Неевклидовы геометрии.

29 мая 2017 г.

Содержание

Литература.

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, Том 2, Москва, Просвещение, 1988.

2. Гусева Н.И. и др. Геометрия Том 2, Москва, Академия, 2013.

3. Я.П. Понарин Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. Москва, 2004.

4. Я.П. Понарин Элементарная геометрия Том 1 Москва, 2004.

5. А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко Курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, 2000.

6. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов Геометрия, часть 2, Санкт-Петербург, 1997.

7. Л.С.Атанасян Геометрия Лобачевского, Москва, Просвещение, 2001.

8. А.И. Обухова История элементарной геометрии.

9. И.М. Яглом Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. Москва, 1969.

10. А.В. Хачатурян Геометрия Галилея. Москва, МЦНМО, 2005.

1. Воспоминания из оснований геометрии

В прошлом семестре мы изучали основания геометрии. Она строится следующим образом: берется три группы основных понятий (точки, прямые, плоскости) и вводятся основные отношения (принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности). Эти отношения удовлетворяют соответственно четырем группам аксиом. Геометрия, которая получается в результате, называется *абсолютной геометрией.* В этой геометрии вводятся такие, хорошо знакомые нам объекты, как отрезок, луч, полуплоскость, угол, треугольник, четырехугольник, окружность, прямой угол, перпендикуляр, длина отрезка и величина угла и т.д. Доказываются признаки равенства треугольников; теорема о существовании и единственности перпендикуляра; существование прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую. А дальше происходит развилка. Если добавить пятый постулат Евклида (или, эквивалентную ему аксиому о параллельной), то мы получим *евклидову геометрию.* А если добавим отрицание пятого постулата Евклида, то получим другую геометрию, которая называется *геометрией Лобачевского.*

Чтобы доказать, что та или иная геометрия, построенная на наборе аксиом, не противоречива, нужно построить ее модель. Другими словами, нужно взять объекты, уже построенные в рамках какой-то другой непротиворечивой теории, сказать, какие из этих объектов будут играть роль точек, какие прямых, какие плоскостей и сказать, как будут задаваться отношения между ними. Затем проверить, что при этом выполняются все аксиомы. Тем самым доказывается непротиворечивость новой теории. Непротиворечивость теории (в частности, геометрии) можно доказать только относительно, то есть относительно какой-то другой уже построенной теории. В самом начале этого пути стоит арифметика натуральных чисел.

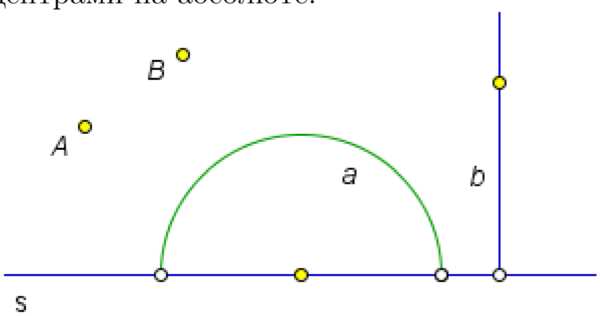
В прошлом семестре мы строили модели евклидовой геометрии. В этом семестре мы начнем с построения модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Точки и прямые. Первая группа аксиом.

Будем считать, что евклидова плоскость σ у нас уже построена (будем называть ее Е-плоскостью). Ее точки будем называть *Е-точками*, а ее прямые – *Е-прямыми*. Говоря об отношениях на евклидовой плоскости мы тоже будем добавлять букву Е.

Возьмем на Е-плоскости σ Е-прямую s. Назовем ее *абсолютом*. Эта Е-прямая делит плоскость σ на две Е-полуплоскости. Договоримся рисовать Е-прямую s горизонтально. Тогда эти полуплоскости условно назовем верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю Е-полуплоскость. Обозначим ее Λ.

Будем называть Е-полуплоскость Λ плоскостью в геометрии Лобачевского, короче, *плоскостью*. (У нас будет только одна плоскость, так как мы ограничимся построением планиметрии Лобачевского). Точки Е-полуплоскости Λ будем называть точками в геометрии Лобачевского, короче, точками. Прямыми в геометрии Лобачевского, короче, прямыми, будем называть перпендикулярные ему Е-лучи с началом на абсолюте и Е-полуокружности Е-окружностей с центрами на абсолюте.

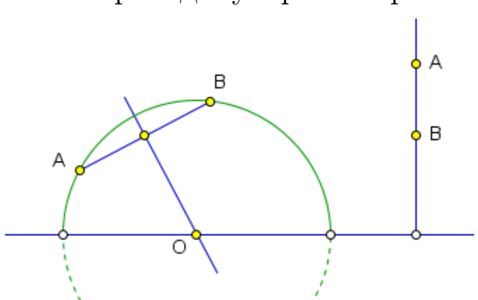


На рисунке изображены три точки A, B и C, а также две прямые a и b. Прямая a представляет из себя Е-полуокружность. Обратите внимание, что концы Е-полуокружности выколоты. Они не являются точками плоскости Λ. Прямая b представляет из себя Е-луч. Итак, мы смоделировали основные объекты.

Будем говорить, что точка M принадлежит прямой m, если соответствующая Е-точка M принадлежит Е-полуокружности (либо Е-лучу) m. Тем самым мы смоделировали отношение принадлежности точек прямым. Наша следующая задача проверить выполнение аксиом первой группы. Так как мы ограничиваемся планиметрией Лобачевского, то проверить нам нужно только аксиомы, относящиеся к планиметрии.

I_1, I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует единственная прямая, которой они принадлежат.

Доказательство. Возьмем две произвольные различные точки A и B. Е-точки A и B могут располагаться двумя разными способами: Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s и Е-прямая AB не перпендикулярна Е-прямой s.



Если Е-прямая AB перпендикулярна Е-прямой s, то проводим ее и берем луч, лежащий в Λ. Если не перпендикулярна, то проводим серединный перпендикуляр к Е-отрезку AB и выходим на центр O Е-окружности. Берем нужную полуокружность.

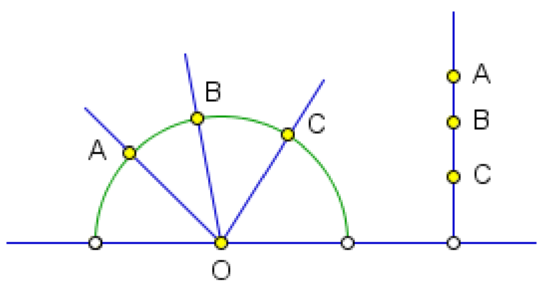
Единственность прямой AB следует из однозначной определенности Е-луча и Е-окружности с центром на s, проходящей через две заданные точки. □

I_3. На каждой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Это следует из того, что на евклидовой плоскости на любой полуокружности и луче можем взять по крайней мере две точки. Существуют три точки не лежащие ни на одной окружности ни на одном луче (как их выбрать?)

3. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Вторая группа аксиом.

Будем говорить, что точка B лежит между точками A и C на прямой a, если
1) (a – Е-луч) Е-точка B лежит между Е-точками A и C;
2) (a – Е-полуокружность с центром O) Е-луч OB является внутренним лучом Е-угла AOC.



Будем в этом случае обозначать $A - B - C$. Посмотри на аксиомы.

II_1. Если $A-B-C$, то A, B и C – три различные точки прямой и $C - B - A$.

Выполнение этой аксиомы непосредственно следует из свойств углов и внутренних лучей евклидовой геометрии.

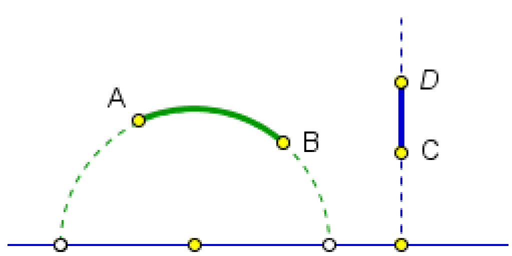
II_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует по крайней мере еще одна точка C на прямой AB, такая, что $A - B - C$.

Выполнение этой аксиомы тоже непосредственно следует из свойств фигур в евклидовой геометрии.

II_3. Среди трех точек одной прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.

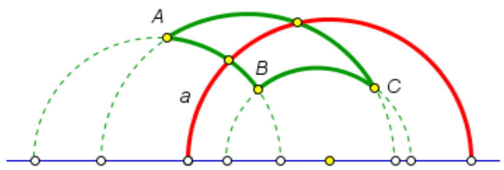
Для случая Е-луча утверждение следует из этой же аксиомы для евклидовой геометрии. В случае Е-угла легко показать, что если Е-луч OB является внутренним Е-лучом Е-угла AOC, то Е-луч OA не является внутренним Е-лучом Е-угла BOC. И тоже самое для OC. Проведите рассуждения самостоятельно.

Теперь мы можем ввести понятия отрезка.



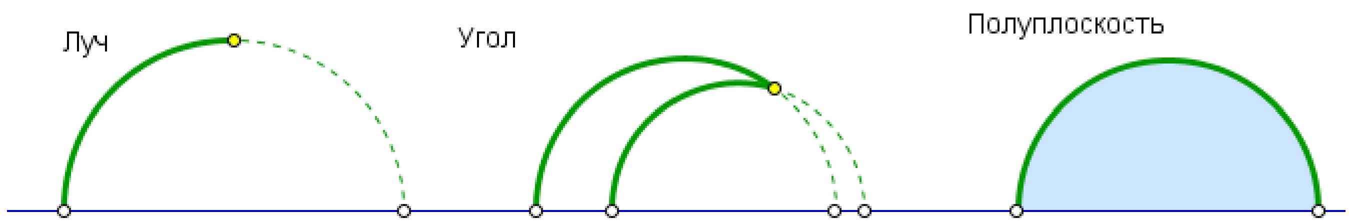
На рисунке изображены отрезки AB и CD.

II_4. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и a – прямая, лежащая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит через точку отрезка AC или BC.



Доказательство основывается на теореме из евклидовой геометрии: две окружности пересекаются тогда и только тогда, когда одна из них проходит через внутреннюю точку другой окружности. Пусть прямая a пересекает отрезок AB. Тогда либо точка A будет внутренней для Е-окружности a, либо B. Пусть это точка B. Тогда если точка C является внутренней для Е-окружности a, то пересечет AC, в противном случае – BC.

Теперь можно изобразить луч, полуплоскость, угол.



Луч – жирная зеленая линия. Дополнительный к нему луч – пунктирная линия. Угол изображен жирными зелеными линиями. Пунктирными линиями изображены вертикальный к нему угол и два смежный (постарайтесь их увидеть). Одна полуплоскость закрашена голубым. Все не закрашенное – дополнительная полуплоскость.

Задача 3.1. Изобразите угол и его внутренний луч. Рассмотрите случаи, когда обе стороны угла – Е-полуокружности; одна из сторон – Е-луч. Изобразите в обоих случаях отрезок с концами на сторонах угла.

4. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Третья группа аксиом.

4.1. Инверсия плоскости

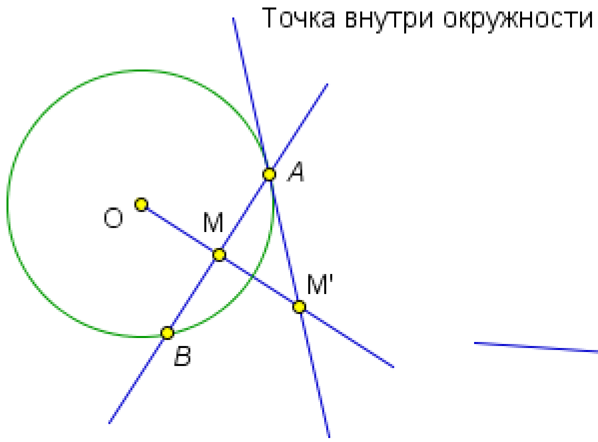
Для продолжения построения модели Пуанкаре нам потребуется такое понятие евклидовой геометрии как инверсия (евклидовой) плоскости. В этом пункте мы временно забываем про геометрию Лобачевского, все объекты относятся к евклидовой геометрии (букву Е добавлять не будем).

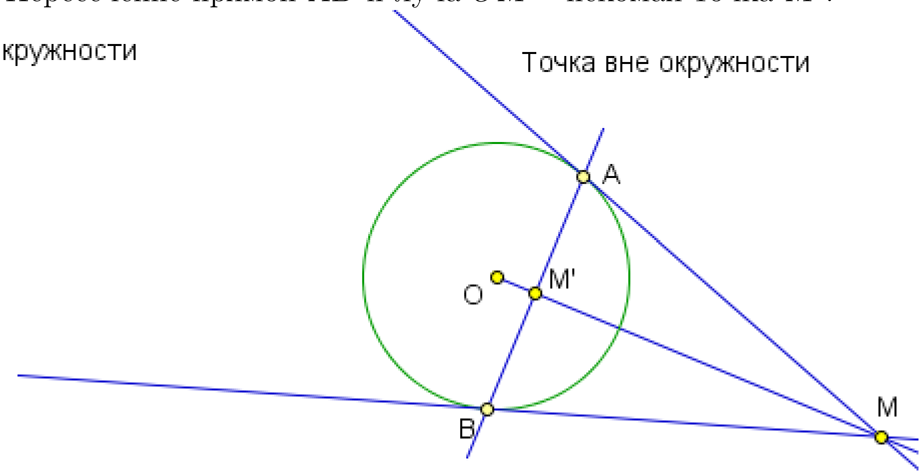
Рассмотрим евклидову плоскость σ. Фиксируем на ней точку O и окружность ω радиуса R с центром в этой точке. Отображение множества $\sigma \setminus O$ на себя, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', такую, что

$$1)\; M' \in [OM); \quad 2) OM \cdot OM' = R^2.$$

Образ точки M строится следующим образом: 1) если точка внутри окружности. Строим луч OM. Через точку пересечения с окружностью проводим касательную к ней. Пересекаем касательную с лучом OM. Получаем точку M'.

2) если точка вне окружности. Строим луч OM. Через M проводим касательные к окружности. Соединяем точки касания A и B. Пересечение прямой AB и луча OM – искомая точка M'.

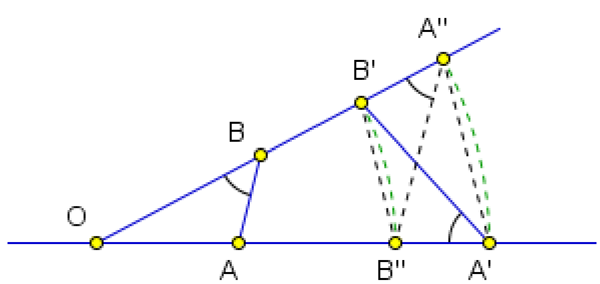




Динамический рисунок Инверсия можно посмотреть здесь
http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25

Легко видеть, что точки, лежащие на окружности инверсии являются инвариантными (докажите самостоятельно). Если точка M приближается к центру инверсии, то ее образ удаляется от центра инверсии и наоборот.

Замечание 4.1. Напомним еще одно свойство инверсии, которое помогает строить образы точек. Пусть инверсия I с центром O переводит точку A в A', B в B'. Тогда $\angle OBA = \angle OA'B'$. При этом говорят, что прямые AB и $A'B'$ *антипараллельны*.

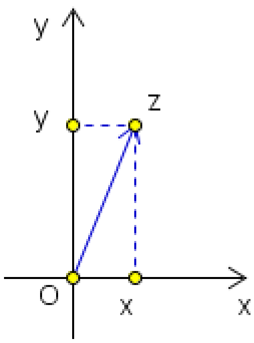


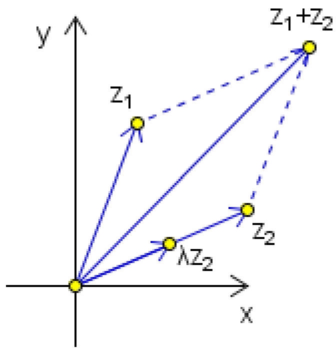
Отложим $OB'' = OB'$ и $OA'' = OA'$. Тогда трапеция $B'B''A'A''$ будет равнобедренной и из равенства $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ получим

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB''}{OA''}.$$

Следовательно, $AB \| A''B''$. Откуда получаем равенство углов.

Посмотрим, что будет происходить с прямыми и окружностями при инверсии. Проще всего для исследования инверсии подходят комплексные числа. Напомним, что комплексное число z – это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y). Алгебраическая запись комплексного числа $z = x + iy$. Комплексное число $x - iy$ называется сопряженным и обозначается $\bar{z}$. Если на плоскости зафиксировать прямоугольную декартову систему координат, то комплексное число можно изобразить точкой плоскости с координатами (x, y)



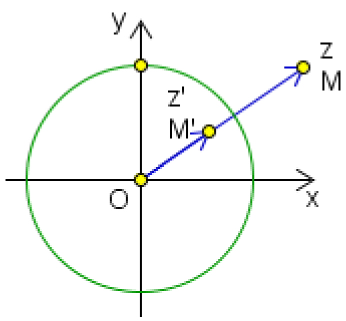


А можем изобразить представителем вектора с координатами (x, y), отложенного от начала системы координат. Сумму комплексных чисел можем представить как сумму векторов, умножение на вещественное число – как умножение вектора на вещественное число. Модуль $|z|$ определяется так:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z} \tag{4.1}$$

является длиной вектора, изображающего число z.

Используя эти свойства комплексных чисел выведем формулу для инверсии в комплексных числах. Пусть дана окружность радиуса R с центром O. Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O. Точка $M(x, y)$ будет задаваться комплексным числом $z = x + iy$. Точка $M'(x', y')$ (ее образ при инверсии) будет задаваться комплексным числом z'.



Тогда $z' = \lambda z$, где λ – некоторое положительное вещественное число, которое нужно найти. Мы знаем из определения инверсии, что $OM \cdot OM' = R^2$. Длина отрезка OM – это модуль комплексного числа z, а длина отрезка OM' – это модуль комплексного числа z'. Тогда получим

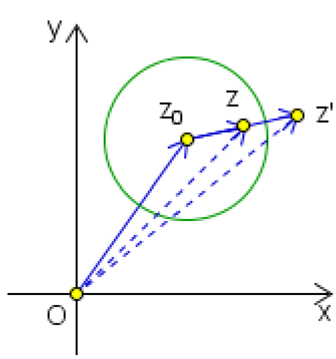
$$|z||z'| = R^2.$$

Подставляем $z' = \lambda z$ и учитываем, что $|\lambda z| = \lambda |z|$ (очевидное равенство, если представлять комплексные числа как векторы и учесть положительность λ). Тогда

$$\lambda |z|^2 = R^2 \Leftrightarrow \lambda z\bar{z} = R^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{R^2}{z\bar{z}}.$$

Подставляем найденное λ в $z' = \lambda z$, сокращаем на z и получаем формулу инверсии в удобной системе координат (центр системы в центре окружности инверсии)

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

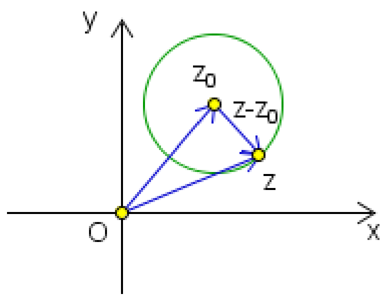


Задача 4.1. Докажите, что если центр окружности инверсии находится в точке z_0, то формулы инверсии будут иметь вид

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0.$$

В качестве указаний используйте рисунок.

Выведем уравнение окружности в комплексных числах. Смотрим на рисунок.



Пусть центр окружности находится в точке z_0. Точка z бегает по окружности и рисует ее. Она остается на окружности тогда и только тогда, когда вектор $z - z_0$ имеет длину R, то есть

$$|z - z_0| = R; \Leftrightarrow |z - z_0|^2 = R^2$$

или, используя равенство (4.1), получим уравнение окружности

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2.$$

Раскроем скобки в полученном уравнении

$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - R^2 = 0.$$

Обозначим $-z_0 = a$, $z_0\bar{z}_0 - R^2 = b$. Заметим, что b получилось вещественным числом. В этих обозначениях уравнение окружности будет иметь вид

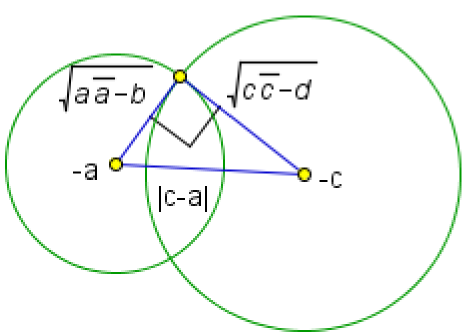
$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0,\ b \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Если уравнение окружности задано в таком виде, то легко найти ее центр и радиус по формулам

$$z_0 = -a; \quad R = \sqrt{a\bar{a} - b}.$$

Конечно же если уравнение множества точек задано в виде (4.2), чтобы это уравнение задавало окружность, нужно потребовать, чтобы $a\bar{a} - b > 0$.

В качестве следствия этой формулы получим условие ортогональности двух окружностей. Напомним, что углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными в этой точке.



Возьмем две окружности, заданные уравнениями

$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0;$$
$$z\bar{z} + c\bar{z} + \bar{c}z + d = 0.$$

На рисунок сразу нанесена информация по центрам и радиусам этих окружностей. Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, ортогональность окружностей означает перпендикулярность радиусов, проведенных в точку пересечения.

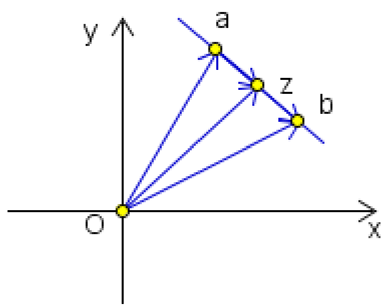
Теперь применяем теорему Пифагора

$$a\bar{a} - b + c\bar{c} - d = (c - a)(\bar{c} - \bar{a}).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$c\bar{a} + a\bar{c} = b + d.$$

Выведем уравнение прямой, проходящей через точки a и b (точки задали комплексными числами).



Пускаем по прямой бегать произвольную точку z. Она остается на прямой тогда и только тогда, когда векторы $z-a$ и $b-a$ коллинеарны. Значит, для них существует вещественное число λ, такое что

$$z-a=\lambda(b-a).$$

Умножим обе части этого равенства на комплексное число $\bar{b}-\bar{a}$. Тогда справа будет стоять вещественное число. Значит, число $(z-a)(\bar{b}-\bar{a})$ тоже должно быть вещественным.

Число будет вещественным тогда и только тогда, когда оно совпадает с комплексно сопряженным числом, то есть

$$(z-a)(\bar{b}-\bar{a})=(\bar{z}-\bar{a})(b-a).$$

Раскрываем скобки и приводим подобные

$$(\bar{a}-\bar{b})z-(a-b)\bar{z}+a\bar{b}-\bar{a}b=0.$$

Это уравнение прямой по двум точкам.

Заметим, что в этом уравнении $(\bar{a}-\bar{b})z-(a-b)\bar{z}$ и $a\bar{b}-\bar{a}b$ – чисто мнимые числа. Чтобы сделать их вещественными, умножим обе части уравнения на i. Число $i(a\bar{b}-\bar{a}b)$ будет вещественным. Обозначим его d. Число $-i(a-b)$ обозначим u. Заметим, что

$$\overline{(-i(a-b))}=i(\bar{a}-\bar{b}).$$

Тогда уравнение прямой можно переписать в виде

$$\bar{u}z+u\bar{z}+d=0,\ d\in\mathbb{R}.$$

Можно показать, что любое уравнение такого вида задает прямую.

Вернемся к рассмотрению свойств инверсии. Сначала заметим, что инверсия является инволютивным преобразованием, то есть если при данной инверсии точка M переходит в точку M', то точка M' при той же инверсии переходит в точку M. Это непосредственно следует из определения инверсии.

Выясним, в какое множество точек переходит прямая a при инверсии относительно окружности с центром в точке O радиуса R. Выберем систему координат с началом в центре окружности. Тогда инверсия задается формулой $z'=\frac{R^2}{\bar{z}}$. Прямая a задается уравнением $u\bar{z}+\bar{u}z+d=0$. Для нахождения образа прямой a выразим из формул инверсии z, подставим в уравнение прямой, приведем к общему знаменателю и вернемся к обозначению z.

$$dz\bar{z}+(R^2\bar{u})z+(R^2u)\bar{z}=0. \tag{4.3}$$

Это уравнение образа прямой a при инверсии.

Возможны два случая:

1) $d=0$. В этом случае прямая a проходит через начало координат (действительно, если вместо

z подставить 0, то получится верное равенство). Тогда образом прямой будет множество точек, задаваемое уравнением $(R^2\bar{u})z + (R^2u)\bar{z} = 0$. Разделим его на R^2 и увидим, что это уравнение прямой a. Итак, если прямая проходит через центр инверсии, то она (а точнее она без точки O) переходит в себя.
2) $d \neq 0$, то есть прямая a не проходит через центр инверсии. В этом случае уравнение (11.2) мы можем записать в виде

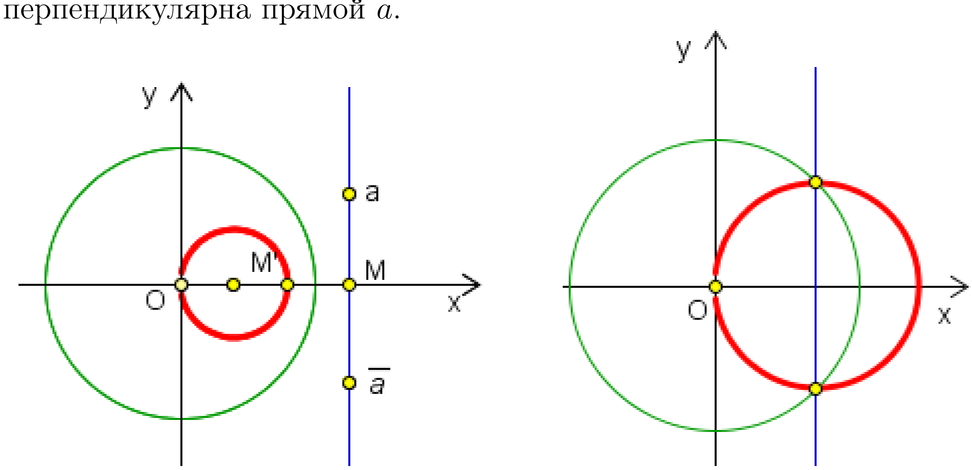
$$z\bar{z} + \frac{\overline{R^2\bar{u}}}{d}z + \frac{R^2\bar{u}}{d}\bar{z} = 0.$$

Это уравнение окружности, причем проходящей через начало координат (точка 0 удовлетворяет этому уравнению). Итак, образом прямой, не проходящей через центр инверсии, является окружность, проходящая через центр инверсии. Обозначим эту окружность ω.

Если мы расположим ось Ox системы координат перпендикулярно прямой a. Тогда в качестве точек, задающих эту прямую можно взять точки a и $\bar{a}$. Следовательно, $u = -i(a-b) = -i(a-\bar{a})$,

$$\bar{u} = i(\bar{a} - a) = -i(a - \bar{a}) = u.$$

Другими словами, u будет вещественным. Тогда центр окружности ω будет в точке $\frac{R^2\bar{u}}{d}$. Это тоже будет вещественное число, то есть центр образа прямой a будет лежать на оси Ox. Получаем, что прямая соединяющая центр окружности инверсии и центр окружности ω будет перпендикулярна прямой a.



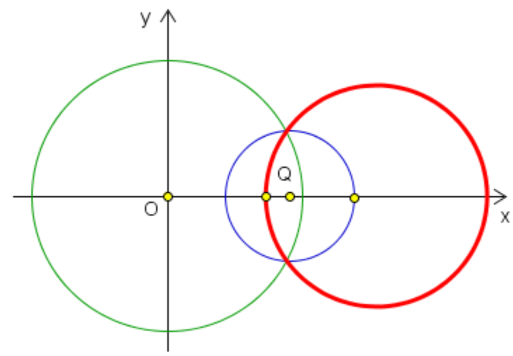
Из этого свойства вытекает способ построения образа прямой (не проходящей через центр инверсии) при инверсии. Проводим через центр инверсии прямую, перпендикулярную данной. Обозначаем точку их пересечения M. Строим образ точки M при инверсии. Строим на отрезке OM' как на диаметре окружность. Если прямая пересекает окружность инверсии, то построение еще упрощается. Точки пересечения прямой с окружностью инверсии являются инвариантными. Значит, окружность – образ прямой – тоже проходит через эти точки. Следовательно, нужно построить окружность по трем точкам.

Так как инверсия является инволютивным преобразованием, мы сразу можем сказать, что образом окружности, проходящей через центр инверсии, (а точнее окружности без центра инверсии) будет прямая. Способ построения этой прямой сформулируйте самостоятельно.

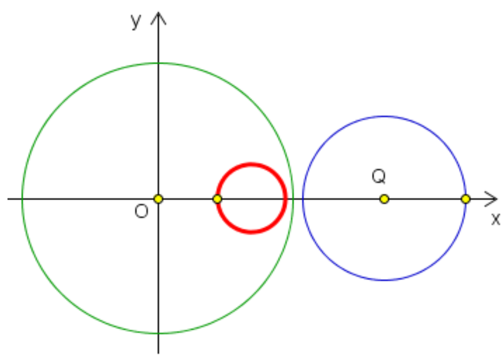
Выясним, какая фигура будет образом окружности ω с центром в точке Q радиуса r, не проходящей через центр инверсии. Выберем начало системы координат в центре окружности инверсии, а ось Ox пусть будет параллельна прямой, соединяющей центры окружности инверсии и данной окружности. Тогда уравнение инверсии будет $z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$, а уравнение данной окружности будет $(z-a)(\bar{z}-a) = r^2$, где a – комплексное число, соответствующее точке Q. Так как точка Q лежит на оси Ox, то a будет вещественным числом. Аналогично случаю прямой ищем образ окружности ω:

$$z\bar{z} + \frac{aR^2}{r^2}z + \frac{aR^2}{r^2}\bar{z} - \frac{R^4}{r^2} = 0.$$

Это уравнение окружности. При этом, так как число $\frac{aR^2}{r^2}$ – вещественное, то центр окружности ω' (образ окружности ω при инверсии) будет вещественным числом, а значит будет лежать на оси Ox, то есть на прямой, соединяющей центр окружности инверсии и данной окружности ω.



Если окружность ω пересекает окружность инверсии, то их общие точки будут инвариантны (значит будут принадлежать окружности ω') и нужно будет найти образ еще одной точки при инверсии. Затем по трем точкам построить окружность.



Посмотрите на картинку и сформулируйте самостоятельно алгоритм построения образа окружности при инверсии в случае, когда исходная окружность и окружность инверсии не пересекаются.

Посмотрите на динамический рисунок Инверсия на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy__geometrii/0-25. На втором листе подвигайте исходную окружность и посмотрите как будет меняться ее образ. В какой-то момент окружность и ее образ совпадут. Это будет случай, когда исходная окружность будет инвариантной. Выясним, как будут располагаться в этом случае исходная окружность и окружность инверсии. По картинке похоже, что они должны быть перпендикулярны. Проверим это.

Пусть исходная окружность ω инвариантна, то есть переходит сама в себя при инверсии. Опять выбираем систему координат с началом в центре инверсии и осью Ox, параллельной прямой, соединяющей центры окружности инверсии и окружности ω. Тогда окружность инверсии задается уравнением $z\bar{z} = R^2$, а данная окружность – уравнением $(z-a)(\bar{z}-a) = r^2$, где a – вещественное число. Находим образ ω при инверсии, то есть уравнение ω'

$$(\frac{R^2}{\bar{z}} - a)(\frac{R^2}{z} - a) = r^2.$$

Приводим к общему знаменателю и записываем рядом уравнения ω и ω'.

$$\omega: \, z\bar{z} - a\bar{z} - az + a^2 - r^2 = 0; \; \omega': \, z\bar{z} - \frac{aR^2}{a^2-r^2}z - \frac{aR^2}{a^2-r^2}\bar{z} + \frac{R^4}{a^2-r^2} = 0.$$

Так как в нашем случае окружности ω и ω' совпадают, получим

$$-\frac{aR^2}{a^2-r^2} = -a; \; a^2 - r^2 = \frac{R^4}{a^2-r^2}.$$

Тогда $a^2 = R^2 + r^2$. Это в точности условие ортогональности окружностей.

Обратное утверждение докажите самостоятельно. Предположите, что окружность ω ортогональная окружности инверсии и докажите, что она будет инвариантна при этой инверсии.

Задача 4.2**.** Пусть окружность ω с центром Q при инверсии переходит в окружность ω' с центром S. Докажите, что точка S не является образом Q при данной инверсии.

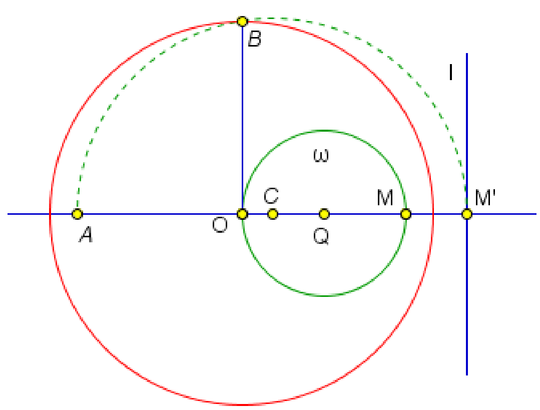
Задача 4.3**.** Докажите, что окружность, проходящая через две инверсные точки (то есть соответствующие друг другу при инверсии) является инвариантной.

Указания: Возьмите не инвариантную точку z_0 и ее образ при инверсии (систему координат выбирайте удобной). Подставьте их в уравнение данной окружности $(z-a)(\bar{z}-a) = r^2$. Из двух полученных равенств вытащите условие перпендикулярности данной окружности и окружности инверсии.

Задача 4.4**.** Пусть дана окружность ω и две точки A и A' на ней. Сколько существует инверсий, переводящих A в A', а ω в себя?

Задача 4.5**.** Найдите инверсию, переводящую данную прямую в данную окружность.

Решение. Пусть даны прямая ℓ и окружность ω.

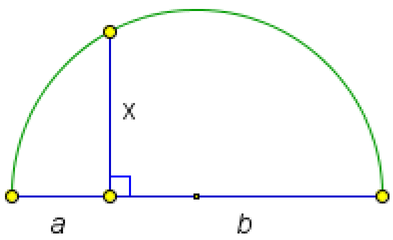


Как мы знаем, прямая, соединяющая центр инверсии и центр окружности ω, перпендикулярна прямой ℓ. Кроме того, окружность ω проходит через центр инверсии. Из этого строим точку O – центр инверсии.

Так как соответствующие при инверсии точки лежат на одном луче с точкой O, мы получаем две соответствующие точки M и M'. Наконец, вспоминаем определение инверсии. Радиус окружности инверсии будет выглядеть так:

$$R = \sqrt{OM \cdot OM'}.$$

Инверсия задана. Чтобы построить окружность инверсии (красная на рисунке выше), вспомним школьный курс геометрии: построение отрезка $x = \sqrt{ab}$.



Именно эти построения были проведены для получения красной окружности. □

Аналогичная задача возникает и для двух окружностей: найти инверсию, переводящую одну окружность в другую.

Теорема 4.1. *Пусть окружность ω_1 с центром Q_1 радиуса r_1 переходит в окружность ω' с центром Q_2 радиуса r_2 при инверсии I. Тогда центр инверсии O будет центром гомотетии этих окружностей.*

Замечание 4.2. (для тех, кто забыл о гомотетии) Пусть на евклидовой плоскости фиксирована точка O и фиксировано вещественное число $m \neq 0$. Преобразование евклидовой плоскости, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', такую что $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$, называется *гомотетией*. Гомотетию можно задать центром O и парой соответствующих точек A и A' (все три точки должны лежать на одной прямой). Если точка O лежит между точками A и A', то коэффициент гомотетии отрицательный, в противном случае – положительный. Способ построения образа данной точки M при гомотетии заданной при помощи центра и двух соответствующих точек посмотрите на динамическом рисунке Гомотетия на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy__geometrii/0-25.

Если фиксировать прямоугольную декартову систему координат с началом в центре гомотетии, то расписав через координаты определение гомотетии, мы получим ее формулы

$$x' = mx; \quad y' = my,$$

где m – коэффициент гомотетии. Если центр гомотетии находится в точке с координатами (a, b), то формулы гомотетии будут иметь более сложный вид

$$x' = m(x - a) + a; \quad y' = m(y - b) + b.$$

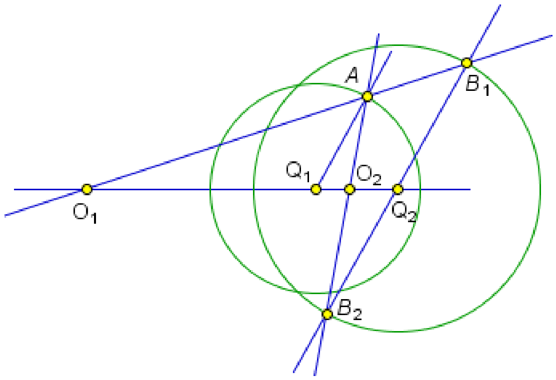
Формулы гомотетии можно записать, используя комплексные числа. Для этого второе равенство в формулах умножим на i и сложим с первым. Тогда, обозначая $z_0 = a + bi$, получим

$$z' = m(z - z_0) + z_0.$$

В случае, когда центр гомотетии совпадает с началом системы координат, получим такие формулы

$$z' = mz.$$

Используя формулы (все рано вещественные или комплексные) легко доказать, что образом прямой при гомотетии будет прямая. При этом если прямая проходит через центр гомотетии, то она будет инвариантной (перейдет в себя), а если не проходит через центр гомотетии, то она переходит в параллельную прямую. Окружность при гомотетии переходит в окружность, причем центр окружности переходит в центр окружности образа.



Если даны две произвольные не равные окружности (с центрами Q_1 и Q_2 соответственно), то существует две гомотетии, переводящие первую окружность во вторую. На рисунке изображен способ построения центров O_1 и O_2 этих гомотетий. Проводим произвольный луч Q_1A. Через точку Q_2 проводим прямую, параллельную Q_1A. Ее точки пересечения с окружностью B_1 и B_2.

Тогда $O_1 = AB_1 \cap Q_1Q_2$, $O_2 = AB_2 \cap Q_1Q_2$. Гомотетия с центром O_1 будет иметь положительный коэффициент, а с центром O_2 – отрицательный.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Доказательство. Расположим систему координат так, чтобы начало совпадало с центром инверсии, а ось Ox совпадала с прямой, соединяющей центры окружностей. Тогда центры окружностей будут задаваться вещественными числами и мы получим

$$\omega_1 : z\bar{z} + az + a\bar{z} + b = 0;\ z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Находим образ окружности ω_1 при инверсии

$$z\bar{z} + \frac{aR^2}{b}z + \frac{aR^2}{b}\bar{z} + \frac{R^4}{b} = 0.$$

Точно такая же должна получиться окружность при гомотетии с некоторым коэффициентом k и тем же центром: $z' = kz$. Получаем

$$k^2 z\bar{z} + akz + ak\bar{z} + b = 0.$$

Так как эти уравнения должны задавать одну и ту же окружность, получаем

$$\frac{ak}{k^2} = \frac{aR^2}{b};\ \frac{b}{k^2} = \frac{R^4}{b}.$$

Откуда получаем, что при гомотетии с коэффициентом $k = \frac{b}{R^2}$ мы получим то, что хотели. □

Итак, если даны две окружности, для которых известно, что одна переходит в другую при инверсии, то центр инверсии строим как их центр гомотетии, а радиус окружности инверсии строим также, как для прямой и окружности (через центр инверсии проводим луч и выбиваем две соответствующие точки на окружностях).

Задача 4.6**.** А бывают ли окружности, для которых не существует инверсии, переводящей одну в другую?

Замечание 4.3. Можно показать, что инверсия сохраняет углы между кривыми.

Напомним, что углом между кривыми γ_1 и γ_2 евклидовой плоскости в точке их пересечения называется не тупой угол между касательными в их общей точке. Пусть M – общая точка кривых γ_1 и γ_2, а γ_1' и γ_2' – образы этих кривых при инверсии I, M' – образ точки M – общая точка кривых γ_1' и γ_2'. Тогда угол между γ_1 и γ_2 в точке M равен углу между γ_1' и γ_2' в точке M'.

4.2. Третья группа аксиом

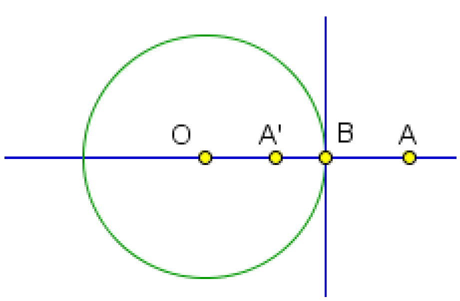
Возвращаемся в модель Пуанкаре. Будем называть *Л-симметрией* плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре) инверсию относительно Е-окружности с центром на абсолюте и осевую симметрию с осью, перпендикулярной абсолюту.

Так как при названных преобразованиях верхняя Е-полуплоскость переходит в себя, введенное определение корректно.

Л-движениями будем называть параллельные переносы вдоль абсолюта, Л-симметрии и их композиции.

Пока у нас нет длин отрезков и величин углов на термин Л-движение смотрим просто как на набор звуков. В дальнейшем мы покажем, что при Л-движениях сохраняются расстояния на плоскости Лобачевского. Тогда термин Л-движение будет употребляться аналогично термину движение на евклидовой плоскости.

Замечание 4.4. Композиция двух инверсий с одним центром и разными радиусами является гомотетией (докажите!), а композиция двух гомотетий с разными центрами и взаимно обратными коэффициентами является параллельным переносом с вектором, параллельным прямой, соединяющей центры (докажите!). Кроме того, осевую симметрию можно рассматривать как инверсию относительно окружности с центром в бесконечно удаленной точке.



Поясним это утверждение подробнее. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром O радиуса R. Тогда $OA = R + AB$, $OA' = R - A'B$. Перемножаем и учитываем определение инверсии:

$$R \cdot AB = A'B(R + AB) \Leftrightarrow AB = A'B(1 + \frac{AB}{R}).$$

Если R будет стремиться к бесконечности, окружность будет стремиться к прямой, и инверсия превращается в симметрию относительно прямой. Посмотрите динамический рисунок Инверсия на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovygeometrii/0-25

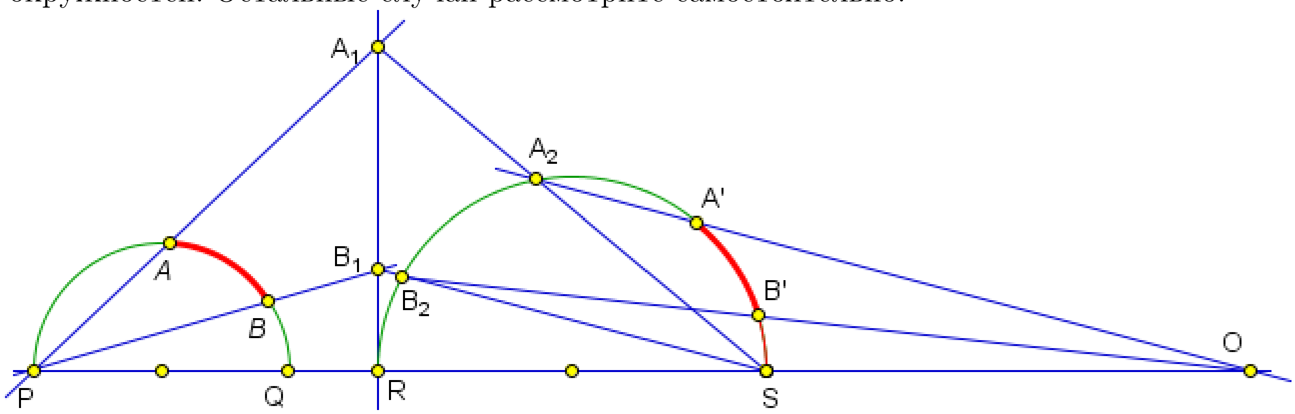
Тогда в определении Л-движений в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского можно говорить об инверсиях и их композициях.

Будем говорить, что две фигуры на плоскости Лобачевского *конгруэнтны* тогда и только тогда, когда существует Л-движение, которое переводят одну фигуру в другую. Другими словами, существует конечная последовательность инверсий, которая переводит одну фигуру в другую.

Проверим выполнимость аксиом третьей группы.

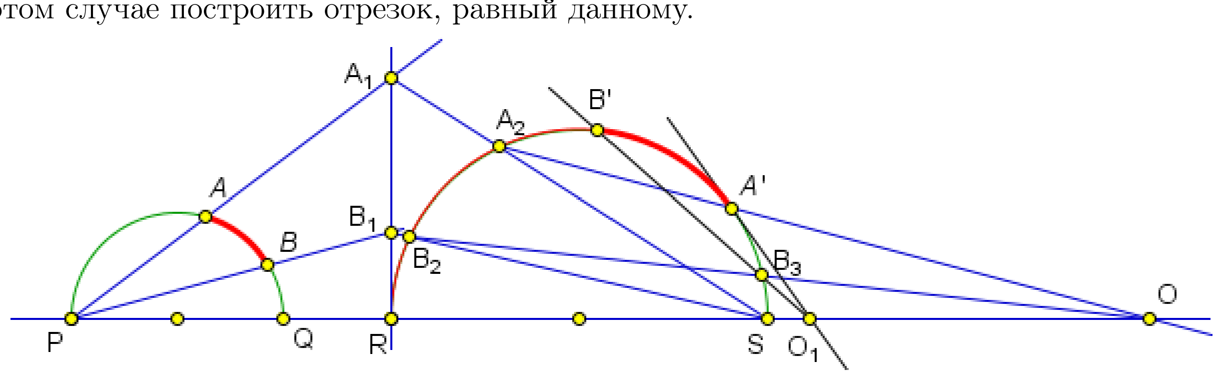
III_1. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что $AB = A'B'$.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB и луч с началом в точке A' изображаются дугами Е-окружностей. Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.



Отрезок AB и луч с началом в точке A' изображены на рисунке красным. Построим цепочку инверсий, которые переведут отрезок AB в нужный нам отрезок $A'B'$. Сначала рассмотрим инверсию с центром в Е-точке P, которая переводит Е-точку Q в Е-точку R. Так как Е-окружность, на которой лежит отрезок AB, проходит через центр инверсии, она перейдет в Е-прямую, перпендикулярную Е-прямой PR и проходящую через Е-точку R. Точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1. Теперь рассмотрим инверсию с центром в Е-точке S, для которой точка R будет инвариантной. Тогда Е-прямая A_1B_1 перейдет в окружность с диаметром RS. Строим A_2 и B_2 – образы точек A_1 и B_1. Осталось отобразить инверсией Е-точку A_2 в Е-точку A'. Тогда B_2 перейдет в искомую точку B'. Получаем, что Е-окружность с радиусом RS должны переходить в себя, а A_2 должна перейти в A'. Такая инверсия существует (как мы видели выше) и ее центр будет пересечением Е-прямых A_2A' и RS. Получаем Е-точку O и строим образ точки B_2, то есть точку B'. Итак, мы построили отрезок $A'B'$, конгруэнтный отрезку AB на заданном луче.

Поменяем данный луч с началом в точке A' на дополнительный к нему. Посмотрим, как в этом случае построить отрезок, равный данному.



Первые три инверсии такие же как в первом случае. Четвертая инверсия должна перебросить точку B_3 на дополнительный луч. Значит, она должна перевести окружность с диаметром RS в себя, точку A перевести в себя. Получаем, что окружность инверсии должны быть ортогональна к данной окружности и точка A' должна лежать на окружности инверсии. Значит, центр окружности инверсии будет точкой пересечения касательной в точке A' к окружности с диаметром RS и абсолюта. (Посмотрите динамический рисунок Аксиомы 3 группа на http://liaign.ucoz.ru/index/neevklidovy geometrii/0-25)

Задача 4.7. Пусть отрезок AB принадлежит Е-лучу, а луч с началом A' принадлежит Е-окружности. Постройте отрезок $A'B'$ на данном луче, равный отрезку AB. А как построить равный отрезок, если AB на Е-окружности, а A' – на Е-луче?

III_2. Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$.

Так как отрезки $A'B'$ и AB конгруэнтны, существует цепочка Л-симметрий $I_1 \circ \ldots \circ I_r$, которая переводит первый отрезок во второй. Аналогично, существует цепочка Л-симметрий $\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s$, которая переводит $A''B''$ в AB. Тогда цепочка Л-симметрий

$$(\tilde{I}_1 \circ \ldots \circ \tilde{I}_s)^{-1} \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r = \tilde{I}_s \circ \ldots \circ \tilde{I}_1 \circ I_1 \circ \ldots \circ I_r$$

переведет отрезок $A'B'$ в отрезок $A''B''$. Следовательно, они конгруэнтны.

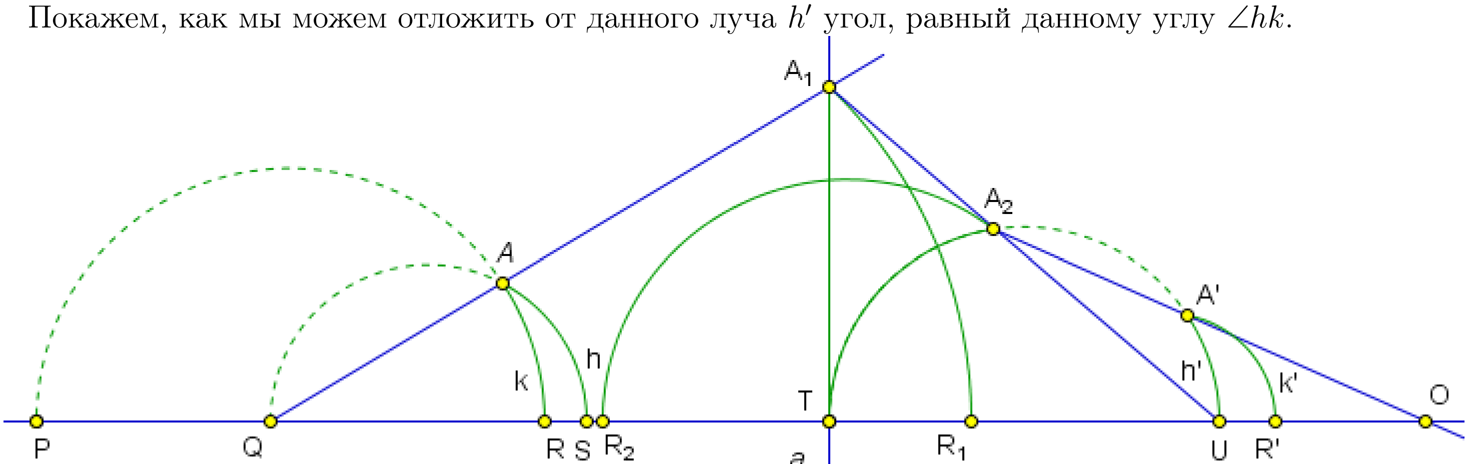
III_3. Пусть $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Тогда $AC = A'C'$.

Так как AB конгруэнтно $A'B'$, существует последовательность Л-симметрий, переводящая AB в $A'B'$. При этом луч $[BC)$ перейдет в луч $[B'C')$. Если предположить, что при этом точка C перейдет в точку C'', отличную от C', то на данном луче получим два отрезка, конгруэнтных данному. Это противоречие. Следовательно, C перейдет в C', а значит, отрезок AC перейдет в отрезок $A'C'$, то есть они конгруэнтны.

Переходим к углам.

III_4. Пусть даны $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует один и только один луч k', исходящий из точки O', такой, что $\angle hk = \angle h'k'$.

Покажем, как мы можем отложить от данного луча h' угол, равный данному углу $\angle hk$.



Сначала получим цепочку инверсий, которая переводила бы луч h данного угла $\angle hk$ в луч h'. Переводить будем аналогично случаю построения отрезка, равного данного. Сначала отобразим Е-окружность QS инверсией с центром Q и соответствующими точками $S \to T$. Эта Е-окружность перейдет в Е-прямую a, точка A перейдет в точку A_1, а точка S в точку T. Значит, луч h перейдет в луч A_1T. Затем, переводим Е-прямую a в Е-окружность TU. Центр инверсии будет U, а точка T будет инвариантной. При такой инверсии точка A_1 перейдет в точку A_2 и луч A_1T перейдет в луч A_2T. Осталось перевести луч A_2T в луч h'. Для этого нужна инверсия, которая оставит окружность TU инвариантной, а точку A_2 переведет в точку A'. Это инверсия с центром O (вспоминаем, что окружность, проходящая через две инверсные точки, является инвариантной). Мы получили последовательность из трех инверсий, которые перевели луч h в луч h'. Теперь теми же инверсиями переводим луч k:

$$k \to A_1R_1 \to A_2R_2 \to A'R' = k'.$$

Подробные построения можете посмотреть на динамическом рисунке Аксиомы 3 группы на сайте.

Замечание 4.5**.** Мы указали способ построения угла, равного данного в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Заметим, что при этом построении мы не указали, в какую полуплоскость мы откладываем угол. Что делать, если луч k' оказался не в той полуплоскости, которая нужна?

Замечание 4.6**.** Построить угол, равный данному в случае, который рассмотрен выше, можно и помощью двух инверсий. Для этого нужно сразу перевести Е-окружность QS в Е-окружность TU. Для этого нужно построить центр гомотетии этих окружностей. Он же будет и центром инверсии.

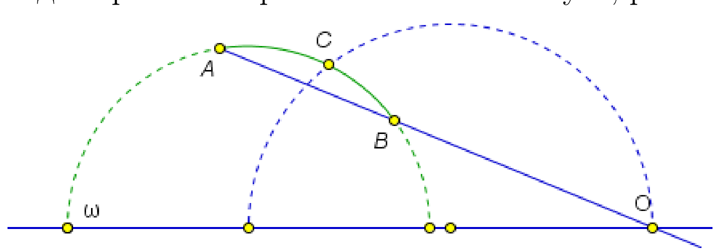
Замечание 4.7**.** Когда у нас появится четвертая группа аксиом, мы сможем указать более простой способ построения угла, равного данному.

Задача 4.8**.** III_5. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Проверьте выполнение этой аксиомы в модели самостоятельно.

Задача 4.9**.** Пусть дан отрезок AB. Постройте его середину C.

Решение. Рассмотрим случай, когда отрезок AB располагается на Е-окружности ω. Случай, когда отрезок AB располагается на Е-луче, рассмотрите самостоятельно.



Как и на евклидовой плоскости, задачи на построение на модели плоскости Лобачевского начинаются с анализа. Пусть точка C построена. Тогда отрезок AC конгруэнтен отрезку CB.

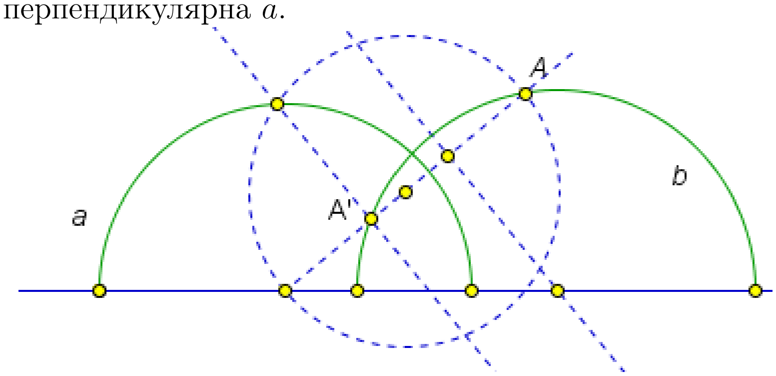
Следовательно, должна существовать последовательность инверсий, переводящая отрезок AC в отрезок CB. Смотрим, нельзя ли обойтись одной инверсией. Точка C должна переходить в себя (то есть являться инвариантной), а точка A должна переходить в точку B. Рассмотрим инверсию I, для которой точки A и B соответствуют друг другу. Тогда окружность, содержащая эти точки перейдет в себя, а ее точка пересечения с окружностью инверсии будет инвариантной. Это и будет точка C. Следовательно, нам нужно построить окружность инверсии, для которой точка A переходит в точку B, а ее центр лежит на абсолюте.

Центр инверсии O получается как пересечение Е-прямой AB и абсолюта. Далее, так как Е-окружность ω инвариантна, она ортогональна окружности инверсии. Как мы видели в теме инверсия, это означает, что радиус каждой из этих Е-окружностей будет касательной к другой из них. Значит, нам нужно из точки O провести касательную к окружности ω. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Напомним, что в третьей группе аксиом вводится понятие прямого угла. Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен смежному. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образую прямой угол.

Задача 4.10. Дана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой. Постройте прямую, перпендикулярную a и проходящую через точку A.

Решение. Начинаем с анализа. Пусть искомая прямая b построена. Эта прямая должна быть перпендикулярна a.

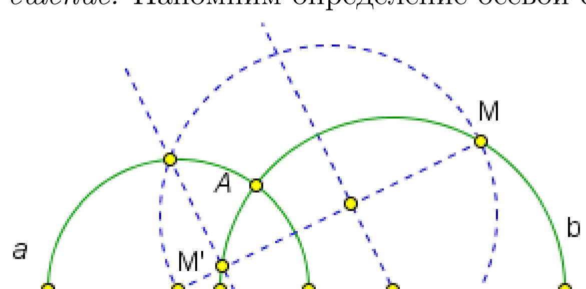


Тогда при инверсии с Е-окружностью a Е-окружность b должна переходить в себя, то есть она должна проходить через две инверсные точки.

Следовательно, для построения Е-окружности b нужно построить образ A' точки A при инверсии относительно Е-окружности a и провести через точки A и A' Е-окружность с центром на абсолюте. Посмотрите динамический рисунок Задачи аксиомы 3 группы. □

Задача 4.11. Докажите, что инверсия моделирует осевую симметрию.

Решение. Напомним определение осевой симметрии.



Пусть дана прямая a. Преобразование плоскости, которое каждой точке $M \in a$ ставит в соответствие ее же, а каждой точке $M \notin a$ ставит в соответствие точку M', такую, что $MM' \perp a$ и середина отрезка MM' принадлежит a.

Рассмотрим прямую a на модели и точку $M \in a$. Тогда при инверсии с Е-окружностью a точка

M будет инвариантной, то есть перейдет в себя. Пусть $M \notin a$. При инверсии она перейдет в точку M', такую, что Е-окружность b с центром на абсолюте, проходящая через точки M и M' будет инвариантной. Эта Е-окружность является прямой MM', которая перпендикулярна a. Кроме того, точка A пересечения Е-окружности a и Е-окружности b будет инвариантной. Тогда при инверсии отрезок MA перейдет в отрезок $M'A$, то есть A является серединой отрезка MM'. □

Задача 4.12**.** Постройте прямоугольный треугольник и проведите медиану к его гипотенузе.

Еще во второй группе аксиом наряду с понятием треугольника мы можем ввести понятие четырехугольника. Пусть даны четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четыре отрезка AB, BC, CD, AD, попарно не имеющие общих внутренних точек. Четырехугольник $ABCD$ называется *двупрямоугольником*, если он имеет два прямых угла A и B. Сторона AB называется *основанием* двупрямоугольника. Четырехугольник $ABCD$ называется *трипрямоугольником* или *четырехугольником Ламберта*, если он имеет три прямых угла.

Замечание 4.8**.** Если в качестве пятой группы аксиом взять аксиому Евклида, то двупрямоугольник будет трапецией с прямыми углами при основаниях, в частности, будет прямоугольником. Четырехугольник Ламберта будет прямоугольником. Если в качестве пятой группы аксиом взять аксиому Лобачевского, то двупрямоугольник и четырехугольник Ламберта будут иметь ряд свойств, отличных от свойств прямоугольников на евклидовой плоскости. Находясь в третьей группе аксиом мы посмотрим на свойства, которые будут общими для прямоугольников и двупрямоугольников плоскости Лобачевского.

Задача 4.13**.** Изобразите двупрямоугольник и четырехугольник Лабмерта на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

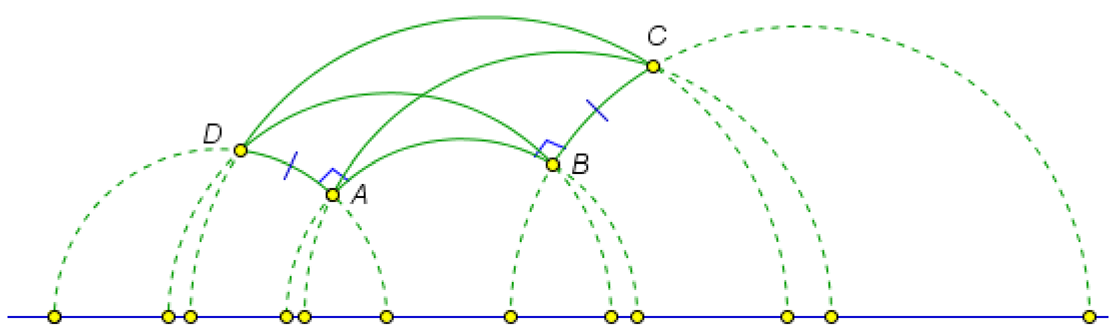
Четырехугольником Саккери называется двупрямоугольник, у которого стороны, прилегающие к прямым углам равны.

Задача 4.14**.** Изобразите четырехугольник Саккери.

Четырехугольники Саккери обладают следующими свойствами:

1^0. Углы C и D четырехугольника Саккери с основанием AB равны.

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник Саккери.



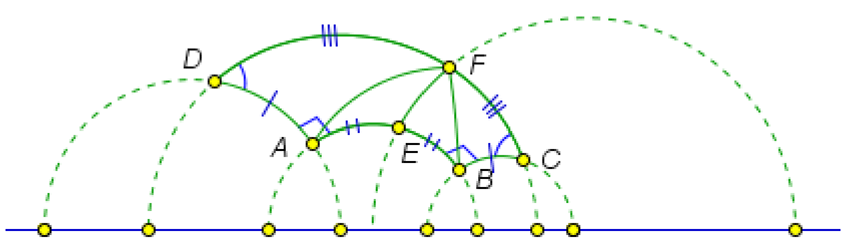
Проведем его диагонали DB и AC. Тогда треугольники DBA и CAB равны по первому признаку. (Напомним, что четыре признака равенства треугольников доказываются в третьей группе аксиом и они являются общими как для евклидовой геометрии, так и для геометрии Лобачевского). Тогда DB и AC конгруэнтны. Следовательно, треугольнике DBC и CAD равны по третьему признаку. Откуда получаем равенство углов. □

Задача 4.15**.** Пусть у двупрямоугольника $ABCD$ с основанием AB углы C и D равны. Докажите, что $ABCD$ является четырехугольником Саккери.

Отметим, что в случае евклидовой геометрии четырехугольник Саккери будет прямоугольником.

2^0. Серединный перпендикуляр к основанию AB четырехугольника Саккери является также серединным перпендикуляром к стороне CD.

Доказательство. Пусть дан четырехугольник Саккери $ABCD$ с основанием AB. Рассмотрим отрезок EF, который соединяет середины сторон AB и CD.



Покажем, что этот отрезок перпендикулярен обеим сторонам. Рассмотрим треугольники ADF и BCF. Они равны по первому признаку. Тогда равны стороны AF и BF. Тогда равны треугольники AFE и BFE по третьему признаку.

Получаем равенство смежных углов AEF и BEF. Следовательно, они прямые. Если провести отрезки ED и EC, то аналогичные рассуждения показывают, что углы DFE и CFE также равны, следовательно, прямые. □

5. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Четвертая группа аксиом

Эта группа аксиом состоит из двух аксиом: Архимеда и Кантора.

IV_1. (аксиома Архимеда) Пусть AB и CD – какие-нибудь отрезки. Тогда на прямой AB существует конечное множество точек A_1, A_2, $\ldots, A_{n-1}$, A_n, таких, что выполняются условия: а) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, $\ldots$, $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$; б) $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$; в) $A - B - A_n$.

IV_2. (аксиома Кантора) Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего и, кроме того, для любого отрезка CD найдется натуральное число n, такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков данной последовательности.

Здесь мы можем ввести измерение отрезков и углов.

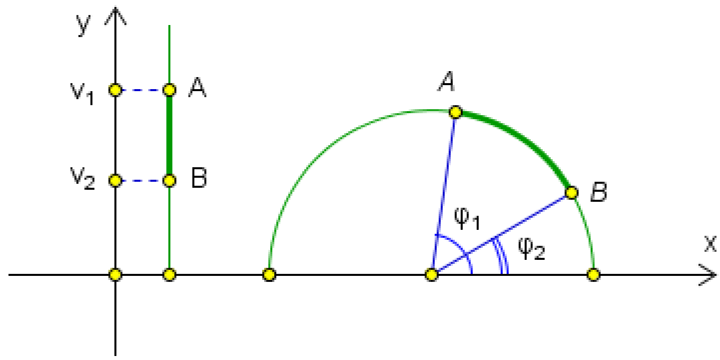
Говорят, что установлено измерение отрезков, если определено отображение $\ell : L \to \mathbb{R}_+$ из множества всех отрезков в множество положительных вещественных чисел, которое удовлетворяет условиям:

1) если отрезки AB и $A'B'$ конгруэнтны, то $\ell(AB) = \ell(A'B')$;

2) если $A - B - C$, то $\ell(AB) + \ell(BC) = \ell(AC)$;

3) существует отрезок PQ, такой, что $\ell(PQ) = 1$.

Введем отображение ℓ в нашем случае.



Введем систему координат как показано на рисунке. Если отрезок AB лежит на Е-полуокружности, то обозначим через φ_1 и φ_2 углы между положительным направление оси Ox и радиусом Е-окружности, проведенным в соответствующую точку.

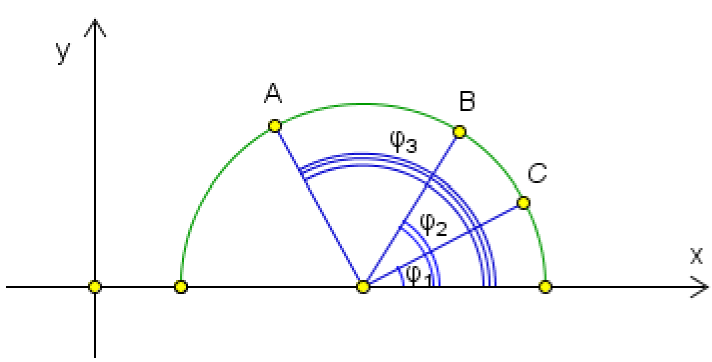
Если отрезок AB лежит на Е-луче, то обозначим через v_1 и v_2 координаты точек A и B соответственно в выбранной системе координат.

Положим по определению

$$1)\, \ell(AB) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \right|;\ 2)\, \ell(AB) = \left| \ln \frac{v_1}{v_2} \right|.$$

Эти формулы выводятся с помощью дифференциальной геометрии и теории функций комплексного переменного. Там же доказывается, что при этом конгруэнтные отрезки имеют равные длины. Подробности можете посмотреть в [5]. Доказательство равенства длин конгруэнтных отрезков методами элементарной геометрии можно посмотреть в [6].

Доказательство двух оставшихся условий измерения отрезков продемонстрируем на примерах. Докажем второе условие в случае, когда точки A, B, C лежат на Е-окружности. Пусть они располагаются так, как показано на рисунке.



Тогда

$$\ell(AB) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_3/2}{\operatorname{tg} \varphi_2/2};\ \ell(BC) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_2/2}{\operatorname{tg} \varphi_1/2}.$$

Модули сняли, так как при логарифмы будут положительны (угол в числителе больше угла в знаменателе, тангенс функция возрастающая и логарифм числа, большего 1, положителен).

По свойствам логарифма получаем

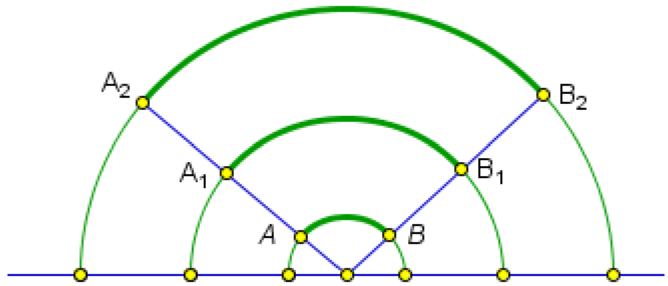
$$\ell(AB) + \ell(BC) = \ln(\operatorname{tg} \varphi_3/2) - \ln(\operatorname{tg} \varphi_2/2) + \ln(\varphi_2/2) + \ln(\varphi_1/2) = \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_3/2}{\operatorname{tg} \varphi_1/2} = \ell(AC).$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи.

Проверим третье условие. Возьмем две точки P и Q на E-луче. Пусть $P(v_1)$, $Q(v_2)$ (предположим, что P выше Q, то есть $v_1 > v_2$). Потребуем, чтобы $\ell(P,Q) = 1$. Тогда $\ln \frac{v_1}{v_2} = 1$, то есть $v_1 = ev_2$. Возьмем Q с $v_2 = 1$ (такая точка есть), а P с $v_1 = e$. (Такая точка тоже есть на модели.) Это будут искомые точки, для которых длина отрезка PQ будет 1.

Итак, мы ввели измерение длин отрезков на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

На рисунке приведены примеры отрезков равной длины.



Отрезки AB, A_1B_1, A_2B_2 имеют одинаковые длины на плоскости Лобачевского, так как они лежат на гомотетичных E-окружностях, а гомотетию можно получить как композицию двух инверсий.

Значит, один отрезок переходит в другой при помощи цепочки инверсий, то есть они конгруэнтны, следовательно имеют равные длины. (Также равенство длин можно доказать, заметив, что углы φ_1 и φ_2 у всех трех отрезков одинаковые). Мы видим, что чем ближе к абсолюту, тем евклидова длина дуги, моделирующей отрезок плоскости Лобачевского, меньше.

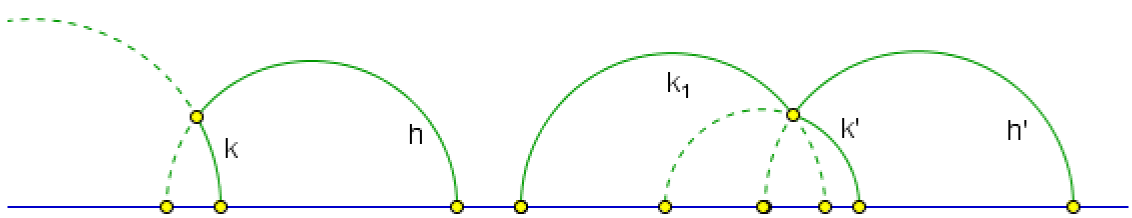
Если зафиксировать точку A, а точку B устремить к абсолюту, то в формуле

$$\ell(AB) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \right|$$

E-угол φ_1 будет постоянным, а E-угол φ_2 будет уменьшаться. Так как тангенс – функция возрастающая, знаменатель дроби будет уменьшаться и логарифм увеличиваться в бесконечность.

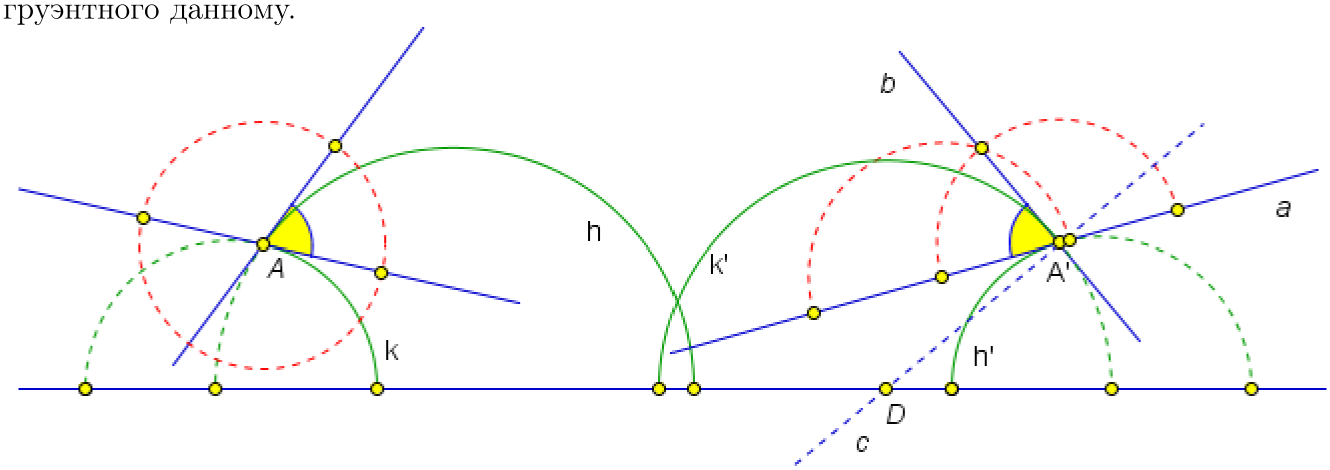
Перейдем к углам. *Величиной угла AOB* модели Пуанкаре плоскости Лобачевского будем называть величину E-угла между дугами окружностей, которые изображают этот угол.

Так как инверсия сохраняет E-величину угла, мы получаем, что конгруэнтные углы имеют равные величины. Верно и обратное, если величины углов равны, то они конгруэнтны.



Действительно, пусть даны два угла $\angle hk$ и $\angle h'k'$ равной величины. Тогда существует цепочка инверсий, которая луч h переводит в луч h'. Эта же цепочка инверсий переведет луч k в луч k_1, такой, что величины углов $\angle hk$ и $\angle h'k_1$ равны. Тогда луч k_1 либо совпадает с лучом k', либо попадет в другую полуплоскость с границей, содержащей луч h'. Так как инверсии сохраняют углы, величины углов $\angle hk$ и $\angle h'k_1$ будут равны. В первом случае мы получили цепочку инверсий, которая переводит первый угол во второй, а во втором случае нужно еще применить инверсию с E-окружностью, содержащей E-дугу h'. При этом луч h' перейдет в себя, а луч k_1 перейдет в k'.

Итак, величина угла в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и его евклидова величина совпадают. Благодаря этому мы можем получить простой алгоритм откладывания угла, конгруэнтного данному.



Строим касательные к Е-дугам h и k в точке A. Мы получаем величину угла $\angle hk$ – это отмеченный на рисунке угол между касательными. Проводим касательную в точке A' к Е-дуге h'. Это Е-прямая a. От нее в нужную полуплоскость (в которую хотим отложить луч k') откладываем Е-угол, равный углу между касательными в точке A. Построение этого угла (хорошо известно из школьного курса геометрии) изображено на рисунке красными пунктирными линиями. В результате получаем прямую b. Это будет касательная к искомой Е-дуге k'. Чтобы построить эту дугу, нам нужно в точке A' провести перпендикуляр к b. Тогда получим точку D – центр Е-окружности, содержащей k'. В результате получаем угол $\angle h'k'$, конгруэнтный углу $\angle hk$.

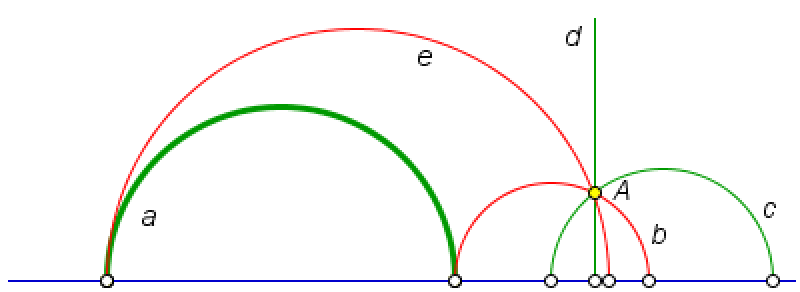
6. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Пятая группа аксиом

6.1. Аксиома Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые.

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы – аксиомы Лобачевского.

V^*. Через точку, не лежащую на данной прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную.

Проиллюстрируем, что эта аксиома выполняется в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

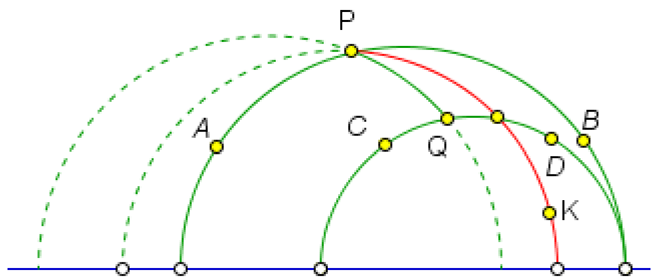


На рисунке изображено несколько прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a. Следовательно, аксиома Лобачевского в модели Пуанкаре выполняется.

Обратите внимание на прямые b и e. Они выделяются среди других прямых, не пересекающих прямую a. Эти прямые называются параллельными прямой a. Дадим строгое определение параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

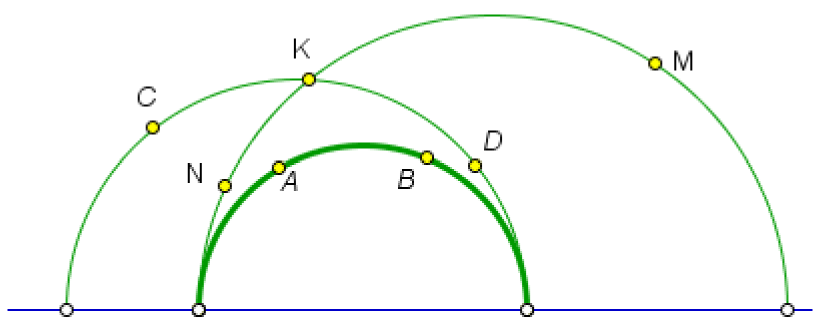
Сначала вспомним определение направления на прямой. Рассмотрим на прямой множество всех лучей. На этом множестве задается отношение эквивалентности: два луча h и k называются сонаправленными, если либо $h \subset k$, либо $k \subset h$. В противном случае лучи называются противоположно направленными. Это отношение разбивает все лучи прямой на два класса эквивалентности: в каждом классе лежат сонаправленные между собой лучи, а лучи разных классов противоположно направленные. Каждый из этих классов называется направлением на прямой. Обозначать направленные прямые будем также, например AB, а направление будем считать от первой буквы ко второй.

Будем говорить, что направленные прямые AB и CD параллельны (в направлении точек B и D), если 1) эти прямые не пересекаются, 2) для любой точки P на прямой AB и любой точки Q на прямой CD любой внутренний луч PK угла QPB пересекает луч QD.



На рисунке изображены параллельные прямые AB и CD.

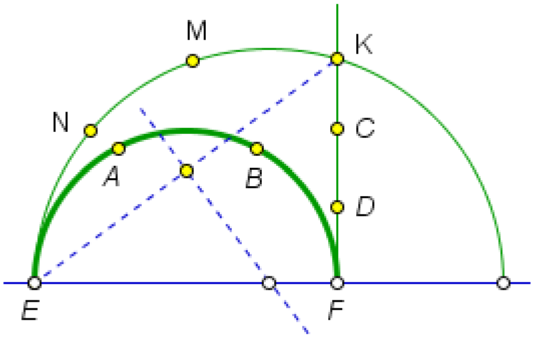
Рассмотрим направленную прямую BA (та же прямая AB только выбрано другое направление). Для нее тоже существует параллельная прямая. Это прямая MN.

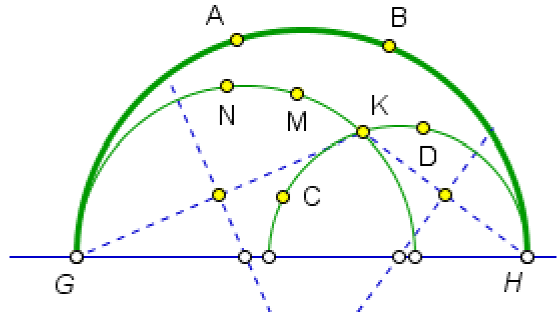


Если фиксировать точку K, не лежащую на прямой AB, то существует единственная направленная прямая CD, проходящая через точку K, и параллельная направленной прямой AB, и единственная направленная прямая MN, проходящая через точку K и параллельная направленной прямой BA. Доказательство этого факта можно посмотреть в учебнике [1], а мы посмотрим, как через данную точку K построить прямую, параллельную направленной прямой AB.

Задача 6.1. На модели даны прямая AB и точка K, не лежащая на ней. Построить направленные прямые CD и MN, проходящие через K и параллельные направленным прямым AB и BA соответственно.

Решение. Рассмотрим два возможных случая.

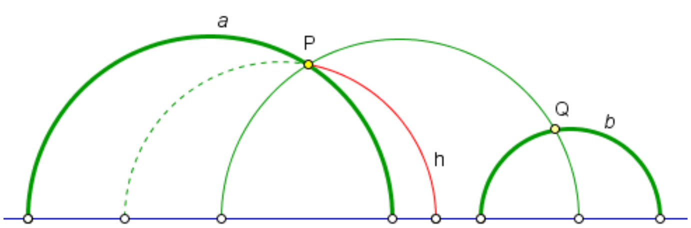




1. Пусть точка K лежит на Е-луче, перпендикулярном абсолюту и проходящем через точку пересечения Е-окружности AB и абсолюта F. Тогда прямая CD будет совпадать с этим Е-лучом. Прямая MN должна изображаться Е-дугой, которая проходит через точку K и вторую точку пересечения Е-окружности AB с абсолютом E. Для построение центра искомой Е-окружности строим серединный перпендикуляр к EK и проводим Е-окружность. Получаем прямую MN.

2. Точка K не лежит на перпендикулярах к абсолюту проходящих через точки G и H. В этом случае нам нужно построить две Е-окружности. Строим их также, как в предыдущем случае. □

Как мы видели, среди прямых, не пересекающих данную, кроме параллельных есть еще один тип прямых. Эти прямые называются расходящимися с прямой AB. Для них нарушается второе условие из определения параллельных прямых:



На рисунке изображены расходящиеся прямые a и b. Для любого выбора точек P и Q на этих прямых мы всегда можем найти внутренний луч h, который не пересекает a.

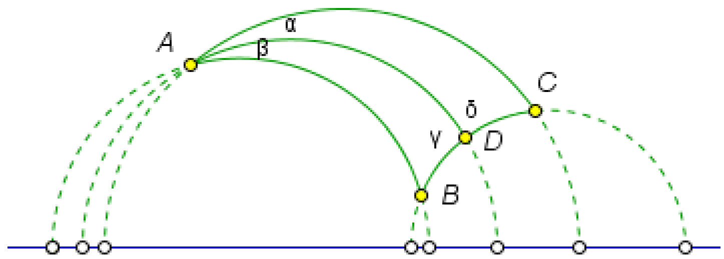
6.2. Эквиваленты аксиомы Лобачевского.

При построении евклидовой геометрии мы познакомились с эквивалентами пятого постулата Евклида. Это утверждения, которыми можно заменить постулат Евклида и получить ту же евклидову геометрию. Чтобы получить эквиваленты аксиомы Лобачевского, нужно построить отрицание к эквивалентам пятого постулата Евклида. Посмотрим несколько таких примеров.

1. Эквивалент V: Сумма углов хотя бы одного треугольника (а следовательно, всех треугольников) равна двум прямым (то есть 180^0).

Напомним, что в четвертой группе аксиом доказывается, что треугольник в абсолютной геометрии не может иметь суммы углов большей двух прямых. Тогда отрицание данного эквивалента будет следующим: сумма углов любого треугольника плоскости Лобачевского меньше двух прямых (то есть меньше 180^0).

Покажем, что треугольники плоскости Лобачевского могут иметь различные суммы углов.



Вычислим сумму углов треугольников ABD и ACD

$$\sigma_{ABD} + \sigma_{ACD} = (\alpha + \hat{C} + \delta) + (\beta + \gamma + \hat{B}) =$$

Воспользуемся тем, что $\alpha + \beta = \hat{A}$, $\gamma + \delta = \pi$.

Тогда

$$\sigma_{ABD} + \sigma_{ACD} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \pi = \sigma_{ABC} + \pi.$$

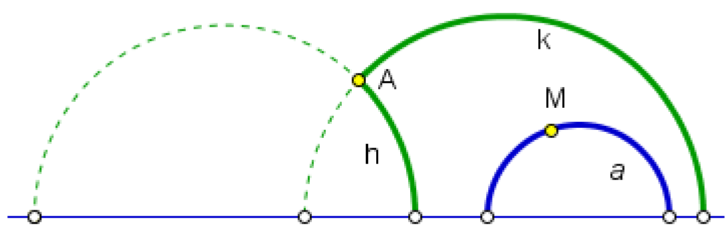
Сумма углов треугольника ABD меньше π и

$$\sigma_{ABD} + (\sigma_{ACD} - \pi) = \sigma_{ABC}.$$

В скобках стоит отрицательное число и $\sigma_{ABD} > \sigma_{ABC}$. Итак, мы нашли два треугольника с разными суммами углов. □

2. Эквивалент V: Любая прямая, проходящая через внутреннюю точку угла пересекает хотя бы одну его сторону (аксиома Лоренца).

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Существует прямая, проходящая через внутреннюю точку угла и не пересекающая ни одной его стороны.

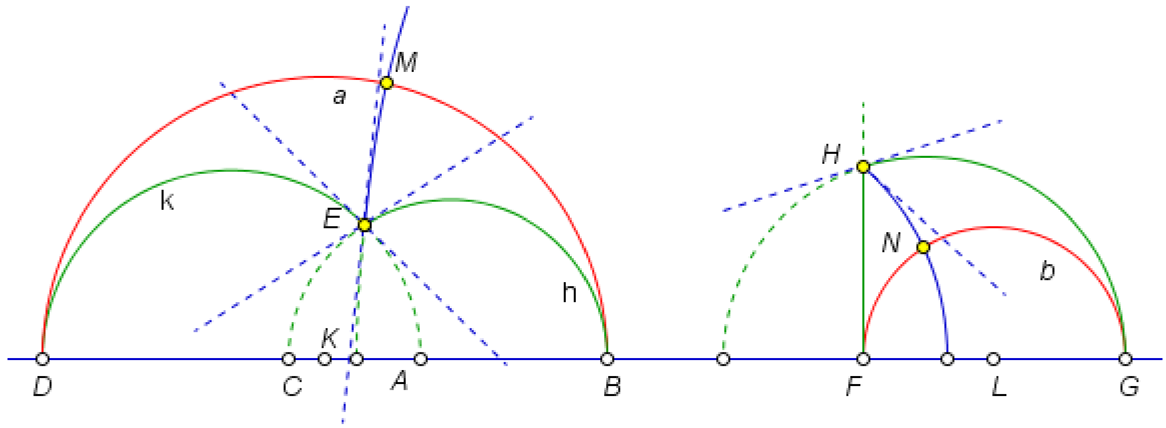


Изобразим такую прямую в модели Пуанкаре. Прямая a проходит через внутреннюю точку M угла $\angle hk$ и не пересекает ни одной из сторон угла.

Итак, мы увидели, что для не развернутых углов на плоскости Лобачевского существуют прямые, проходящие через внутреннюю точку угла и не пересекающие сторон этого угла. Оказывается, что для любого не развернутого угла существует прямая, которая параллельна обеим его сторонам. Такая прямая называется *заградительной прямой* угла.

Задача 6.2**.** Постройте заградительную прямую не развернутого угла. Покажите, что она перпендикулярна биссектрисе этого угла.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) обе стороны угла изображаются Е-дугами, 2) одна из сторон угла изображается Е-лучом. Подробно рассмотрим первый случай, во втором случае проведите аналогичные рассуждения самостоятельно.



Пусть K – середина отрезка DB. Построим Е-окружность с центром K и радиусом KB. Полученная Е-дуга a будет заградительной прямой угла $\angle hk$.

Изобразим биссектрису угла $\angle hk$. Для этого разделим угол между касательными к Е-дугам h и k пополам (получим Е-луч n) и проведем Е-окружность, которая касается Е-луча n. Эта Е-окружность будет содержать биссектрису EM.

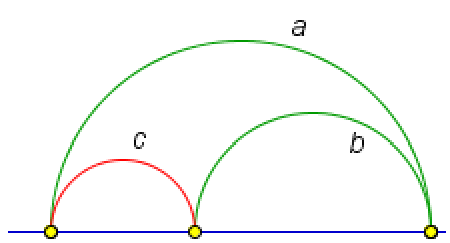
Покажем, что биссектриса угла $\angle hk$ перпендикулярна заградительной прямой. Действительно, если рассмотреть инверсию с Е-окружностью EM, то точка E перейдет в себя (лежит на окружности инверсии), а Е-окружность k перейдет в Е-окружность h (так как они образовывают равные углы с Е-окружностью инверсии). Следовательно, угол DME перейдет в угол BME, то есть конгруэнтен смежному, значит, прямой. $\square$

Заградительной прямой двух пересекающихся прямых называется ненаправленная прямая, которая параллельна как одной так и другой прямой.

Если две прямые пересекаются, то они образуют четыре (неразвернутых) угла. Тогда заградительные прямые данных пересекающихся прямых будут заградительными прямыми этих углов. Таким образом, две пересекающиеся прямые имеют четыре заградительные прямые.

Задача 6.3. Изобразите две пересекающиеся прямые и их заградительные прямые в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

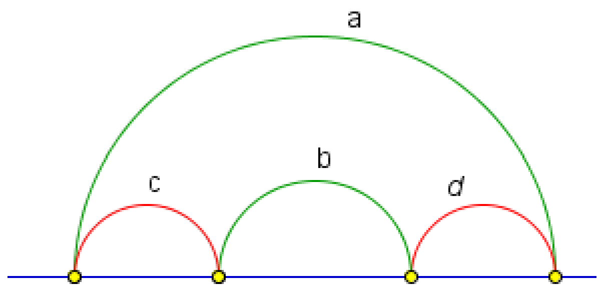
Заградительной прямой двух параллельных прямых a и b называется прямая c, параллельная обеим прямым a и b, причем направление параллельности $c\|a$ и $c\|b$ не совпадают с направлением параллельности $a\|b$.



Такая заградительная прямая единственная. Для параллельных прямых каждая из трех прямых a, b, c является заградительной для двух других прямых.

Задача 6.4. Изобразите заградительную прямую двух параллельных прямых, если одна из них изображается Е-лучом.

Заградительной прямой двух расходящихся прямых a и b называется прямая c, которая параллельна a и b, причем a и b находятся в одной полуплоскости относительно c.



Для расходящихся прямых a и b существует две заградительные прямые. На рисунке они обозначены c и d.

3. Эквивалент V: Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой непременно пересекутся (постулат Лежандра).

Эквивалент аксиомы Лобачевского: существуют перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, которые не пересекаются.

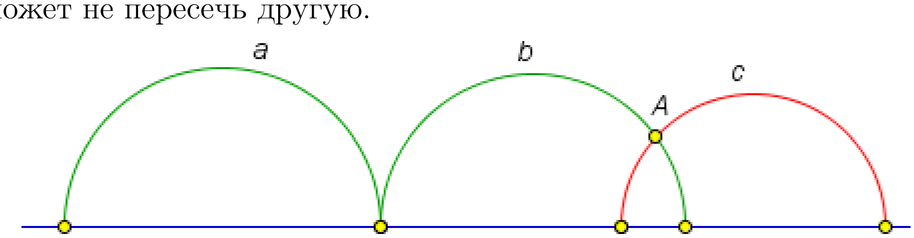
Задача 6.5**.** Постройте перпендикуляр и наклонную к прямой, которые не пересекаются.

4. Эквивалент V: Точки, равноудаленные от данной прямой и лежащие по одну ее сторону, образуют прямую.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Точки, равноудаленные от данной прямой и лежащие по одну ее сторону, образуют линию, отличную от прямой. Это будет эквидистанта. Мы познакомимся с ней позже.

5. Эквивалент V: Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, непременно пересечет и другую.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых может не пересечь другую.



Прямая c пересекает прямую b, но не пересекает прямую a.

6. Эквивалент V: Для всякого треугольника существует описанная окружность.

Эквивалент аксиомы Лобачевского: Не для всякого треугольника существует описанная окружность.

Позже мы покажем, что серединные перпендикуляры (именно их точка пересечения в евклидовой геометрии является центром описанной окружности и обеспечивает ее существование) на плоскости Лобачевского не всегда пересекаются.

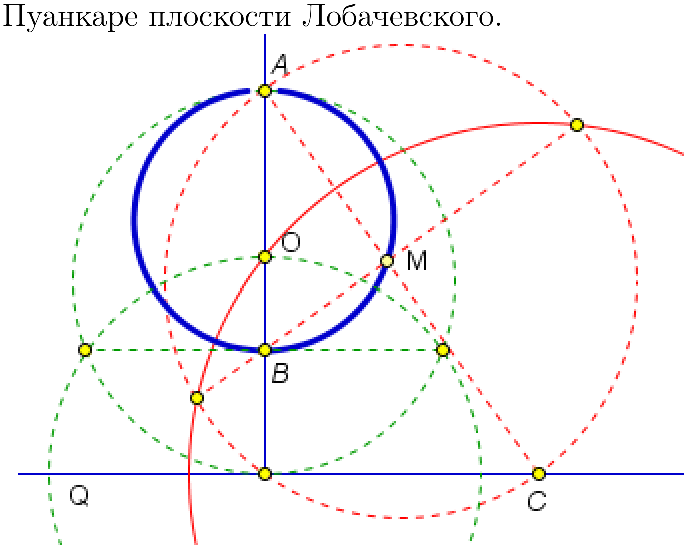
7. Окружность, эквидистанта и орицикл в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

7.1. Окружность.

Напомним, что окружность Ω в плоскости Лобачевского определяется также как и на евклидовой плоскости. Окружностью называется множество точек плоскости Лобачевского, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром. Расстояние мы можем задать с помощью отрезка PQ. Тогда для построения точек окружности Ω нужно взять точку O (центр окружности), провести прямую через эту точку и отложить от точки O на этой прямой в обе стороны отрезки, конгруэнтные PQ. Проводим еще одну прямую через точку O и опять откладываем отрезки, конгруэнтные PQ.

Еще один способ построения точек окружности Ω основан на следующем свойстве окружности: любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Другими словами, если взять на окружности произвольную точку A, провести через центр окружности O прямую и отразить точку A от этой прямой, то мы попадем опять на окружность. Вспоминаем, что осевая симметрия на модели Пуанкаре – это инверсия. Значит, чтобы построить точки окружности, нужно взять точку O – центр окружности, взять точку A, такую, что отрезок OA равен радиусу окружности, провести через точку O прямую Q (Е-дугу с центром на абсолюте) и построить образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. В результате получим еще одну точку данной окружности. (Посмотрите динамический рисунок Окружность, эквидистанта, орицикл.)

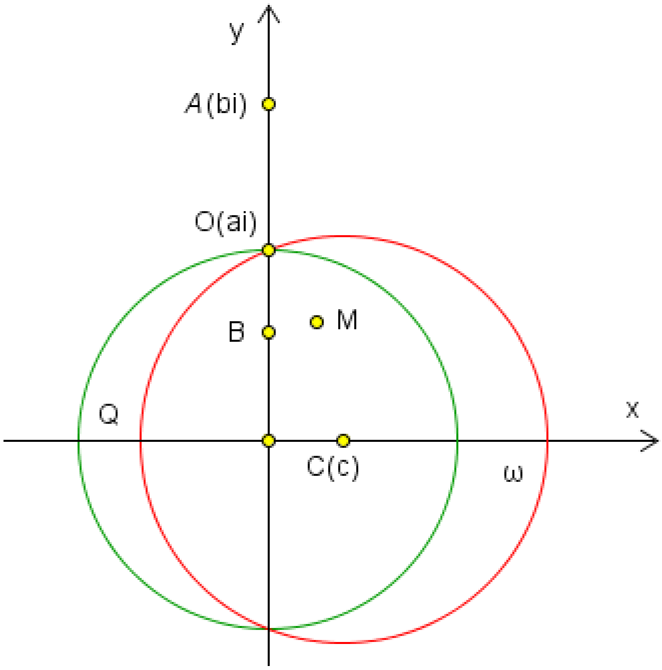
Возникает вопрос: какой линией евклидовой плоскости изображается окружность в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.



Возьмем точку O – центр окружности Ω и точку A, так, чтобы они лежали на Е-луче (удобно задаем себе радиус окружности с помощью отрезка OA). Сначала построим диаметрально противоположную точку B. Для этого нам потребуется Е-окружность Q, проходящая через точку O с центром в точке пересечения Е-луча OA и абсолюта. Строим стандартным образом образ точки A при этой инверсии.

Для построения произвольной точки M искомой окружности будем двигать точку C по абсолюту, проводить Е-окружности с центром в точке C и проходящие через точку O, и находить образы точки A относительно этих инверсий. Мы видим, что получается линия, похожая на Е-окружность, но центр у нее не в точке O. Докажем это аналитически.

Введем систему координат как показано на рисунке.



Точки A и O лежат на оси y, то есть на мнимой оси, а значит им соответствую чисто мнимые числа, которые мы обозначим $O(ai)$, $A(bi)$. Найдем, какое комплексное число соответствует точке B. Она является образом точки A при инверсии относительно Е-окружности Q. Формула этой инверсии имеет вид

$$z' = \frac{a^2}{\bar{z}}$$

(очевидно, что радиус Е-окружности Q равен a).

Тогда точке B сопоставляется чисто мнимое число $\frac{a^2}{-bi} = \frac{a^2}{b}i$. Инверсия относительно Е-окружности ω с центром в точке $C(c)$ будет иметь формулу

$$z' = \frac{|c-ai|^2}{\bar{z}-c} + c = \frac{c^2+a^2}{\bar{z}-c} + c.$$

Тогда точке M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности ω) будет соответствовать комплексное число

$$z = \frac{a^2+c^2}{-bi-c} + c.$$

Окружность ω будет меняться, следовательно, будет меняться число c и за ним следом будет меняться число z. Получаем множество точек M. Множество всех точек M и образует искомую нами окружность (в смысле Лобачевского). Мы подозреваем, что это множество изображается Е-окружностью с диаметром AB и радиусом $\frac{AB}{2}$ (в смысле Евклида). Центр этой Е-окружности будет в точке, которой соответствует комплексное число

$$\frac{bi + \frac{a^2}{b}i}{2} = \frac{a^2+b^2}{2b}i.$$

Радиус этой Е-окружности будет

$$\frac{b - \frac{a^2+b^2}{2b}}{=}\frac{b^2-a^2}{2b}.$$

Уравнение такой Е-окружности в комплексных числах имеет вид

$$(z - \frac{a^2+b^2}{2b}i)(\bar{z} + \frac{a^2+b^2}{2b}i) = \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2. \qquad (7.1)$$

Чтобы проверить принадлежность точки M этой Е-окружности, нужно убедиться, что соответствующее ей комплексное число удовлетворяет этому уравнению. Подставляем в левую часть уравнения (7.1) комплексное число, соответствующее M и преобразовываем полученное выражение. Должны получить то, что стоит справа в (7.1).

$$\left(\frac{a^2+c^2}{-c-bi}+c-\frac{a^2+b^2}{2b}i\right)\left(\frac{a^2+c^2}{-c+bi}+c+\frac{a^2+b^2}{2b}i\right)=$$

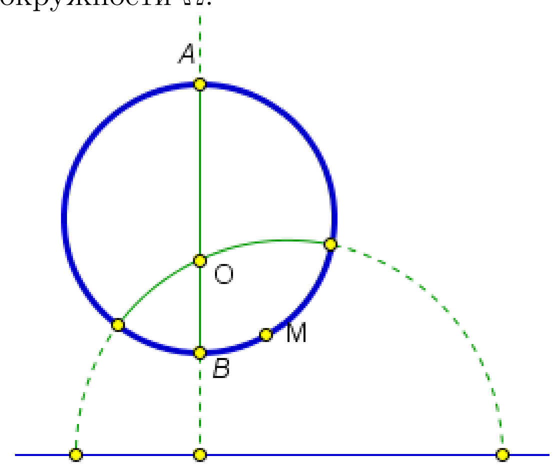
Преобразуем первую скобку, вторая будет ей комплексно сопряжена и получится автоматически.

$$\frac{a^2+c^2}{-c-bi}+c-\frac{a^2+b^2}{2b}i=\frac{a^2c-b^2c-a^2bi-bc^2i}{-(b^2+c^2)}-\frac{a^2+b^2}{2b}i=$$
$$=\frac{2bc(a^2-b^2)+(a^2-b^2)(c^2-b^2)i}{-2b(b^2+c^2)}=\frac{(a^2-b^2)}{-2b(b^2+c^2)}(2bc+(c^2-b^2)i). \quad (7.2)$$

Возвращаемся к прерванной цепочке равенств

$$=\left(\frac{(a^2-b^2)}{-2b(b^2+c^2)}\right)^2(4b^2c^2+(c^2-b^2)^2)=\left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2.$$

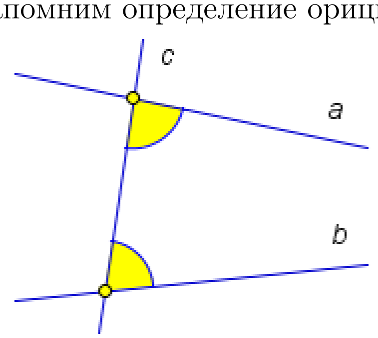
Мы получили то, что ожидали. Таким образом, мы показали, что все точки окружности Ω лежат на Е-окружности. Можно показать, что любая точка этой Е-окружности будет точкой окружности Ω.



Итак, мы получили, что окружность Ω в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского изображается Е-окружностью, но центры их не совпадают. На рисунке изображена окружность Ω, ее центр O и два диаметра AB и CD.

7.2. Орицикл.

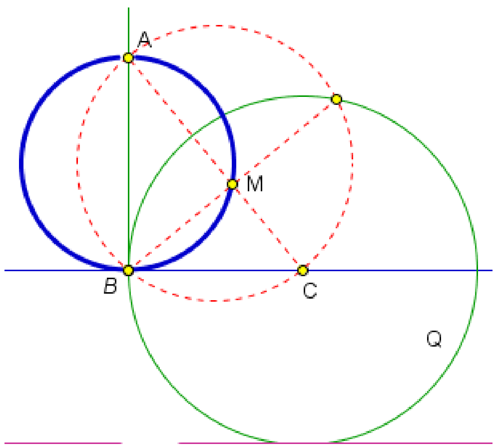
Напомним определение орицикла.



Секущей равного наклона двух прямых a и b на плоскости Лобачевского называется прямая c, которая при пересечении с ними образует равные односторонние углы.

Пусть дано семейство направленных прямых, любые две из которых параллельны. Будем говорить, что точки A и B плоскости Лобачевского находятся в отношении Δ, если прямая AB

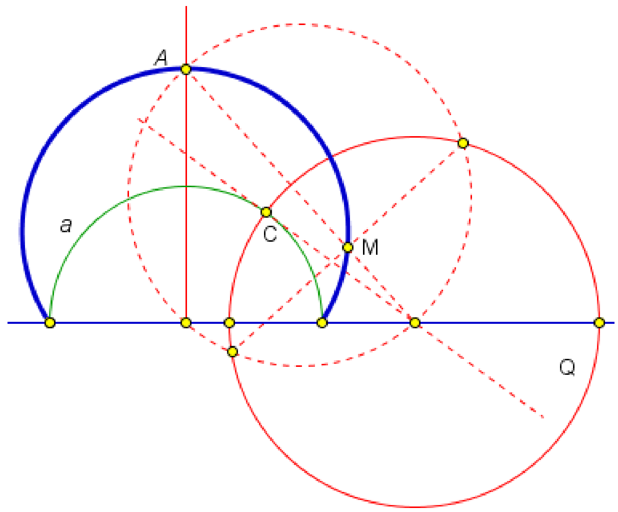
является секущей равного наклона к прямым данного семейства, проходящим через точки A и B. Отношение Δ является отношением эквивалентности. Множество всех точек плоскости Лобачевского разбивается на классы эквивалентности по этому отношению. Каждый из классов называется *орициклом.* В курсе геометрии Лобачевского бакалавриата было доказано, что любая прямая из семейства параллельных прямых, задающих орицикл, является его осью симметрии. Другими словами, если взять точку на орицикле и отобразить ее осевой симметрией с осью из данного пучка параллельных прямых, то попадем опять на тот же орицикл. Используя это свойство, можно построить точки орицикла.



Рассмотрим пучок параллельных прямых. На рисунке изображены две такие прямые – это Е-луч и Е-дуга Q, проходящие через точку B. Возьмем точку A (может быть выбрана произвольно на плоскости Лобачевского). Построим еще одну точку, принадлежащую орициклу, который проходит через A. Строим точку M – образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка орицикла. Двигаем точку C – центр окружности Q – вдоль абсолюта и строим относительно получающихся окружностей образы точки A. Это будут точки орицикла. Построив несколько точек, мы можем выдвинуть гипотезу, что орицикл в модели Пуанкаре изображается окружностью. Докажем это. Так как Е-прямая AB является касательной к любой окружности Q, красная пунктирная окружность (построена на AC как на диаметре) всегда проходит через точку B. Из алгоритма построения образа точки при инверсии следует, что AM перпендикулярно BM. Следовательно, угол AMB прямой и точка M является точкой окружности с диаметром AB. Можно показать и обратное, что любая точка Е-окружности с диаметром AB является образом точки A относительно некоторой окружности Q, то есть будет точкой орицикла.

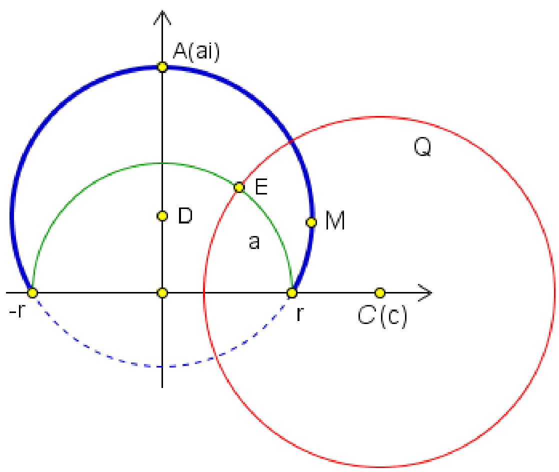
7.3. Эквидистанта

Напомним определение эквидистанты. Пусть на плоскости Лобачевского дана прямая a и отрезок MN. Множество точек, принадлежащих одной полуплоскости относительно a и находящихся на расстоянии MN от нее, называется *эквидистантой.* Прямая a называется базой эквидистанты. Другими словами, эквидистанта – это множество точек плоскости, которое получается следующим образом: через каждую точку базы проводим прямую, перпендикулярную ей, и откладываем на этой прямой отрезок, равный MN. В курсе бакалавриата было доказано, что каждая такая прямая является осью симметрии эквидистанты. Используя это свойство, построим несколько точек эквидистанты в модели Пуанкаре.



База a изображена зеленым. Возьмем Е-окружность Q, ортогональную Е-окружности a. Найдем образ точки A при инверсии относительно окружности Q. Это будет точка M эквидистанты. Меняя окружность Q и строя образы точки A относительно этих окружностей, мы можем построить точки эквидистанты. Опять возникает гипотеза, что эквидистанта изображается Е-окружностью.

Докажем это. Вводим систему координат, как показано на рисунке.



Обозначаем комплексные числа, которые соответствуют точкам (см. рисунок). Мы подозреваем, что эквидистанта будет изображаться дугой Е-окружности с центром в точке D, равноудаленной от точек r, $-r$ и $A(ai)$. Расстояние здесь обычное евклидово, поэтому комплексное число di, которое соответствует точке D, будет вычисляться так:

$$\sqrt{r^2+d^2} = a - d.$$

Выражаем отсюда d и получаем

$$d = \frac{a^2-r^2}{2a}.$$

Итак, нам нужно показать, что точка M (образ точки A при инверсии относительно Е-окружности Q) попадает на Е-окружность с радиусом DA (он равен $a - \frac{a^2-r^2}{2a}$ и центром D (ей соответствует комплексное число $\frac{a^2-r^2}{2a}i$. Другими словами, нам нужно убедиться, что комплексное число, соответствующее M удовлетворяет уравнению

$$(z - \frac{a^2-r^2}{2a}i)(\bar{z} + \frac{a^2-r^2}{2a}i) = \left(a - \frac{a^2-r^2}{2a}\right)^2. \tag{7.3}$$

Найдем z. Окружность Q ортогональна a, следовательно, по условию ортогональности ее радиус равен $\sqrt{c^2-r^2}$. Тогда формула инверсии будет иметь вид

$$z' = \frac{c^2-r^2}{\bar{z}-c} + c.$$

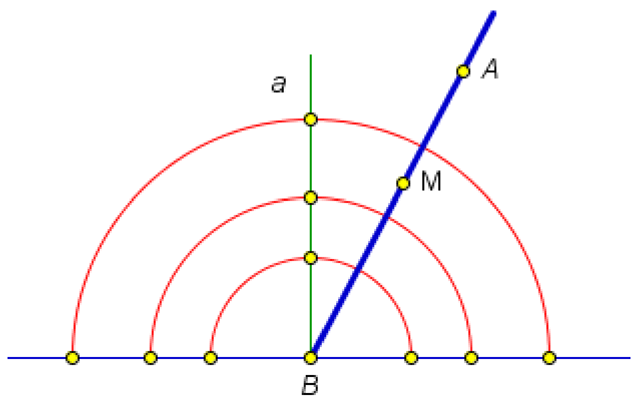
Подставляем комплексное число, задающее A

$$z = \frac{c^2-r^2}{-c-ai} + c = \frac{(r^2+aci)(c-ai)}{c^2+a^2} = \frac{c(r^2+a^2)+a(c^2-r^2)i}{c^2+a^2}.$$

Тогда, подставляя это z в левую часть уравнения (7.3) и проводя преобразования, получим правую часть этого уравнения. (Проведите подробные вычисления самостоятельно.) Таким образом, мы показали, что любая точка данной эквидистанты лежит на Е-окружности. Можно показать, что любая точка синей дуги Е-окружности является образом точки A при инверсии относительно некоторой окружности Q, следовательно, является точкой эквидистанты.

Итак, мы показали, что эквидистанта, у которой база изображается дугой Е-окружности, изображается в модели Пуанкаре дугой Е-окружности.

Посмотрим, как будет выглядеть эквидистанта, если ее база изображается Е-лучом.



Если база – Е-луч a, то ортогональные ей прямые будут изображаться дугами Е-окружностей с центром в начале этого Е-луча. Тогда если точка A принадлежит эквидистанте, то ее образы относительно этих Е-окружностей будут лежать на Е-луче BA. Обратно, для любой точки Е-луча BA найдется окружность с центром в точке B, такая, что относительно этой окружности в данную точку отобразится точка A. Итак, мы показали, что в случае, когда база эквидистанты изображается Е-лучом, эквидистанта изображается тоже Е-лучом, но уже не перпендикулярным абсолюту.

8. Замечательные точки и замечательные прямые треугольника на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

Замечательными прямыми треугольника называются прямые, содержащие биссектрисы, высоты, медианы треугольника, а также прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точки пересечения соответствующих групп замечательных прямых называются *замечательными точками* треугольника.

8.1. Биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника является объектом абсолютной геометрии (то есть геометрии, построенной на первых четырех группах аксиом). Понятие биссектрисы угла вводится в третьей группе аксиом. Теорема о пересечении биссектрис треугольника в одной точке также является теоремой абсолютной геометрии. Она также доказывается в третьей группе аксиом. Значит, эта теорема верна и в геометрии Лобачевского. (Посмотрите динамический рисунок Замечательные прямые треугольника.)

Используя теорему о точке пересечения биссектрис треугольника, доказывается теорема об окружности, вписанной в треугольник: в любой треугольник можно вписать окружность.

8.2. Медианы треугольника.

Медиана треугольника является объектом абсолютной геометрии. Она определяется в третьей группе аксиом (для нее нужно понятие конгруэнтности отрезков, сам треугольник возникает уже во второй группе аксиом). Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке в евклидовой геометрии доказывается с помощью подобия, то есть для ее доказательства существенен пятый постулат Евклида. Но, оказывается эта теорема верна также и в геометрии Лобачевского. Ее доказательство проводится с помощью тригонометрии.

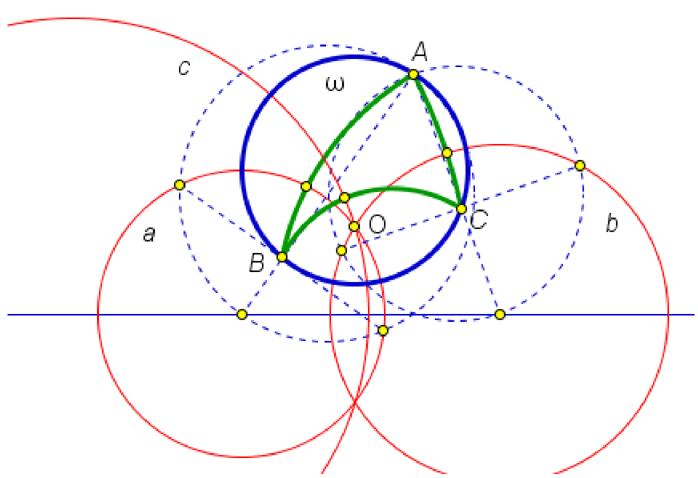
Задача 8.1. Постройте треугольник в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и три его медианы.

8.3. Серединные перпендикуляры треугольника.

Понятие серединного перпендикуляра также как и понятия медианы и биссектрисы вводится в третьей группе аксиом. Но в отличие от них серединные перпендикуляры треугольника в геометрии Лобачевского не обязательно пересекаются в одной точке. Доказывается, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат к одному пучку прямых, то есть либо все три пересекаются в одной точке, либо все три параллельны, либо все три расходятся. (доказательство можно посмотреть в [7])

Построим в модели Пуанкаре примеры треугольников для всех трех случаев.

Сначала рассмотрим пересекающиеся серединные перпендикуляры.

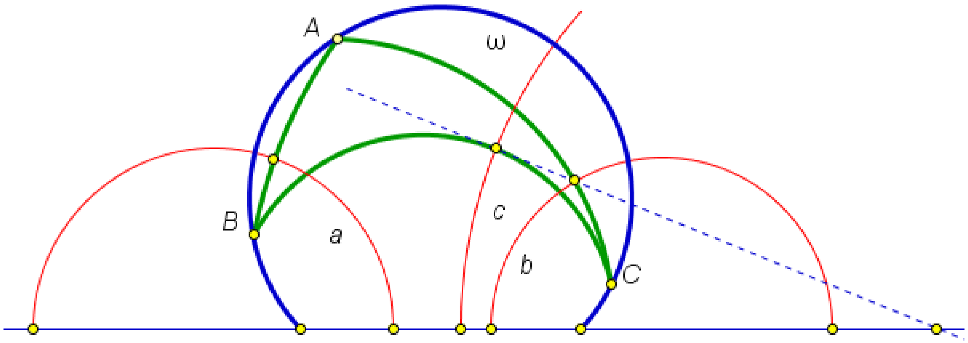


Изображаем два серединных перпендикуляра a и b, которые пересекаются в точке O. Берем произвольную точку A и инверсией отображаем ее от E-окружности a и E-окружности b (синие пунктирные линии). Тогда получим еще две точки B и C искомого треугольника. Так как инверсия в модели Пуанкаре моделируем осевую симметрию, мы по получаем нужный треугольник ABC и два серединных перпендикуляра к его сторонам.

Изобразим третий серединный перпендикуляр c. Так как он должен проходить через точку O, нам нужно построить еще одну его точку. Построим середину стороны BC (как это делается, см. задачу выше). Двух точек достаточно, чтобы изобразить дугу с центром на абсолюте.

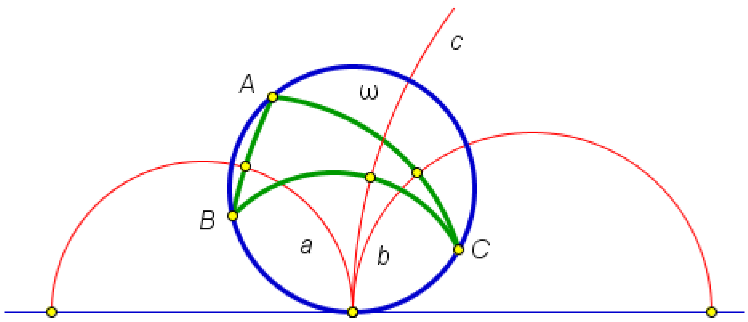
Около треугольника, серединные перпендикуляры которого пересекаются в одной точке, можно описать окружность. Чтобы изобразить ее, строим E-окружность, проходящую через точки A, B, C. Это окружность ω.

Рассмотрим расходящиеся серединные перпендикуляры.



Опять берем два серединных перпендикуляра a и b, которые теперь расходятся, и точку A между ними.

Отображаем точку A относительно Е-окружностей a и b инверсией и получаем треугольник ABC. Строим серединный перпендикуляр c к стороне BC и изображаем эквидистанту, описанную около треугольника.



Аналогичным образом строим треугольник ABC с параллельными серединными перпендикулярами a, b, c и строим описанный около него орицикл ω.

9. От единственной геометрии к множеству геометрий.

Геометрия, как и другие науки, возникла из повседневных потребностей освоения окружающего мира. Термин геометрия означает землемерие. Достаточно обширные геометрические факты были известны еще в Древнем Египте и Древнем Вавилоне за две тысячи лет до нашей эры. Греки сначала переняли уже накопленный геометрический опыт Египта и Вавилона, а затем пошли дальше. Они не удовольствовались констатацией факта: высота равнобедренного треугольника является медианой и биссектрисой. Они задавались вопросом: почему это так? Они требовали обоснования каждого факта. Так в геометрию вошло понятие доказательства. Накопленные факты требовали систематизации. Выдающуюся роль в этом деле сыграл Евклид (примерно 300 год до нашей эры). Его знаменитая книга Начала на протяжении двух тысячелетий была эталоном построения геометрии.

До девятнадцатого века была одна единственная геометрия – геометрия, описанная в Началах Евклида. Эта наука описывала свойства объектов окружающего мира. Один мир – одна геометрия. Никто и не задумывался о том, что возможна другая геометрия. Все началось с попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат, в отличие от остальных утверждений, которые принимались без доказательства, был слишком громоздким. Попытки доказать его начались еще во времена Евклида, и даже делались самим Евклидом. Попытки были безуспешными до первой половины девятнадцатого века. В первой половине 19 века у Н.И.Лобачевского (и не только у него одного) появилась следующая идея: заменить пятый постулат Евклида на его отрицание и начать выводить новые утверждения. Если пятый постулат Евклида выводится из остальных аксиом, то на каком-то шаге должно получиться противоречие. Другими словами, была сделана попытка доказать пятый постулат Евклида от противного. Н.И.Лобачевский, взяв отрицание пятого постулата, начал выводить теоремы. Он продвинулся достаточно далеко и не наткнулся на противоречие. Из этого он сделал вывод, что пятый постулат Евклида не зависит от остальных аксиом. Кроме того, он получил альтернативную геометрию, которую назвал воображаемой. Позднее она получила название геометрии Лобачевского.

В середине девятнадцатого века доказательство независимости пятого постулата, которое провел Н.И.Лобачевский, было достаточно строгим. Но в конце девятнадцатого века такой уровень строгости доказательства оказался недостаточным. Действительно, пусть Н.И.Лобачевский развил свою геометрию достаточно далеко и не встретил противоречия, но где гарантии, что следующая теорема не будет содержать противоречия. Возникла проблема обоснования геометрии. Существенный вклад в решение этой проблемы внесли Д.Гильберт, Э.Бельтрами, Ф.Клейн, А.Кэли и др. Для доказательства непротиворечивости геометрии было предложено построить ее модель, то есть взять уже построенную („достаточно надежную“) математическую теорию, с ее помощью задать основные объекты геометрии и основные отношения, затем проверяется выполнение всех аксиом. Если такая модель строится, то геометрия будет не противоречивой (если не противоречива математическая теория, с помощью которой строилась модель).

Одной из моделей геометрии Лобачевского является модель, для которой исходная математическая теория – это проективная геометрия. Это модель Кэли-Клейна. На проективной плоскости фиксируется овальная линия. Множество ее внутренних точек – это множество точек плоскости Лобачевского. Прямые – это хорды проективных прямых, лежащие внутри овальной линии. Отношения принадлежности и порядка задаются обычным образом. Отношение конгруэнтности вводится так: две фигуры на плоскости Лобачевского на модели Кэли-Клейна считаются конгруэнтными, если существует проективное преобразование, оставляющее инвариантной овальную линию и переводящее одну фигуру в другую. Такие преобразования моделируют движения плоскости Лобачевского. Непосредственная проверка показывает, что все четыре группы аксиом абсолютной геометрии в этой модели выполняются, а также выполняется аксиома Лобачевского. Это уже было достаточно строгое доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского, и геометрия Лобачевского стала стала равноправной с геометрией Евклида.

Итак, после открытия Н.И. Лобачевского наука получила две геометрии. Заметим, что еще задолго до появления геометрии Лобачевского была сферическая геометрия. Но она воспринималась как часть евклидовой геометрии, сводилась к трехгранным углам. Поэтому появление геометрии Лобачевского было переходом от одной геометрии к множеству геометрий.

Если геометрий уже две, может их существует больше? А если их много, то возникает вопрос: что такое геометрия? Ответ на этот вопрос дал Ф. Клейн в своей знаменитой Эрлангенской программе. Геометрия – это наука, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно той или иной группы преобразований. Используя такое определение геометрии, Ф.Клейн построил на базе проективной геометрии построил 9 различных геометрий. Он выделял в группе всех проективных преобразований подгруппы таких преобразований, которые оставляют инвариантной ту или иную фигуру проективной плоскости. В качестве такой фигуры он брал точку, прямую, овальную линию и др. Выделенные преобразования играли роль движений в новых геометриях.

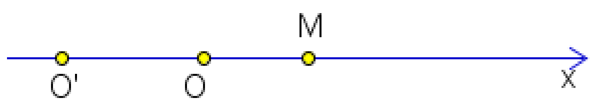
Используя подход к построению геометрии, предложенный Ф.Клейном, мы познакомимся с геометрией, которая возникла из потребностей физики – с геометрией Галилея.

10. Геометрия Галилея.

10.1. Возникновение геометрии Галилея из нужд физики.

Рассмотрим прямолинейное движение (то есть движение по прямой ℓ) материальной точки M. Наложим на эту прямую систему координат $(O, \vec{e})$ (O – начало системы и всего одна ось Ox). Пусть она движется относительно этой прямой с постоянной скоростью v. Пусть вдоль прямой расположена еще одна, неподвижная, система координат $(O', \vec{e})$. Пусть у точки O в момент времени $t = 0$ была координата a относительно второй системы координат. Тогда в момент времени t у нее будет координата $vt + a$. Обозначим через x координату точки M относительно первой системы координат и x' – относительно второй. Тогда

$$x'\vec{e} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = (a + vt)\vec{e} + x\vec{e}.$$



Присоединим к этой формуле еще возможность переноса начала отсчета времени $t' = t + b$.

Тогда мы получим преобразования Галилея, которые описывают переход от одной инерциальной системы (то есть движущейся равномерно и прямолинейно) отсчета к другой:

$$\begin{aligned} x' &= x + vt + a \\ t' &= t + b. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Согласно принципу относительности Галилея (никакие механические эксперименты, производимые внутри физической системы, не могут обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы) все законы механики должны быть инвариантны относительно преобразований координат (10.1).

Замечание 10.1**.** На формулы (10.1) можно посмотреть с двух позиций: во-первых, как на формулы перехода от одной системы координат с переменными (x, t) к другой системе координат с переменными (x', t'), во-вторых, как на формулы некоторого преобразования множества точек обычной плоскости (была точка (x, t) относительно системы координат, после преобразования получилась точка с координатами (x', t') относительно той же системы координат).

Рассмотрим геометрию, которая описывает движения точки M вдоль прямой ℓ. Точкой этой геометрии будет „событие“ – положение точки M в момент времени t. Мы будем моделировать его точкой обычной евклидовой плоскости с координатами (x, t). Интерес в этой геометрии будут представлять фигуры и факты о них, которые инвариантны относительно преобразований вида (10.1). Эти преобразования будут движениями геометрии Галилея. Чтобы немного отвлечься от физики и приблизиться к геометрии, мы переобозначим переменные: t обозначим x, а x обозначим y. Тогда формулы движений геометрии Галилея будут иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= vx + y + b, \end{aligned} \tag{10.2}$$

где a, b, v – некоторые константы.

Заметим, что преобразования вида (10.2) распадаются в композицию двух преобразований

$$\begin{aligned} x' &= x + a \qquad & x' &= x \\ y' &= y + b \qquad & y' &= vx + y. \end{aligned} \tag{10.3}$$

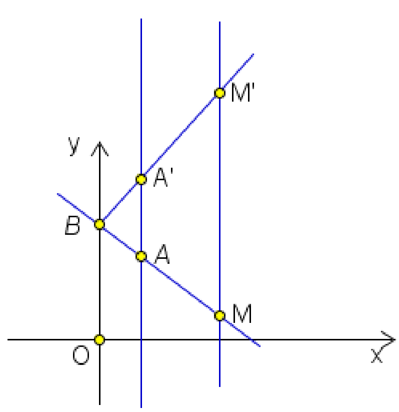
Первое преобразование – это параллельный перенос на вектор (a, b). Второе преобразование – это сдвиг в направлении оси Oy с коэффициентом v.

Замечание 10.2**.** Напомним, что такое сдвиг и как строятся образы точек при сдвиге. Сдвиг является частным случаем аффинного преобразования плоскости. Он имеет прямую инвариантных точек. Действительно, используя формулы (10.3), найдем инвариантные точки сдвига

$$\begin{cases} x = x \\ y = vx + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 0 \end{cases}$$

Значит, множество всех инвариантных точек сдвига задается уравнением $x = 0$. Это ось Oy.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и найдем ее образ при сдвиге по формулам (10.3). Получим $M'(x, vx + y)$. Тогда $\overrightarrow{MM'}(0, (v-1)x)$, то есть мы получили вектор, параллельный оси Oy. Итак, при сдвиге точки сдвигаются параллельно оси. При этом чем дальше от оси точка M, тем на большее расстояние она сдвигается.



Пусть сдвиг задан осью Oy и парой соответствующих точек $A \to A'$ (знаем, что точка A переходит при сдвиге в точку A'). Построим образ произвольной точки M при этом сдвиге. Точка M' будет лежать на прямой, параллельной оси Oy. С другой стороны, точка B (пересечение прямой AM и оси Oy) будет инвариантной, так как лежит на оси сдвига. Тогда прямая $A'M'$ (образ прямой AM при сдвиге) должна проходить через точку B. Значит, точка M' лежит на прямой BA'. Итак, точка M' – точка пересечения прямой, параллельной оси Oy, и прямой $A'B$.

Итак, будем строить фигуры и рассматривать только те факты новой геометрии, которые инвариантны относительно параллельных переносов и сдвигов вдоль фиксированной раз и навсегда оси Oy (сдвиги, параллельные переносы и их композиции будут движениями геометрии

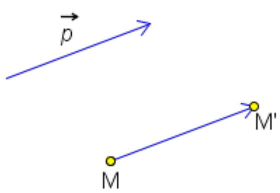
Галилея). Свойства фигур, сохраняющиеся относительно параллельных переносов и сдвигов, будем называть *геометрическими свойствами фигур*. Фигуры будут называться *равными*, если существует движение плоскости Галилея (сдвиг, параллельный перенос или их композиция), которое переводит одну фигуру в другую. Точками этой геометрии будут точки евклидовой плоскости.

10.2. Математическое появление геометрии Галилея

Вспомним подход Ф. Клейна к определению понятия геометрии. Он предлагал определить геометрию, как науку, которая изучает фигуры и их свойства, инвариантные относительно тех или иных групп преобразований.

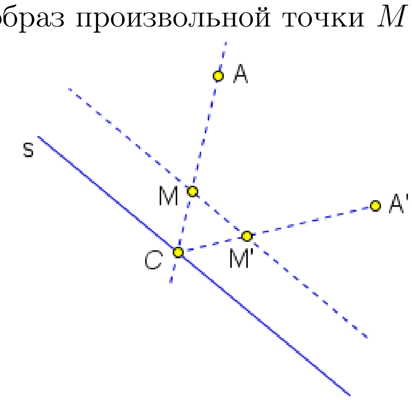
Рассмотрим аффинную плоскость. Как мы знаем из курса аналитической геометрии, *аффинным преобразованием плоскости* называется такое преобразование, которое три точки, лежащие на одной прямой переводит в три точки также лежащие на одной прямой (и при этом сохраняется простое отношение трех точек). Аффинные преобразования образуют группу.

Примером аффинного преобразования является параллельный перенос. Напомним, что это такое. Пусть фиксирован вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости.



Параллельным переносом на вектор $\vec{p}$ называется преобразование плоскости, которое переводит точку M этой плоскости в точку точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$.

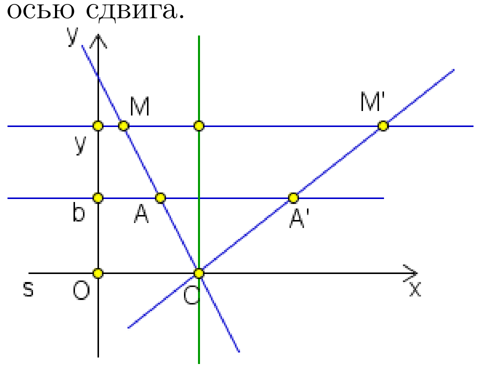
Другим примером аффинного преобразования является *родство*. Это аффинное преобразование, имеющее по крайней мере две инвариантные точки. В курсе аналитической геометрии доказывается, что родство имеет целую прямую инвариантных точек. Она называется *осью родства*. Если любая точка M при родстве переходит в точку M' такую, что вектор $\overrightarrow{MM'}$ параллелен оси родства, то оно называется *сдвигом*. Построение образов точек при сдвигах основано на двух их простых свойствах: 1) MM' параллельно оси; 2) если прямая a пересекает ось сдвига в точке C, то ее образ a' тоже проходит через C (так как на оси точки инвариантны). Чтобы задать сдвиг достаточно указать его ось и пару соответствующих точек A и A'. Тогда образ произвольной точки M строится следующим образом.



Точка M' лежит на прямой, проходящей через точку M и параллельной оси сдвига s. Кроме того, она лежит на прямой $A'C$.

Выведем формулы сдвига. Пусть он задается осью s и парой соответствующих точек A и A'.

Выберем прямоугольную декартову систему координат следующим образом: ось Ox совпадает с осью сдвига.



Обозначим координаты точки $A(a, b)$. Координаты точки A' обозначим (c, b). Буквы a, c, b – это некоторые фиксированные числа, которые определяют сдвиг. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, $M'(x', y')$ – ее образ. Проведем в треугольнике $MM'C$ высоту как показано на рисунке. Тогда из подобия получим

$$\frac{MM'}{AA'} = \frac{y}{b}; \Leftrightarrow \frac{x' - x}{c - a} = \frac{y}{b}.$$

Откуда получаем, что $x' = x + \frac{c-a}{b}y$. Кроме того, заметим, что $y' = y$. Если точка M расположена ниже оси Oy, то аналогичные рассуждения приводят к такой же формуле (то же самое получаем, если точка A' расположена левее точки A). Обозначим $\frac{c-a}{b} = k$. Тогда формулы сдвига примут вид:

$$x' = x + ky;\; y' = y. \tag{10.4}$$

Если два сдвига имеют одну и ту же ось, они будут задаваться формулами (10.4) и отличаться друг от друга коэффициентом k.

Задача 10.1**.** Докажите, что композиция двух сдвигов с одной осью есть сдвиг с той же осью. Докажите, что композиция двух параллельных переносов является параллельным переносом. Докажите, что композиция сдвига и параллельного переноса с вектором, параллельным оси сдвига, является сдвигом с той же осью.

Следствие 10.1**.** Множество всех сдвигов с фиксированной осью, параллельных переносов и их всевозможных композиций является группой. Эта группа называется *группой Галилея*. Такие преобразования в прямоугольной декартовой системе координат, ось Ox которой совпадает с осью сдвигов, записываются в виде

$$x' = x + ky + a;\; y' = y + b.$$

Следуя Ф.Клейну, будем рассматривать и изучать только те фигуры (множества точек) на евклидовой плоскости и их свойства, которые инвариантны относительно группы Галилея. Преобразования группы Галилея становятся движениями этой геометрии, то есть позволяют выделять равные (точнее, конгруэнтные) фигуры. Это геометрия Галилея. Следуя обозначениям физиков, в качестве оси возьмем ось Oy, а коэффициент k будем обозначать v:

$$x' = x + a;\; y' = vx + y + b.$$

11. Расстояние между точками и угол между прямыми в геометрии Галилея.

11.1. Прямые в геометрии Галилея.

Прямыми в геометрии Галилея будут прямые евклидовой плоскости. Такое понятие прямой мы можем ввести, так как при параллельных переносах и сдвигах прямая переходит в прямую.

Действительно, как мы знаем из курса аналитической геометрии, прямая относительно системы координат задается уравнением

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0. \tag{11.1}$$

Находим образ этой прямой при сдвиге:

$$Ax' + B(y' - vx') + C = 0 \Leftrightarrow (A - Bv)x' + By' + C = 0. \tag{11.2}$$

Проверим, могут ли коэффициенты $(A - Bv)$ и B в полученном уравнении одновременно обращаться в нуль: если $B = 0$, то первый коэффициент будет A. Он не нуль в силу (11.1). Итак, уравнение (11.2) задает прямую (из курса аналитической геометрии знаем, что линейное уравнение, записанное относительно аффинной системы координат, задает прямую). Аналогичным образом доказывается, что параллельный перенос переводит прямую в прямую.

Значит, свойство множества точек плоскости быть прямой инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов, и наше определение прямой в геометрии Галилея корректно.

Рассмотрим прямые геометрии Галилея, параллельные оси Oy. Такая прямая имеет уравнение $x = a$, где a – константа.

Задача 11.1**.** Покажите, что при параллельных переносах и сдвигах прямая, параллельная оси Oy перейдет в прямую также параллельную оси Oy.

Таким образом, в геометрии Галилея свойство прямой быть параллельной оси Oy имеет геометрический смысл. Поэтому множество всех прямых делится на два класса – прямые, параллельные оси Oy, и остальные прямые. Прямые, параллельные оси Oy, называются *особыми прямыми*. Остальные прямые будем называть просто прямыми.

Задача 11.2**.** Покажите, что свойство прямой быть параллельной оси Ox не является геометрическим свойством.

Прямые в геометрии Галилея будем называть *параллельными*, если они не пересекаются. Покажем, что это геометрическое свойство прямых. Действительно, покажем, что параллельные прямые переходят в параллельные прямые при сдвиге (параллельный перенос рассмотрите самостоятельно). Рассмотрим две параллельные прямые

$$\ell :\ Ax + By + C_1 = 0; \qquad m :\ Ax + By + C_2 = 0.$$

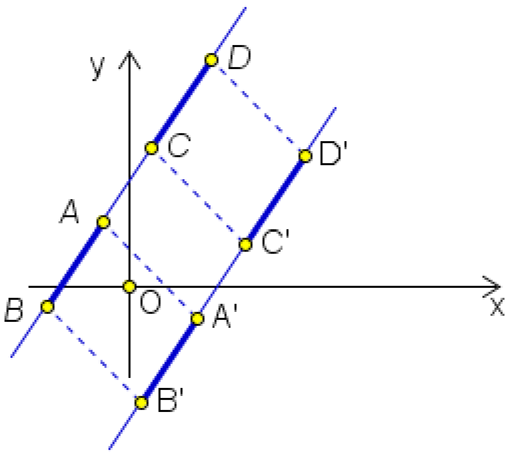
Их образы будут задаваться уравнениями

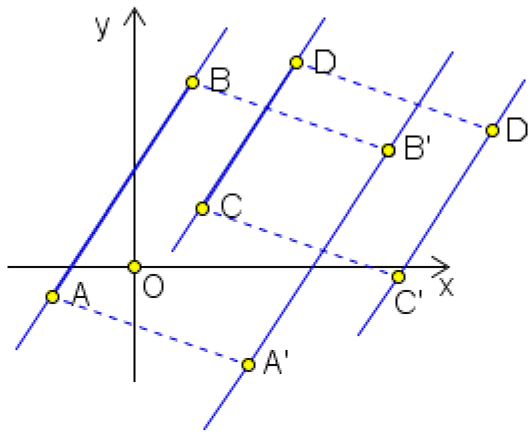
$$\ell' :\ (A - Bv)x' + By' + C_1 = 0; \qquad m' :\ (A - Bv)x' + By' + C_2 = 0.$$

Коэффициенты при переменных пропорциональны, а свободные члены не пропорциональны, следовательно, прямые ℓ' и m' параллельны.

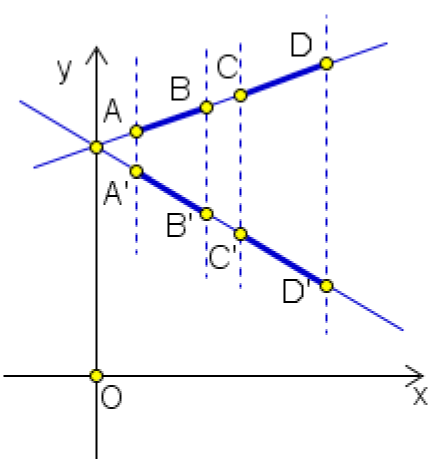
Замечание 11.1**.** Отношение длин (в евклидовом смысле) отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, имеет геометрический смысл в геометрии Галилея, а в противном случае – нет.

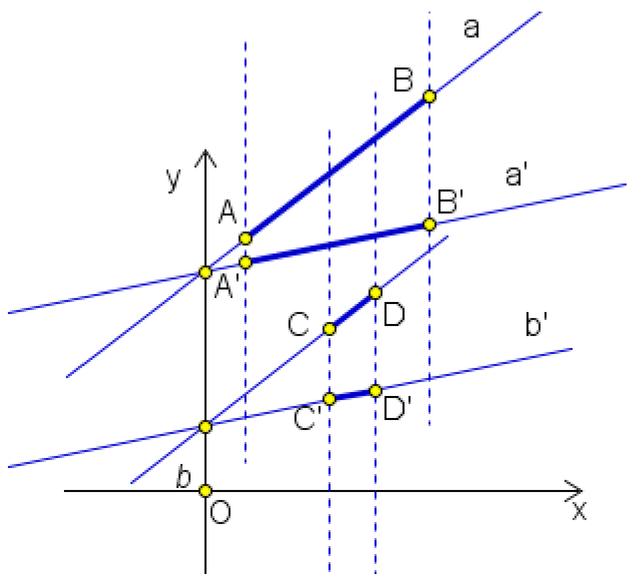
Случай параллельного переноса очевиден (проведите рассуждения самостоятельно, используя рисунок).





Рассмотрим случай сдвига.





На первом рисунке изображены отрезки AB и CD, которые лежат на одной прямой. Изображаем их образы при произвольном сдвиге вдоль оси Oy. Тогда

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

по обобщенной теореме Фалеса. Если отрезки AB и CD лежат соответственно на параллельных прямых a и b, то их образы $A'B'$ и $C'D'$ будут лежать соответственно на параллельных прямых a' и b'. Пунктирные параллельные прямые переносят отрезок AB на прямую b, сохраняя его длину. Аналогично $A'B'$ переносится на b'. Мы получаем первый случай и равенство отношений длин отрезков.

Задача 11.3. Возьмите два конкретных отрезка на оси Ox и на прямой $x+y+1=0$. Найдите их образы при сдвиге $x'=x$, $y'=2x+y$. Убедитесь, что длины этих отрезков различны.

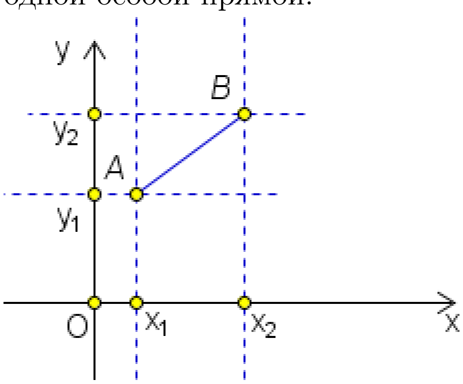
11.2. Расстояние между точками и угол между прямыми.

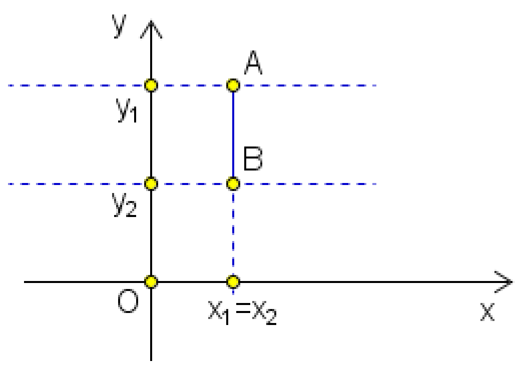
2.1. Расстояния между точками Пусть даны две точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ в геометрии Галилея. *Расстоянием* между точками A и B называется число $d(A,B)$

$$d(A,B)=x_1-x_2.$$

Очевидно, что число $d(A,B)$ инвариантно относительно параллельных переносов и сдвигов, а значит, имеет геометрический смысл в геометрии Галилея. Заметим, что в геометрии Галилея расстояние может быть и отрицательным числом.

Заметим, что $d(A,B)=0$ тогда и только тогда, когда $A=B$ или точки A и B лежат на одной особой прямой.





Для таких точек определяется еще и *особое расстояние* по формуле

$$\delta(A,B)=y_1-y_2.$$

Покажем, что особое расстояние имеет геометрический смысл в геометрии Галилея, то есть остается инвариантным относительно сдвигов и параллельных переносов. Действительно, так как точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ лежат на одной особой прямой, то $x_1=x_2$. Тогда

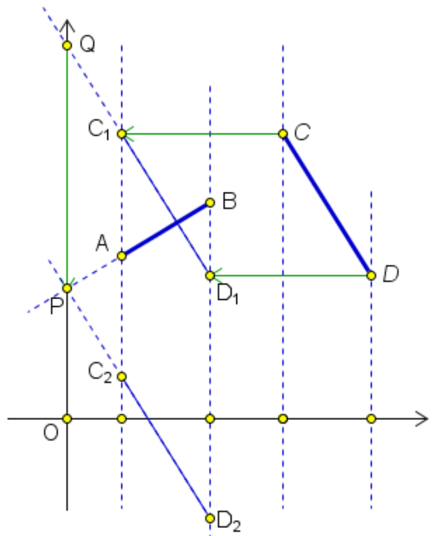
$$\delta(A',B')=y_1'-y_2'=vx_1+y_1+b-vx_2-y_2-b=y_1-y_2=\delta(A,B).$$

Легко видеть, что точки A и B плоскости Галилея совпадают тогда и только тогда, когда равно нулю расстояние $d(A,B)$ между ними и особое расстояние $\delta(A,B)$ между ними.

Заметим, что для точек, принадлежащих различным особым прямым особое расстояние не определяется, так как оно не будет инвариантным относительно композиций параллельных переносов и сдвигов вдоль оси Oy.

Отрезком называется Е-отрезок обыкновенной прямой. Как обычно, мы будем называть два отрезка *конгруэнтными*, если существует движение (в нашем случае сдвиг, параллельный перенос или их композиция), которые переводят один отрезок в другой. *Длиной отрезка* будем называть расстояние между его началом и концом. Выше мы уже показали, что если один отрезок переводится движением (сдвиг, параллельный перенос, их композиция) в другой, то их длины равны. Докажем обратное, что если два отрезка имеют равные длины (со знаком), то существует движение плоскости Галилея, которое переводит один отрезок в другой.

Пусть два отрезка AB и CD имеют равные длины в смысле Галилея, то есть их проекции (со знаком) на ось Ox равны.



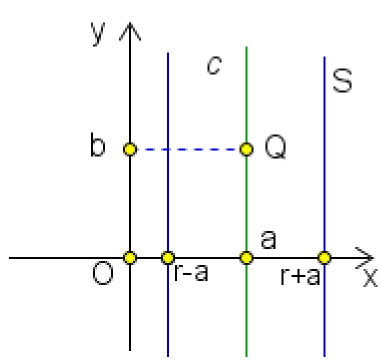
Нам нужно показать, что существует движение плоскости Галилея, которое переводит отрезок AB в отрезок CD. Совместим параллельным переносом полосы, в которых лежат данные отрезки. Это будет вектор $\overrightarrow{CC_1}$. Параллельный перенос на этот вектор отобразит отрезок CD в отрезок C_1D_1. Обозначим через P и Q точки пересечения с осью Oy прямых AB и C_1D_1 соответственно. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{QP}$. Он переведет отрезок C_1D_1 в отрезок C_2D_2. Тогда сдвиг с осью Oy и парой соответствующих точек $C_2 \to A$ переведет отрезок C_2D_2 в отрезок AB.

Итак, мы получили, что введенные понятия длины отрезка и движения согласованы, то есть отрезки имеют равные длины тогда и только тогда, когда они конгруэнтны (существует движение в смысле Галилея, переводящее один в другой).

Задача 11.4. Пусть существует движение в смысле Галилея, переводящее отрезок AB в отрезок CD. Верно ли, что существует движение в смысле Галилея, переводящее отрезок AB в отрезок DC (порядок концов меняется, а значит и меняется длина со знаком, хотя длины по модулю остаются равными)?

2.2. Окружность в геометрии Галилея *Окружностью* в геометрии Галилея называется множество точек плоскости, модуль расстояния от каждой из которых до данной точки Q равен данному положительному числу $r > 0$. Точка Q называется центром окружности, а число r – радиусом.

Выясним, как выглядит окружность. Пусть $Q(a, b)$. Тогда точка $M(x, y)$ принадлежит окружности S с центром в точке Q радиуса r тогда и только тогда, когда $|d(M, Q)| = r$, то есть $|x - a| = r$ Это пара двух особых прямых: $x = r + a$ и $x = r - a$.



Заметим, что окружность в геометрии Галилея имеет однозначно определенный радиус – это половина расстояния (евклидова) между изображающую эту окружность прямыми, но бесконечно много центров. Центром будет любая точка прямой c – это особая прямая, содержащая точку Q.

Задача 11.5. Докажите, что при параллельных переносах и сдвигах окружность переходит в окружность (следовательно, эту фигуру можно рассматривать в геометрии Галилея).

Заметим, что дугой окружности плоскости Галилея будет Е-отрезок особой прямой. *Длина дуги* AB окружности – это особое расстояние между точками A и B.

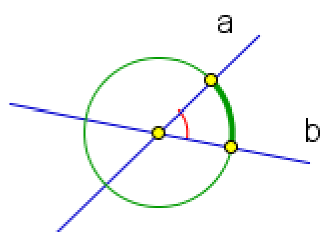
Задача 11.6. Докажите, что дуги окружностей имеют равные длины тогда и только тогда, когда существует движение в смысле Галилея, переводящее одну дугу в другую.

11.3. Середина отрезка и середина дуги окружности.

Серединой отрезка называется точка этого отрезка, которая разбивает его на два отрезка равной длины. Очевидно, что середина отрезка на плоскости Галилея совпадает с серединой Е-отрезка, который его изображает.

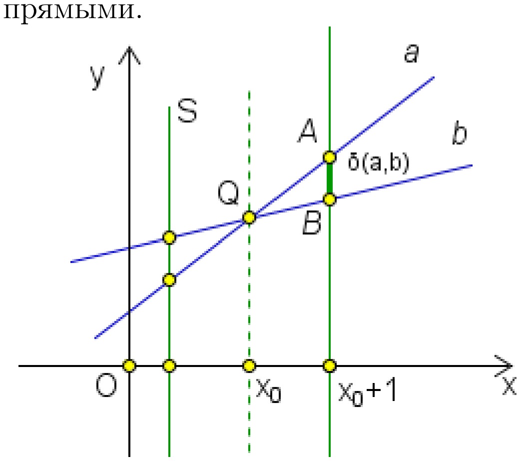
Аналогичное определение вводится и для середины дуги окружности на плоскости Галилея. *Серединой дуги окружности* называется точка этой дуги, которая делит ее на две дуги равной длины.

3.1. Угол между прямыми. Напомним,



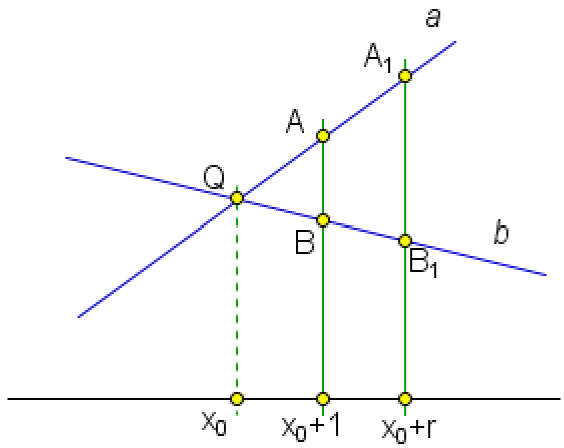
что в геометрии Евклида угол между двумя пересекающимися прямыми равен длине не большей дуги окружности единичного радиуса, заключенной между этими прямыми.

Аналогичным образом мы поступим и в геометрии Галилея. *Углом* $\delta(a,b)$ *между двумя прямыми* a и b называется длина дуги окружности единичного радиуса, заключенной между данными прямыми.



Заметим, что длина дуги окружности – это особое расстояние между точками A и B, в которых окружность геометрии Галилея пересекает данные прямые.

В геометрии Евклида величину угла можно вычислить с помощью окружности произвольного радиуса r. Хорошо известна формула: величина угла равна отношению длины дуги этой окружности к ее радиусу. Точно такая же формула действует и в геометрии Галилея



По определению $\angle(a,b) = \delta(A,B)$. Напомним, что $\delta(A,B)$ – это Е-длина Е-отрезка AB со знаком (плюс или минус). Тогда из подобия Е-треугольников QAB и QA_1B_1 получаем, что для Е-длин отрезков

$$\frac{AB}{1} = \frac{A_1B_1}{r}.$$

Откуда получаем требуемую формулу

$$\angle(a,b) = \delta(A,B) = \frac{A_1B_1}{r}.$$

Выведем формулу для вычисления угла между прямыми a и b. Пусть прямая a задается уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая b – уравнением $y = k_2x + b_2$. Обозначим их точку пересечения через $Q(x_0, y_0)$. Окружность S имеет уравнения $x = x_0 \pm 1$. Тогда точки пересечения A и B единичной окружности с прямыми a и b будут иметь вид:

$$A(x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + b_1);\ B(x_0 + 1, k_2(x_0 + 1) + b_2),$$

следовательно, так как $Q(x_0, y_0)$ принадлежит обеим прямым a и b, а значит, $y_0 = k_1x_0 + b_1 = k_2x_0 + b_2$,

$$\delta(a,b) = \delta(A,B) = k_1(x_0+1) + b_1 - (k_2(x_0+1) + b_2) = (k_1x_0 + b_1) - (k_2x_0 + b_2) + k_1 - k_2| = k_1 - k_2.$$

Итак, формула для вычисления угла между пересекающимися прямыми имеет вид

$$\delta(a,b) = k_1 - k_2. \tag{11.3}$$

Также как и расстояние между точками, угол между двумя прямыми может быть числом отрицательным. При этом

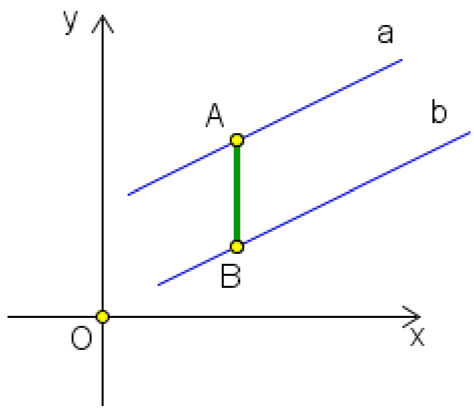
$$\delta(a,b) = -\delta(b,a),$$

то есть порядок прямых в определении угла важен.

Задача 11.7. Проверьте, что угол между пересекающимися прямыми инвариантен относительно параллельных переносов и сдвигов, а значит, является геометрической величиной.

Задача 11.8. Докажите, что если углы между двумя парами пересекающихся прямых равны, то существует движение (в смысле Галилея), которое переводит одну пару прямых в другую.

Используя формулу (11.3), мы можем доопределить угол между параллельными прямыми:



Так как прямые a и b параллельны, их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны, следовательно, формула (11.3) выдаст нуль для значения угла между параллельными прямыми. Для параллельных прямых мы можем определить расстояние – это особая длина отрезка любой особой прямой, заключенного между данными параллельными прямыми:

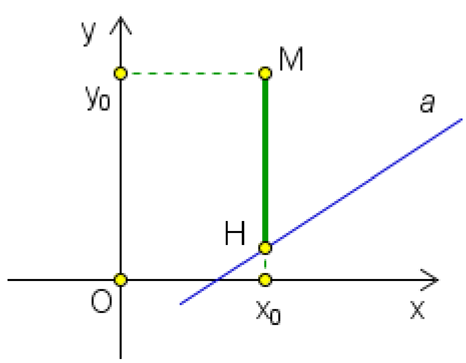
$$d(a, b) = \delta(A, B).$$

Очевидно, что если прямые a и b заданы уравнениями $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ соответственно, то формула для вычисления расстояния между параллельными прямыми примет вид

$$d(a, b) = b_1 - b_2.$$

Задача 11.9. Почему расстояние между параллельными прямыми определено так, как мы описали выше, а не как в евклидовой геометрии?

3.2. Расстояние от точки до прямойБудем называть *расстоянием от точки M до прямой a* особое расстояние от M до точки пересечения прямой a с особой прямой, проходящей через точку M.



Такое определение объясняется следующими обстоятельствами: в евклидовой геометрии расстояние от точки до прямой – это длина самого короткого отрезка, соединяющего данную точку со всевозможными точками данной прямой. В нашем случае, если соединять точку M со всевозможными точками прямой a, то самое маленькое по модулю расстояние – нулевое – будет для отрезка MH. Поэтому мы берем именно этот отрезок, но чтобы не получать всегда число нуль, мы будем брать особое расстояние между точками M и H.

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки M до прямой a, если $M(x_0, y_0)$, $a: \ y = kx + b$. Так как особое расстояние между точками M и H – это разность их вторых координат, получаем

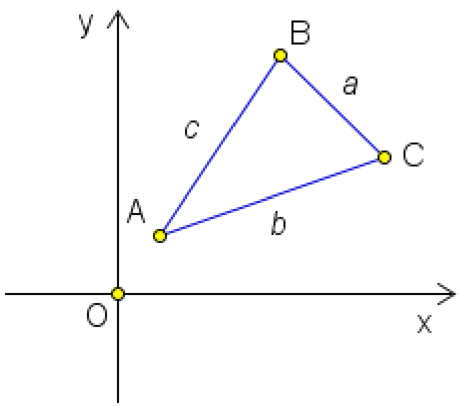
$$d(M, a) = \delta(M, H) = y_0 - kx_0 - b.$$

Теперь расстояние между параллельными прямыми мы можем описать как расстояние от любой точки одной из прямых до другой.

12. Треугольники в геометрии Галилея

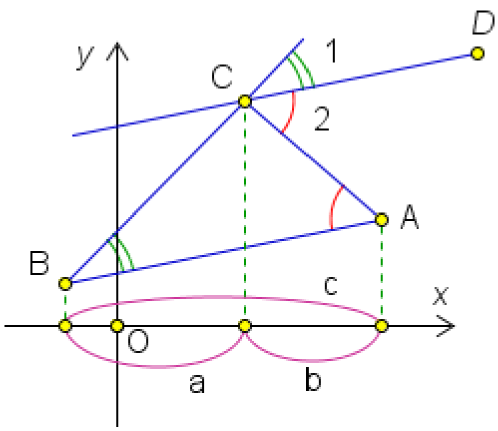
12.1. Стороны и углы треугольника

Треугольником на плоскости Галилея называется фигура, состоящая из трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой и трех отрезков (обыкновенных) прямых, соединяющих эти точки. Точки A, B, C называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.



Длины сторон треугольника ABC – это расстояния $BC \equiv d(B,C)$, $CA \equiv d(C,A)$, $AB \equiv d(A,B)$. Они могут быть как положительными, так и отрицательными. Будем называть эти величины *длинами сторон со знаком*. Абсолютные величины этих длин сторон будем называть *положительными длинами* и обозначать a, b, c. Величинами углов треугольника мы будем называть величины углов между прямыми, содержащими стороны треугольника. Так угол $\angle ABC$ – это угол между прямыми AB и BC (берется именно такой порядок).

В отличие от геометрии Евклида, в геометрии Галилея углы и стороны треугольника связаны между собой достаточно простыми соотношениями.



Выведем их. Если c – наибольшая из положительных длин сторон треугольника, то

$$a + b = c$$

Физический смысл этого равенства: точки A, B, C – это события, а расстояния между ними – это промежутки времени. Тогда промежуток времени между самым ранним событием и самым поздним равен сумме промежутков времени между ранним и средним, а также средним и поздним.

Если брать длины сторон треугольника со знаком, то для треугольника ABC с вершинами $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ получим

$$AB + BC + CA = (x_a - x_b) + (x_b - x_c) + (x_c - x_a) = 0.$$

Другими словами, периметр любого треугольника на плоскости Галилея равен нулю.

Аналогичным образом вычисляем сумму углов треугольника (используем формулу (11.3))

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0.$$

Итак, сумма углов любого треугольника на плоскости Галилея равна нулю.

Если брать абсолютные величины углов, то получим (см. рисунок)

$$\angle A + \angle B = \angle C.$$

12.2. Признаки равенства треугольников

Напомним, что фигуры называются *равными*, если существует движение (в геометрии Галилея это параллельные переносы, сдвиги и их композиции), которое переводит одну фигуру в другую.

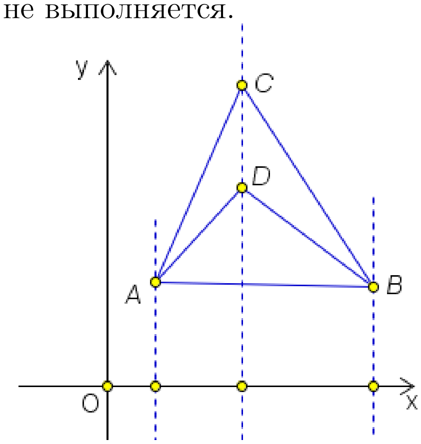
Два треугольника на плоскости Галилея называются *равными*, если существует движение этой плоскости, которое переводит один треугольник в другой.

Теорема 12.1. *(первый признак равенства треугольников) Пусть даны два треугольника* ABC *и* $A_1B_1C_1$*, такие, что* $AB = A_1B_1$*,* $AC = A_1C_1$ *и* $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$*. Тогда эти треугольники равны.*

Доказательство. Так как углы $\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$ равны, существует движение в смысле Галилея, которое переводит прямую AB в прямую A_1B_1 (точку A в точку A_1), а прямую AC в прямую A_1C_1. Так как $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, точка B перейдет в точку B_1, а точка C – в точку C_1. Таким образом, треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$. □

Задача 12.1. Докажите, что в геометрии Галилея верен признак равенства треугольников по стороне и прилегающим двум углам.

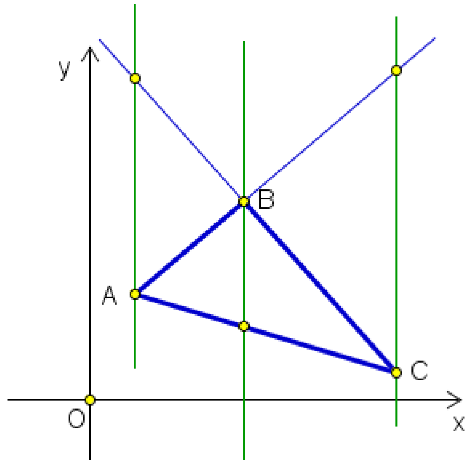
Замечание 12.1. Признак равенства треугольников по трем сторонам на плоскости Галилея не выполняется.



На этом рисунке изображены два треугольника, у которых длины сторон равны, но углы при вершине A не равны, так как не равны соответствующие этим углам особые расстояния.

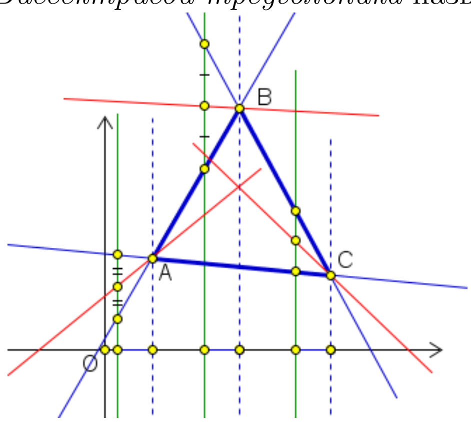
12.3. Высоты, биссектрисы, медианы треугольника.

Высотой треугольника на плоскости Галилея называется перпендикуляр, опущенный на прямую, содержащую сторону треугольника.



На рисунке изображен треугольник ABC и его высоты. Мы видим, что высоты треугольника – это дуги окружностей. При этом высоты треугольника в геометрии Галилея, в отличие от геометрии Евклида, не пересекаются.

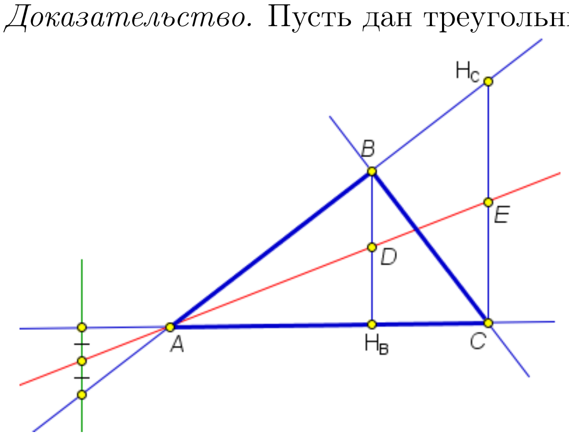
Биссектрисой треугольника называется прямая, которая делит его угол пополам.



Треугольник ABC. Проводим окружности единичного радиуса с центрами A, B и C. Отмечаем точки пересечения с прямыми AB, BC и AC. Делим пополам полученные Е-отрезки и проводим прямые (красные). Это будут биссектрисы углов треугольника. Они не пересекаются в одной точке.

Теорема 12.2. *Пусть дан треугольник ABC. Тогда биссектриса угла A этого треугольника проходит через середины высот, опущенных из вершин B и C этого треугольника. Другими словами, биссектриса каждого из углов треугольника проходит через середины высот, выходящих из двух других вершин треугольника.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC.

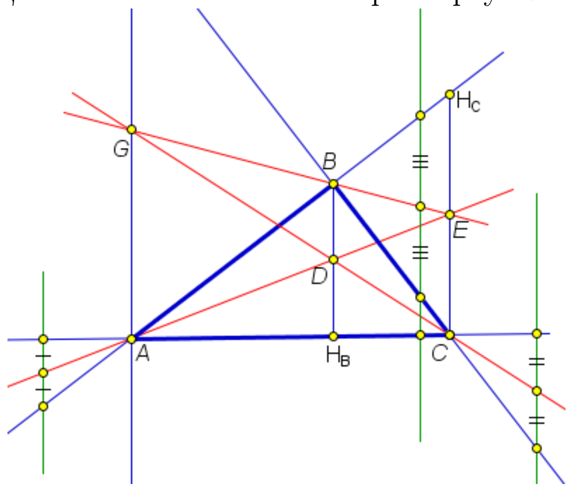


Посмотрите на картинку и проведите доказательство самостоятельно. □

Следствие 12.1. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются в середине высоты, выходящей из третьей вершины.

Теорема 12.3. *Биссектрисы углов треугольника попарно пересекаются, причем точки пересечения служат вершинами треугольника, стороны которого равны сторонам исходного* *треугольника, а углы вдвое меньше его углов.*

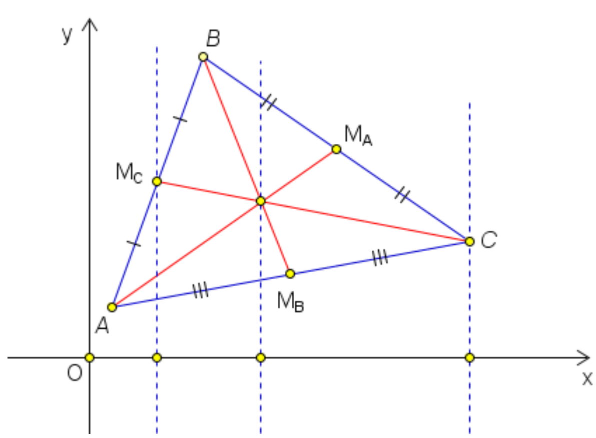
Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и точки пересечения его биссектрис.



Покажем, что треугольники ABC и GDE имеют равные стороны. Заметим, что отрезки AB и GD проектируются на ось Ox в один и тот же отрезок, значит, их длины равны. Аналогично для остальных сторон. Для доказательства соотношений между углами, вспомним, что угол измеряется длиной дуги единичной окружности.

Очевидно (если нет, то нарисуйте картинку и убедитесь в этом), что если брать окружность радиуса r, отличного от единицы, то величина угла (как и в случае геометрии Евклида) будет равна отношению длины дуги окружности радиуса r к ее радиусу r. В нашем случае, если мы пересечем стороны обоих углов окружностью некоторого радиуса, то отношение величин углов будет равно отношению длин дуг этой окружности, измеряющих углы. Так угол A треугольника ABC будет равен длине дуги BH_B, деленной на радиус этой окружности. Так как точка G лежит с точкой A на одной особой прямой, то дуга BD будет дугой той же окружности, что и BH_B. Так как D – середина BH_B, то угол A треугольника ABC в два раза больше угла G треугольника GDE. □

Напомним, что середина отрезка в геометрии Галилея и геометрии Евклида – это одна и та же точка. Поэтому медианы треугольника в геометрии Галилея будут выглядеть так же, как и в Евклидовой геометрии. Это будут Е-отрезки, соединяющие вершину треугольника и середину противоположной стороны. При этом, если вершина треугольника и середина противоположной стороны лежат на одной особой прямой, то медиана будет являться дугой окружности, а в противном случае отрезком.



Посмотрите на рисунок и докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2 : 1, считая от вершины.

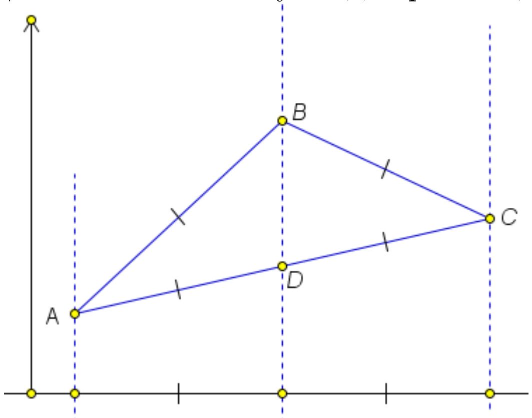
12.4. Равнобедренный треугольник.

Треугольник называется *равнобедренным*, если он имеет две равные стороны.

Задача 12.2**.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике боковая сторона равна половине основания.

Теорема 12.4**.** *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

Доказательство. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$.



Тогда угол BAC равен отношению длины высоты BD (особое расстояние между точками B и D) к длине отрезка AD (расстояние между точками A и D на плоскости Галилея). Аналогично получаем для угла ACB

$$\angle ACB = \frac{\delta(D,B)}{d(C,D)}.$$

Тогда

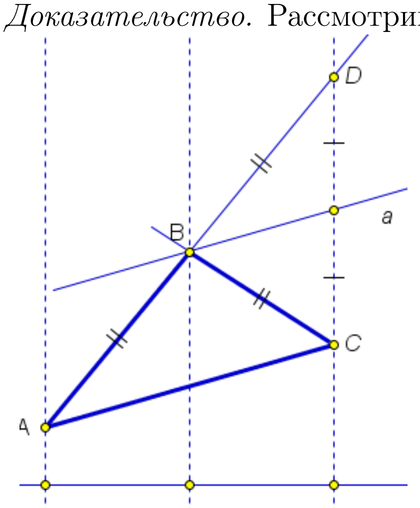
$$\frac{\delta(D,B)}{d(C,D)} = \frac{-\delta(B,D)}{-d(A,D)} = \angle ACB.$$

Итак, углы при основании равнобедренного треугольника равны. □

Задача 12.3**.** Докажите, что у равнобедренного треугольника медиана совпадает с высотой.

Теорема 12.5**.** *Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.*

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC.



Здесь работает теорема, обратная теореме Фалеса. Причем, если треугольник не равнобедренный, то биссектриса не будет параллельна основанию.

□

Заметим, что так как периметр треугольника на плоскости Галилея нулевой, то равносторонних треугольников на плоскости Галилея не существует.

12.5. Свойства треугольников

Средней линией треугольника называется отрезок, который соединяет середины двух его сторон.

Задача 12.4**.** Докажите, что средняя линия в треугольнике параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Теорема 12.6**.** *В любом треугольнике ABC имеет место равенства*

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{BC}{\angle BAC} = \frac{CA}{\angle CBA}.$$

Будем называть эти равенства теоремой синусов.

Доказательство. Обозначим координаты вершин треугольника через $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Тогда $AB = x_A - x_B$. Так как угол $\angle ACB$ – это угол между прямыми AC и BC и он вычисляется как разность угловых коэффициентов, получаем

$$\angle ACB = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{(y_C - y_A)(x_B - x_C) - (y_B - y_C)(x_C - x_A)}{(x_C - x_A)(x_B - x_C)}.$$

Тогда

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{(x_A - x_B)(x_C - x_A)(x_B - x_C)}{x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)}. \tag{12.1}$$

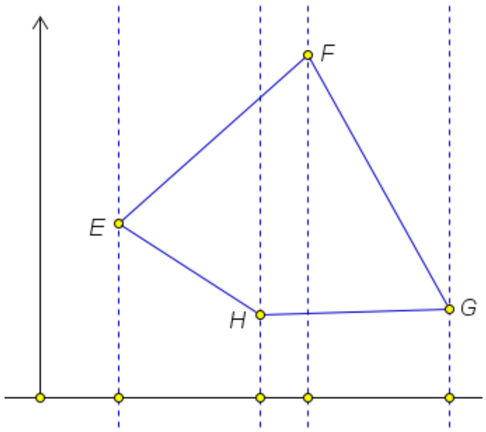
Две остальные дроби в теореме синусов получаются, если циклически переставить буквы A, B и C. При этом правая часть равенства (12.1) не меняется при этой перестановке букв. □

13. Четырехугольники в геометрии Галилея

Четырехугольником на плоскости Галилея называется фигура, которая состоит из четырех точек A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырех отрезков AB, BC, CD, DA, попарно соединяющих эти точки. При этом никакие два из данных отрезков не имеют общих внутренних точек. Отрезки AB, BC, CD, DA называются *сторонами четырехугольника.* Углами четырехугольника (так же как у треугольника) называются углы между прямыми, содержащими стороны четырехугольника. Например, угол $\angle ABC$ – это угол между прямыми AB и BC. Отрезки AC и BD называются *диагоналями* четырехугольника.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

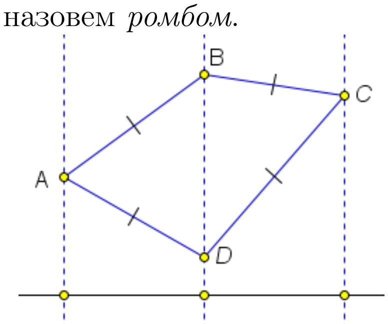
Задача 13.1**.** Докажите, что у параллелограмма противоположные стороны попарно равны. Докажите, что все четыре угла у параллелограмма равны между собой.



Заметим, что существуют четырехугольники с попарно равными противоположными сторонами, которые не являются параллелограммами.

Задача 13.2**.** Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Будем называть *равносторонником* четырехугольник $ABCD$, у которого все стороны равны, то есть $AB = BC = AD = DC$. Равносторонник, который является параллелограммом, назовем *ромбом*.



На рисунке изображен равносторонник, который не является ромбом.

Задача 13.3**.** Докажите, что диагонали равносторонника перпендикулярны.

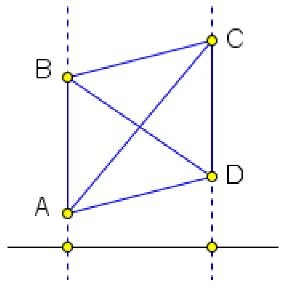
Решение. Пусть дан равносторонник $ABCD$. Так как $AB = AD$, точки B и D лежат на одной окружности с центром A. Более того, так как оба отрезка имеют точку A своим началом, то точки B и D лежат на одной особой прямой. Тогда диагональ BD (которая является дугой окружности) будет перпендикулярна диагонали AC (которая является отрезком). $\square$

Трапецией называется четырехугольник две противоположные стороны которого параллельны, а две другие – нет. Для трапеции на плоскости Галилея имеют место следующие свойства:

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой (обыкновенной или особой).

Прямоугольником на плоскости Галилея называется фигура $ABCD$, четыре вершины которой соединены двумя параллельными отрезками BC и AD и двумя дугами AB и CD.



Прямоугольник не является четырехугольником из-за сторон AB и CD, которые являются дугами окружностей. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Все его углы прямые. Диагонали равны.

14. Цикл в геометрии Галилея.

В геометрии Евклида множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом α – это две дуги окружности. Если угол брать ориентированным, то получится окружность.

Найдем на плоскости Галилея множество точек (оно называется *циклом*), из которых данный отрезок виден под данным углом (Напомним, что угол на плоскости Галилея мы рассматриваем ориентированный). Пусть AB – данный отрезок. Обозначим $A(a, b)$, $B(c, d)$ и угол k (угол со знаком). Тогда требуемое множество точек $M(x, y)$ будет задаваться условием $\angle AMB = k$. По определению угла получаем, что k – это угол между прямыми AM и MB. Он вычисляется через угловые коэффициенты этих прямых по формуле

$$\frac{y-b}{x-a} - \frac{y-d}{x-c} = k.$$

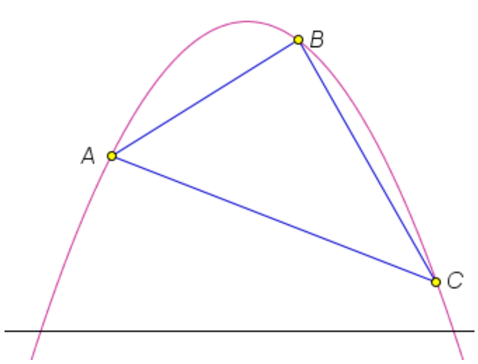
Преобразуем это равенство.

$$y = \frac{k}{a-c}x^2 + \left(\frac{b-d}{a-c} - k\frac{a+c}{a-c}\right)x + \frac{ad-bc+kac}{a-c}.$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вдоль оси Oy. Итак, цикл на плоскости Галилея – это парабола. Ее ветви могут быть направлены как вверх, так и вниз.

Задача 14.1**.** Покажите, что при сдвигах вдоль оси Oy и произвольных параллельных переносах парабола с ветвями, направленными вдоль оси Oy переходит в параболу с ветвями также направленными вдоль Oy. Другими словами, докажите, что свойство множества точек быть циклом является геометрическим на плоскости Галилея.

Задача 14.2**.** Будут ли существовать сдвиги, которые переводят параболу, ветви которой направлены вниз, в параболу, ветви которой направлены вверх? Другими словами, будет ли направленность ветвей цикла геометрическим свойством на плоскости Галилея?



Цикл называется *описанным около треугольника*, если все три вершины треугольника лежат на нем.

Теорема 14.1. *Около любого треугольника можно описать единственный цикл.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Введем координаты его вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Нам нужно доказать, что существует единственная парабола вида $y = ax^2 + bx + c$, такая что точки A, B, C лежат на ней. Нам нужно доказать, что коэффициенты a, b, c для этого всегда можно подобрать, причем единственным образом и $a \neq 0$.

Так как точки A, B, C должны лежать на параболе $y = ax^2+bx+c$, их координаты должны удовлетворять этому уравнению. Тогда мы получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c:

$$\begin{cases} ax_A^2 + bx_A + c = y_A \\ ax_B^2 + bx_B + c = y_B \\ ax_C^2 + bx_C + c = y_C \end{cases} \tag{14.1}$$

Чтобы выяснить имеет ли эта система решения, вычислим определитель ее основной матрицы:

$$\begin{vmatrix} x_A^2 & x_A & 1 \\ x_B^2 & x_B & 1 \\ x_C^2 & x_C & 1 \end{vmatrix} =$$

Это определитель Вандермонда. Вычислим его непосредственно.

$$= x_A^2 x_B + x_C^2 x_A + x_B^2 x_C - x_C^2 x_B - x_B^2 x_A - x_A^2 x_C =$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$x_A^2(x_B - x_C) + x_B x_C(x_B - x_C) + x_A(x_C^2 - x_B^2) = (x_B - x_C)(x_A - x_B)(x_C - x_A).$$

Так как точки A, B, C образуют треугольник, никакие две из них не лежат на особой прямой, и значит, определитель Вандермонда в этом случае не равен нулю. Следовательно, система линейных уравнений имеет единственное решение. Докажем, что $a \neq 0$. Воспользуемся методом Крамера для решения системы линейных уравнений (14.1):

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 \\ y_B & x_B & 1 \\ y_C & x_C & 1 \end{vmatrix}}{(x_B - x_C)(x_A - x_B)(x_C - x_A)}.$$

Нам нужно показать, что определитель, который стоит в числителе дроби отличен от нуля. Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 \\ y_B & x_B & 1 \\ y_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = y_B x_C - x_B y_C - (y_A x_C - x_A y_C) + y_A x_B - x_A y_B. \tag{14.2}$$

С другой стороны, условие того, что три точки A, B, C лежат на одной прямой имеет вид

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}.$$

Раскроем пропорцию и приведем подобные

$$-y_A x_C - y_B x_A + y_B x_C = -y_A x_B - x_A y_C + x_B y_C.$$

Если перенести слагаемые в одну сторону, то мы в точности получим определитель (14.2). Итак, определитель (14.2) тогда и только тогда, когда точки A, B, C лежат на одной прямой. Так как в нашем случае эти точки – вершины треугольника, определитель не нуль и $a \neq 0$.

Итак, мы показали, что около любого треугольника на плоскости Галилеф можно описать цикл, причем только один. □

Говорят, что *прямая касается цикла*, если она имеет с ним две совпавшие (видим одну) общие точки. Цикл называется *вписанным* в треугольник, если он касается всех трех прямых, содержащих стороны треугольника.

Оказывается, что в любой треугольник можно вписать единственный цикл. Для доказательства этого факта, будем использовать принцип двойственности.

15. Принцип двойственности на плоскости Галилея

Построим взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскости Галилея. Поставим в соответствие

$$M(k,b) \leftrightarrow m : y = kx - b.$$

Проверим, что при таком соответствии выполняются следующие свойства:
1) если точка $A(k,b)$ лежит на прямой $\ell : y = px + c$, то прямая $a : y = kx - b$ содержит точку $L(p, -c)$ (и наоборот). Действительно, так как $A \in \ell$ получаем $b = pk + c$. Но условие принадлежности точки L прямой a выглядит точно так же: $-c = kp - b$.
2) расстояние от точки $A(k,b)$ до точки $B(p,c)$ равно углу между прямой $a : y = kx - b$ и прямой $b : y = px - c$ (и наоборот). Действительно, по формулам для вычисления расстояния и угла имеем: $d(A,B) = k - p = \angle(a,b)$.

Благодаря такому соответствию, мы можем взять истинное утверждение о точках, прямых, их принадлежности, расстоянии между точками и углах между прямыми и заменить слова

точка $\leftrightarrow$ прямая
лежит на $\leftrightarrow$ проходит через
расстояние $\leftrightarrow$ угол.

В результате мы получим тоже верное утверждение.

По принципу двойственности мы можем также строить фигуры, двойственные данным. Если мы доказали для исходной фигуры, что она может рассматриваться в геометрии Галилея (то есть свойство точек плоскости быть данной фигурой не меняется при сдвигах вдоль оси и параллельных переносах), то для двойственной ей фигуры это будет выполняться автоматически. Отдельного доказательства не потребуется.

Рассмотрим примеры двойственных фигур.

1. Возьмем пару параллельных прямых. Чтобы построить двойственную фигуру заменим термин параллельные прямые его расшифровкой: две прямые, которые не имеют ни одной точки, принадлежащей обеим прямым. Тогда по принципу двойственности получим: две точки, которые не имеют ни одной прямой, проходящей через каждую из них. Это точки, которые лежат на особой прямой (мы помним, что особые прямые – это не прямые, дуги окружностей). Такие точки для единообразия терминологии называют *параллельными.*

2. Пусть даны две параллельные прямые a и b. Как мы видели выше, расстояние между ними вычисляется по формуле $d(a,b)=b_1-b_2$, где $a:\ y=kx+b_1$, $b:\ y=kx+b_2$. Пусть по принципу двойственности им ставятся в соответствие точки A и B. Выясним, какая характеристика точек A и B соответствует расстоянию $d(a,b)$. Имеем, для точек $A(k,-b_1)$, $B(k,-b_2)$. Это точки особой прямой. При этом их особое расстояние

$$\delta(A,B)=-b_1+b_2=-d(a,b).$$

Таким образом, расстоянию между параллельными прямыми по принципу двойственности соответствует особое расстояние между двойственными точками с обратным знаком. Отметим, что если прямая a была „выше “прямой b, то точка A будет „ниже “точки B.

3. Найдем фигуру, двойственную треугольнику. Определяем треугольник так: это три точки, не лежащие на одной прямой и три прямые, которые соединяют их. Двойственная фигура: три прямые, не проходящие через одну точку, и три точки, в которых попарно пересекаются эти прямые. Это тоже треугольник. Обозначим стороны треугольника a, b, c, а лежащие напротив них вершины A, B, C. Биссектриса угла A треугольника по принципу двойственности перейдет в середину стороны a, основание биссектрисы (точка пересечения биссектрисы и противоположной стороны) медиане треугольника.

Задача 15.1**.** Докажите, что равнобедренному треугольнику двойственен равнобедренный треугольник.

Теорема 15.1**.** *Фигура, двойственная циклу, является циклом.*

Доказательство. Рассмотрим цикл, который задается уравнением $y=ax^2+bx+c$. Он состоит из точек (p,ap^2+bp+c), где p пробегает все действительные числа. По принципу двойственности эти точки переходят в Е-прямые

$$y=px-ap^2-bp-c.$$

Из курса дифференциальной геометрии мы знаем, что существует единственная кривая, которая касается всех этих прямых. Эта кривая называется огибающей семейства прямых. Она будет двойственна исходному циклу. Покажем, что это будет цикл. Напомним, что если семейство кривых на евклидовой плоскости задается уравнением $F(x,y,p)=0$, где p – параметр, то огибающая этого семейства задается уравнениями $F(x,y,p)=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$. Если из них исключить параметр p, то получим общее уравнение огибающей. В нашем случае получаем

$$y=px-ap^2-bp-c,\ x-2ap-b=0.$$

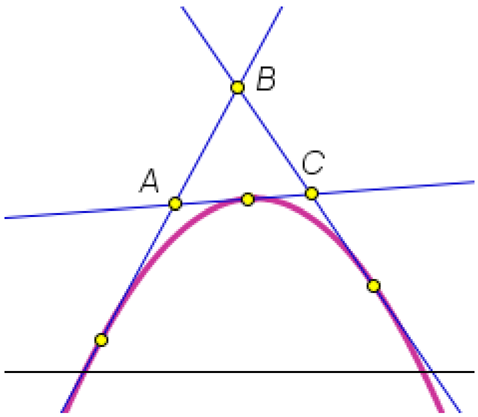
Из второго равенства выразим p и подставим в первое:

$$y = x\frac{x-b}{2a} - a\frac{(x-b)^2}{4a^2} - b\frac{x-b}{2a} - c.$$

Преобразуем

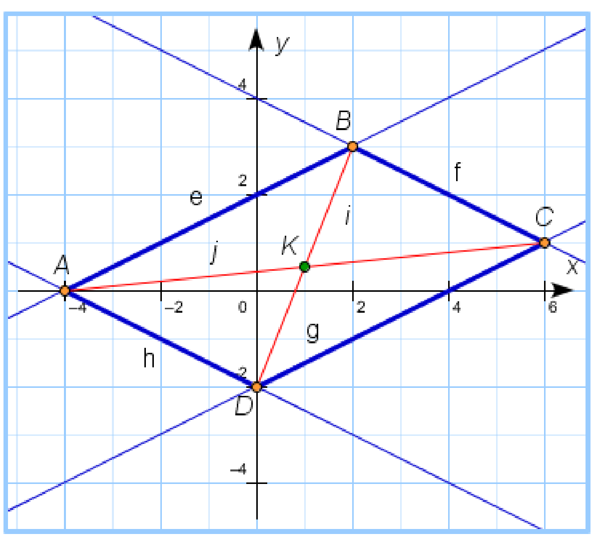
$$y = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x - c + \frac{b^2}{4a}.$$

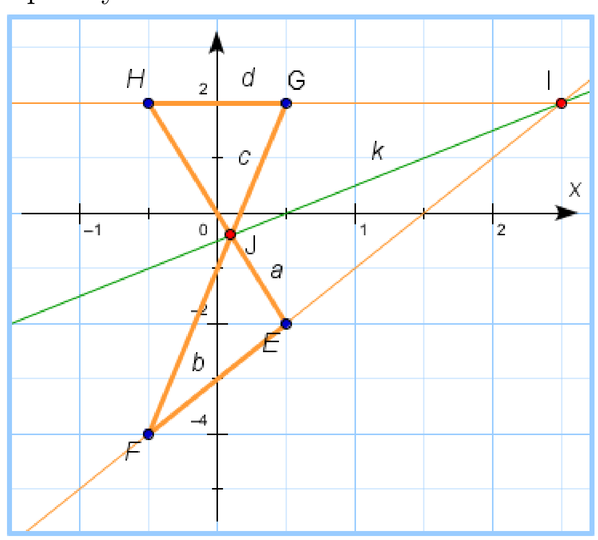
Это парабола с ветвями, расположенными вдоль оси Oy, то есть цикл. $\square$



Используя принцип двойственности автоматически получаем, что в любой треугольник можно вписать цикл.

4. Найдем фигуру, двойственную параллелограмму $ABCD$.

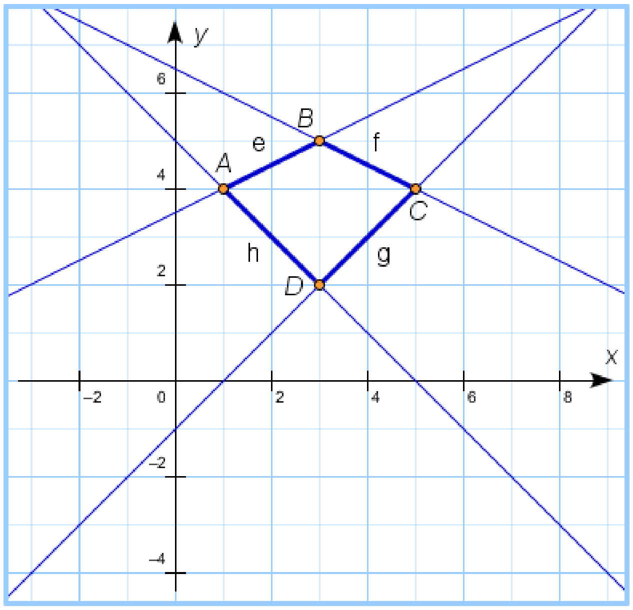


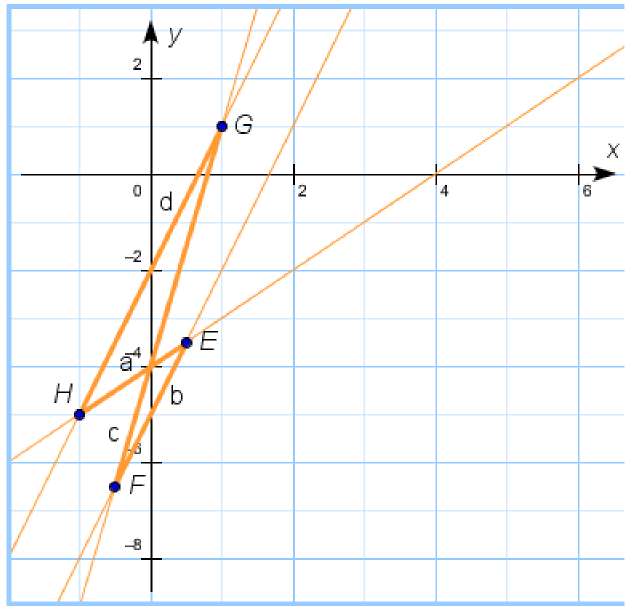


Рассмотрим конкретный пример. По принципу двойственности ставим в соответствие прямой e : $y = 0.5x+2$ точку $E(0.5, -2)$, и так далее. Мы получаем фигуру $EFGH$. Эта фигура называется *антипараллелограммом*. На рисунке изображены точки I и J, двойственные диагоналям AC и BD параллелограмма $ABCD$, а также прямая, двойственная точке K пересечения диагоналей AC и BD.

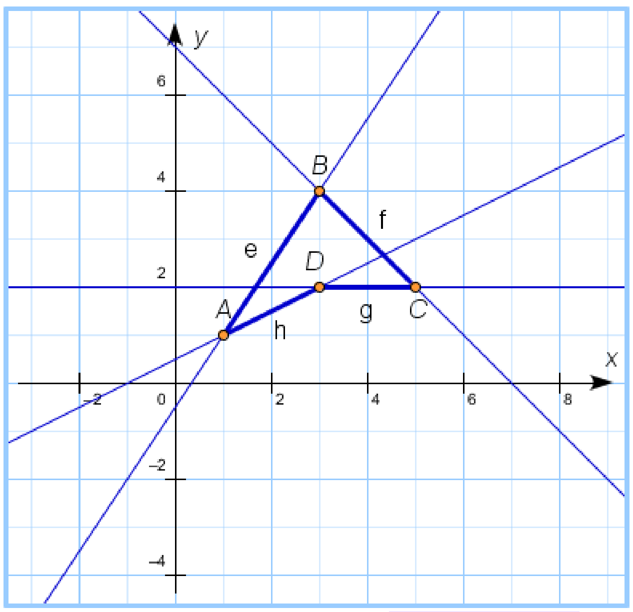
Так как у параллелограмма все четыре угла равны, у антипараллелограмма равны все четыре стороны.

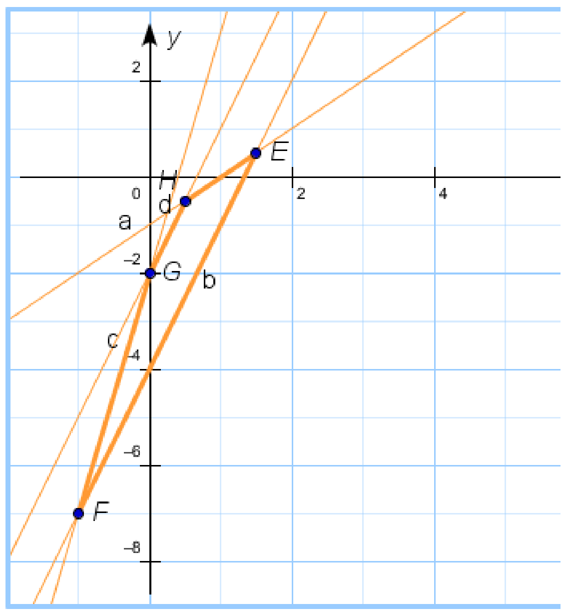
5. Найдем фигуру, двойственную равностороннику $ABCD$. Так как две противоположные вершины равносторонника параллельны, двойственная ему фигура будет иметь две параллельные стороны. На рисунке представлены фигуры, двойственные выпуклому равностороннику





и не выпуклому равностороннику:





Во втором случае мы получаем трапецию.