стоит в суммировании и провести рассуждения как выше здесь не получается. Чтобы перейти к стандартным вычислениям, воспользуемся свойством симметрии функций $\Phi^0_{a,b}$ по верхнему и первому нижнему индексам.

$$F(X) = -i\Phi^0_{a,b}X^b\varepsilon_{\hat a}+i\Phi^0_{\hat a,\hat b}X^{\hat b}\varepsilon_a = i\Phi^{\hat a}_{0,b}X^b\varepsilon_{\hat a}-i\Phi^a_{0,\hat b}X^{\hat b}\varepsilon_a =$$
$$= i(\bar\pi\nabla\Phi(\xi,\pi X)-\pi\nabla\Phi(\xi,\bar\pi X)) = \frac{i}{4}((-\Phi^2+i\Phi)\nabla\Phi(\xi,-\Phi^2X-i\Phi X)-(-\Phi^2-i\Phi)\nabla\Phi(\xi,-\Phi^2X+i\Phi X)) =$$
$$= -\frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi).$$

Наконец, определим векторное поле $G = D^a\varepsilon_a + D_a\varepsilon_{\hat a}$. Имеем

$$G = i\Phi^0_{\hat a,0}\varepsilon_a - i\Phi^0_{a,0}\varepsilon_{\hat a} = -i\Phi^a_{0,0}\varepsilon_a + i\Phi^{\hat a}_{0,0}\varepsilon_{\hat a} = -i\pi\nabla\Phi(\xi,\xi)+i\bar\pi\nabla\Phi(\xi,\xi) = -\Phi\nabla_\xi(\Phi)\xi.$$

§2.5. Классы почти контактных метрических структур. Критерии в А-репере.

5.1. Нормальная структура. Почти контактная метрическая структура (Φ,η,ξ,g) называется *нормальной*, если

$$N_\Phi + d\eta\otimes\xi = 0,$$

где

$$N_\Phi(X,Y) = \Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]$$

тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ. Очевидно, что он кососимметричен.

Замечание 2.2. Здесь выбраны коэффициенты перед тензором Нейенхейса так, чтобы получился нужный критерий на пространстве присоединенной G-структуры. Определение внешнего дифференциала не дает коэффициента одна вторая и поэтому убираются коэффициенты перед N.

Задача 2.1. Выразить тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ и 2-форму $d\eta$ через ковариантные дифференциалы в римановой связности метрики g эндоморфизма Φ и 1-формы η соответственно.

Решение. Начнем с $d\eta$. Такую задачу мы уже решали в курсе Многомерная дифференциальная геометрия I. Повторим ее решение еще раз.

По определению оператора внешнего дифференцирования d имеем

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]),\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Так как риманова связность имеет нулевое кручение, получим $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. Тогда последнее равенство примет вид

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X). \tag{2.16}$$

С другой стороны, применяя оператор ковариантного дифференцирования ∇_X к равенству $\eta(Y) = C^{(1)}_{(1)}(\eta \otimes Y)$ и учитывая свойство ковариантного дифференцирования $\nabla_X f = X(f)$, получим

$$X(\eta(Y)) = \nabla_X(\eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y).$$

Подставляя это равенство два раза в (2.16), получим

$$d\eta(X,Y) = \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)X.$$

Займемся тензором Нейенхейса. Учтем, что связность без кручения

$$N_\Phi(X,Y) = \Phi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (\nabla_{\Phi X}(\Phi Y) - \nabla_{\Phi Y}(\Phi X)) - \Phi(\nabla_{\Phi X} Y - \nabla_Y(\Phi X)) - \Phi(\nabla_X(\Phi Y) - \nabla_{\Phi Y} X). \tag{2.17}$$

Применяем оператор ковариантного дифференцирования ∇_X к тождеству $\Phi(Y) = C^{(2)}_{(1)}(\Phi \otimes Y)$ и получаем

$$\nabla_X(\Phi Y) = \nabla_X(\Phi)Y + \Phi(\nabla_X Y).$$

Подставляем это тождество в (2.17) и приводим подобные

$$N_\Phi(X,Y) = \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X - \Phi\nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_Y(\Phi)X.$$

□

Задача 2.2. Запишем определение нормальной структуры с учетом результата задачи 2.1

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X - \Phi\nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_Y(\Phi)X + (\nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)X)\xi = 0.$$

Переходим к компонентам.

$$\Phi^k_{j,\ell}\Phi^\ell_i - \Phi^k_{i,\ell}\Phi^\ell_j - \Phi^k_\ell\Phi^\ell_{j,i} + \Phi^k_\ell\Phi^\ell_{i,j} + (\eta_{j,i} - \eta_{i,j})\xi^k = 0.$$

Рассматриваем свободные индексы.

1. $i=a,\ j=b,\ k=c$. Тождество $0=0$.
2. $i=\hat a,\ j=b,\ k=c$. Тождество $0=0$.
3. $i=a,\ j=\hat b,\ k=c$. Тождество $0=0$.
4. $i=a,\ j=b,\ k=\hat c$. Получим $\Phi^{\hat c}_{b,a} - \Phi^{\hat c}_{a,b} = 0$. Из обозначений § **??** получаем

$$C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{[b,c]} = 0.$$

Обратное, очевидно. Таким образом, получаем условие $C_{abc} = 0$.

5. $i=0,\ j=b,\ k=c$. Тождество $0=0$.
6. $i=0,\ j=\hat b,\ k=c$. Получим $2\sqrt{-1}\Phi^c_{0,\hat b} - \sqrt{-1}\Phi^c_{\hat b,0} = 0$. Согласно обозначениям § **??** получим $C^{cb} = 0$.
7. $i=a,\ j=b,\ k=0$. Получим $\Phi^0_{b,a} - \Phi^0_{a,b} = 0$, то есть $D_{ab} = 0$.
8. $i=\hat a,\ j=b,\ k=0$. Тождество $0=0$.
9. $i=0,\ j=b,\ k=0$. Получим $\eta_{b,0} - \eta_{0,b} = 0$, то есть $D_b = 0$.
10. $i=0,\ j=0,\ k=0$. Тождество $0=0$.

Кососимметричность по индексам i и j и вещественность дает возможность не рассматривать остальные случаи (получим либо то же самое, либо комплексно сопряженное).

Теорема 2.1. *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда* $C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0$.

5.2. Контактная структура (или почти сасакиева). Почти контактная метрическая структура называется *контактной* (или *почти сасакиевой*), если $d\eta = 2\Omega$, где $\Omega(X,Y) = g(X, \Phi Y)$ – фундаментальная форма.

Используя результат задачи 2.1 мы можем записать равенство, определяющее контактную структуру в виде

$$\nabla_X(\eta)Y - \nabla_Y(\eta)X = 2g(X, \Phi Y). \tag{2.18}$$

Задача 2.3. Получить критерий контактной структуры на присоединенной G-структуре.

Доказательство. Запишем (2.18) в компонентах

$$\eta_{j,i} - \eta_{i,j} = 2g_{ik}\Phi^k_j.$$

1. $i = a$, $j = b$. Получим $\Phi^0_{b,a} - \Phi^0_{a,b} = 0$, то есть $D_{ab} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Получим $C^a{}_b - C_b{}^a = 2\sqrt{-1}\delta^a_b$, то есть $D^a_b = -2\sqrt{-1}\delta^a_b$.

3. $i = 0$, $j = b$. Получим $D_b = 0$.

4. $i = 0$, $j = 0$. Получим $0 = 0$.

Остальные условия в силу кососимметричности по i и j и вещественности дадут либо те же условия, либо комплексно сопряженные. □

Теорема 2.2. *Почти контактная метрическая структура является контактной тогда и только тогда, когда $D_{ab} = 0$, $D^a_b = -2\sqrt{-1}\delta^a_b$, $D_a = 0$.*

Доказанная теорема является критерием, но это далеко не все условия, которые можно получить на системы функций, возникших в первой группе структурных уравнений. Из определения контактной структуры следует, что ее фундаментальная форма Ω является замкнутой, то есть $d\Omega = 0$. Выразив внешний дифференциал формы Ω через ковариантные производные (см. курс Многомерная дифференциальная геометрия I), получим

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z,X) + \nabla_Z(\Omega)(X,Y) = 0. \tag{2.19}$$

Применяя ковариантное дифференцирование к определению фундаментальной формы $\Omega(Y,Z) = g(Y, \Phi Z)$, получим $\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = g(Y, \nabla_X(\Phi)Z)$. Подставляем в (2.19)

$$g(Y, \nabla_X(\Phi)Z) + g(Z, \nabla_Y(\Phi)Z) + g(X, \nabla_Z(\Phi)Y) = 0.$$

В компонентах это равенство примет вид

$$g_{j\ell}\Phi^\ell_{k,i} + g_{k\ell}\Phi^\ell_{i,j} + g_{i\ell}\Phi^\ell_{j,k} = 0.$$

1. $i = a$, $j = b$, $k = c$. Получим $C_{[abc]} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Получим $C_{bc}{}^a = 0$.

3. $i = 0$, $j = b$, $k = c$. Получим $\Phi^{\hat{b}}_{c,0} + \Phi^0_{b,c} - \Phi^0_{c,b} = 0$. Так как для контактной структуры $D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]} = 0$, получим $\Phi^{\hat{b}}_{c,0} = 0$. Тогда

$$C_{bc} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{b}}_{0,c} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{b}}_{c,0} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{b}}_{0,c} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{b,c}.$$

Так как $\Phi^0_{[a,b]} = 0$, получим $C_{[bc]} = 0$.

4. $i = 0$, $j = \hat{b}$, $k = c$. Получим $\Phi^{\hat{c}}_{0,\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},c} = 0$. Тогда

$$-2\sqrt{-1}\delta^b_c = D^b_c = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{b},c} - \sqrt{-1}\Phi^0_{c,\hat{b}} = -2\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{b},c} = 2\sqrt{-1}\Phi^b_{0,c} = -2C^b{}_c.$$

Откуда получаем $C^b{}_c = -\sqrt{-1}\delta^b_c$.

5. $i = 0$, $j = 0$, $k = c$. Получим тождество $0 = 0$.

Итак, мы получаем дополнительные тождества для контактных структур

$$C_{[abc]} = 0; \quad C_{ab}{}^c = 0; \quad C_{[ab]} = 0; \quad C^b{}_c = \sqrt{-1}\delta^b_c.$$

Более того, мы получили следующее

Теорема 2.3. *Если для произвольной почти контактной метрической структуры имеют место тождества*

$$D_{ab} = 0; \quad D^a_b = -2\sqrt{-1}\delta^a_b; \quad D_a = 0,$$

то также имеют место тождества

$$C_{[abc]} = 0; \quad C_{ab}{}^c = 0; \quad C_{[ab]} = 0; \quad C^b{}_c = \sqrt{-1}\delta^b_c.$$

5.3. К-контактная структура. Почти контактная метрическая структура называется *К-контактной*, если она является контактной и ее структурная форма η является формой Киллинга, то есть

$$d\eta = 2\Omega; \quad \nabla_X(\eta)X = 0.$$

Поляризуя второе условие, получим $\nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0$.

Первое условие мы уже записали в терминах присоединенной G-структуры. Запишем второе условие. В компонентах оно имеет вид $\eta_{i,j} + \eta_{j,i} = 0$.

1. $i = a$, $j = b$. Получим $\Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0$. Так как из первого условия К-контактной структуры мы получали $\Phi^0_{a,b} - \Phi^0_{b,a} = 0$, то $\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = \Phi^0_{a,b} = 0$. Тогда $C_{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}$ и C_{ab} – кососимметричны. Верно и обратное, из кососимметричности C_{ab} следует $\Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0$. Таким образом, в этом пункте получаем $C_{[ab]} = C_{ab}$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Получим $C^a{}_b + C_b{}^a = 0$. Так как из первого условия мы получили $-2\sqrt{-1}\delta^a_b = D^a_b = C_b{}^a - C^a{}_b = -2C^a{}_b$, то есть $C^a{}_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$. Верно и обратное. Тогда получаем условие $C^a{}_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$.

3. $i = 0$, $j = b$. Получим $D_b = 0$.

4. $i = 0$, $j = 0$. Тождество $0 = 0$.

Теорема 2.4. *Почти контактная структура является К-контактной тогда и только тогда, когда* $D_{ab} = 0$, $D^a_b = -2\sqrt{-1}\delta^a_b$, $D_a = 0$, $C_{[ab]} = C_{ab}$, $C^a{}_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$.

Дополнительные тождества для К-контактных структур, взятые из контактных

$$C_{[abc]} = 0; \quad C_{ab}{}^c = 0; \quad C_{[ab]} = 0.$$

Кроме того, из $C_{[ab]} = 0$ и $C_{[ab]} = C_{ab}$ получаем, что для К-контактных структур всегда $C_{ab} = 0$.

Следствие 2.2. Контактная структура является К-контактной тогда и только тогда, когда $C_{ab} = 0$.

5.4. Квазисасакиева структура. Почти контактная метрическая структура называется *квазисасакиевой*, если она нормальна и имеет замкнутую фундаментальную форму, то есть

$$N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0; \quad d\Omega = 0.$$

Эти два равенства мы уже переводили на язык присоединенной G-структуры: первое в нормальных структурах, а второе – в контактных. Нам осталось только собрать результаты. Только изменится пункт 4 из второго условия (см. выкладки для контактной структуры). В этом пункте мы получаем $C_c{}^b + C^b{}_c = 0$. Но теперь у нас нет дополнительных условий на D^b_c. Поэтому мы получим следующее $D^b_c = C_c{}^b - C^b{}_c = 2C_c{}^b$.

Теорема 2.5. *Почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой тогда и только тогда, когда* $C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0$, $C_{ab}{}^c = 0$, $D^b_c = 2C_c{}^b$.

5.5. Сасакиева структура. Почти контактная метрическая структура называется *сасакиевой*, если она нормальная и контактная.

Собираем условия нормальной и контактной структур (на присоединенной G-структуре)

Теорема 2.6. *Почти контактная метрическая структура является сасакиевой тогда и только тогда, когда* $C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0$, $D^a_b = -2\sqrt{-1}\delta^a_b$.

Кроме того, имеют место тождества $C_{ab}{}^c = 0$, $C^b{}_c = \sqrt{-1}\delta^b_c$.

5.6. Почти косимплектическая структура. Почти контактная метрическая структура называется *почти косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы замкнуты, то есть

$$d\Omega = 0; \quad d\eta = 0.$$

Рассмотрим второе условие. Оно равносильно тождеству

$$\nabla_X(\eta)Y - \nabla_Y(\eta)X = 0.$$

В компонентах $\eta_{i,j} - \eta_{j,i} = 0$.

1. $i = a$, $j = b$. Получим $\Phi^0_{a,b} - \Phi^0_{b,a} = 0$, то есть $D_{ab} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Получим $-C^a{}_b + C_b{}^a = 0$, то есть $D^a_b = 0$.

3. $i = 0$, $j = b$. Получим $D_b = 0$.

4. $i = 0$, $j = 0$. Тождество $0 = 0$.

Первое условие равносильно равенству (см.контактные структуры)

$$g(Y, \nabla_X(\Phi)Z) + g(Z, \nabla_Y(\Phi)Z) + g(X, \nabla_Z(\Phi)Y) = 0.$$

В компонентах это равенство примет вид

$$g_{j\ell}\Phi^{\ell}_{k,i} + g_{k\ell}\Phi^{\ell}_{i,j} + g_{i\ell}\Phi^{\ell}_{j,k} = 0.$$

1. $i = a$, $j = b$, $k = c$. Получим $C_{[abc]} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Получим $C_{bc}{}^{a} = 0$.

3. $i = 0$, $j = b$, $k = c$. Получим $\Phi^{\hat{b}}_{c,0} + \Phi^{0}_{b,c} - \Phi^{0}_{c,b} = 0$. Так как из второго условия мы получили $D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{[a,b]} = 0$, получим $\Phi^{\hat{b}}_{c,0} = 0$. Тогда

$$C_{bc} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{b}}_{0,c} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{b}}_{c,0} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{b}}_{0,c} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{b,c}.$$

Так как $\Phi^{0}_{[a,b]} = 0$, получим $C_{[bc]} = 0$.

4. $i = 0$, $j = \hat{b}$, $k = c$. Получим $\Phi^{\hat{c}}_{0,\hat{b}} + \Phi^{0}_{\hat{b},c} = 0$. Тогда $\sqrt{-1}\Phi^{\hat{c}}_{0,\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi^{b}_{0,c} = 0$, то есть $C_{c}{}^{b} + C^{b}{}_{c} = 0$. С учетом пункта 2 второго условия получим $C_{a}{}^{b} = 0$.

5. $i = 0$, $j = 0$, $k = c$. Получим тождество $0 = 0$.

Теорема 2.7. *Почти контактная метрическая структура является почти косимплектической тогда и только тогда, когда $C_{[abc]} = C_{ab}{}^{c} = C_{[ab]} = D_{ab} = 0$, $C_{a}{}^{b} = D^{b}_{a} = 0$, $D_{a} = 0$.*

5.7. Слабо косимплектическая структура.

Почти контактная метрическая структура называется слабо косимплектической, если ее фундаментальная и структурная формы являются формами Киллинга, то есть

$$\nabla_X(\Omega)(X,Y) = 0\,(\Leftrightarrow \nabla_X(\Phi)X = 0); \quad \nabla_X(\eta)X = 0.$$

Замечание 2.3. Слабо косимплектическую структуру также определяют только первым условием, то есть как почти контактную метрическую структуру, для которой $\nabla_X(\Phi)X = 0$. Ниже мы покажем, что эти определения эквивалентны, то есть киллинговость структурной формы следует из киллинговости фундаментальной формы.

Поляризуем оба условия

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0; \quad \nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0.$$

В компонентах получим

$$\Phi^{k}_{i,j} + \Phi^{k}_{j,i} = 0; \quad \eta_{i,j} + \eta_{j,i} = 0.$$

Рассмотрим первое условие

1. $i = a$, $j = b$, $k = c$. Тождество $0 = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Получим $C^{ca}{}_{b} = 0$.

3. $i = a$, $j = b$, $k = \hat{c}$. Получим $\Phi^{\hat{c}}_{a,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,a} = 0$, то есть функции $\Phi^{\hat{c}}_{a,b}$ будут кососимметричны по любой паре индексов, то есть $C_{[abc]} = C_{abc}$.

4. $i = 0$, $j = b$, $k = c$. Получим $\Phi^{c}_{0,b} = 0$, то есть $C^{c}{}_{b} = 0$.

5. $i = a$, $j = b$, $k = 0$. Получим $\Phi^{0}_{a,b} + \Phi^{0}_{b,a} = 0$. Тогда $C_{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}$ будут кососимметричны, то есть $C_{[ab]} = C_{ab}$.

6. $i = 0$, $j = b$, $k = 0$. Получим $D_{b} = 0$.

7. $i = 0$, $j = b$, $k = \hat{c}$. Получим $\Phi^{\hat{c}}_{0,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,0} = 0$. Тогда

$$C_{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} = \frac{3\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = -\frac{3\sqrt{-1}}{2}\Phi^{0}_{a,b}.$$

Так как $D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{[a,b]} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,b}$ в силу пункта 5, получим $C_{ab} = \frac{3}{2}D_{ab}$. Обратно, пусть выполняется последнее равенство. Тогда C_{ab} вслед за D_{ab} будут кососимметричны, а значит, $\Phi^{0}_{a,b}+\Phi^{0}_{b,a} = 0$. Далее, подставляя в $C_{ab} = \frac{3}{2}D_{ab}$ выражения для C_{ab} и D_{ab} через Φ, получим $\Phi^{\hat{c}}_{0,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,0} = 0$. Итак, пункты 5 и 7 эквивалентны выполнению равенства $C_{ab} = \frac{3}{2}D_{ab}$.

Рассмотрим второе условие

1. $i = a$, $j = b$. Получим $\Phi^{0}_{a,b} + \Phi^{0}_{b,a} = 0$. Это условие уже было (пункт 5).

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Получим $C^{a}{}_{b} + C^{b}{}_{a} = 0$. В пункте 4 выше было получено более сильное условие.

3. $i = 0$, $j = b$. Получим $D_{b} = 0$. Это условие уже было получено в пункте 6.

4. $i = 0$, $j = 0$. Тождество $0 = 0$.

Мы видим, что второе условие из определения слабо косимплектической структуры не дало ничего нового. Следовательно, это условие вытекает из $\nabla_X(\Phi)X = 0$ и может быть опущено в определении.

Теорема 2.8. *Почти контактная метрическая структура является слабо косимплектической тогда и только тогда, когда $C_{ab}{}^{c} = 0$, $C_{[abc]} = C_{abc}$, $C^{a}{}_{b} = 0$, $D_{a} = 0$, $2C_{ab} = 3D_{ab}$.*

Следствие 2.3. Для слабо косимплектической структуры $D^{a}_{b} = 0$.

5.8. Точнейше косимплектическая структура. Почти контактная метрическая структура называется точнейше косимплектической, если ее фундаментальная форма является формой Киллинга, а структурная форма замкнута, то есть

$$\nabla_X(\Omega)(X,Y)=0\,(\Leftrightarrow\ \nabla_X(\Phi)X=0);\quad d\eta=0.$$

Запишем эти условия в виде

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=0;\quad \nabla_X(\eta)Y-\nabla_Y(\eta)X=0.$$

Первое условие в точности повторяет первое условие из определения слабо косимплектических структур. Поэтому сразу получаем условия: ${C_{ab}}^c=0$, $C_{[abc]}=C_{abc}$, ${C^a}_b=0$, $D_a=0$, $2C_{ab}=3D_{ab}$.

Второе условие повторяет второе условие из почти косимплектических. Получим $D_{ab}=0$, $D^a_b=0$, $D_a=0$. Объединяя, получим

Теорема 2.9. *Почти контактная метрическая структура является точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда* ${C_{ab}}^c=0$, $C_{[abc]}=C_{abc}$, ${C^a}_b=D^a_b=0$, $D_a=0$, $D_{ab}=C_{ab}=0$.

5.9. Косимплектическая структура. Почти контактная метрическая структура называется косимплектической, если ее фундаментальная и структурная формы параллельны в римановой связности метрики g, то есть

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z)=0\,(\Leftrightarrow\ \nabla_X(\Phi)Y=0);\quad \nabla_X(\eta)Y=0.$$

В компонентах эти условия примут вид $\Phi^k_{i,j}=0$, $\eta_{i,j}=0$. Очевидно, что из этого следует, что все системы функций, возникшие при выводе первой группы структурных уравнений равны нулю.

Покажем обратное. Очевидно, что

$$\Phi^a_{\hat b,c}=0;\quad \Phi^a_{0,b}=0;\quad \Phi^0_{b,0}=0;\quad \Phi^0_{a,\hat b}=0;\quad \Phi^0_{a,b}=0.$$

Рассмотрим $0=C^{abc}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat b,\hat c]}$. Тогда $\Phi^a_{\hat b,\hat c}=\Phi^a_{\hat c,\hat b}$. С учетом кососимметричности $\Phi^a_{\hat b,\hat c}=-\Phi^b_{\hat a,\hat c}$ получим

$$\Phi^a_{\hat b,\hat c}=-\Phi^b_{\hat a,\hat c}=-\Phi^b_{\hat c,\hat a}=\Phi^c_{\hat b,\hat a}=\Phi^c_{\hat a,\hat b}=-\Phi^a_{\hat c,\hat b}=-\Phi^a_{\hat b,\hat c}.$$

Следовательно, $\Phi^a_{\hat b,\hat c}=0$.

Рассмотрим $0=C^{ab}=-\sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat b}+\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,0}$. Так как $\Phi^a_{0,\hat b}=-\Phi^0_{\hat a,\hat b}=0$ в силу $\eta_{\hat a,\hat b}=0$, получим $\Phi^a_{0,\hat b}=0$.

Итак, все компоненты $\nabla\Phi$ и $\nabla\eta$ равны нулю (мы учитывали и комплексно сопряженные).

Теорема 2.10. *Почти контактная метрическая структура является косимплектической тогда и только тогда, когда* $C_{abc}={C_{ab}}^c=C_{ab}=D_{ab}={C^a}_b=D^a_b=D_a=0$.

5.10. Структуры Кенмоцу. Почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $\nabla_X(\Phi)Y=g(\Phi X,Y)\xi-\eta(Y)\Phi X$.

В компонентах $\Phi^k_{j,i}=g_{\ell j}\Phi^\ell_i\xi^k-\eta_j\Phi^k_i$.

1. $i=a$, $j=b$, $k=c$. Тождество $0=0$.
2. $i=\hat a$, $j=b$, $k=c$. Тождество $0=0$.
3. $i=a$, $j=\hat b$, $k=c$. Получим ${C^{ab}}_c=0$.
4. $i=a$, $j=b$, $k=\hat c$. Тождество $C_{abc}=0$.
5. $i=0$, $j=b$, $k=c$. Тождество $0=0$.
6. $i=0$, $j=\hat b$, $k=c$. Получим $\Phi^c_{\hat b,0}=0$.
7. $i=a$, $j=0$, $k=c$. Получим ${C^c}_a=-\delta^c_a$.
8. $i=\hat a$, $j=0$, $k=c$. Получим $\Phi^c_{0,\hat a}=0$.
9. $i=0$, $j=0$, $k=c$. Получим $D^c=0$.

Из пунктов 6 и 8 получаем, что $C_{ab}=0$. Из пункта 8 следует, что $D_{ab}=0$. обратно, пусть $C_{ab}=0$ и $D_{ab}=0$. Тогда $\Phi^0_{a,b}=\Phi^0_{b,a}$ и

$$0=C_{ab}=\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,b}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0}=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0}.$$

В крайне правой части последней цепочки равенств первое слагаемое симметрично по a и b, а второе кососимметрично, следовательно, каждое из них будет нулевым. Таким образом, мы получаем, что пункты 6 и 8 эквивалентны $C_{ab}=0$ и $D_{ab}=0$.

Теорема 2.11. *Почти контактное метрическое многообразие является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда* $C_{abc}={C_{ab}}^c=C_{ab}=D_{ab}=D_a=0$, ${C^a}_b=-\delta^a_b$.

Следствие 2.4. Для многообразия Кенмоцу ${C^a}_b={C_b}^a=-\delta^a_b$ и $D^a_b=0$.

Следствие 2.5. Компоненты $\nabla\eta$ имеют вид $\eta_{a,b}=0$, $\eta_{\hat a,b}=\delta^a_b$, $\eta_{0,b}=0$, $\eta_{0,0}=0$.

5.11. Локально конформно квазисасакиевы структуры. Почти контактное метрическое многообразие называется локально конформно квазисасакиевым, если для любой точки этого многообразия существует окрестность U этой точки и гладкая функция f на этой окрестности, такие, что многообразие $(U, \Phi, e^{-f}\xi, e^{f}\eta, e^{2f}g)$ является квазисасакиевым многообразием.

Из моей статьи 2011 года (математический сборник, стр. 56 предложение 8) получаем критерий для локально конформно квазисасакиевой структуры

Теорема 2.12**.** *Почти контактная метрическая структура является локально конформно квазисасакиевой, если в окрестности каждой точки многообразия M существует точная форма β, такая что на пространстве присоединенной G-структуры выполняются соотношения $C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = 0$, ${C_{ab}}^{c} + \beta_a\delta_b^c - \beta_b\delta_a^c = 0$, $D_c^b = 2({C_c}^{b} - \beta_0\delta_c^b)$, $D_a = -\beta_a$.*

Замечание 2.4**.** Возможно 1-форма β – это контактная форма α (или отличается от нее знаком), введенная в работе Кириченко Баклашовой). Значит определена глобально и замкнута (тогда локально точна).