Игнаточкина Л.А.

Практикум по решению олимпиадных задач по геометрии

2016

Список литературы

1. А.В.Шевкин Школьная олимпиада по математике. Москва, Русское слово, 2002.

2. Н.Х. Агаханов, И.И.Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006 окружной и финальный этапы, Москва, МЦНМО, 2007.

3. Б.Н.Кукушкин Подготовка к олимпиадам. Математика. 7 – 11 классы, Москва, Айрис Пресс, 2011.

4. Г.С.М. Кокстер Введение в геометрию, Москва, Наука, 1966.

5. И.Ф.Шарыгин Задачи по геометрии Планиметрия, Москва, Наука, 1982.

6. И.Ф.Шарыгин, Р.К. Гордин Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. Москва, Астрель, 2001.

7. Г.З.Генкин Геометрические решения негеометрических задач. Москва, Просвещение, 2007.

8. Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер Новые встречи с геометрией, Москва, Наука, 1978.

9. О проведении «окружных» олимпиад по математике в Москве в 2015/2016 учебном году[Электронный ресурс] http://olympiads.mccme.ru /mmo/okrug/okr15.htm

10. Всероссийская олимпиада школьников по математике. [Электронный ресурс] http://baseold.anichkov.ru/files/departments/olympiad/ recommendations/2014-2015/matematika rekomendatcii ShE ME 2014-2015.pdf

11. Всероссийская олимпиада школьников [Электронный ресурс] http://www.rosolymp.ru/

Введение.

Олимпиада по математике – соревнование среди школьников (а также студентов вузов) в решении задач по математике. Олимпиады по математике бывают разного уровня: от состязания в решении задач школьников одного класса до международных соревнований. Олимпиадная задача – это особый тип математической задачи, для которой нет единого алгоритма решения. Каждая такая задача уникальна и требует нестандартного подхода к решению, проведения пусть небольшого, но научного исследования. Формулировка олимпиадной задачи проста и использует ту терминологию, которая вводится в стандартном курсе математики школы (или вуза). Также решение этой задачи не предполагает привлечения методов выходящих за рамки школьного курса. Решение не является длинным, зачастую занимает несколько строк. Но чтобы додуматься до него порой требуется много времени, усилий и своего рода озарение.

Можно ли научить ученика решать олимпиадные задачи? Я думаю, что нет. Учитель может лишь помочь ученику научиться работать с олимпиадной задачей, думать над ней. Ведь мы часто сталкиваемся со следующей ситуацией (даже в стандартных школьных и вузовских задачах): ученик прочитал задачу и все. Что делать дальше, он не знает. Как искать решение, если нет стандартного алгоритма или этот алгоритм не узнан, ученик не знает. Учитель может помочь ему научиться действовать в этой ситуации. Так как олимпиадная задача – это миниатюрное научное исследование, то учитель должен передать ученику методы и приемы ведения научного исследования. Для этого учитель должен сам владеть ими. Для того чтобы помочь учителю и создается это пособие. На примере решения конкретных олимпиадных задач мы посмотрим, каким образом можно нащупать ее решение. Мы выделим основные идеи решения и постараемся обобщить их, для того, чтобы попытаться применить их при решении других задач. Для удобства восприятия олимпиадные задачи разделены по темам.

В заключение приведем список стран победителей в международных математических олимпиадах за последние годы (в скобках указано количество участников). Как говорят, без комментариев ...

Год	Первое место	Второе место	Третье место
2015	США (185)	Китай (181)	Республика Корея (156)
2014	Китай (201)	США (193)	Тайвань (192)
2013	Китай (208)	Южная Корея (204)	США (190)
2012	Южная Корея (209)	Китай (195)	США (194)
2011	Китай (189)	США (184)	Сингапур (179)
2010	Китай (197)	Россия (169)	США (168)
2009	Китай (221)	Япония (212)	Россия (203)
2008	Китай (217)	Россия (199)	США (190)
2007	Россия (184)	Китай (181)	Вьетнам и Южная Корея (168)
2006	Китай (214)	Россия (174)	Республика Корея (170)
2005	Китай (235)	США (213)	Россия (212)
2004	Китай (220)	США (212)	Россия (205)
2002	Китай (212)	Россия (204)	США (171)

Предварительная проверочная работа

1. Кирпич весит 2 кг и две трети кирпича. Сколько весит кирпич?

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C на прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите величину угла KCM.

3. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на прямой AF взята точка X так, что угол $XCD = 45^0$. Найдите угол FXE.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ точки M и N – середины ребер BS и CS. Сечение AMN делит пирамиду на две фигуры. Найдите отношение их объемов.

5. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{5}$.

Занятие 1.

1.1. Треугольники

Сворачиваем треугольник.

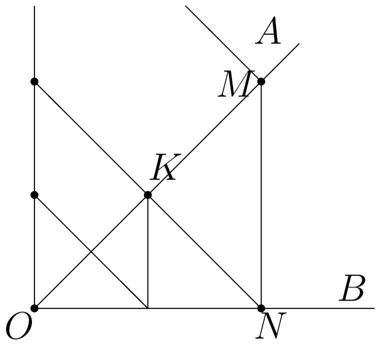
Задача 1. (9 класс, окружная) Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Докажите, что при $\alpha = 30^0$ для любого положения прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник.

Решение. Рисуем равносторонний треугольник ABC. Берем произвольное положение угла α. Пусть его стороны пересекают сторону AC треугольника в точках M и N. Нам нужно из отрезков AM, MN и NC сложить треугольник. Оставим отрезок MN на месте, а перемещать будем два других отрезка, точнее заменять их на равные так, чтобы они не лежали на одной прямой. Применим осевую симметрию. Прямая BN не перпендикулярна AC. Следовательно, если от нее отразить точку C, то получим точку D, не лежащую на AC и отрезок $DN = NC$. Начал вырисовываться треугольник. Интуиция подсказывает, что MD должно быть равно AM. Докажем это. В треугольнике DBC прямая BN содержит и медиану и высоту. Следовательно, он равнобедренный и BN содержит биссектрису. Тогда ABD тоже равнобедренный и вычисляем углы MBD и ABM. Они равны $30^0 - x$. Следовательно, прямая BM содержит биссектрису равнобедренного треугольника, следовательно, содержит его высоту и медиану. Итак, мы показали, что D симметрична A относительно BM. Таким образом, треугольник с нужными сторонами сложился. □

Распрямляем ломаные.

Задача 2. (9 класс, школьная) На стороне OA угла AOB взята точка M. Из нее проведен перпендикуляр MN стороне OB. Из точки N проведен перпендикуляр NK к стороне OA и так далее. Постройте отрезок, длина которого равна длине полученной бесконечной ломаной.

Решение. Рисуем картинку.



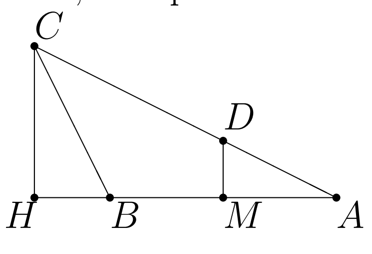
Наша задача „распрямить“ ломаную, то есть отложить ее звенья на какой-нибудь прямой. Не обязательно это должна быть одна прямая, может быть две, три или любое разумное число прямых. В нашей задаче у ломаной два типа звеньев: перпендикулярных одной стороне угла и перпендикулярных другой стороне угла.

Поэтому логично предположить, что таких прямых будет две: на одной будем друг за другом откладывать одни звенья, на другой – другие. Где взять эти прямые? Мы видим, что ломаная уходит в вершину угла. Поэтому имеет смысл провести прямые через точку O. А дальше методом проб и ошибок получаем, что прямые должны быть перпендикулярны сторонам угла. Тогда (см. картинку) мы получаем два отрезка. На рисунке изображен один из них и то не до конца. Завершите доказательство самостоятельно. □

Вспомним про Фалеса.

Задача 3. (8 класс, окружная, 2015) В треугольнике ABC угол B равен 120^0, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD : DC$.

Решение. Рисуем картинку и обязательно отметим палочками все равные отрезки, которые легко видны.



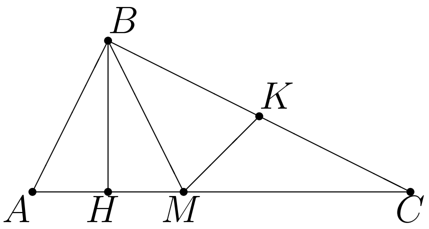
Нам нужно отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Конечно же здесь может сработать не только Фалес, но его нужно проверять первым. Раз работает Фалес, то нужен угол и две параллельные прямые.

Угол CAB, одна прямая DM уже есть (и проходит она через нужную нам точку D, это еще одно подтверждение, что здесь целесообразно подстраиваться под теорему Фалеса). Нужна еще одна прямая, параллельная DM и понятно, что она должна проходить через точку C. Проводим прямую CH, параллельную DM. Получаем прямоугольный треугольник CBH с углом 60^0. Тогда второй его угол равен 30^0. Катет, лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы. Тогда $\frac{HM}{MA} = \frac{3}{2}$. Тогда по теореме Фалеса такое же отношение у отрезков CD и DA. □

Катет напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы.

Задача 4. (7 класс, школьная) В треугольнике ABC медиана и высота, проведенные из угла A, делят его на три равные части. Не используя тригонометрических функций, найдите величины углов в треугольнике.

Решение. Рисуем картинку.



Первое, что мы сразу замечаем, что в треугольнике ABM отрезок BH является высотой и биссектрисой, следовательно, она является и медианой, а треугольник ABM является равнобедренным. Отмечаем на рисунке равные отрезки.

Итак, мы имеем равные углы и равные отрезки. Нигде нет конкретных значений величин углов. Откуда их взять. Вспоминаем следующие утверждения о конкретных значениях углов: в равностороннем треугольнике все углы по 60 градусов и следствие этого утверждения: если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то напротив этого катета лежит угол 30 градусов. У нас уже есть отрезок, в два раза отличающийся от другого отрезка, но они лежат на одной прямой, а нужен прямоугольный треугольник. Это соображение наталкивает нас на дополнительное построение: проводим перпендикуляр MK к стороне BC. Получаем прямоугольный треугольник. И прямо в глаза бросается равенство треугольников BHM и BKM. Откуда получаем, что угол C равен 30^0. Тогда угол KMC равен 60^0 и равные углы HMB и KMB тоже по 60^0. Тогда угол B равен 90^0 и угол A равен 60^0. Все, задача решена. $\square$

1.2. Домашнее задание

1. Докажите, что для $\alpha < 30^0$ утверждение задачи1 не верно (приведите контрпример). Это просто. Попробуйте (не обязательно) разобраться со случаем $\alpha > 30^0$.

2. Вспоминаем соотношения между сторонами и углами в треугольнике: напротив меньшей стороны лежит меньший угол, и наоборот.

Существует ли такой выпуклый пятиугольник (все углы меньше 180^0) $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC – тупые?

3. (9 класс, 2012) В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60^0. Докажите, что трапеция равнобедренная. Главное – видеть правильный треугольник.

4. (8 класс, школьная, 2015)Просто закрученное условие. Нарисуйте все данные и то, что из них легко следует на картинке и задача решится. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M – середина AD. Докажите, что угол BMC – тупой.

5. Задача на идею, разобранную на занятии: есть соотношение между линейными элементами, а нужно найти угол(9 класс, школьная, 2015) В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности. Найдите угол CAB.

Занятие 2.

2.1. Треугольники (продолжение)

Та же самая идея с перекладываниями, но теперь уже площадей.

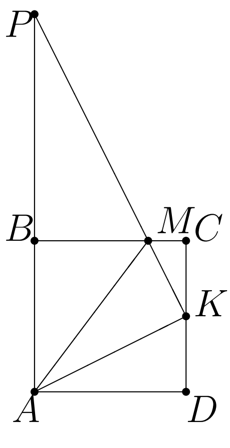
Задача 5. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \| AD$, $FK \| AB$, лежит на отрезке MN.

Решение. Рисуем картинку. Соединим точку K с точками A, B и D и обозначим через O, L, P точки пересечения KA и BD, KB и AM, KD и AN соответственно.

Диагональ BD разрезала треугольник AMN на две части. Их нам и нужно сравнивать. Заменим треугольник AFE на равную ему по площади фигуру, находящуюся по другую сторону диагонали BD. Площади легче всего сравнивать у треугольников. Если у треугольников равные стороны и равные высоты к ним, то они имеют равные площади. И еще одна идея: если треугольники наложены один на другой, то выбрасывая из них общую часть мы получаем фигуры равной площади. Начинаем заменять треугольник AEF по частям. Заметим, что FK параллельно AB. Значит, треугольники с общей стороной AB и высотой равной расстоянию между этими параллельными прямыми будут иметь равные площади. Это треугольники AFB и AKB. Треугольник AOB в них общий. Тогда, выкинув его, мы получим $S_{AFO} = S_{OBK}$. Аналогично рассуждая с другой парой параллельных прямых, получим $S_{AOE} = S_{DOK}$. Итак, треугольник AFE мы заменили на треугольник DKB. Перенесем еще хвостики DPF и BEL поближе к K, сохраняя площади. Идея та же самая: меняем треугольник на треугольник равной площади, используя общую сторону и равные высоты. Тогда треугольник DFP по площади равен треугольнику NPK, а треугольник BEL равен по площади треугольнику LMK. Итак, треугольник DKB мы заменили на равную по площади фигуру $FNKME$. Эта фигура включает в себя полностью четырехугольник $FNME$. И значит равна ему по площади тогда и только тогда, когда $K \in MN$. □

Задача 6. (8 класс, окружная, 2014) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^0$. Найдите угол AKD.

Решение. Рисуем картинку.



Сразу вписываем в картинку все углы, которые можно легко вычислить. Посмотрим сначала более длинное решение.

Если находить угол AKD, то он присутствует только в треугольнике AKD, еще один угол которого мы не знаем. А вся информация задачи находится выше прямой AK. Значит, нам уходить выше. И значит искать нужно угол AKM. Треугольник AKM тоже не хороший, вряд ли от него можно ожидать свойств равносторонности или даже равнобедренности. Поэтому достраиваем угол AKM до еще одного треугольника: продолжаем KM. Она пересечет AB в некоторой точке P. В этом треугольнике сразу отмечаем, что угол P равен 30^0.

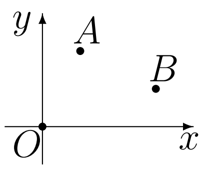
Что ожидать от двух остальных углов? Будем надеяться, что они равны.

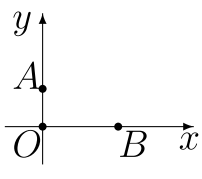
Значит, нужно доказать, что этот треугольник равнобедренный. Попробуем выразить длины его сторон. Для этого обозначим сторону квадрата a. Тогда треугольники PBM и ABM равны, следовательно, $AP = 2a$. Далее, $PM = AM = 2BM$ (катет лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы) и $MK = 2MC$. Тогда $PK = 2(BM + MC) = 2a$. Как и ожидали, треугольник APK равнобедренный, угол K в нем равен 75^0 и искомый угол равен 75^0.

P.S. Давайте посмотрим на ответ и увидим еще одно, очень простое решение. KA оказался биссектрисой угла MKD. MA – биссектриса BMK. Это внешние углы треугольника MKC. Осталось увидеть, что AC – биссектриса внутреннего угла C этого треугольника. Значит, точка A – центр вневписанной окружности треугольника MCK. Получаем такое решение. Проводим в квадрате диагональ AC. Тогда точка A является точкой пересечения биссектрис внутреннего угла C треугольника MCK и внешнего угла M этого же треугольника. То есть точка A – центр вневписанной окружности для этого треугольника. Следовательно, прямая, проходящая через третью вершину этого треугольника и точку A также будет биссектрисой внешнего угла K этого треугольника. Опять получаем те же 75^0. □

Задача 7. (задача для 8 класса, школьная) На доске была нарисована система координат и отмечены точки $A(1, 2)$ и $B(3, 1)$. Систему координат стерли. Восстановите ее по двум отмеченным точкам.

Решение. Вот она изначальная ситуация, когда система координат еще не стерта.





Давайте сотрем ее не полностью, а нарисуем пунктиром. Эти оси нужно восстановить. Что делать?

Если школьники увидят сразу, что можно построить прямые, параллельные осям и проходящие через точки A и B, а дальше перенести их на единицу влево и на единицу вниз, то хорошо. Если нет, то можно предложить вспомогательную (упрощенную) задачу: возьмем точки $A(0, 1)$ и $B(2, 0)$ или задать вопрос, как можно упростить задачу. Тогда эта идея будет видна сразу. Возьмем упрощенную задачу. Понятно, что здесь нужно построить вершину прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой AB. Строим окружность на AB как на диаметре, делим AB в отношении 1:4 (из подобия прямоугольных треугольников), в точке деления восстанавливаем перпендикуляр.

Возвращаемся к исходной задаче. Как и выше строим вспомогательные прямые. У нас сразу появляется единичный отрезок. Его откладываем на построенных прямых и через полученные точки проводим оси.

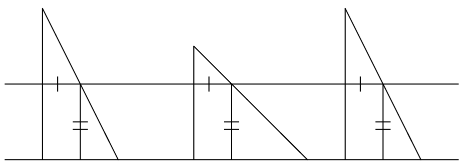
P.S. Измените задачу так, чтобы единичный отрезок нужно было строить.

Решите следующую задачу. На доске нарисовали прямоугольную декартову систему координат и две точки а) $A(2,3)$, $B(2,1)$ и б) $A(3,3)$, $B(1,1)$. Систему координат стерли. Восстановите ее по точкам A и B. Постарайтесь решить пункт б) двумя способами.

$\square$

Задача 8. (задача для 8, 9 класса, окружная) Три прямоугольных треугольника расположены в одной полуплоскости относительно данной прямой ℓ так, что один из катетов каждого треугольника лежит на этой прямой. Известно, что существует прямая, параллельная ℓ, пересекающая треугольники по равным отрезкам. Докажите, что если расположить треугольники в одной полуплоскости относительно прямой ℓ так, чтобы другие их катеты лежали на прямой ℓ, то также найдется прямая, параллельная ℓ, пересекающая их по равным отрезкам.

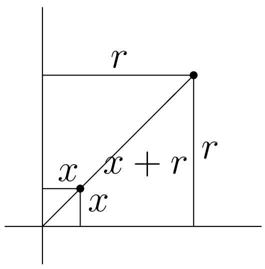
Решение. Если нарисовать картинку, то задача становится тривиальной.



Прямая пройдет на расстоянии, равном отрезку с одной палочкой, и будет пересекать треугольники по отрезкам, равным двум палочкам. $\square$

Задача 9. (задача для 8 класса, школьная) Дана окружность α радиуса r и две перпендикулярные прямые β и γ, касающиеся окружности. Найдите радиус окружности, которая касается α, β, γ.

Решение. Рисуем картинку.



Обозначим радиус искомой окружности x (сначала рассматриваем окружность с «маленьким радиусом»). Тогда из прямоугольных треугольников получаем

$$x\sqrt{2} + x + r = r\sqrt{2}.$$

Откуда находим $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}r$. Чтобы найти большую окружность, меняем x и r ролями. Тогда $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}r$.

□

2.2. Домашнее задание

1. (9 класс, школьная, 2016)
   В треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A, перпендикулярна биссектрисе угла B, а медиана, выходящая из вершины B, перпендикулярна биссектрисе угла A. Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника ABC.

2. (8 класс,школьная)
   В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC = 120^0$, $\angle DAB = 60^0$.

3. (8 класс, окружная, 2016) Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC – точку A_1, а на стороне AC – точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB, MC.

4. (9 класс, школьная, 2014)
   Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60^0, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

5. Пусть прямые β и γ пересекаются под углом ξ, отличным от прямого. Решите полученную задачу.

6. (необязательная) Пусть α и β – окружности радиусов r_1 и r_2, касающиеся внешним образом, а γ – их общая касательная. Найдите радиус окружности, касающейся α, β, γ.

7. (необязательная) Остался еще один логичный шаг для изменения этой задачи. Нужно взять в качестве α, β, γ три попарно касающиеся окружности. Найти радиус окружности, которая касалась бы всех трех. Опять ожидаем две таких окружности. Результат решения этой задачи тесно связан с теоремой Содди. Фредерик Содди (1877 – 1956) – английский химик, изучавший проблемы радиоактивности совместно с Резерфордом, выдвинувший теорию изотопов, удостоенный Нобелевской премии по химии 1921 года за вклад в теорию строения атома. Кроме химии, Ф.Содди интересовался экономическими, социальными и политическими ториями, написал несколько книг на эти темы, а также занимался некоторыми математическими задачами. Он сформулировал следующую теорему в качестве гипотезы, а доказал ее Коксетер.

   Сам Содди признавался, что ему так и не удалось понять, каким образом он получил данную красивую симметричную формулу. Смысл открытой им теоремы Содди выразил в стихах. Так возникла поэма "Точный поцелуй":

   Определим изгиб кривой
   Как радиус обратный.
   Он просто связан с кривизной,
   И это всем понятно.

   Прямая линия изгиб
   Имеет нулевой,
   И отрицательный изгиб —
   У вогнутой кривой.

   Четыре круга как-то раз
   Поцеловались в поздний час.
   Евклид об этом не узнал:

Он о любви не думал,
А я круги нарисовал
И формулу придумал:

Сумма квадратов всех изгибов
Равна половине квадрата их суммы.

Сформулируем теорему Содди: Пусть три окружности с радиусами a, b, c касаются внешним образом. Пусть r – радиус окружности, касающейся трех данных окружностей внешним образом, а R – радиус окружности касающейтя трех данных окружностей внутренним образом. Тогда имею место равенства

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2;$$
$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right)^2.$$

Выведите эти формулы и найдите радиусы искомых окружностей.

Занятие 3.

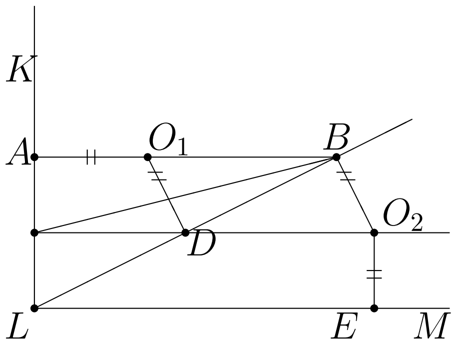
3.1. параллелограммы+параллельность+прямоугольники

Задача 10. (8 класс, окружная, 2014) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D – высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Решение. Рисуем картинку. Сразу видим два прямоугольника. По две из вершины идут в искомый прямоугольник. Прямоугольник можно отловить как параллелограмм с прямым углом или как параллелограмм с равными диагоналями. Проведем диагонали в прямоугольниках $PBND$ и $BMDQ$. Они равны между собой и точкой пересечения делятся пополам. Две из них являются диагоналями искомого прямоугольника. Значит, $PMNQ$ прямоугольник. $\square$

Задача 11. (9класс, окружная) Внутри прямого угла KLM взята точка P. Окружность Ω_1 с центром O_1 касается сторон LK и LP угла KLP в точках A и D соответственно, а окружность Ω_2 такого же радиуса с центром O_2 касается сторон угла MLP, причем стороны LP – в точке B. Пусть точки A, O_1 и B лежат на одной прямой и C – точка пересечения прямых O_2D и KL. Докажите, что BC – биссектриса угла ABD.

Решение. Рисуем картинку. Окружности изображать не будем.

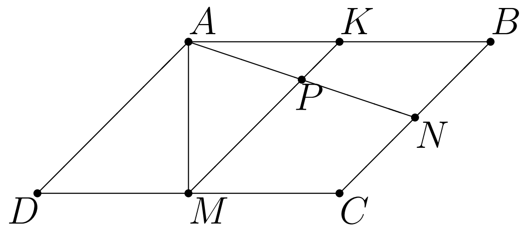


Постараемся достать равенство углов из треугольников. Для этого на рисунке отметим по максимуму равные отрезки и углы. Первое, что мы видим, O_1D и O_2B параллельны (так как перпендикулярны одной прямой) и равны по длине, следовательно, O_1BO_2D – параллелограмм. Значит, O_2D перпендикулярно KL и LCO_2E – прямоугольник. Появились два равных прямоугольных треугольника LCD и O_2BD (по катету и двум углам).

Треугольник CDB тогда равнобедренный. Отмечаем равные углы. Ну и наконец, $\angle ABC = \angle BCD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. $\square$

Задача 12. (8 класс, окружная, 2015) Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

Решение. Интуиция подсказывает, что этот угол тупой. Поэтому картинку рисуем соответствующую.



Нужно каким-то образом раскрутить то, что $AN = 2AM$. Хотелось бы поделить AN пополам. Сделаем это так. Через точку M проведем прямую, параллельную BC. Тогда K будет серединой AB и по теореме Фалеса P будет серединой AN. Если бы мы сначала поделили AN пополам, а затем провели MP, то пришлось бы доказывать параллельность и попадание в середину AB, что сложнее.

В результате мы получили равнобедренный треугольник MAP. Угол APM в этом треугольнике острый (углы при основании равнобедренного треугольника). Тогда из параллельности прямых AD и MK получаем, что угол DAP тупой. Тогда угол DAB, который больше угла DAP тоже тупой. □

Сплошные параллелограммы. Красивая задача.

Задача 13. (10 класс, окружная, 2015) В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Решение. Рисуем картинку. AT и CQ – высоты треугольника ABC, H – точка пересечения высот треугольника ABC, которая совпадает с точкой пересечения медиан треугольника AMN. AT пересекает MN в точке E. Так как AE – медиана треугольника AMN, то E – середина MN.

Нам нужно найти угол B в треугольнике ABC. Ни одной величины угла в задаче нет. Значит, он должен быть либо 60^0 (находится в каком-нибудь равностороннем треугольнике), либо 30^0 (в прямоугольном треугольнике, второй угол которого 60^0 или катет лежащий напротив него половина гипотенузы), либо 45^0 (или 135^0, связан с равносторонним прямоугольным треугольником). Сразу обращают на себя внимание два прямоугольных треугольника CQB и ATB. Если бы в треугольнике CQB доказать, что QN кроме того, что она медиана, еще и высота, то задача была бы решена. Пока доказать это не получилось. Поэтому посмотрим второй прямоугольный треугольник ATB. Там аналогичную высоту-медиану еще нужно провести: либо провести высоту и доказать, что медиана, либо наоборот. Мы проведем медиану TK.

Так как K – середина AB, она будет лежать на одной прямой с точками C и E. Теперь докажем, что TK является высотой. Заметим, что точки M, H, K также лежат на одной прямой, так как AN пересекает MK в середине и H точка пересечения медиан в треугольнике AMN.

Если мы сейчас докажем, что $HCTK$ – параллелограмм, то $TK \| CQ$ будет перпендикулярно AB и все доказано. Вспоминаем признаки параллелограмма: две стороны параллельны и равны или диагонали точкой пересечения делятся пополам. Попробуем второй, так как одна диагональ CK точкой E делится пополам (Фалес). Смотрим на вторую диагональ и помещаем ее куски в треугольники. Есть два хороших: ETN и EHM. У них уже есть пара равных сторон. К этим сторонам примыкают углы, равные из-за параллельности прямых CB и MK, а также равные вертикальные углы. Все. Поиск завершен. Теперь сформулируйте решение самостоятельно. $\square$

3.2. Домашнее задание

1. Вспомним задачу из курса элементарной геометрии. Пусть дан произвольный треугольник ABC и окружность с центром O, вписанная в ABC. Докажите, что $\angle BOC = 90^0 + \frac{\angle A}{2}$.

2. (красивая задача на вписанную окружность, 9 класс, окружная, 2016)
В треугольник ABC вписана окружность с центром O. а стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C – точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что угол BOP равен углу COQ.

3. Вспомните, как доказывается утверждение: угол вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

   Пусть дан треугольник ABC. Около него описана окружность радиуса R. Докажите, что $BC = 2R \sin \angle BAC$.

   Очень полезно вспомнить доказательства следующих утверждений или хотя бы помнить сами утверждения:

   1. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают его окружность. Докажите, что величина угла измеряется полуразно-

стью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

2. Пусть вершина угла находится внутри круга. Докажите, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

3. Пусть AB – хорда окружности, ℓ – касательная к окружности (A – точка касания). Докажите, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

И обратное к предыдущей задаче утверждение:

4. Докажите, что если угол между хордой AB и прямой AP равен вписанному в окружность углу, то прямая AP является касательной к этой окружности.

Еще два полезных утверждения (необязательно):

1. Через точку M, находящуюся на расстоянии a от центра окружности радиуса R ($a > R$), проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB$ постоянно для всех секущих и равно $a^2 - R^2$ (квадрату длины касательной).

2. В окружности радиуса R через точку M, находящуюся на расстоянии a от ее центра ($a < R$), проведена хорда AB. Доказать, что $AM \cdot MB$ постоянно для всех хорд и равно $a^2 - R^2$.

4. Если увидеть описанную окружность, то задача легко решится. Ну и конечно же нужно помнить признаки параллельности прямых.
   (9 класс, окружная, 2014) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

5. (9 класс, окружная, 2015) Надо использовать два числовых данных. Попробуйте встроить их по одному каждый в свою конструкцию.
   Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM – в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

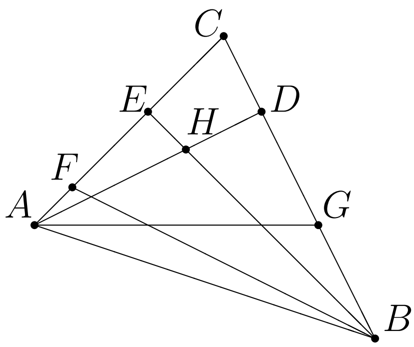
Занятие 4.

4.1. окружность и вписанные углы

Вписанные углы в сочетании с равнобедренными треугольниками.

Задача 14. (9 класс, окружная, 2014) Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

Решение. Рисуем картинку.



У нас всего одно числовое данное. Значит, длина FG будет либо равна ED, либо кратна ему. На равенство не похоже. Должна быть больше (судя по рисунку), во сколько-то раз. Что мы знаем про такие соотношения? Есть средняя линия треугольника, которая меньше основания в два раза. Попробуем показать, что ED является средней линией в треугольнике FCG.

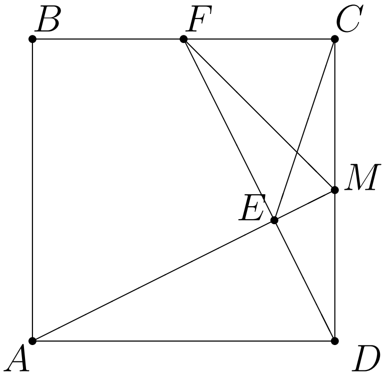
Нам нужно, чтобы E была серединой FC. Посмотрим на треугольник FCB. В нем есть высота BE. Попробуем показать, что она еще и биссектриса (так как у нас еще есть описанная окружность, а окружность – это углы).

На FH опираются два угла: FAH и HBF. Значит, они равны. Обозначим α. Тогда из прямоугольных треугольников получим $\angle C = 90^0 - \alpha$ и $\angle CBE = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$. Убедились, что BE высота и биссектриса, а значит медиана. Аналогично AD – медиана для треугольника CAG. Итак, ED – средняя линия в треугольнике FCG и следовательно $FG = 10$ см. □

Все те же равные и равнобедренные треугольники и еще нужно увидеть окружность, описанную около четырехугольника.

Задача 15. (10 класс, окружная, 2014) Точка F – середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Решение. Рисуем картинку.



Сразу же напрашивается дополнительное построение: продолжить AE до пересечения со стороной CD. Обозначим полученную точку M и посмотрим, куда она попадет. Очень треугольник ADM похож на треугольник ADM. Проверим их на равенство.

Если угол FDC обозначить α, то угол EDA будет $90^0-\alpha$, а угол DAM будет α. Действительно, получаем, что треугольники ADM и ADM равны по катету и острому углу. Следовательно, два других их катета тоже равны и точка M попадает в середину стороны CD. Обратим внимание на правый верхний угол картинки. Там есть искомый угол и очень хороший угол $FMC = 45^0$ (FCM – прямоугольный равнобедренный). Очень хочется, чтобы они были равны. Треугольники на равные не похожи. Значит, опять описанная окружность вокруг четырехугольника $EMCF$. Она существует, так как два противоположных угла у этого четырехугольника по 90^0 (сумма 180^0). Теперь углы опираются на одну дугу, значит, они равны. $\square$

В основном окружность и углы, связанные с ней.

Задача 16. (9 класс, окружная) Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Рисуем картинку. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Обозначим его через I и дорисуем еще одну биссектрису. Точку пересечения с описанной окружностью обозначим B_0. Разбираемся с углами:

$$\angle IBC_0 = \frac{1}{2}\left(\breve{AC_0} + \breve{AB_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\breve{C_0B} + \breve{B_0C}\right) = \angle BIC_0.$$

Откуда получаем, что треугольник IC_0B равнобедренный и $IC_0 = C_0B$. Аналогично с другой стороны получаем BA_0I равнобедренный и $BA_0 = IA_0$. Тогда треугольники C_0BA_0 и C_0IA_0 равны. Значит, точки B и I симметричны относительно A_0C_0. Тогда прямые BP и IP тоже симметричны относительно этой прямой, следовательно, углы PBA_0 и PIA_0 равны. Угол PIA_0 равен углу IAC, а он равен углу BAI. Тогда угол BAI, который опирается на хорду A_0B, равен углу A_0BP, следовательно, BP – касательная к описанной окружности. □

Опять вписанная и описанная окружности. ничего особо красивого и изящного, просто уже известная нам возня с углами.

Задача 17. (9 класс, окружная) В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

Решение. Пусть NP – диаметр описанной окружности. Сначала разберемся, как этот диаметр соотносится с уже имеющимися точками на чертеже. По условию N – середина дуги ABC. Тогда диаметрально противоположная ей точка P будет серединой дополнительной дуги AC. Значит, NP – серединный перпендикуляр к AC, следовательно точка M на нем лежит. Кроме того, из того, что P – середина дуги AC следует, что углы ABP и CBP равны, то есть точка I лежит на отрезке BP. Нарисовав правильную картинку, пробуем раскрутить задачу с хвоста. Пусть углы BNI и IMA равны. Тогда будут равны углы BIN и IMN (дополняют предыдущие до 90^0). Тогда равны углы PIM и INM (вместе с углом NIM дополняют предыдущие углы до 180^0). Видим два треугольника, которые наложились друг на друга углом P. И еще у них есть равные углы PIM и INM. Значит они (PMI и PIN) подобны. Из подобия получаем отношения:

$$\frac{IP}{NP} = \frac{IM}{IN} = \frac{PM}{IP}.$$

Смотрим на первую и последнюю дроби, ситуация знакомая из задач выше: числитель одной (IP) и знаменатель другой одинаковые. Там был равнобедренный треугольник, одна из вершин которого была I. Проверяем на равнобедренность AIP. Скорее всего основанием будет IA, так как в пропорции у нас IP. Потянули цепочку равенств:

$$\angle AIP = \angle IAB + \angle ABI = \angle IAC + \frac{1}{2}\breve{PC} = \angle IAC + \angle PAC = \angle IAP.$$

Получили $IP = AP$. Нам осталось найти пропорцию

$$\frac{AP}{NP} = \frac{PM}{AP}.$$

Эти отрезки есть в прямоугольных треугольниках AMP и APN с общим углом. Все. Осталось провести рассуждения в обратную сторону и решение задачи готово. $\square$

Задача 18. (11 класс, окружная) Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1, а описанную окружность этого треугольника – в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P. Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC, параллелен AC.

Решение. Обозначаем центр вписанной окружности через I. В предыдущей задаче был равнобедренный треугольник. Найдем его и здесь.

$$\angle C_0AI = \frac{1}{2}\left(\breve{C_0B} + \breve{A_0B}\right) = \frac{1}{2}\left(\breve{AC_0} + \breve{A_0C}\right) = \angle C_0IA.$$

Следовательно, треугольник AC_0I равнобедренный и $C_0A = C_0I$. А теперь пошли новые идеи. Нам нужна гомотетия. Для нее нужен коэффициент. Значит нужны подобные треугольники. Подобные треугольники – два равных угла. И опять по тому же принципу, что и выше работает биссектриса угла треугольника:

$$\angle C_0AC_1 = \frac{1}{2}\breve{C_0B} = \frac{1}{2}\breve{C_0A} = \angle ACC_0.$$

Откуда получаем, что треугольники C_0AC_1 и C_0CA подобны по двум углам (еще один общий). Тогда

$$\frac{C_0A}{C_0C_1} = \frac{C_0C}{C_0A}.$$

Объединяя с равнобедренным треугольником, получаем на одной прямой отношение длин отрезков

$$\frac{C_0I}{C_0C_1} = \frac{C_0C}{C_0I}.$$

Все подготовили для гомотетии. А теперь еще один прием для доказательства параллельности. Напомним, что нам нужно доказать, что прямые PI и AC параллельны. Мы сами проведем через точку I параллельную прямую ℓ и покажем, что на ней лежит точка P.

Обозначим через P' точку пересечения ℓ и A_1C_1 (если бы они были параллельны, то треугольник ABC был бы равнобедренным и точки P не существовало бы, а о ней говорится в условии задачи). Проведем еще одну прямую m, параллельную A_1C_1. Точку пересечения m и AC обозначим Q.

Вводим гомотетию. В отношении отрезков участвуют C_0, C_1 и I. Рассмотрим гомотетию с центром в точке C_0, переводящую C_1 в I. Тогда I перейдет в C, ℓ перейдет в AC (поэтому и проводили параллельной), A_1C_1 перейдет в m. Тогда

$$P' = A_1C_1 \cap \ell \to m \cap AC = Q.$$

Следовательно, центр гомотетии C_0 лежит на прямой $P'Q$. Рассуждая аналогично для точки A_0 вместо C_0 получаем, что A_0 лежит на $P'Q$. Следовательно, прямые A_0C_0 и $P'Q$ совпадают, следовательно, совпадают точки $P = P'$. Значит, ℓ как раз нужная нам прямая IP.

Жуть! Попробуй догадайся за несколько часов! $\square$

4.2. Домашнее задание

1. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D, окружность Ω_2 в точке E и прямую AB – в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

2. Решите сначала вспомогательную задачу.
   В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

   (9 класс, окружная, 2016) Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90^0$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC. Найдите угол DCF.

3. (9 класс, окружная, 2015) Один четырехугольник уже вписан в окружность, а второй нужно увидеть.
   Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

4. Поработайте с вписанными в окружность углами и равными треугольниками. Ничего особо сложного нет.

   (10 класс, окружная, 2016) В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O – центр описанной около MKN окружности).

Занятие 5.

5.1. окружность и вписанные углы (продолжение)

Задача 19. (9 класс, окружная)
Две окружности радиусов R и r касаются прямой ℓ в точках A и B и пересекаются в точках C и D. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB.

Решение. Нарисовать картинку. Слева большая окружность с центром O радиуса R, касается ℓ в точке A. На AC из O опускаем перпендикуляр OK. Аналогично со второй окружностью: центр Q, радиус r, перпендикуляр на BC обозначаем QT.

Обозначим радиус искомой окружности через ρ. По домашней задаче имеем $BC = 2\rho \sin \angle A$. По той же домашней задаче $\angle A = \angle KOA$. Из треугольника AOK получим $\sin \angle KOA = \frac{AC}{2R}$. Аналогично для второй окружности $\sin \angle B = \sin \angle TQB = \frac{BC}{2r}$. Получаем два равенства

$$BC = 2\rho \frac{AC}{2R};\ AC = 2\rho \frac{BC}{2r}.$$

Перемножая их, получаем, что $\rho^2 = Rr$ и не зависит от AB. □

Задача 20. (11 класс, окружная) Три окружности ω_1, ω_2, ω_3 радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R ($R > r$) в точках T_1, T_2 и T_3. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2.

Решение. Рисуем картинку. Если ее правильно нарисовать, то задача решена на три четверти. Обозначим O_1, O_2, O_3, O – центры окружностей ω_1, ω_2,

ω_3, ω. Точка S на одинаковом расстоянии от T_1, T_2, T_3. Значит, она является точкой O. Рисунок завершен.

Чтобы доказать, что точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 лежит на прямой T_1T_2, мы угадаем, где лежит эта точка на прямой и затем докажем, что она будет принадлежать обеим окружностям. Картинка очень симметричная. Значит на роль общей точки имеет смысл взять точку M – середину отрезка T_1T_2. Тогда SM будет медианой равнобедренного треугольника T_1ST_2, а значит, и высотой. Тогда угол T_1MS является вписанным в окружность с диаметром T_1S – это окружность ω_1. Аналогично с ω_2. $\square$

Та же идея: точки лежат на одной прямой, но их еще нужно увидеть.

Задача 21. (8 класс) Медиану AA_0 треугольника ABC отложили от точки A_0 перпендикулярно стороне BC во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника ABC равны 30^0, 30^0, 120^0.

Решение. Пусть угол B равен 120^0, а два других по 30^0. Видим, что треугольник равнобедренный. Рисуем его. Точка B_1 лежит на одной прямой с точками B и B_0 и вся картинка симметрична относительно этой прямой.

Треугольник BB_1C. В нем CB_0 является высотой и медианой. Значит, он равнобедренный. Угол B_1 в нем равен углу B и равен 60^0. Значит, он равносторонний. Отрезок B_1A_0 в нем медиана, а значит, и высота. Тогда B_1, A_0, A_1 лежат на одной прямой – прямой, перпендикулярной BC. Аналогичная ситуация с симметричной стороны. Итак, мы получили, что точки A_0 и C_0 лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. В силу симметрии этот треугольник равнобедренный и угол BB_1A_0 равен 30^0 (так как B_1A_0 еще и биссектриса). Следовательно, в треугольнике $A_1B_1C_1$ все углы по 60^0. $\square$

Задача 22. (11 класс, окружная, 2015) Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность w в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность w в точке O. Докажите, что O – центр описанной окружности треугольника DEF.

Решение. Рисуем картинку. Нам нужно доказать, что O – центр описанной окружности, то есть нужно доказать, либо что O – точка пересечения серединных перпендикуляров, либо что O равноудалена от точек F, E, D. Что легче: проводить через точку O перпендикуляры и доказывать, что они попали в середины (или соединять середины сторон с точкой O и доказывать, что они перпендикулярны) или доказать, что $FO = EO = DO$? Второе наверное легче. Покажем, что $FO = EO$. Опять можно идти разными путями: найти равные треугольники с отрезками FO и EO или доказать, что треугольник FOE равнобедренный (то есть доказать, что углы при отрезке FE равны). По какому пути пойти сначала? Здесь целых три окружности. Конечно, окружности дают равные отрезки, а значит вероятность нахождения равных треугольников есть. Но вероятность обнаружения равных углов с помощью окружностей все-таки больше. Поэтому попробуем показать, что углы при отрезке FE равны.

Потянули ниточку от угла $EFO = \alpha$. Он вписан в окружность с центром в C и опирается на BE. Тогда центральный угол ECB равен 2α. Он является вписанным в окружность w и опирается на BE, а значит равен углу EOB. Тогда EOB – внешний угол треугольника FOE и следовательно, угол E этого треугольника равен $2\alpha - \alpha = \alpha$. Мы показали, что треугольник FOE равнобедренный, следовательно, $EO = FO$. Аналогичные рассуждения с окружностью с центром A показывают, что $DO = FO$ (проведите их самостоятельно.) $\square$

Задача 23. (9 класс, окружная) На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC – точки N и M так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K – точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

Решение. Пусть AC – меньшая диагональ ромба. Для большей рассуждения аналогичны, проведите самостоятельно.

Рисуем картинку. Как вообще возможно доказать, что точки лежат на одной прямой. Во-первых, это векторный или координатный методы. Либо связать с парами точек векторы и доказать, что они коллинеарны, либо ввести систему координат, ввести координаты точек и убедиться, что они удовлетворяют уравнению одной прямой. Во-вторых, если мы договоримся пользоваться только методами элементарной математики, это теорема Менелая (или другие аналогичные специфические теоремы, которые школьник не обязан знать), либо доказать, что три точки образуют развернутый угол, либо, что точки находятся на одинаковом расстоянии от какой-нибудь прямой. Подход с развернутым углом, наверно, самый универсальный. Его мы и выберем. В нашей задаче нужно показать, что

$$\angle KEC + \angle CED = \pi. \tag{5.1}$$

Сначала отметим на рисунке все, что мы знаем про углы. Треугольники AEN, CEM, ABC равнобедренные. Углы при основаниях равны. Следовательно,

$$\angle NAB = \angle ANE = \angle ECM = \angle EMC; \ \angle AEN = \angle MEC = \angle ABC.$$

Откуда можно достать π (это наша цель, см. равенство (5.1))? Во-первых, сумма углов треугольника равна π, во-вторых, сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна π, и, в-третьих, сумма двух углов, вписанных в окружность, опирающихся на одну дугу и лежащих по разные стороны от нее, равна π (четырехугольник, вписанный в окружность). Что выбрать? Параллельность наблюдается только в самом ромбе, внутри него параллельности не видно. Треугольников, связанных друг с другом, здесь не много. Поэтому попробуем окружности. В плане четырехугольников, вписанных в окружности сразу бросаются в глаза две возможных окружности: описанная вокруг $ANKE$ и вокруг $KMCE$. Сразу утверждать, что окружности могут быть описаны около этих четырехугольников мы не можем. Поэтому сделаем шаг назад, перейдем в каждом случае к треугольникам. По одной вершине нужно выкинуть. Посмотрим на первый четырехугольник: если выкинуть одну из вершин A, N, E (они более или менее равноправны), то теряются хорошие равнобедренные треугольники с хорошими углами. Поэтому выкидываем вершину K. Аналогично во втором четырехугольнике. Около оставшихся треугольников описываем окружности. Интуиция подсказывает, что обе окружности пройдут через точку K. Но это еще нужно доказать.

Заметим, что точка E не лежит на линии центров этих окружностей (если это было бы так, то треугольники были бы прямоугольные). Поэтому окружности пересекаются (кроме точки E) еще в одной точке. Обозначим ее K_1 и докажем, что она совпадает с K. Для этого мы покажем, что точка K_1 лежит как на отрезке AM, так и на отрезке NC. Заметьте, опять та же проблема: загнать три точки на одну прямую! Мы решили доказывать это, убеждаясь, что угол, определяемый данными тремя точками, является развернутым. Докажем для AM, для NC докажите самостоятельно. Нам надо доказать, что

$$\angle AK_1E + \angle EK_1M = \pi.$$

Заметим, что $\angle AK_1E = \angle EAN =$ (опираются на равные хорды в левой окружности) $= \angle ECM$ (в самом начале отмечали все равные углы). Получаем

$$\angle AK_1E + \angle EK_1M = \angle ECM + \angle EK_1M = \pi$$

(противоположные углы в четырехугольнике, вписанном в окружность).

Итак, точки $K = K_1$. Возвращаемся к нашей основной проблеме (5.1). Здесь фигурирует точка D. Она расположена в нижней части ромба, а все события до сих пор разворачиваются в верхней части ромба. Поэтому хотелось бы угол, связанный с точкой D заменить на угол равный ему и связанный с верхней частью ромба. Видим, что $\angle CED = \angle CEB$ (симметрия ромба). В верхней части ромба у нас получились два четырехугольника $NMCE$ и $NECB$, которые в принципе могут быть вписаны в окружности в выдать нам требуемую сумму π. Какой из них более предпочтителен? Сразу вижу по отмеченным равным углам на картинке, что $\angle NBC + \angle NEC = \pi$. Значит возьмем четырехугольник $NECB$. (Попробуйте выяснить, можно ли описать около второго четырехугольника окружность.)

$$\angle BEC = \angle CNB = \pi - \angle ANC = \pi - (\pi - \angle AEK) = \pi - \angle CEK.$$

Вспоминаем, что $\angle BCE = \angle CED$ и утверждение (5.1) доказано. □

5.2. Домашнее задание

1. (11 класс, окружная, 2014)Если увидеть три точки на одной окружности и ее центр, то задача решится.

   В треугольнике ABC угол C равен 75^0, а угол B равен 60^0. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BMC с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

2. (8 класс, окружная) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричные B и C относительно прямых AC и AB соответственно. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

3. Это вспомогательные задачи из курса элементарной геометрии.

   1. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны соответственно его противоположным сторонам, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

   2. Пусть дан остроугольный треугольник ABC, AH_1, BH_2, CH_3 – его высоты. Докажите, что прямые AH_1, BH_2, CH_3 содержат биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$.

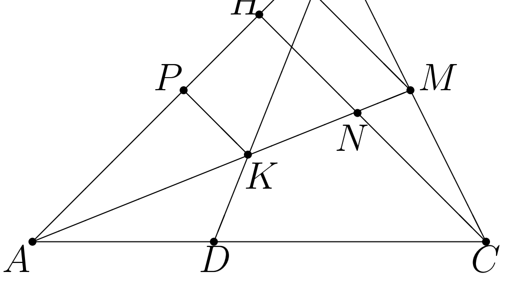
4. Вспомните формулы для вычисления площадей треугольника и четырехугольника. Для четырехугольника формула площади через диагонали.

Занятие 6.

6.1. подобие+площади

Задача 24. (задача для 9, 10 класса, окружная) На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

Доказательство. Начнем с выполнения чертежа.



Нам нужно показать, что $AN = 2KM$ или $\frac{AN}{KM} = 2$. Если мы видим отношение отрезков, то здесь целесообразно попытаться применить подобие.

Подобие – это прежде всего подобные треугольники и, скорее всего, это подобие будет с коэффициентом 2 или будет выходить на таковое. Двойка, половина, середина. Смотрим, что у нас есть в задаче, связанного с серединой. Это медиана. Проведя отрезок SM параллельный высоте CH, мы получим точку S, такую, что она является серединой отрезка HB. Что еще осталось из условия? Осталось равенство $AK = KB$. Здесь вроде не наблюдается ни подобия, ни двойки. Соорудим их. Мы видим, что точка K равноудалена от точек A и B, а значит лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Проводим серединный перпендикуляр PK. Мы видим, что сверху от медианы AM появились подобные треугольники. С ними и будем работать. Вернемся к тому, что нужно доказать:

$$\frac{AN}{KM} = 2.$$

Отрезок AN встраивается в серию подобных треугольников хорошо. А вот KM – нет. Поэтому нам нужно перейти от KM к каким-то (очевидно двум) более удобным отрезкам:

$$\frac{AN}{KM} = \frac{AN}{AM - AK}.$$

Не удобно работать с дробью, в которой разность в знаменателе. Поэтому будем работать с обратным выражением:

$$\frac{AM - AK}{AN} = \frac{AM}{AN} - \frac{AK}{AN}. \tag{6.1}$$

Максимальная информация сейчас располагается на стороне AB. С помощью подобия к ней все и сведем. Обозначим $AP = a$, $HS = b$. Тогда, используя то, что P – середина AB, а S – середина HB, получим

$$\frac{AM}{AN} - \frac{AK}{AN} = \frac{AS}{AH} - \frac{AP}{AH} = \frac{2a - b}{2a - 2b} - \frac{a}{2a - 2b} = \frac{a - b}{2a - 2b} = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что даже можно было в (6.1) почленно не делить выражение. Итак, мы получили, что $AN = 2KM$. □

комбинация подобия и симметрии.

Задача 25. (9 класс, окружная) Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

Решение. Рисуем картинку. Исходная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть ее вершины отражаются в точки A', B', C', D'. Нарисуем сначала точки B', D'. Заметим, что отрезок BD при осевой симметрии переходит в отрезок $B'D'$, следовательно они равны и пересекаются на прямой AC (ось симметрии). Так как BD пересекает AC в точке O, то их общая точка – это точка O. Получаем два подобных треугольника BOB' и DOD'. Откуда $\frac{BO}{OD} = \frac{B'O}{OD'}$. Аналогично рассуждаем с точками A и C и получаем $\frac{CO}{OA} = \frac{C'O}{OA'}$. Из исходной трапеции имеем $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$, следовательно, $\frac{B'O}{OD'} = \frac{C'O}{OA'}$. Значит, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ подобны, следовательно $B'C' \| A'D'$.

P.S. Выясните, в каком случае все четыре точки A', B', C', D' лежат на одной прямой.

□

Задача 26. (10 класс, окружная) Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Решение. Рисуем картинку. Высоты обозначаем AH_1, BH_2, CH_3, а вторые точки пересечения окружностей A_1, B_1, C_1. Окружности построены на кусочках высот как на диаметрах, а значит, угол HC_1H_2, опирающийся на диаметр, является прямым. Аналогично, прямым является угол HC_1H_1. Следовательно, точки H_1, C_1, H_2 лежат на одной прямой. Аналогично рассуждая, получаем, что точки H_3, A_1, H_2 тоже лежат на одной прямой.

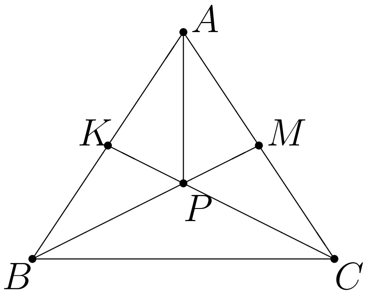
Углы A_1H_2H и C_1H_2H равны, так как в ортотреугольнике высоты исходного треугольника являются биссектрисами. Тогда при осевой симметрии с осью BH_2 прямая H_2H_3 переходит в прямую H_2H_1, а окружность, проходящая через точки A_1, H_2, C_1, H – в себя. Тогда точка A_1, являющаяся пересечением H_2H_1 и окружности перейдет в точку пересечения H_2H_1 и той же окружности, то есть в точку C_1. Значит, эти точки симметричны относительно прямой H_2B и отрезок A_1C_1 перпендикулярен ей, следовательно, параллелен AC. Аналогично для других двух отрезков A_1B_1, B_1C_1. Следовательно у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны соответствующие стороны, следовательно, они подобны.

$\square$

В огороде бузина, а в Киеве дядька. Комплексная задача на подобие, площади и все те же треугольники с углами в 60^0.

Задача 27. (10 класс, окружная, 2014) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC – точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по 120^0, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

Решение. Рисуем картинку. Соединяем точку P с точкой A и отмечаем вокруг точки P все углы по 60^0.



Начнем раскручивать площади. Нам нужно переходить к углам и линейным величинам. Считать площадь четырехугольника не хочется, так как в любом случае при этом мы уйдем далеко от отрезков и углов, связанных с треугольником ABC. Поэтому равенство площадей четырехугольника и треугольника мы превратим в равенство двух треугольников, не нарушив его. Для этого прибавим к обеим частям площадь треугольника BPK (можно прибавлять и площадь MPC, существенно от этого ничего не изменится).

Тогда получим $S_{AMB} = S_{KCB}$, $AB \cdot AM \sin A = BC \cdot BK \sin B$. Так как по теореме синусов $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{AC}{BC}$, получим

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BK}{AB},$$

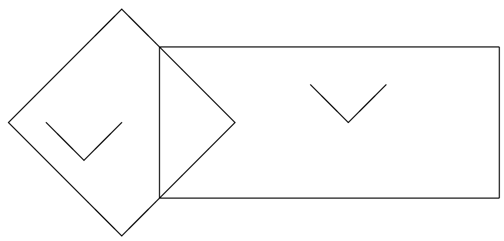
то есть точки M и K делят отрезки AC и BA в одном и том же отношении, считая от точек A и B соответственно. Другими словами, $\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MA}$. Идем дальше и видим много углов по 60^0. Значит, в треугольниках BPA и CPA отрезки PK и PM являются биссектрисами. И опять отношение отрезков

$$\frac{BK}{KA} = \frac{PB}{PA}; \frac{AM}{MC} = \frac{PA}{PC}.$$

Откуда получаем, что треугольники BPA и APC подобны (угол 120^0 и отношение сторон). Значит, и углы CAP и PBA в этих треугольниках равны. Тогда $\angle A = \angle CAP + \angle PAB = \angle PBA + \angle PAB = 180^0 - \angle BPA = 60^0$. □

Задача 28. Прямоугольник со сторонами 4 и 9 см наложили на квадрат со стороной 6 см как показано на рисунке. Докажите, что площади закрашенных частей данных фигур равны.

Решение. Нарисуем картинку. Закрашенные части отмечены у нас галочками.



Решение для нас здесь достаточно очевидно: площади закрашенных частей – это площади квадрата и прямоугольника без площади общей их части – треугольника. Так как площади квадрата и прямоугольника одинаковы, то и площади закрашенных частей одинаковы.

Давайте попробует усложнить задачу: во-первых, наложить квадрат на прямоугольник можно не только по такой простой фигуре, как треугольник, но и по более сложному многоугольнику (сдвиньте квадрат вправо). Во-вторых, мы видим, что форма фигур здесь не важна, важно, чтобы их площади были одинаковы. Значит, годятся любые две фигуры равной площади. В-третьих, задачу можно сформулировать так (но это уже для более старших классов): даны те же квадрат и прямоугольник. Найдите разность площадей их заштрихованных частей. □

площадь четырехугольника и свойства осевой симметрии

Задача 29. (11 класс, окружная) Каждую вершину выпуклого четырехугольника площади S отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Обозначим площадь получившегося четырехугольника через S'. Докажите, что $\frac{S'}{S} < 3$.

Решение. Половина решения этой задачи заключается в правильном изображении чертежа с учетом всех свойств осевой симметрии. Рисуем и видим, что получившейся четырехугольник имеет длины диагоналей такие же как исходный четырехугольник, а угол между ними 3α (α – угол между диагоналями исходного четырехугольника. Тогда отношение площадей будет равно $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$. Осталось вспомнить или вывести формулу для тройного угла:

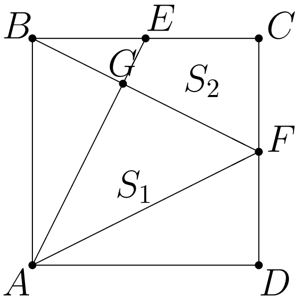
$$\sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1-\sin^2 \alpha) \sin \alpha = \sin \alpha (3-4 \sin^2$$

Делим на $\sin \alpha$ и получаем то, что нужно. □

Еще один красивый подход к решению задач на площади.

Задача 30. (11 класс, окружная, 2016) В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

Решение. Рисуем картинку.



Обозначим площадь треугольника S_1, четырехугольника S_2, а всего квадрата – S. Видно, что $S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$ (два треугольника образуют прямоугольник в полквадрата).

Нам нужно сравнить площади, следовательно, мы можем оценить знак разности площадей. Прикинем

$$S_1 - S_2 = \frac{S}{2} - S_2 - S_2 = \frac{S}{2} - 2(S_{BCF} - S_{BEG}) = \frac{S}{2} - 2(\frac{S}{4} - S_{BEG}) = 2S_{BEG} > 0.$$

Значит площадь треугольника больше. □

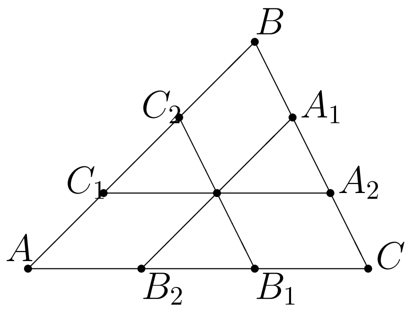
6.2. Домашнее задание

1. На одной строчке нарисованы два сердечка. Одно движется по строчке, проезжая через другое. Докажите, что в каждый момент времени разность площадей не пересекающихся частей сердечек постоянна. Сформулируйте аналогичную задачу для пространства.

2. (10 класс, школьная, 2015)
   Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка

K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?

3. (10 класс, окружная, 2016)



Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC проведены три отрезка, параллельные его сторонам. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

4. (10 класс, школьная, 2016)
Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

Занятие 7.

7.1. стереометрия

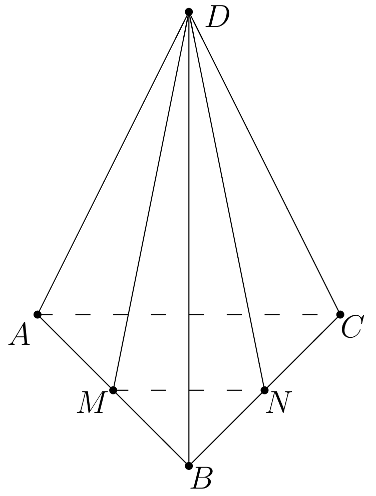
Параллельность плоскостей.

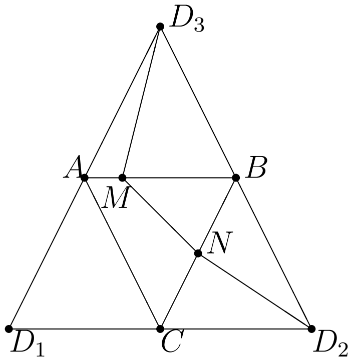
Задача 31. (10 класс, окружная, 2015) В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек A, B, C, D, E, F. известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

Решение. Разберемся, что и где лежит. Пересекающиеся прямые AB и CD определяют плоскость. Аналогично прямые DE и EF определяют плоскость. Согласно условию в этих плоскостях есть две пары параллельных прямых. Значит, эти две плоскости параллельны. Тогда отрезки AF и CD – это параллельные отрезки между параллельными плоскостями, следовательно, они равны по длине. Для двух других пар рассуждения аналогичны. □

Задача 32. (11 класс, окружная, 2012) Длина ребра правильного тетраэдра равна a. Через одну из вершин тетраэдра проведено треугольное сечение. Докажите, что периметр P этого треугольника удовлетворяет неравенству $P > 2a$.

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$.





Рассматриваем развертку и все становится понятным. □

Достаточно тривиальная (для окружной олимпиады) на свойства трехгранных углов.

Задача 33. (11 класс, окружная, 2015) Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по 150^0?

Решение. При такой постановке вопроса с большой долей вероятности ответ нет. Поэтому мы можем попытаться воспользоваться доказательством от противного. Предположим, что такой тетраэдр существует. Нам нужно прийти к противоречию. Рисуем картинку и отмечаем на ней все, что известно. ABC оказывается равносторонним треугольником, а BAD и CAD – равнобедренными (хотя и не обязательно равными друг другу). Обозначаем углы. Внизу все по 60^0. Теперь сбоку: $\angle ABC = \angle ADB = \alpha$, $\angle ACD = \angle ADC = \beta$. Про треугольник BCD ничего хорошего сказать не можем. Значит его два нижних угла обозначаем буквами: $\angle DBC = \gamma$, $\angle DCB = \delta$, а верхний будет равен $180^0 - \gamma - \delta$.

Теперь раскручиваем условие с углами: $\alpha + \gamma + 60^0 = 150^0$ и $\beta + \delta + 60^0 = 150^0$. Тогда $\alpha + \gamma = 90^0$, $\beta + \delta = 90^0$. Эти два равенства мы можем сложить или вычесть и тогда получим еще два соотношения.

Идем на поиски противоречия. У нас остались еще две не использованные вершины пирамиды: A и D. С вершиной A связаны всего два угла – это α и

β, а вот в вершине D присутствуют все четыре. Туда и пойдем. Имеем

$$\angle BDC = 180^0 - \gamma - \delta = 180^0 - (180^0 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta.$$

Итак, у трехгранного угла D сумма двух плоских равна третьему плоскому, что не может быть. Противоречие получили. □

Задача 34. (11 класс, окружная, 2016) Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

Решение. Пусть основанием пирамиды является многоугольник $SA_1A_2 \dots A_n$. Тогда возможны два случая:

1) для каких-то двух соседних граней у прямых углов общая вершина. Пусть $\angle A_1A_2S = \angle A_3A_2S = 90^0$. Тогда по признаку SA_2 перпендикулярна основанию пирамиды и является высотой.

2) у прямых углов нет общей вершины во всех гранях. Пусть $\angle A_1A_2S = \angle A_2A_3S = 90^0$. Так как гипотенуза больше катета получим из цепочки прямоугольных треугольников $SA_1 > SA_2 > SA_3 > \dots > SA_n > SA_1$. Противоречие. Такого расположения прямых углов быть не может. □

задача на доказательство параллельности плоскостей. Опять гомотетия. Сравните с задачей 18.

Задача 35. (11 класс, окружная) В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости BCD.

Решение. Тихий ужас, даже рисовать картинку не хочется. Вспоминаем, откуда может взяться параллельность плоскостей. Все признаки с прямыми подразумевают чертеж и какие-то построения. Об этом сейчас даже думать страшно. Еще параллельность присутствует в параллельном переносе и гомотетии. Наличие пирамиды намекает на гомотетию и скорее всего с центром A, в которой плоскость $(B'C'D')$ перейдет в (BCD).

Продолжим отрезок AB' до пересбечения с плоскостью BCD в точке B'', так как плоскости (BCD) и (ACD) симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''. При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $(B''C''D'') = (BCD)$ переходит в плоскость $(B'C'D')$. Значит, они параллельны. $\square$

Задача 36. (11 класс, окружная, 2014) Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

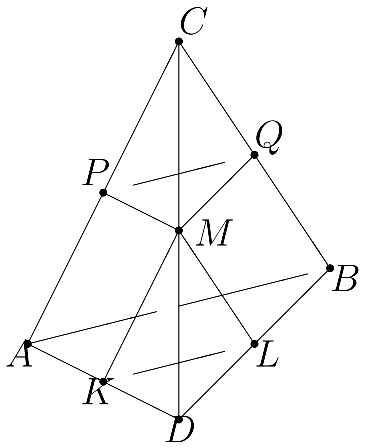
Решение. Сначала подумаем, зачем здесь куб? Медианы скрещивающиеся, значит ребра куба будут скрещивающимися. Скрещивающиеся ребра куба перпендикулярны. Следовательно, медианы пирамиды перпендикулярны. Рисуем картинку и отмечаем на ней все равные отрезки, которые можем найти: пирамида правильная, значит боковые грани равные равнобедренные треугольники, медианы будут равными;отрезки SD, DB, SE, EC равны между собой.

Теперь нужно использовать угол. Его очень трудно использовать, если отрезки скрещивающиеся. Нужно сделать пересекающиеся отрезки, а еще лучше, чтобы получился треугольник, ну и конечно при этом прямой угол остался. Проводим прямую, параллельную медиане BE через точку D. F – конец этого отрезка, лежащий на BC. Имеем $BF = DE = \frac{1}{2}$. Тогда из треугольника ABF по теореме косинусов находим AF: $AF^2 = 1 + \frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\cos 120^0 = \frac{3}{4}$. Из треугольника ADF (равнобедренный прямоугольный) находим медиану: $AD = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Теперь задача превратилась в стандартную планиметрическую задачу: в равнобедренном треугольнике известно основание и медиана, проведенная к боковой стороне. Найти боковую сторону. Решите ее самостоятельно. $\square$

опять работает симметрия

Задача 37. (11 класс, окружная) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC BC, DC в точках P, Q, M. Оказалось, что $KL \| PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

Решение. Рисуем картинку.



Совпадение биссектрис говорит о том, что картинка должна быть симметрична. Попробуем по максимуму эту симметрию обнаружить. Так как прямые PQ и KL параллельны между собой, то они параллельны и прямой AB, по которой пересекаются плоскости, в которых лежат эти прямые. Тогда четырехугольники $AKLB$ и $APQB$ – трапеции. Для каждой трапеции (по отдельности) вершины лежат на одной окружности (из-за сфер, проходящих через эти точки). Значит, трапеции равнобокие.

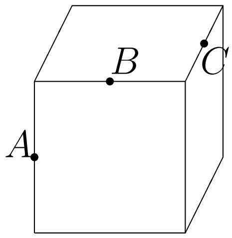
Углы при большем основании равны (отмечаем на картинке) и треугольники ABC и ABD равнобедренные. Тогда пирамида $ABCD$ симметрична относительно плоскости α, проходящей через ее ребро CD и середину ребра AB (эта плоскость будет перпендикулярна ребру AB). Тогда при симметрии относительно плоскости α точка $P \to Q$ (сфера перейдет в себя), а $K \to L$. Значит, угол PML перейдет в угол QMK. Понятно, что биссектриса перейдет в биссектрису (интересующих нас углов), то нам нужно, чтобы она перешла в себя при симметрии относительно α, следовательно, она должна там лежать. Другими словами, нам нужна еще одна симметрия относительно плоскости β, перпендикулярной α, и проходящей через точку M. Проведем через точку M плоскость β, перпендикулярно CD. Тогда так как $C, D \in \alpha, (BCD)$, $\beta \perp \alpha$, $\beta \perp (BCD)$. Нам нужно убедиться, что система лучей MQ, ML, MK, MP симметрична относительно β. Для этого достаточно показать, что углы CMQ и LMD равны. Для этого заметим, что четырехугольники $MQBD$ и $CMLB$ вписаны в окружности, а значит, суммы их противоположных углов равны 180^0. Тогда имеем

$$\angle CMQ = \angle CML - \angle QML = (180^0 - \angle CBL) - \angle QML = \\ = \angle QMD - \angle QML = \angle LMD.$$

Создали дважды симметричную картинку, а теперь создаем биссектрису. Отложим на лучах MQ, MP, MK, ML равные отрезки и обозначим их теми же буквами со штрихами. Эти точки симметричны относительно плоскостей α и β, следовательно, $Q'P'K'L'$ – параллелограмм. Пусть O – точка пересечения его диагоналей. Тогда MO – биссектриса нужных углов. □

7.2. Домашнее задание

1. (11 класс, школьная, 2015)



Дан куб, A, B, C – середины его ребер. Чему равен угол ABC?

2. (11 класс, школьная, 2016)
Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на ребрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Примет обоснуйте.

3. (11 класс, региональный, 2012) На такую идею уже решали задачу в планиметрии.

   Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A – параллельно SC и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

4. Хотя задача из стереометрии, все идеи решения из планиметрии
(11 класс, окружная, 2011) Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. M и N – точки пересечения медиан граней ABC и ABD соответственно. Докажите, что отрезки CN и DM равны.

5. (11 класс, окружная, 2011) Здесь несколько способов решения. Попробуйте координатный.

   Укажите точки на поверхности куба, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

Занятие 8.

8.1. Применение геометрии в решении алгебраических задач

Задача 38. Для положительных x, y, z из условий $y^2 + z^2 = 50$, $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169$, $x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$, не находя значений x, y, z, вычислите значение выражения $xy + yz + zx$.

Решение. Первое равенство – теорема Пифагора. Два остальных из-за того, что справа стоят квадраты чисел, наводят на мысль применить теорему косинусов. Преобразуем для этого второе равенство:

$$13^2 = x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2x\frac{y}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Получаем треугольник со сторонами x, $\frac{y}{\sqrt{2}}$, 13 и углом 135^0. Аналогично для третьего равенства получаем треугольник со сторонами x, $\frac{z}{\sqrt{2}}$, 12 и углом 135^0. Эти два треугольника очень хорошо прикладываются друг к другу по стороне x. Первое равенство тоже дает треугольник, но если взять стороны y и z, то он остается в стороне от двух других. Меняем стороны, делим на два. Тогда одна его сторона равна стороне второго треугольника, а другая – третьего. Причем $135 + 135 + 90 = 360$, следовательно, их вершины хорошо откладываются от одной точки. Рисуем картинку. Внешние стороны треугольников оказываются $12, 13, 5$. По теореме обратной теореме Пифагора получаем прямоугольный треугольник.

Смотрим, что нужно найти: произведения букв – сторон треугольников. Произведение сторон связано с площадью треугольника. Три произведения, три площади. Пытаемся вычислить:

$$\frac{1}{2}x\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}x\frac{z}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(xy + xz + yz).$$

Это площадь большого треугольника. Она равна 30. Тогда получаем

$$xy + xz + yz = 120.$$

□

Задача 39. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

решение для положительных x, y, z?

Решение. Теорема косинусов позволяет построить три треугольника с общей вершиной как в предыдущей задаче. Тогда объемлющий треугольник получается со сторонами 2,3, 6. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система решения не имеет.

Пойдем дальше. Выясним, имеет ли решение эта система. Начнем с нуля. Пусть $x = 0$. Тогда $y = \pm 2$, $z = \pm 3$. Тогда третье уравнение противоречиво. Значит, x не может быть нулем. Две остальные переменные не могут быть нулями по аналогичным рассуждениям.

Рассмотрим теперь случай отрицательных значений. Если все три переменные отрицательные, то обозначая $-x = \xi > 0$, $-y = \eta > 0$, $-z = \chi > 0$, получим систему такого же вида с положительным решением, которого нет. Значит, все три отрицательными быть не могут.

Пусть одна буква отрицательна, две положительны, например, x. Тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (-x)^2 - (-x)y + y^2 = 4 \\ (-x)^2 - (-x)z + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

Исследуем ее решения для $-x$, y, z. Они все положительны. Получаем три треугольника с углами $60^0, 60^0, 120^0$. От одной точки откладываем отрезки $-x$, y, z. Теперь $-x$ лежит между y и z и концы этих отрезков должны образовывать треугольник со сторонами $2, 3, 6$, которого не может быть.

Если две буквы отрицательны, а одна положительна, опять получаем два угла по 60^0 и один 120^0. Опять треугольник не получается.

Итак, мы полностью исследовали систему уравнений и выяснили, что она не имеет решений. □

Задача 40. Решите систему уравнений для положительных x,y

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24. \end{cases}$$

Решение. Разность квадратов под корнем наводит на мысль, что здесь используется прямоугольный треугольник с гипотенузой x и катетами y, $\sqrt{x^2 - y^2}$. Из первого уравнения следует, что его площадь равна 24, а второе уравнение – дает периметр 24. Что еще можем узнать про этот треугольник? Желательно, чтобы новые знания позволили составить новые уравнения на x, y, но более простые. Радиус вписанной окружности равен площадь делить на полупериметр, то есть он равен 2. Тогда гипотенуза – это сумма катетов минус удвоенный радиус вписанной окружности: $x = y + \sqrt{x^2 - y^2} - 4$. Добавляем к этому второе уравнение системы и находим $x = 10$. Тогда $y_{1,2} = 6$ и 8. □

Задача 41**.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу можно решить несколькими способами. Вроде два уравнения и три неизвестные. Прикинем, сколько может быть решений. Если ввести в пространстве прямоугольную декартову систему координат, то первое уравнение задает плоскость, а второе сферу радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. В зависимости от того, как расположена плоскость относительно сферы, мы будем иметь либо целую окружность решений, либо одно решение (точка касания), либо не иметь решений. Интуиция подсказывает, что здесь одно решение, то есть сфера касается плоскости. Чтобы убедиться в этом, нам нужно вычислить расстояние от начала системы координат (центра сферы) до плоскости. Так как в школьной программе нет формулы для непосредственного вычисления этого расстояния, мы можем воспользоваться тем, что это расстояние равно высоте треугольной пирамиды, которую отрезает плоскость в первом октанте. Вычисляя ее объем двумя способами, мы найдем расстояние и убедимся, что оно равно радиусу сферы. Так как эта точка – центр равностороннего треугольника получаем, что $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Второй способ (векторный). Рассматриваем два вектора $\vec{a}(x, y, z)$ и $\vec{b}(1, 1, 1)$. огда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},\ \vec{a}\vec{b} = 1.$$

Тогда $|\vec{a}||\vec{b}| = \vec{a}\vec{b}$, следовательно, векторы сонаправлены и $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. □

Задача 42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1 \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$$

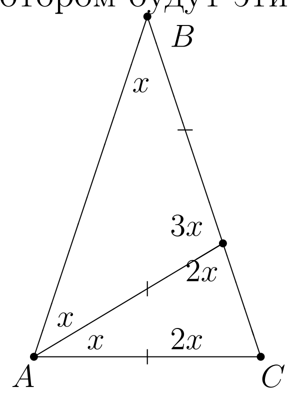
Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x^4, y^4, z^4)$ и $\vec{b}(1, -2, 3)$. Тогда

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{14}, \cos\varphi = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} > 1.$$

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений. □

Задача 43. Докажите тождество $\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{1}{2}$.

Решение. Мы видим в этом тождестве два угла: 36^0 и 72^0. Построим равнобедренный треугольник как показано на рисунке (а точнее два в одном), в котором будут эти углы.



Пусть треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. Возьмем точку D так, чтобы треугольники ACD и BDA были равнобедренными. Временно вопрос о существовании таких треугольников мы откладываем. Обозначим угол B через x. Тогда угол BAD тоже равен x.
Угол ADC равен $2x$ как внешний, и BCA тоже $2x$ как угол при основании равнобедренного треугольника. Угол BAC равен $2x$ из равнобедренного треугольника ABC, значит, угол DAC будет x. Наконец, угол BDA будет $3x$ как внешний. Таким выбором равнобедренных треугольников мы добились, что $x = 36^0$, $2x = 72^0$, то есть те углы, которые нужны по задаче. Сумма возникает на стороне BC

$$BC = BD + DC.$$

Пусть $AC = 1$. Тогда, проводя к основанию равнобедренного треугольника медиану-высоту-биссектрису, получим $DC = 2\cos 72^0$ и $BC = AB = 2\cos 36^0$. Соединяем вместе и получаем $1 + 2\cos 72^0 = 2\cos 36^0$. □

Задача 44. Докажите, что

$$2\,\mathrm{arcctg}\,5 - \mathrm{arctg}\,\frac{5}{12} = 0.$$

Решение. Видим $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Для него нужен прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Рисуем треугольник ABC с катетами $BC = 12$ и $AC = 5$. Тогда $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} = \angle B$. Обозначим его α. Теперь пристраиваем к треугольнику ABC еще один треугольник так, чтобы образовался угол $\operatorname{arctg} 5$. Нужен прямоугольный треугольник с катетами 5 и 1. Катет $5 = AC$ уже есть, прямой угол есть. Рисуем гипотенузу AD. Но нам нужны два таких угла. Тогда рисуем гипотенузу еще и с другой стороны от катета AC. Обозначим получившуюся точку через E. Тогда $\angle DAE = 2\operatorname{arcctg} 5$. Обозначим $\angle DAC = \angle CAE = \beta$. Нам нужно показать, что $\alpha = 2\beta$.

Треугольник ABE равнобедренный с основанием AE. Обозначим угол AEB через γ. Тогда $\angle BAE = \gamma$ и $\angle ADE = \gamma$. Из треугольников ADE и ABE получаем $2\gamma + 2\alpha = 180^0$ и $2\gamma + \beta = 180^0$. Откуда получаем нужное равенство. □

8.2. Домашнее задание

1. Для положительных x, y, z найдите $\sqrt{3}xz + y(x+z)$, если $x^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{\sqrt{3}} = 625$, $\frac{y^2}{3} + z^2 + \frac{yz}{\sqrt{3}} = 49$, $x^2 + z^2 + xz = 576$.

2. Измените условие задачи 39 так, чтобы она имела решение. Подберите числа так, чтобы а) задача решалась совсем просто, б) немного посложнее.

3. Решите системы уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9 \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27 \\ x^y + y^z + z^x = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y^2 + z^3 = 2 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 4 \\ x^3 + y^4 + z^5 = 8. \end{cases}$$

4. Докажите, что $\arccos\frac{15}{17} - 2\operatorname{arcctg} 4 = 0$.

Занятие 9.

9.1. Геометрия+Комбинаторика

Вспоминаем задачу 5 – 6 класса. Дан круглый пирог. Нужно тремя прямыми разрезами разделить его на семь частей.

Более сложная задача, но доступная еще до систематического изучения геометрии.

Задача 45. Куб со стороной 3 можно разрезать на 9 кубов с ребром 1 с помощью шести разрезов плоскостями. Можно ли уменьшить количество разрезаний, если разрешить перемещать полученные при разрезании части куба?

Решение. Сначала представим себе, как можно разрезать куб шестью плоскостями (рисунок). Теперь с перекладываниями. Сразу разрезание куба со стороной 3 представить сложно. Что делать? Упрощать себе задачу. Сначала решить более простую. Что значит более простую. Здесь очевидно, что куб нужно взять с меньшим ребром: 2 или 1. Куб с ребром 1 резать не нужно, значит берем куб с ребром 2. Без перекладываний было бы 3 разреза. Теперь режем один раз и перекладываем так, чтобы при втором разрезе получить наибольшее количество частей: части $2\times2\times1$ кладем одну на другую. Теперь режем и получаем четыре части вида $1 \times 1 \times 2$. Опять складываем их одну на другую и режем: получаем нужные кубики. Получаем опять три разреза. Каждый раз мы сразу резали по максимуму частей, следовательно, уменьшить число разрезов не удалось. В упрощенной задаче у нас получился ответ нет. Переходим к изначальной задаче и применяем ту же технику. Сначала прикинем, сколько частей мы можем получить из куба, ставя все его части так, чтобы они делились на две части очередным разрезом. После первого разреза – две чисти, после второго – четыре, после третьего – восемь, ... Каждый раз при разрезе мы получаем в два раза больше частей, чем было. Следовательно, при n-м разрезе мы получим 2^n (детям 5 – 6 класса об этом сообщать не обязательно). Но вот что нужно им показать, что после четвертого разреза получается 16 частей, а после пятого разреза получается 32 части. Вспоминаем нашу задачу: нам нужно 27 кубиков. Значит, пятью разрезами, ставя одну на другую все части, которые еще нужно резать, мы получим нужные 27 кубиков. За четыре разреза это сделать не удастся. Объясните, почему за пять разрезов мы получаем 27 кубиков, а не 32 кубика.

Итак, мы не только решили задачу, но еще дополнительно доказали, что что наше решение наилучшее.

Здесь можно пойти дальше (это конечно будет уже задача не для 5 – 6 классов): разрезать аналогичным образом куб с ребром 4. Там нужно 9 разрезов. Можно ли обойтись меньшим числом разрезов? Всего кубиков должно быть 64. Это 2^6. Значит, обойдемся шестью разрезами.

Идем дальше: куб с ребром 5. Получаем 125 кубиков и 12 стандартных разрезов. Можно ли меньше? Рассуждая аналогично, получаем 7 разрезов. Дальше разница в количестве стандартных разрезов и минимальном числом разрезов будет расти. Для школьников старших классов можно сформулировать задачу в общем виде: исследовать случай куба с ребром n. Для студентов математических факультетов можно пойти еще дальше: исследовать аналогичную задачу для куба в многомерном пространстве.

Итак, уже на первой задаче мы увидели, что олимпиадная задача не только маленькое исследование, но и дает возможность формулировать более сложные задачи путем обобщения исходной. Это еще один прием научных исследований, который можно показать школьникам на примере олимпиадных задач. $\square$

Задача 46. (6 – 8 классы) Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» – это скобка в виде буквы «П», состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

Решение. Считаем, сколько нам нужно отрезков: три каркаса разделенного квадрата – это $3 \cdot 12$ и $2 \cdot 9$ отрезков для их соединения. Итого, 54 единичных отрезка. Каждая буква «П» – это три отрезка, следовательно, нужно 18 таких букв. Рассмотрим одну из восьми вершин куба. Для того, чтобы припаять к ней три отрезка, нужно использовать не менее двух деталей. То есть для формирования вершин куба нужно не менее 16 деталей. Рассмотрим центр куба. Из него должно выходить 6 отрезков, и для этого необходимо не менее трех деталей. А так как одна и та же деталь не может использоваться в вершине куба и в его центре, то необходимо не менее 19 деталей. Противоречие. $\square$

Задача 47. (10 класс, окружная) У выпуклого многогранника $2n$ граней $(n \geq 3)$и все грани являются треугольниками. Докажите, что число вершин у такого многогранника, в которых сходится ровно три ребра, не превосходит $\frac{2n}{3}$.

Решение. Назовем вершину, в которой сходится три ребра, хорошей. Покажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное – пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани. Обозначим ее ABD. Поскольку вершина A – хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани – ABC, ABD и грани, содержащая ребра AC и AD, то есть грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \geq 3$. Итак, мы показали, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\frac{2n}{3}$. □

Задача 48. (10 класс, окружная) Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

Решение. Обозначим углы первого треугольника α_1, α_2, α_3, а углы второго треугольника β_1, β_2, β_3. Начинаем набирать информацию об углах: из условия мы знаем, что косинусы альф равны синусам бет. Значит, косинусы положительны и первый треугольник остроугольный. Из того же условия следует, что $\beta_i = \frac{\pi}{2} \pm \alpha_i$ (вспоминаем формулы приведения). Так как сумма углов треугольника равна π получаем

$$\pi = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{3\pi}{2} + (\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3).$$

В треугольнике может быть лишь один тупой угол (пусть β_1), следовательно, плюс будет только перед α_1. Перед остальными слагаемыми будут минусы. Тогда

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

и $\frac{\pi}{2} + 2\alpha_1 - \pi = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$. □

Задача 49. (10 класс, окружная) На плоскости отмечено $N \geq 3$ различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \leq (n+1)^2$.

Решение. Нужно соединить между собой два числа N и n: количество точек и количество числовых значений. Точка и число – это окружность. Поэтому пытаемся проводить окружности.

Пусть A_1, A_2, …, A_N – отмеченные точки и каждое из расстояний A_iA_j равно одному из n фиксированных чисел r_1, r_2, …, r_n. Фиксируем произвольное i. Тогда каждая из точек A_j, $j \neq i$ лежит на одной из окружностей $O(A_i, r_1)$, $O(A_i, r_2)$, …, $O(A_i, r_n)$. Введем на плоскости систему координат так, что ее оси не параллельны прямым A_iA_j. Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1 (самая левая точка). Среди прямых A_1A_2, A_1A_3, …, A_1A_N найдем прямую с наибольшим угловым коэффициентом, пусть это прямая A_1A_2 (самая круто стоящая прямая). Тогда все остальные точки A_3, …, A_N расположены в одной полуплоскости α относительно нее (все правее ее).

По условию каждая из точек A_3, A_4, …, A_N является точкой пересечения окружностей $O(A_1, r_k)$, $O(A_2, r_\ell)$ для некоторых $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждая из n^2 пар таких окружностей имеет не более одной точки пересечения, принадлежащей полуплоскости α. Следовательно, среди $N - 2$ точек A_3, A_4, …, A_N имеется не более n^2 различных. Отсюда $N - 2 \leq n^2$, $N \leq n^2 + 2 \leq (n+1)^2$. □

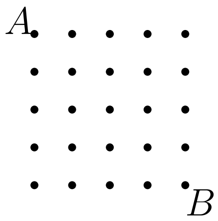
9.2. Домашнее задание

1. (к задаче 45) Есть шоколадка 6×4. Нужно разломить ее на 24 дольки. Накладывать части друг на друга не разрешается. Сколько разломов потребуется? Какое минимальное число разломов потребуется, если разрешить накладывать части друг на друга?

   Сформулируйте эту задачу в виде более или менее сложной для учеников 5 – 6 классов. Сформулируйте эту задачу для учеников более старших классов. Решите эту задачу 1) ломать можно только один кусок шоколада за один раз, 2) ломать можно плитку, не снимая упаковки (сразу несколько кусков за один раз).

2. (6 класс, школьная, 2013) Как разрезать квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых?

3. (7 класс, окружная, 2014)



Соедините точки A и B ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;

2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;

3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

4. (к задаче 46) Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности.

5. (10 класс, школьная, 2015)

   В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

6. (8 класс, школьная, 2016)

   Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линия сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?