Игнаточкина Л.А.

Практикум по решению олимпиадных задач по геометрии

2018

Список литературы

1. А.В.Шевкин Школьная олимпиада по математике. Москва, Русское слово, 2002.

2. Н.Х. Агаханов, И.И.Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006 окружной и финальный этапы, Москва, МЦНМО, 2007.

3. Б.Н.Кукушкин Подготовка к олимпиадам. Математика. 7 – 11 классы, Москва, Айрис Пресс, 2011.

4. Г.С.М. Кокстер Введение в геометрию, Москва, Наука, 1966.

5. И.Ф.Шарыгин Задачи по геометрии Планиметрия, Москва, Наука, 1982.

6. И.Ф.Шарыгин, Р.К. Гордин Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. Москва, Астрель, 2001.

7. Г.З.Генкин Геометрические решения негеометрических задач. Москва, Просвещение, 2007.

8. Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер Новые встречи с геометрией, Москва, Наука, 1978.

9. О проведении «окружных» олимпиад по математике в Москве в 2015/2016 учебном году[Электронный ресурс] http://olympiads.mccme.ru /mmo/okrug/okr15.htm

10. Всероссийская олимпиада школьников по математике. [Электронный ресурс] http://baseold.anichkov.ru/files/departments/olympiad/ recommendations/2014-2015/matematika rekomendatcii ShE ME 2014-2015.pdf

11. Всероссийская олимпиада школьников [Электронный ресурс] http://olympiads.mccme.ru/vmo/

12. Г.А.Гальперин, А.К.Толпыго Московские математические олимпиады, М., Просвещение, 1986.

13. Устная математическая олимпиада [Электронный ресурс] http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Введение.

Олимпиада по математике – соревнование среди школьников (а также студентов вузов) в решении задач по математике. Олимпиады по математике бывают разного уровня: от состязания в решении задач школьников одного класса до международных соревнований. Олимпиадная задача – это особый тип математической задачи, для которой нет единого алгоритма решения. Каждая такая задача уникальна и требует нестандартного подхода к решению, проведения пусть небольшого, но научного исследования. Формулировка олимпиадной задачи проста и использует ту терминологию, которая вводится в стандартном курсе математики школы (или вуза). Также решение этой задачи не предполагает привлечения методов выходящих за рамки школьного курса. Решение не является длинным, зачастую занимает несколько строк. Но чтобы додуматься до него порой требуется много времени, усилий и своего рода озарение.

Можно ли научить ученика решать олимпиадные задачи? Я думаю, что нет. Учитель может лишь помочь ученику научиться работать с олимпиадной задачей, думать над ней. Ведь мы часто сталкиваемся со следующей ситуацией (даже в стандартных школьных и вузовских задачах): ученик прочитал задачу и все. Что делать дальше, он не знает. Как искать решение, если нет стандартного алгоритма или этот алгоритм не узнан, ученик не знает. Учитель может помочь ему научиться действовать в этой ситуации. Так как олимпиадная задача – это миниатюрное научное исследование, то учитель должен передать ученику методы и приемы ведения научного исследования. Для этого учитель должен сам владеть ими. Для того чтобы помочь учителю и создается это пособие. На примере решения конкретных олимпиадных задач мы посмотрим, каким образом можно нащупать ее решение. Мы выделим основные идеи решения и постараемся обобщить их, для того, чтобы попытаться применить их при решении других задач. Для удобства восприятия олимпиадные задачи разделены по темам, хотя оговоримся сразу, что это деление очень условно. В основном задачи взяты из Всероссийских олимпиад по математике (школьный и муниципальный уровни). Напомним, что задачи муниципального уровня также называются окружными.

0.1. Краткий перечень полезных приемов

Начнем с того, что пробежимся по теоремам школьного курса, которые помогут в решении олимпиадных задач и посмотрим какие из них в каких ситуациях могут помочь.

1. Доказать равенство отрезков.

   (a) Включить отрезки в треугольники и доказать равенство треугольников, используя признаки равенства треугольников.

   (b) Найти равнобедренный или равносторонний треугольник.
   (c) Воспользоваться движениями плоскости (параллельный перенос, осевая симметрия, поворот)

2. Доказать, что углы равны.
   (a) Включить эти углы в треугольники и доказать, что треугольники равны.
   (b) Доказать равенство углов по частям
   (c) Найти окружность, в которую они вписаны, и показать, что они опираются на одну дугу.

3. Найти величины углов, если даны только линейные величины.
   (a) Обычно это углы 45^0, 30^0, 60^0 или сводящиеся к ним. Они связаны с равносторонними треугольниками, равнобедренными прямоугольными треугольниками.
   (b) Очень полезная теорема: катет, лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы. И обратная к ней.

4. Доказать, что треугольник является равнобедренным
   (a) Подогнать под определение: найти две равных стороны.
   (b) Доказать, что два угла равны. Этот признак особенно удобен, когда в условии задачи все данные угловые.
   (c) Доказать, что биссектриса является медианой и т.п.

5. Доказать, что три точки лежат на одной прямой.
   (a) Показать, что эти точки лежат на сторонах и вершине развернутого угла
   (b) Показать, что одна точка переходит в другую при центральной симметрии с центром в третьей точке.

6. Доказать, что четыре точки лежат на одной окружности.
   (a) Показать, что две точки являются вершинами равных углов, опирающихся на отрезок с концами в двух оставшихся точках
   (b) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность тогда и только тогда, когда $XA \cdot XB = XC \cdot XD$, где X – точка пересечения прямых AB и CD. Это же утверждение верно в вырожденном случае, когда точки C и D совпадают, то есть XC является касательной к окружности.
   (c) Показать, что сумма противоположных углов $ABCD$ равна 180^0.

7. Доказать, что прямая является касательной к окружности.
   (a) Доказать, что прямая проходит через конец радиуса перпендикулярно к нему.
   (b) Пусть есть секущая AB (точки A и B – точки пересечения секущей и окружности) и прямая XC, где C лежит на окружности и X – точка пересечения прямых AB и XC. Если $XC^2 = XA \cdot XB$, то прямая XC будет касательной к окружности в точке C.
   (c) Пусть даны окружность, хорда AB, прямая a, проходящая через A и вписанный угол α, опирающийся на хорду AB. Если угол между a и хордой AB равен углу α, то прямая a является касательной.
8. Доказать, что четырехугольник является прямоугольником, ромбом, квадратом;
   (a) Показать, что это параллелограмм с равными диагоналями (признак прямоугольника), с перпендикулярными диагоналями (признак ромба), с равными перпендикулярными диагоналями (признак квадрата).
9. В стереометрии найти кратчайший путь на поверхности.
   (a) Перейти в развертку и построить отрезок, соединяющий две точки.
10. Теорема синусов и теорема косинусов – тяжелая артиллерия, но нужно стараться обходиться без них.

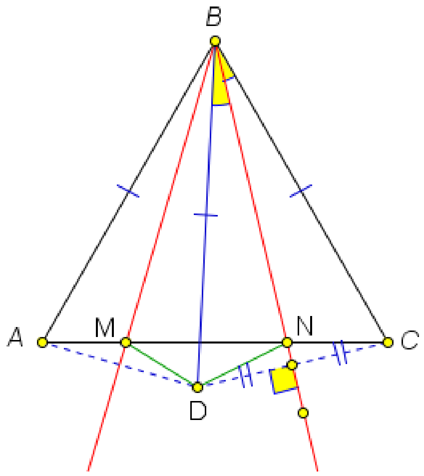
Занятие 1.

1.1. Треугольники

Сворачиваем треугольник.

Задача 1. (9 класс, окружная) Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Докажите, что при $\alpha = 30^0$ для любого положения прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник.

Решение. Рисуем равносторонний треугольник ABC.



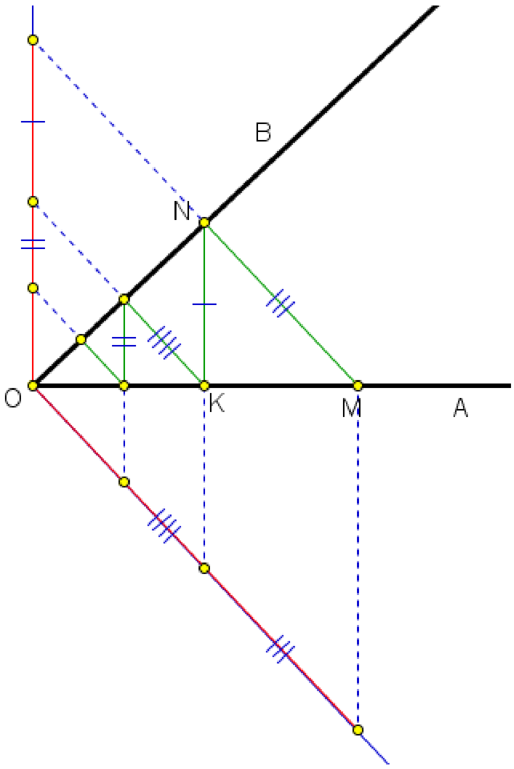
Берем произвольное положение угла α. Пусть его стороны пересекают сторону AC треугольника в точках M и N. Нам нужно из отрезков AM, MN и NC сложить треугольник. Оставим отрезок MN на месте, а перемещать будем два других отрезка, точнее заменять их на равные так, чтобы они не лежали на одной прямой. Применим осевую симметрию.

Прямая BN не перпендикулярна AC. Следовательно, если от нее отразить точку C, то получим точку D, не лежащую на AC и отрезок $DN = NC$. Начал вырисовываться треугольник. Интуиция подсказывает, что MD должно быть равно AM. Докажем это. В треугольнике DBC прямая BN содержит и медиану и высоту. Следовательно, он равнобедренный и BN содержит биссектрису. Тогда ABD тоже равнобедренный и вычисляем углы MBD и ABM. Они равны $30^0 - x$. Следовательно, прямая BM содержит биссектрису равнобедренного треугольника, следовательно, содержит его высоту и медиану. Итак, мы показали, что D симметрична A относительно BM. Таким образом, треугольник с нужными сторонами сложился. □

Распрямляем ломаные.

Задача 2. (9 класс, школьная) На стороне OA угла AOB взята точка M. Из нее проведен перпендикуляр MN стороне OB. Из точки N проведен перпендикуляр NK к стороне OA и так далее. Постройте отрезок, длина которого равна длине полученной бесконечной ломаной.

Решение. Рисуем картинку.



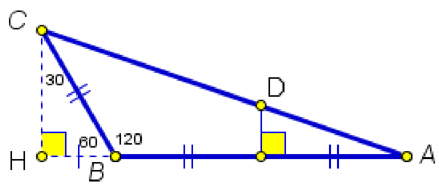
Наша задача „распрямить “ ломаную, то есть отложить ее звенья на какой-нибудь прямой. Не обязательно это должна быть одна прямая, может быть две, три или любое разумное число прямых. В нашей задаче у ломаной два типа звеньев: перпендикулярных одной стороне угла и перпендикулярных другой стороне угла. Поэтому логично предположить, что таких прямых будет две: на одной будем друг за другом откладывать одни звенья, на другой – другие. Где взять эти прямые? Мы видим, что ломаная уходит в вершину угла. Поэтому имеет смысл провести прямые через точку O.

А дальше методом проб и ошибок получаем, что прямые должны быть перпендикулярны сторонам угла. Тогда (см. картинку) мы получаем два отрезка. На рисунке изображен один из них и то не до конца. Завершите доказательство самостоятельно. □

Вспомним про Фалеса и про катет напротив угла в 30^0.

Задача 3. (8 класс, окружная, 2015) В треугольнике ABC угол B равен 120^0, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD : DC$.

Решение. Рисуем картинку и обязательно отметим палочками все равные отрезки, которые легко видны.



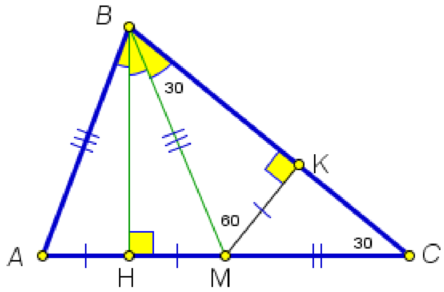
Нам нужно отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Конечно же здесь может сработать не только Фалес, но его нужно проверять первым. Раз работает Фалес, то нужен угол и две параллельные прямые.

Угол CAB, одна прямая DM уже есть (и проходит она через нужную нам точку D, это еще одно подтверждение, что здесь целесообразно подстраиваться под теорему Фалеса). Нужна еще одна прямая, параллельная DM и понятно, что она должна проходить через точку C. Проводим прямую CH, параллельную DM. Получаем прямоугольный треугольник CBH с углом 60^0. Тогда второй его угол равен 30^0. Катет, лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы. Тогда $\frac{HM}{MA} = \frac{3}{2}$. Тогда по теореме Фалеса такое же отношение у отрезков CD и DA. □

Катет напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы.

Задача 4. (7 класс, школьная) В треугольнике ABC медиана и высота, проведенные из угла A, делят его на три равные части. Не используя тригонометрических функций, найдите величины углов в треугольнике.

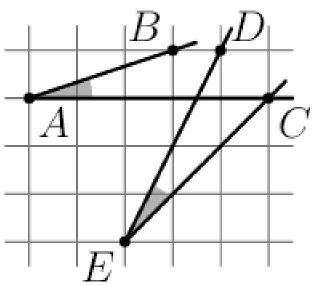
Решение. Рисуем картинку.



Первое, что мы сразу замечаем, что в треугольнике ABM отрезок BH является высотой и биссектрисой, следовательно, она является и медианой, а треугольник ABM является равнобедренным. Отмечаем на рисунке равные отрезки.

Итак, мы имеем равные углы и равные отрезки. Нигде нет конкретных значений величин углов. Откуда их взять. Вспоминаем следующие утверждения о конкретных значениях углов: в равностороннем треугольнике все углы по 60 градусов и следствие этого утверждения: если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то напротив этого катета лежит угол 30 градусов. У нас уже есть отрезок, в два раза отличающийся от другого отрезка, но они лежат на одной прямой, а нужен прямоугольный треугольник. Это соображение наталкивает нас на дополнительное построение: проводим перпендикуляр MK к стороне BC. Получаем прямоугольный треугольник. И прямо в глаза бросается равенство треугольников BHM и BKM. Откуда получаем, что угол C равен 30^0. Тогда угол KMC равен 60^0 и равные углы HMB и KMB тоже по 60^0. Тогда угол B равен 90^0 и угол A равен 60^0. Все, задача решена. □

Задача 5. (10 класс, школьная, 2018)



Сравните величины углов BAC и CED. Свой ответ обоснуйте.

Решение. Задача не новая. Она уже встречалась в олимпиадных задачах прошлых лет. Вспоминаем, что углы можно сравнивать еще и по значениям тригонометрических функций от них: синусы, косинусы, тангенсы. Для этого нужно увидеть прямоугольные треугольники. Дорисовываем по клеточкам данные углы до прямоугольных треугольников. Если обозначить длину стороны одной клеточки через a, а можно и взять за 1, то легко вычислить какую-либо из тригонометрических функций этих углов. □

1.2. Домашнее задание

1. Докажите, что для $\alpha < 30^0$ утверждение задачи1 не верно (приведите контрпример).

2. Вспоминаем соотношения между сторонами и углами в треугольнике: напротив меньшей стороны лежит меньший угол, и наоборот.

   Существует ли такой выпуклый пятиугольник (все углы меньше 180^0) $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC – тупые?

3. (9 класс, 2012) В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60^0. Докажите, что трапеция равнобедренная. Главное – увидеть правильный треугольник.

4. (8 класс, школьная, 2015)Просто закрученное условие. Нарисуйте все данные и то, что из них легко следует на картинке и задача решится.
   В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M – середина AD. Докажите, что угол BMC – тупой.

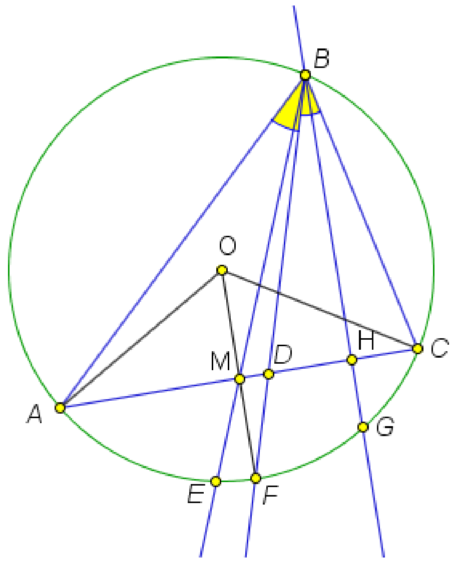
5. Задача на идею, разобранную на занятии: есть соотношение между линейными элементами, а нужно найти угол(9 класс, школьная, 2015)
   В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности. Найдите угол CAB.

Занятие 2.

2.1. Из истории олимпиад по математике.

Задача 1. (Московские математические олимпиады, 1935 год, 2-й тур) Построить треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

Решение. Проведем анализ задачи. Пусть дан треугольник ABC. Из его вершины B проведены медиана BM, высота BH и биссектриса BD. Обозначим точки пересечения их продолжений как показано на рисунке.



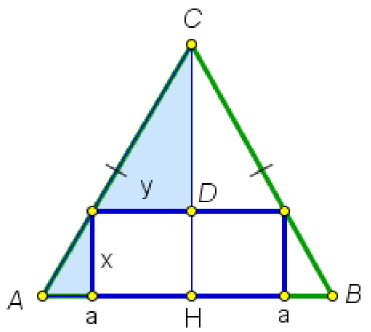
Центр окружности – точка O – является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC. Следовательно, OM перпендикулярно AC. Очень похоже, что луч OM пройдет через точку F – точку пересечения продолжения биссектрисы с окружностью. Проверим это.

Так как BD – биссектриса, углы ABF и FBC равны. Они вписаны в окружность, а значит, равны и соответствующие им центральные углы AOF и FOC. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AOC отрезок OM является медианой (и высотой), а значит и биссектрисой. Тогда получаем, что лучи OM и OF совпадают. Все, что нужно для построения получено.

Строим. Сначала есть три точки E, F, G. По ним мы можем построить окружность: центр окружности – это точка O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам EF и FG, радиус OE. Проводим через точку G прямую параллельную OF. В точке пересечения с окружностью будет точка B – одна из вершин искомого треугольника. Соединяем ее с двумя оставшимися точками – E и F. Точка пересечения OF и BE – это основание медианы. Через точку M проводим прямую, перпендикулярную BG. Получаем точки A и C при ее пересечении с окружностью. Треугольник ABC построен. □

Задача 2. (Московские математические олимпиады, 1936 год, 1-й тур) Построить такой равнобедренный треугольник, чтобы у любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании треугольника, периметр был величиной постоянной.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC и проведем высоту (она же медиана и биссектриса) к основанию этого треугольника.



Сначала попробуем решить задачу, не используя тригонометрию. Обозначим длину основания $2a$. Пусть высота CH будет равна ka. Будем искать число k, требуя, чтобы периметр треугольника был бы постоянным. Чтобы посчитать периметр, нужно сложить x и $2y$, а результат умножить на 2.

Значит, нам достаточно потребовать, чтобы сумма $x + 2y$ была бы постоянной. В этом выражении две переменные величины, а хотелось бы чтобы была одна. Тогда мы соберем перед ней коэффициент и потребуем, чтобы он был равен нулю. Тогда эта переменная величина исчезнет и сумма будет постоянной. А из полученного уравнения на коэффициент мы найдем значение k.

Посмотрим на закрашенные треугольники. Они подобны по двум углам. Тогда получаем отношение

$$\frac{x}{ka - x} = \frac{a - y}{y}.$$

Откуда получаем

$$y = \frac{a}{\frac{x}{ka-x} + 1} = a + \frac{x}{ka}.$$

Тогда вычисляем

$$x + 2y = x + 2\left(a - \frac{2x}{k}\right) = 2a + x\left(1 - \frac{2}{k}\right).$$

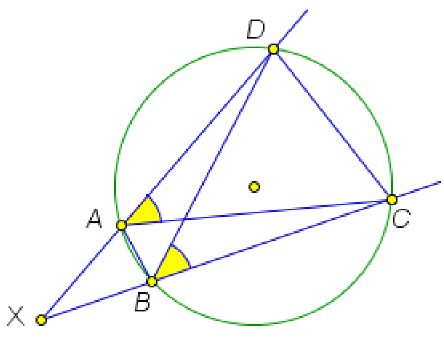
Требуем, чтобы $1 - \frac{2}{k} = 0$. Тогда $k = 2$. Итак, мы получаем равнобедренный треугольник с основанием $2a$, высотой $2a$. Периметр вписанного в него прямоугольника всегда будет равен $4a$.

Решите самостоятельно эту задачу, обозначив основание $2a$, угол при основании α и используя тригонометрические функции. $\square$

Задача 3. (вспоминаем теоремы элементарной геометрии) Докажем, что четырехугольник $ABCD$ (отличный от параллелограмма) вписан в окружность тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух равносильных условий:
1) $\angle CAD = \angle CBD$;
2) $XA \cdot XC = XB \cdot XD$, где X – точка пересечения прямых AC и BD.

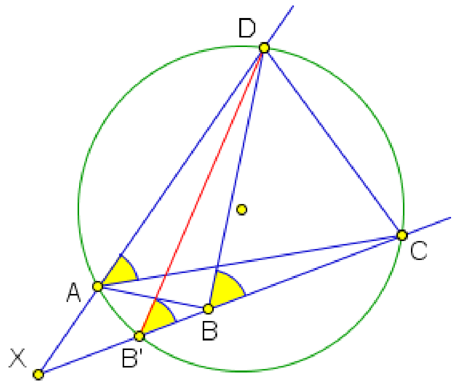
Второй критерий верен и в вырожденном случае, когда точки B и D совпадают, то есть прямая XB является касательной.

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.



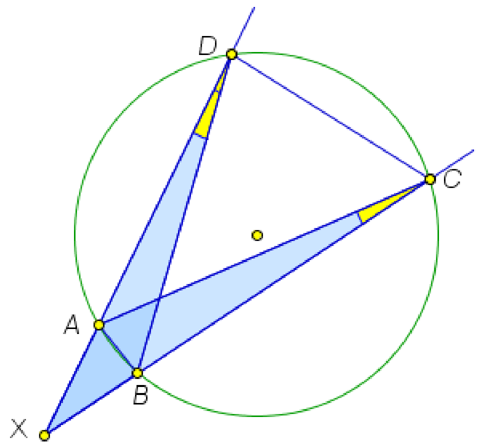
Тогда углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на одну дугу и, следовательно, равны.

Обратно, пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство углов $\angle CAD = \angle CBD$. Берем точки A, C, D и описываем вокруг них окружность.



Допустим, что точка B не попала на эту окружность. Тогда обозначим через B' точку пересечения прямой XD и построенной окружности. Получаем, что четырехугольник $AB'CD$ вписан в окружность, а значит, для него $\angle CAD = \angle CB'D$. Мы получаем, что для треугольника $DB'B$ внешний угол равен внутреннему, не смежному с ним. (Посмотрите самостоятельно, что будет, если B' лежит на отрезке BC). Противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника. Значит, B лежит на построенной окружности.

Докажем второй критерий. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

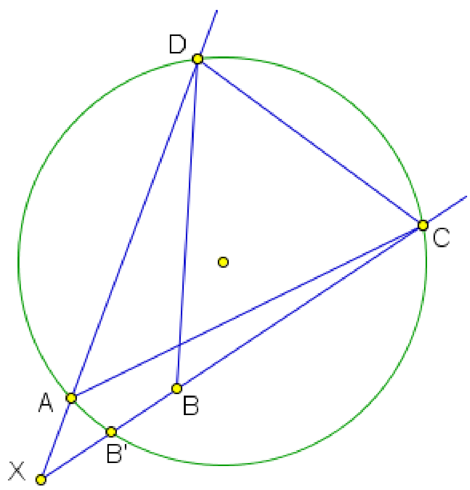


Тогда углы XDB и ACX равны, так как опираются на одну и ту же дугу. Тогда треугольники XDB и ACX подобны по двум углам. Откуда получаем

$$\frac{AX}{XB} = \frac{XC}{XD},$$

что равносильно $AX \cdot XD = BX \cdot XC$.

Обратно, пусть выполняется равенство $AX \cdot XD = BX \cdot XC$.

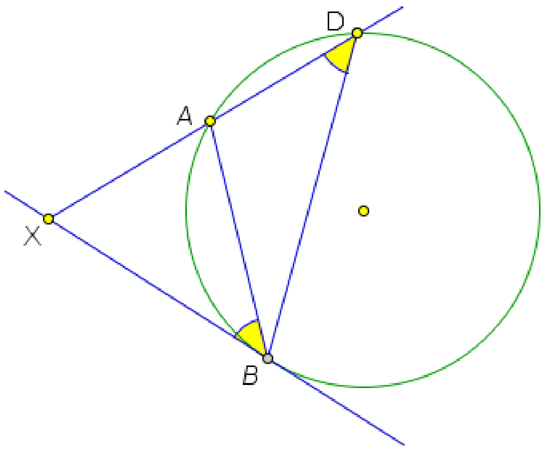


Поступим аналогично первому случаю. Вокруг точек A, C, D описываем окружность и предполагаем, что точка B не попала на нее. Обозначаем точку пересечения B' и получаем

$$AX \cdot XD = B'X \cdot XC.$$

Делим это равенство на то, которое дано, и получаем, что $XB = XB'$. Так как точка B лежит с точкой B' на одном луче с началом в X, то B совпадает с B'. Противоречие. Значит, точка B лежит на окружности.

Осталось проверить только предельный случай с касательной. Пусть XB – касательная к окружности, XA – секущая, вторая точка пересечения B.



Нужно доказать, что $XB^2 = XA \cdot XD$. По свойству угла между хордой и касательной получаем, что он равен половине дуги AB. Также половине дуги AB равен вписанный угол ADB. Значит, они равны. Опять получаем два подобных треугольника XDB и XBA (угол X у них общий). Тогда из подобия получаем, что

$$\frac{XB}{XD} = \frac{XA}{XB}.$$

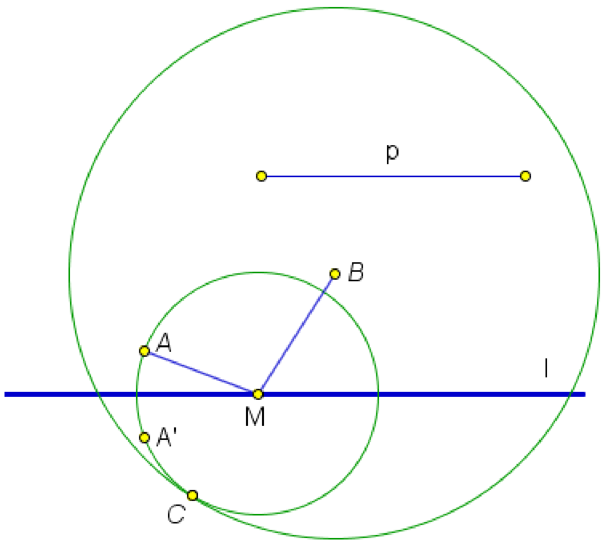
Раскрывая пропорцию, получаем нужное равенство.

Обратно, пусть даны четыре точки A, D, B, X, не лежащие на одной прямой и такие, что выполняется равенство $XB^2 = XA \cdot XD$. Нам нужно показать, что существует окружность, проходящая через точки A, D, B и XB является касательной к ней (в точке B). Проводим через точки A, B, D окружность. Допустим, что она пересекает прямую XB еще в одной точке. Тогда по доказанному выше получаем, что $XA \cdot XD = XB' \cdot XB$. Сравнивая это равенство с условием, получаем, что $XB' = XB$. Тогда $B = B'$. □

Задача 4. (Московские математические олимпиады, 1937 год, 1-й тур) Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку M, чтобы сумма $AM + BM$ равнялась заданному отрезку.

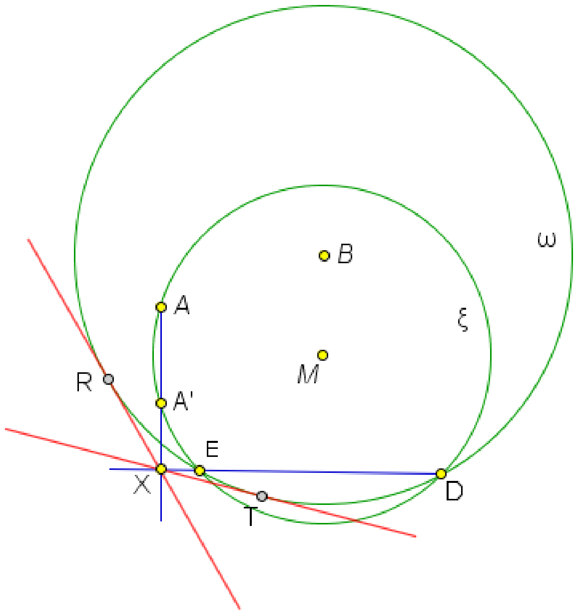
Замечание 2.1. Посмотрим на условие этой задачи с позиций выпускника вуза. Точка M лежит на эллипсе (вспомните его определение). Другими словами, решив эту задачу мы предъявим способ построения общей точки прямой и эллипса с помощью циркуля и линейки. Заметим, что весь эллипс построить циркулем и линейкой нельзя, хотя можно построить любое конечное количество его точек.

Решение. Как обычно начнем решение задачи на построение с анализа. Рисуем прямую ℓ, две точки A, B по одну сторону от нее и искомую точку M.



Нам нужно будет построить точку M. Можно попытаться применить метод пересечений множеств. Одно множество, которому принадлежит M уже есть – это прямая, а второе множество – это эллипс. Его циркулем и линейкой все не проведешь. Что можно провести, связанное с задачей? Первой на мысль приходит окружность радиуса p (Как-то должен сработать отрезок) с центром в одной из данных точек. Дальше должна сработать вторая точка. Тоже наверно надо провести окружность, не забывая, что нас очень интересует точка M. Значит окружность с центром либо в A, либо в M и радиуса MA. (другого просто не осталось). Если провести окружность с центром в точке A, то она по отношению к первой окружности никоим хорошим образом не располагается. Ну пересекает и пересекает в каких-то неизвестных точках. А вот если нарисовать окружность с центром в точке M, то сработает критерий касания окружностей внутренним образом (радиус большой равен сумме расстояний между центрами плюс радиус маленькой окружности). В результате получаются две касающиеся в некоторой точке C окружности. Более того, мы можем найти еще одну точку, которая принадлежит маленькой окружности – это точка A', симметричная A относительно прямой ℓ. В результате получаем, что нам нужно построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности. Это частный случай классической задачи Аполлония. Она решается с помощью метода инверсии. Но инверсию в школе мы применять не можем. Поэтому попробуем решить задачу без нее.

Сразу построить точку C мы не можем. Поэтому возьмем какую-нибудь точку D на окружности с центром в точке B радиуса p (большая окружность, обозначим ее ω).



Проведем через A, A' и D окружность. Она пересечет окружность ω еще в одной точке E. Обозначим через X точку пересечения прямых AA' и ED. Подвигайте точку D в модели1 (см. сайт). Когда точка D двигается к точке E, окружность ξ стремится к нужной нам окружности, а точка X остается на месте!

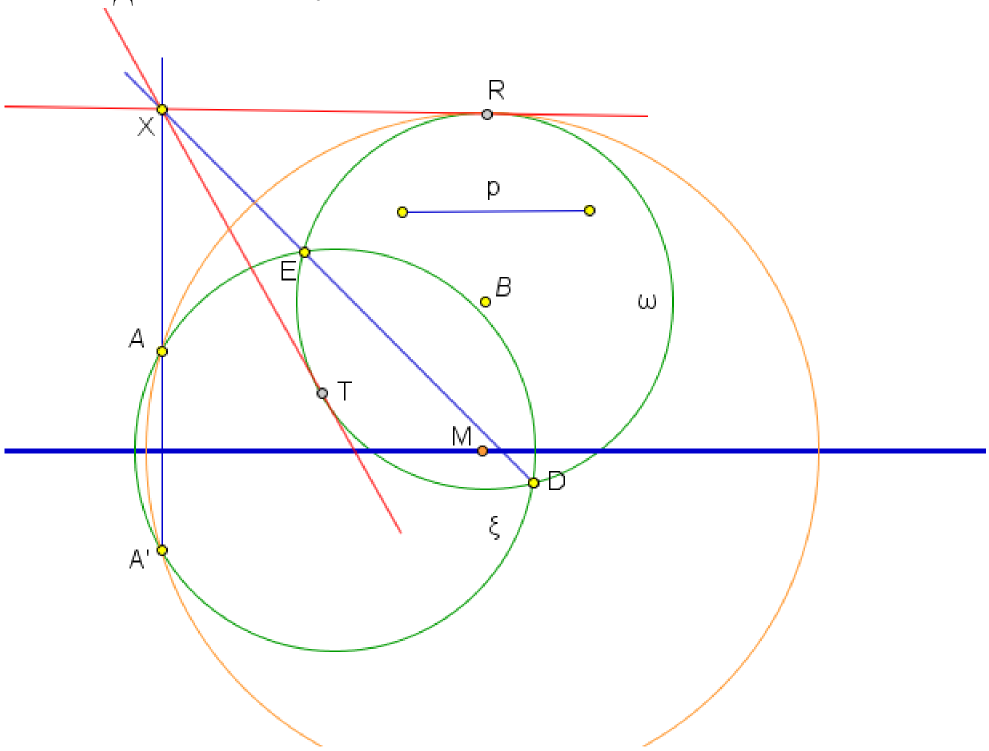
Значит, точки T и R касания касательных, проведенных из точки X к окружности ω, являются нужными нам точками. Но это только догадка. Ее нужно доказать. Посмотрим, как здесь применяется результат предыдущей задачи.

Имеем, $XT^2 = XE \cdot XD$ (окружность ω. Кроме того, $XE \cdot XD = XA' \cdot XA$ (окружность ξ). Тогда $XT^2 = XA' \cdot XA$ и по предыдущей задаче XT является касательной к окружности, проходящей через точки A, A', T, причем XT – касательная к ней в точке T. Это искомая нами окружность. Так как XT – касательная к ω, значит, мы построили окружность, проходящую через точки A и A' и касающуюся окружности ω.

Все описанные построения легко провести. Тогда останется только построить центр найденной окружности. Это будет точка M. □

Замечание 2.2. Предыдущую задачу мы переформулировали так: построить точку пересечения прямой и эллипса. Сразу же возникает идея поставить такую задачу: построить точку пересечения прямой и гиперболы. Она будет звучать так: по одну сторону от прямой даны точки A и B. Построить на прямой точку M так, чтобы разность расстояний от нее до точек A и B была равна длине данного отрезка.

Будем рассуждать как в предыдущей задаче, но теперь у нас будет равенство $AM - BM = p$. Опять две окружности. Подбираем центры и радиусы. Один центр в M, а другой в B. Радиусы по-прежнему AM и p: $BM = AM - p$. Но теперь из-за того, что p меньше AM мы получим, что окружность радиуса p лежит внутри окружности радиуса AM (которую нам и нужно построить). Проводим построения как и выше: берем на окружности ω (центр B, радиус p) точку D и проводим окружность ξ через точки A, A' и D. Пересекаем AA' и DE, получаем точку X. Из этой точки проводим касательные к ω. Нам подойдет только одна точка – точка R. Действительно, нам нужно провести окружность через точки A, A', и точку касания так, чтобы построенная окружность и окружность ω касались внутренним образом. Это возможно только для точки R.



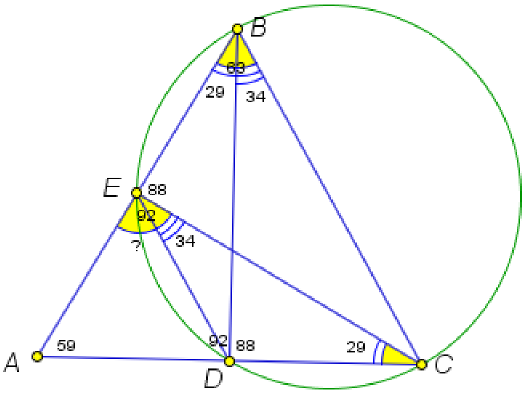
Такая ситуация (отличная от случая эллипса) хорошо объяснима: из-за отсутствия модуля на разности $AM - BM$ мы строим точку пересечения прямой только с одной веткой гиперболы. Точка пересечения со второй веткой получится, если строить окружность радиуса p в точке A.

Итак, получаем искомую точку M как центр окружности, проходящей через A, A' и R.

Еще одна задача на доказанные выше критерии принадлежности точек одной окружности.

Задача 5. («Покори Воробьевы горы!», 2014, 8-9 классы) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC. Но, поскольку он рисовал неточно, то получился треугольник с углами $\angle A = 59^0$, $\angle B = 63^0$. Потом Петя провел высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^0$. Найдите градусную меру угла AED.

Решение. Рисуем треугольник ABC.



Сразу бросаются в глаза два равных угла, опирающиеся на один отрезок BC. Следовательно, точки B, D, C, E лежат на одной окружности. Используя ее, по максимуму достаем равные углы: $\angle EBD = \angle ECD$. Из треугольника AEC находим угол

$$\angle ECA = 180^0 - 59^0 - 92^0 = 29^0.$$

Еще пара равных углов $\angle DEC = \angle DBC = 34^0$. Тогда искомый угол будет

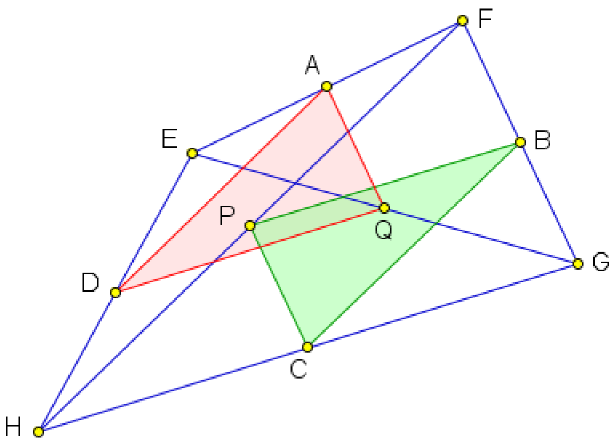
$$\angle AED = 92 - 34 = 58^0.$$

□

Задача 6. (Московские математические олимпиады, 1941 год, 1-й тур, 7—–8 классы) Дан четырехугольник; A, B, C, D – последовательные середины его сторон, P, Q – середины диагоналей. Докажите, что треугольник BCP равен треугольнику ADQ.

Решение. Совсем простая задача. Основная идея: если что-то сказано про середины сторон какого-либо четырехугольника, то ищите средние линии треугольников.

Рисуем четырехугольник.



Рассмотрим треугольники HEF и GGF. В них отрезки AD и BC являются средними линиями, параллельными стороне HF. Следовательно, они равны между собой. С остальными двумя парами сторон все аналогично. Запишите самостоятельно, в каких треугольниках они будут средними линиями.

Тогда треугольники BCP и ADQ равны по третьему признаку. □

2.2. Домашнее задание.

1. (Московские математические олимпиады, 1935 год, 1-й тур) Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

Сейчас эта задача присутствует в нашем основном курсе геометрии бакалавриата в разделе „Применение преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии“.

2. Вспомним задачу: по одну сторону прямой даны две точки A и B. Найдите на прямой точку M, такую, что сумма $AM+BM$ была бы наименьшей (задача Герона). Ее решение хорошо известно. Решите такую задачу: по одну сторону прямой даны две точки A и B. Найдите на прямой точку M, такую, что разность $MA - MB$ была бы наибольшей.

3. (еще одна задача из этой же оперы уровня школьной олимпиады) По одну сторону прямой даны две точки A и B. На этой прямой расположите отрезок XY так, чтобы длина ломаной $AXYB$ была бы наименьшей.

4. (задача уровня школьной олимпиады, на использование свойства касательной: квадрат касательной равен произведению отрезков секущей) Постройте окружность, которая касается прямой и проходит через две данные точки A и B.

5. (Московские математические олимпиады, 1941 год, 1-й тур, 7 – 8 класс) Постройте треугольник, если известны его высота и медиана, проведенные из одной вершины, и радиус описанной около треугольника окружности.

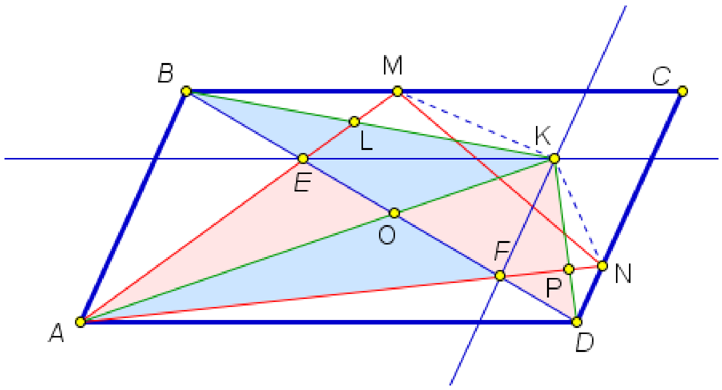
Занятие 3.

3.1. Треугольники (продолжение)

Та же самая идея с перекладываниями, но теперь уже площадей.

Задача 1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \| AD$, $FK \| AB$, лежит на отрезке MN.

Решение. Рисуем картинку.

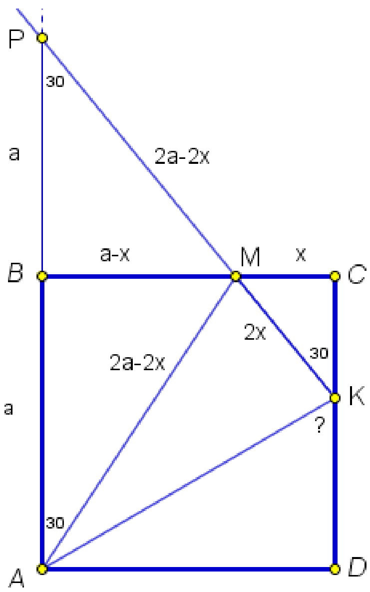


Соединим точку K с точками A, B и D и обозначим через O, L, P точки пересечения KA и BD, KB и AM, KD и AN соответственно.

Диагональ BD разрезала треугольник AMN на две части. Их нам и нужно сравнивать. Заменим треугольник AFE на равную ему по площади фигуру, находящуюся по другую сторону диагонали BD. Площади легче всего сравнивать у треугольников. Если у треугольников равные стороны и равные высоты к ним, то они имеют равные площади. И еще одна идея: если треугольники наложены один на другой, то выбрасывая из них общую часть мы получаем фигуры равной площади. Начинаем заменять треугольник AEF по частям. Заметим, что FK параллельно AB. Значит, треугольники с общей стороной AB и высотой равной расстоянию между этими параллельными прямыми будут иметь равные площади. Это треугольники AFB и AKB. Треугольник AOB в них общий. Тогда, выкинув его, мы получим $S_{AFO} = S_{OBK}$. Аналогично рассуждая с другой парой параллельных прямых, получим $S_{AOE} = S_{DOK}$. Итак, треугольник AFE мы заменили на треугольник DKB, равный ему по площади. Перенесем еще хвостики DPF и BEL поближе к K, сохраняя площади. Идея та же самая: меняем треугольник на треугольник равной площади, используя общую сторону и равные высоты. Тогда треугольник DFP по площади равен треугольнику NPK, а треугольник BEL равен по площади треугольнику LMK. Итак, треугольник DKB мы заменили на равную по площади фигуру $FNKME$. Эта фигура включает в себя полностью четырехугольник $FNME$. И значит равна ему по площади тогда и только тогда, когда $K \in MN$. □

Задача 2. (8 класс, окружная, 2014) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^0$. Найдите угол AKD.

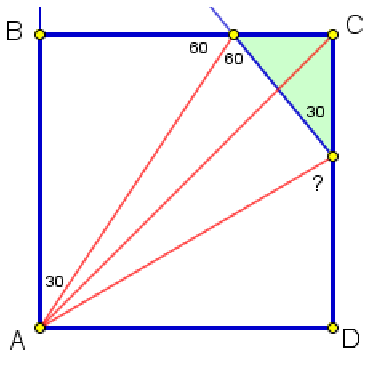
Решение. Рисуем картинку.



Сразу вписываем в картинку все углы, которые можно легко вычислить. Посмотрим сначала более длинное решение.

Если находить угол AKD, то он присутствует только в треугольнике AKD, еще один угол которого мы не знаем. А вся информация задачи находится выше прямой AK. Значит, нам уходить выше. И значит искать нужно угол AKM. Треугольник AKM тоже не хороший, вряд ли от него можно ожидать свойств равносторонности или даже равнобедренности. Поэтому достраиваем угол AKM до еще одного треугольника: продолжаем KM. Она пересечет AB в некоторой точке P. В этом треугольнике сразу отмечаем, что угол P равен 30^0.

Что ожидать от двух остальных углов? Либо 90^0 и 60^0 (выходим на прямоугольный треугольник $90, 60, 30$), либо эти углы равны (треугольник равнобедренный). Попробуем проверить, что треугольник AKP равнобедренный. Попробуем выразить длины его сторон. Для этого обозначим сторону квадрата a, а отрезок $MC = x$. Идем по треугольникам с углами в 30^0 и пишем длины сторон. Видим, что треугольник AMP оказался равнобедренным, а значит его высота MB будет и медианой, следовательно, $BP = a$. В результате $AP = KP = 2a$. Действительно, треугольник APK оказался равнобедренным, угол K в нем равен 75^0 и искомый угол равен 75^0.

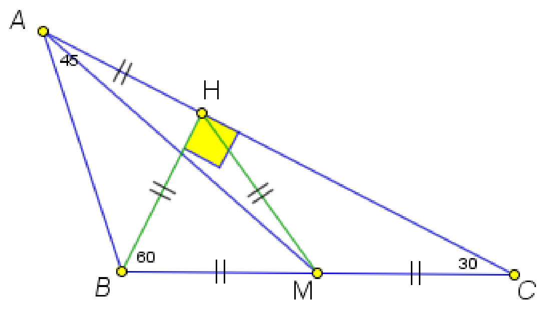


P.S. Давайте посмотрим на ответ и увидим еще одно, очень простое решение. KA оказался биссектрисой угла MKD. MA – биссектриса BMK. Это внешние углы треугольника MKC. Осталось увидеть, что AC – биссектриса внутреннего угла C этого треугольника. Значит, точка A – центр вневписанной окружности треугольника MCK. Получаем такое решение. Проводим в квадрате диагональ AC.

Тогда точка A является точкой пересечения биссектрис внутреннего угла C треугольника MCK и внешнего угла M этого же треугольника. То есть точка A – центр вневписанной окружности для этого треугольника. Следовательно, прямая, проходящая через третью вершину этого треугольника и точку A также будет биссектрисой внешнего угла K этого треугольника. Опять получаем те же 75^0. □

Задача 3. (школьный этап, 8 класс, 2018) В треугольнике ABC провели медиану AM. Найдите угол AMC, если углы BAC и BCA равны 45^0 и 30^0 соответственно.

Решение. Задача из набора даны два угла (и еще что-то линейное), найти третий угол, который просто так с данными двумя углами не связывается. Первое, что здесь стоит попробовать – это дополнительное построение, которое выводит на «хороший» треугольник, а именно, равносторонний, равнобедренный с известным углом, прямоугольный равнобедренный, прямоугольный с углом 30^0.



У нас в задаче есть два равный отрезка (от медианы) и угол в 30^0. Поэтому имеет смысл попробовать построить прямоугольный треугольник с углом в 30^0. Для этого нужно из вершины B опустить высоту. Тогда угол HBC будет равен 60^0 и BH будет половиной BC. Получаем, что HBM – равносторонний.

Кроме того, возникает еще один «хороший» треугольник BHA. У него угол ABH будет 45^0, а значит он будет равнобедренным. Тогда треугольник AHM – равнобедренный, его угол $AHM = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Тогда угол

$$\angle HMA = \frac{180^0 - 150^0}{2} = 15^0.$$

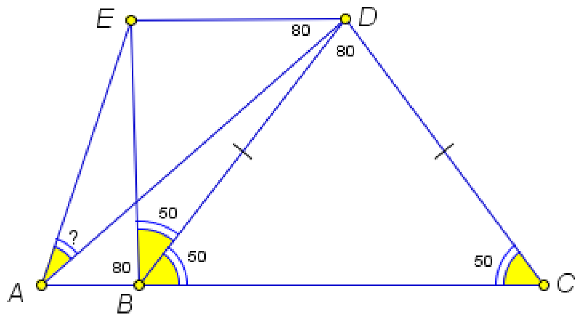
Осталось только сложить нужный угол по кускам:

$$\angle AMC = \angle AMH + \angle HMC = 120^0 + 15^0 = 135^0.$$

□

Задача 4. (олимпиада «Высшая проба», 2018, 7 – 8 классы, олимпиада проводится Высшей школой экономики) Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой, что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так, что треугольник BCD – равнобедренный с основанием BC. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80^0. Найдите угол EAD.

Решение. Рисуем картинку и видим углы, опирающиеся на один и тот же отрезок. С этой ситуацией мы уже сталкивались: здесь не обойдется без окружности, проходящей через четыре точки.

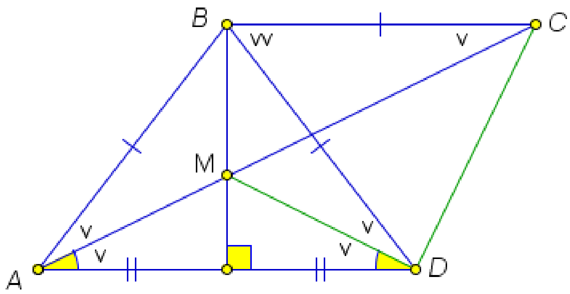


Это точки A, B, D, E. Тогда искомый угол равен углу EBD. А он легко вычисляется, если учесть, что углы при основании равнобедренного треугольника BCD равны по 50^0 каждый.

□

Задача 5. (Московская устная олимпиада по геометрии проводится в рамках Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И.Ф. Шарыгина, 2012, 8 – 9 классы) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

Решение. Рисуем картинку и у нас получается много равнобедренных треугольников, как из определения (две стороны равны), так и по признаку (медиана совпадает с высотой), а равнобедренные треугольники выдают равные углы. Обозначим их v. Посмотрите на рисунок и воспроизведите появление всех одиночных v с обоснованием.



А теперь посмотрим на двойную vv. Этот значок получается благодаря параллельным прямым AD и BC. Заметим, что этот угол действительно равен двум углам v.
Начинаем вычислять угол MDC. Он состоит из двух кусков. Один – это v, а второй найдем из равнобедренного треугольника DBC. Он равен

$$\angle BDC = \frac{180^0 - vv}{2} = 90^0 - v.$$

Складываем части угла и получаем $\angle MDC = 90^0$. □

3.2. Домашнее задание

1. (9 класс, школьная, 2016)
   В треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A, перпендикулярна биссектрисе угла B, а медиана, выходящая из вершины B, перпендикулярна биссектрисе угла A. Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника ABC.

2. (8 класс,школьная)
   В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC = 120^0$, $\angle DAB = 60^0$.

3. (8 класс, окружная, 2016) Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC – точку A_1, а на стороне AC – точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB, MC.

4. (9 класс, школьная, 2014)
   Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60^0, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

   Сплошные равнобедренные треугольники.

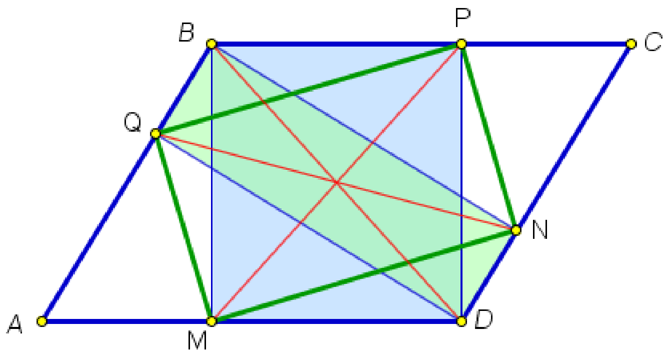
5. (8 класс, окружная, 2018) В трапеции $ABCD$ точка M – середина боковой стороны CD. Лучи BD и BM делят угол ABC на три равные части. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Найдите углы трапеции.

Занятие 4.

4.1. параллелограммы+параллельность+прямоугольники

Задача 1. (8 класс, окружная, 2014) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D – высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

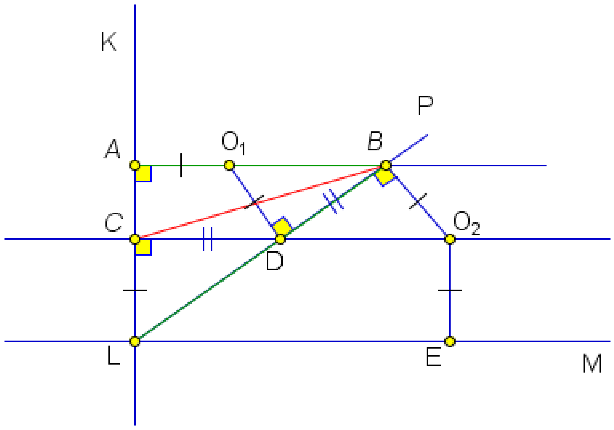
Решение. Рисуем картинку.



Заметим сначала, что $MNPQ$ является параллелограммом, так как его противоположные стороны попарно параллельны. Чтобы утверждать, что он является прямоугольником, нужно либо отловить один прямой угол, либо убедиться, что его диагонали равны. Диагонали $MNPQ$ по одной являются также диагоналями прямоугольников $MBPD$ и $QBND$. У этих прямоугольников еще одна диагональ общая. Она то и позволит утверждать, что $MP = QN$. Следовательно, $MNPQ$ прямоугольник. □

Задача 2. (9класс, окружная) Внутри прямого угла KLM взята точка P. Окружность Ω_1 с центром O_1 касается сторон LK и LP угла KLP в точках A и D соответственно, а окружность Ω_2 такого же радиуса с центром O_2 касается сторон угла MLP, причем стороны LP – в точке B. Пусть точки A, O_1 и B лежат на одной прямой и C – точка пересечения прямых O_2D и KL. Докажите, что BC – биссектриса угла ABD.

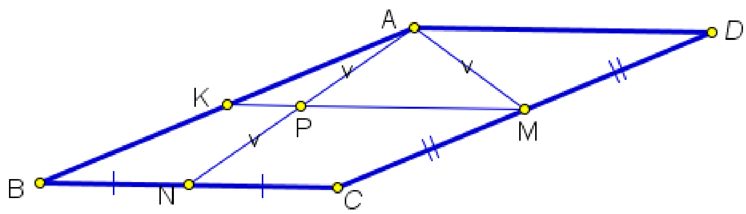
Решение. Рисуем картинку. Окружности изображать не будем.



Постараемся достать равенство углов из треугольников. Для этого на рисунке отметим по максимуму равные отрезки и углы. Первое, что мы видим, O_1D и O_2B параллельны (так как перпендикулярны одной прямой) и равны по длине, следовательно, O_1BO_2D – параллелограмм. Значит, O_2D перпендикулярно KL и LCO_2E – прямоугольник, следовательно, $LC = EO_2$. Появились два равных прямоугольных треугольника LCD и O_2BD (по катету и двум углам). Треугольник CDB тогда равнобедренный. Отмечаем равные углы. Ну и наконец, $\angle ABC = \angle BCD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. □

Задача 3. (8 класс, окружная, 2015) Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

Решение. Интуиция подсказывает, что этот угол тупой. Поэтому картинку рисуем соответствующую.

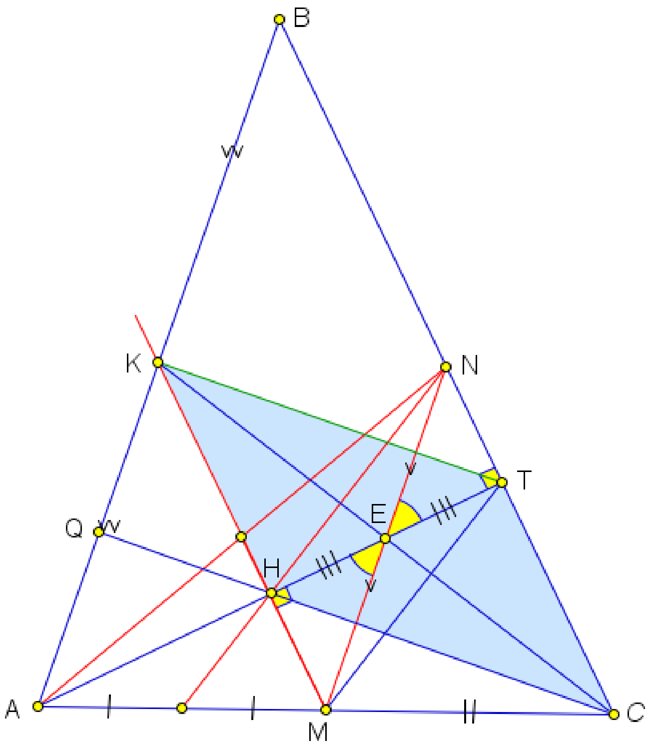


Нужно каким-то образом раскрутить то, что $AN = 2AM$. Хотелось бы поделить AN пополам. Сделаем это так. Через точку M проведем прямую, параллельную BC. Тогда K будет серединой AB и по теореме Фалеса P будет серединой AN. Если бы мы сначала поделили AN пополам, а затем провели MP, то пришлось бы доказывать параллельность и попадание в середину AB, что сложнее. В результате мы получили равнобедренный треугольник MAP. Угол APM в этом треугольнике острый (углы при основании равнобедренного треугольника). Тогда из параллельности прямых AD и MK получаем, что угол DAP тупой. Тогда угол DAB, который больше угла DAP тоже тупой. □

Сплошные параллелограммы. Красивая задача.

Задача 4. (10 класс, окружная, 2015) В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Решение. Рисуем картинку.



Для построения точки H – точки пересечения высот треугольника ABC возьмем обязательно высоту AT, так как она же будет медианой в треугольнике AMN. Второй высотой возьмем высоту CQ, так как она не затрагивает угол B (который нам нужно найти). Обозначим через E точку пересечения AT и MN. Она будет серединой MN, так как AE – медиана треугольника AMN.

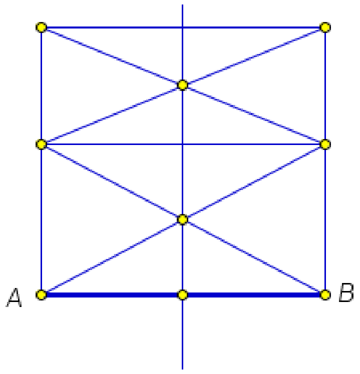
Нам нужно найти угол B в треугольнике ABC. Ни одной величины угла в задаче нет. Значит, он должен быть либо 60^0 (находится в каком-нибудь равностороннем треугольнике), либо 30^0 (в прямоугольном треугольнике, второй угол которого 60^0 или катет лежащий напротив него половина гипотенузы), либо 45^0 (или 135^0, связан с равносторонним прямоугольным треугольником). Сразу обращают на себя внимание два прямоугольных треугольника CQB и ATB. В одном отрезок QN является медианой, а в другом – отрезок TK. Если доказать для одного из них, что он к тому же и высота, то треугольник окажется равнобедренным прямоугольным и мы получим угол. Возьмем треугольник ATB. Чтобы доказать, что TK высота, нужно доказать, что TK перпендикулярно AB. Для этого достаточно показать, что TK параллельно CQ.

Если мы сейчас докажем, что $HCTK$ – параллелограмм, то все доказано. Вспоминаем признаки параллелограмма: две стороны параллельны и равны или диагонали точкой пересечения делятся пополам. Попробуем второй, так как одна диагональ HT точкой E делится пополам (Это видно, например, из равенства прямоугольных треугольников NTE и MHE). Вторая диагональ KC проходит через точку E, так как CK – медиана треугольника ABC, а E – середина средней линии MN этого треугольника и делится этой точкой пополам (Фалес).

Итак, мы получаем, что в треугольнике ATB отрезок TK является высотой и медианой, следовательно, этот треугольник равнобедренный. Так как он еще и прямоугольный, получаем, что угол B равен 45^0. □

Задача 5. (из истории математических олимпиад: Московская математическая олимпиада, 1953, 1-й тур, 7 класс). Разделите отрезок пополам с помощью угольника (с помощью угольника можно проводить прямые и восстанавливать перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя).

Доказательство. Опускать перпендикуляры мы не можем, значит на середина отрезка должна получаться как пересечение отрезка и прямой, проведенной через две точки.



Строить мы можем только прямоугольники. В прямоугольнике с серединой отрезка связана точка пересечения диагоналей. Значит, нужны прямоугольники, причем два. Строить их логично на данном отрезке. Тогда соединяя точки пересечения их диагоналей, мы получим середину данного отрезка AB.

□

4.2. Домашнее задание

1. Вспомним задачу из курса элементарной геометрии. Пусть дан произвольный треугольник ABC и окружность с центром O, вписанная в ABC. Докажите, что $\angle BOC = 90^0 + \frac{\angle A}{2}$. А также: пусть дан треугольник ABC. Около него описана окружность радиуса R. Докажите, что $BC = 2R\sin\angle BAC$.

2. (московская математическая олимпиада, 1953, 1-й тур, 7 класс) Поможет достроенный параллелограмм.

   Докажите, что в трапеции сумма углов при большем основании меньше, чем при меньшем.

3. (красивая задача на вписанную окружность, 9 класс, окружная, 2016) В треугольник ABC вписана окружность с центром O. а стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C – точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что угол BOP равен углу COQ.

4. Если увидеть описанную окружность, то задача легко решится. Ну и конечно же нужно помнить признаки параллельности прямых.
   (9 класс, окружная, 2014) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

5. (9 класс, окружная, 2015) Надо использовать два числовых данных. Попробуйте встроить их по одному каждый в свою конструкцию.
Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM – в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

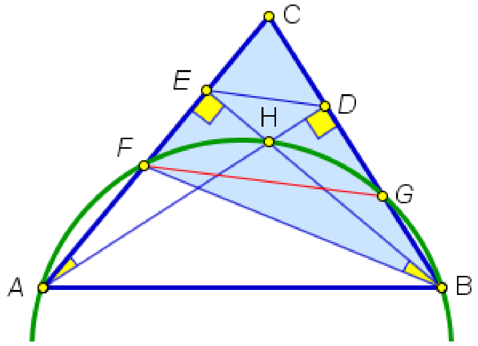
Занятие 5.

5.1. добавляем окружность и вписанные углы

Вписанные углы в сочетании с равнобедренными треугольниками.

Задача 1. (9 класс, окружная, 2014) Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

Решение. Рисуем картинку.



У нас всего одно числовое данное. Значит, длина FG будет либо равна ED, либо кратна ему. На равенство не похоже. Должна быть больше (судя по рисунку), во сколько-то раз. Что мы знаем про такие соотношения? Есть средняя линия треугольника, которая меньше основания в два раза. Попробуем показать, что ED является средней линией в треугольнике FCG.

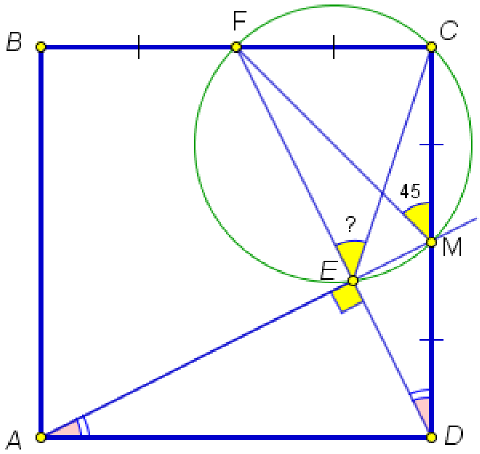
Нам нужно, чтобы E была серединой FC. Посмотрим на треугольник FCB. В нем есть высота BE. Попробуем показать, что она еще и биссектриса (так как у нас еще есть описанная окружность, а окружность – это углы).

На FH опираются два угла: FAH и HBF. Значит, они равны. Кроме того, из прямоугольных треугольников ADC и BEC с общим острым углом C получаем, что равны углы CAD и CBE. Тогда углы CBE и FBE равны, то есть BE – биссектриса. Тогда треугольник EBC равнобедренный и BE – медиана. Аналогично AD – медиана для треугольника CAG. Итак, ED – средняя линия в треугольнике FCG и следовательно $FG = 10$ см. □

Все те же равные и равнобедренные треугольники и еще нужно увидеть окружность, описанную около четырехугольника.

Задача 2. (10 класс, окружная, 2014) Точка F – середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Решение. Рисуем картинку.

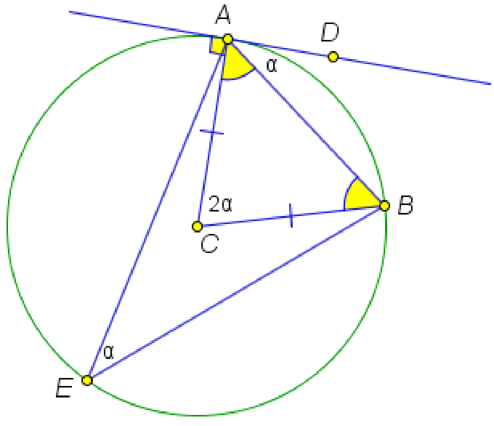


Сразу же напрашивается дополнительное построение: продолжить AE до пересечения со стороной CD. Обозначим полученную точку M и посмотрим, куда она попадет. Очень треугольник ADM похож на треугольник DCF. Проверим их на равенство.

Если угол FDC обозначить α, то угол EDA будет $90^0-\alpha$, а угол DAM будет α. Действительно, получаем, что треугольники ADM и ADM равны по катету и острому углу. Следовательно, два других их катета тоже равны и точка M попадает в середину стороны CD. Обратим внимание на правый верхний угол картинки. Там есть искомый угол и очень хороший угол $FMC = 45^0$ (FCM – прямоугольный равнобедренный). Очень хочется, чтобы они были равны. Треугольники на равные не похожи. Значит, опять описанная окружность вокруг четырехугольника $EMCF$. Она существует, так как два противоположных угла у этого четырехугольника по 90^0 (сумма 180^0). Теперь углы опираются на одну дугу, значит, они равны. □

Давайте вспомним о касательных к окружности. По определению касательная – это прямая, которая пересекает окружность в одной (точнее, двух совпавших) точках. Определение не удобное для работы. Поэтому сразу же доказывается признак касательной: прямая, проходящая через конец радиуса, перпендикулярно к нему.

Есть еще один признак. Он менее известен. Зато известна теорема, обратная ему: свойство угла между касательной и хордой. Докажем сначала это свойство, а затем сообразим, как доказать признак.



Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине центрального угла, опирающегося на эту хорду. *Доказательство.* Пусть дана окружность, касательная AD и хорда AB. Обозначим центральный угол 2α.

Треугольник ACB равнобедренный, следовательно углы при его основании равны по $90^0 - \alpha$. Тогда угол $DAB = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$. □

Признак формулируется так: если прямая, проходящая через конец радиуса, образует с хордой, проходящей через эту же точку, угол, равный половине центрального угла, опирающегося на эту хорду, то данная прямая является касательной к окружности.

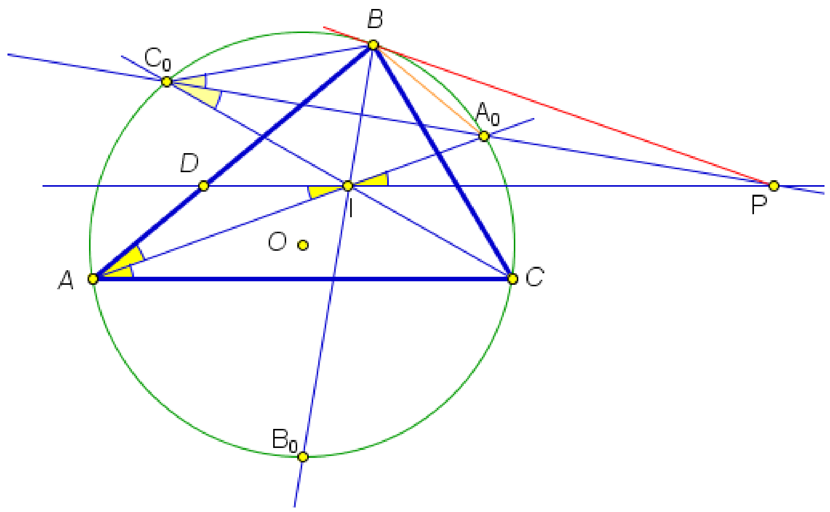
Доказательство проходит уже знакомым нам способом: предполагаем, что данная прямая не касательная, но касательная должна быть. Проводим ее. Для нее выполняется свойство, а значит будет угол. Тогда в одну полуплоскость отложены два равных угла. Проведите это доказательство самостоятельно.

Так как вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же хорду, мы можем сформулировать и свойство и признак по-другому. Сделайте это самостоятельно.

Посмотрим, как сработает этот признак в задаче.

Задача 3. (9 класс, окружная, 2012) Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Рисуем картинку.



Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Он уже есть у нас. Обозначим его через I и дорисуем еще одну биссектрису. Точку пересечения с описанной окружностью обозначим B_0.

Нам нужно доказать, что BP – касательная.

Здесь можно было бы попытаться применить признак касательной по перпендикулярности радиусу, но радиус OB как-то совсем не связывается с биссектрисами. А вот зато хорда BA_0 очень хорошо состыковывается с биссектрисой угла A: угол BAA_0 опирается на эту хорду. А она в свою очередь связывается с центральным углом BOA_0. Если мы докажем, что угол PBA_0 равен углу BAA_0, то задача будет решена. Попробуем составить цепочку равенств для углов, чтобы связать между собой угол BAA_0 и PBA_0. Начнем с BAA_0.

Используем то, что AA_0 биссектриса. Тогда $\angle BAA_0 = \angle A_0AC$. Благодаря параллельности IP и AC получаем равенство углов A_0AC и DIA. Дальше, углы DIA и A_0IP равны как вертикальные.

Сделать бы еще один шаг: доказать, что треугольники IPA_0 и BPA_0 равны, и задача решена. Откуда это равенство взять? Есть общая сторона A_0P. Есть надежда, что можно доказать равенство BA_0 и IA_0. А вот с остальной парой сторон и двумя парами углов все выглядит хуже. А как еще бы можно было доказать равенство нужных нам углов? Посмотрим на верхнюю часть картинки: похоже, что она симметрична относительно прямой A_0C_0. Если мы сможем убедиться в том, что треугольник BC_0I является равнобедренным, а C_0A_0 содержит его биссектрису, то мы получим, что точки B и I симметричны относительно A_0C_0, что и завершит решение задачи.

Итак, наша последняя проблема: получить равнобедренный треугольник BC_0I с биссектрисой. Начнем с биссектрисы. Угол BC_0A_0 опирается на дугу BA_0. Она равна дуге A_0C (на них опираются половинки угла A треугольника ABC). На дугу A_0C опирается угол A_0C_0C. Получаем, что C_0A_0 – биссектриса угла BC_0I. Осталось разобраться с углами C_0BI и C_0IB. Мы возьмем первый угол, разобьем на два угла и посмотрим дуги, на которые они опираются, затем заменим эти дуги равными (используем биссектрисы) так, чтобы на их сумму опирался угол C_0IB:

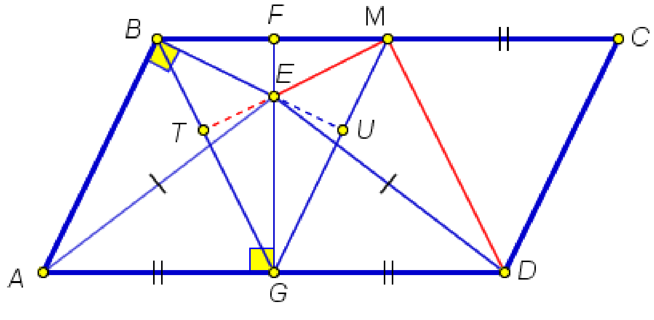
$$\angle IBC_0 = \frac{1}{2}\left(A\breve{C}_0 + A\breve{B}_0\right) = \frac{1}{2}\left(C_0\breve{B} + B_0\breve{C}\right) = \angle BIC_0.$$

Все! Задача решена. □

Возвращаемся к треугольникам и параллелограммам.

Задача 4. (Олимпиада Эйлера и Всероссийская олимпиада, 2018, 8 -9 класс) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^0$. Точка M – середина BC. Найдите угол DME.

Решение. Рисуем картинку.



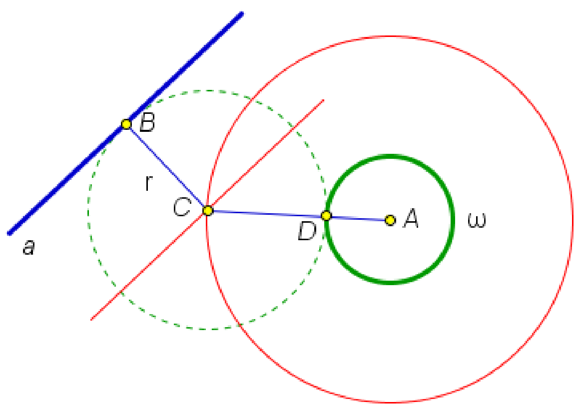
Продлим ME и BE и обозначим точки пересечения с отрезками BG и MG через T и U соответственно. Похоже, что получается достаточно симметричная картинка относительно GF и возникает гипотеза, что искомый угол равен 90^0.

Заметим, что прямые BG и MD параллельны. Поэтому, если удастся доказать, что MT перпендикулярно BG, то MT будет перпендикулярно MD и угол EMD будет 90^0. Прямой угол связан с высотами, а тут как раз вырисовывается симпатичный треугольник BGM с отрезками MT, GF, BU. Если про два из них доказать, что это высоты, то третья будет высотой автоматически. Смотрим на GF. Она перпендикулярна AD, а следовательно и BC. Теперь BU. Она перпендикулярна AB, а значит и MG (четырехугольник $BMGA$ параллелограмм по паре равный и параллельных сторон. Получаем, что все три рассматриваемых отрезка пересекаются в точке E, значит MT высота и угол EMD прямой. □

Окружности, но без вписанных углов.

Задача 5. (Из истории математических олимпиад. Московская математическая олимпиада, 1940, 1-й тур, 7-8 классы) Провести окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности

Доказательство. Задача на построение, а значит, начинаем с анализа.



Пунктиром нарисуем искомую окружность. Ее радиус уже есть. Осталось построить центр. Для этого заметим, что центр C искомой окружности находится на пересечении прямой (красная), параллельной a и находящейся от нее на расстоянии r. Кроме того, центр C находится на окружности (красная) с центром в точке A (центр данной окружности) и радиуса r плюс радиус данной окружности.

Строить и красную прямую и красную окружность мы умеем. Заметим, что задача может иметь четыре решения (данная окружность и прямая пересекаются в двух точках), три решения (прямая касается окружности), два решения, одно или не одного (прямая не имеет с окружностью общих точек. □

5.2. Домашнее задание

1. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D, окружность Ω_2 в точке E и прямую AB – в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

2. (9 класс, окружная, 2016) Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90^0$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC. Найдите угол DCF.

3. (9 класс, окружная, 2015) Один четырехугольник уже вписан в окружность, а второй нужно увидеть.

Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

4. Поработайте с вписанными в окружность углами и равными треугольниками. Ничего особо сложного нет.

   (10 класс, окружная, 2016) В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O – центр описанной около MKN окружности).

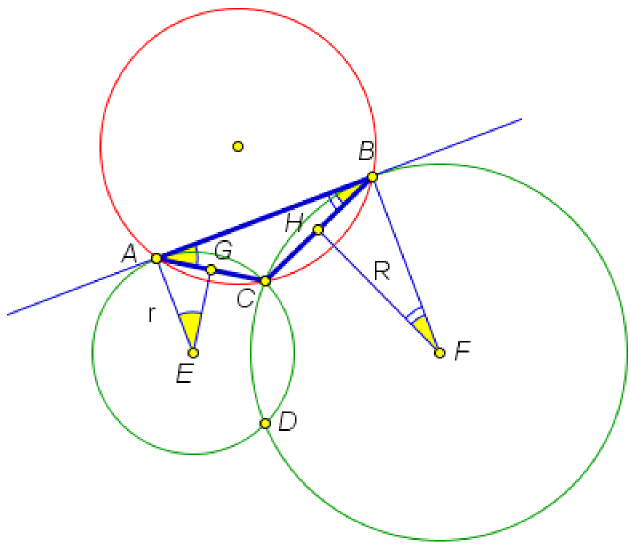
5. (из истории математических олимпиад, Московские математические олимпиады, 1960, 2-й тур, 7 класс) Докажите, что стороны произвольного четырехугольника являются сторонами некоторой трапеции.

Занятие 6.

6.1. окружность и вписанные углы (продолжение)

Задача 1. (9 класс, окружная)
Две окружности радиусов R и r касаются прямой ℓ в точках A и B и пересекаются в точках C и D. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB.

Решение. Рисуем картинку.



Так как нужно доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB, то наверняка он выражается через радиусы данных окружностей. Изобразим эти радиусы на картинке. Так как A и B – точки касания, то проводить радиусы лучше в эти точки.

Обозначим радиус искомой окружности через ρ. Вспомним, какими способами мы можем его вычислить: есть формула через площадь треугольника и длины его сторон, а есть через сторону и противолежащий угол. Вторая выглядит проще: $a = 2R\sin\alpha$ (мы ее вспоминали в одной из предыдущих домашних задач).

Опустим перпендикуляр EG на сторону AC и перпендикуляр FH на сторону BC. По свойству угла между хордой и касательной получаем два равенства углов, указанные на рисунке. Из прямоугольных треугольников AGE и FBH с учетом равенства углов получаем

$$AC = 2r \sin \angle A; \quad BC = 2R \sin \angle B.$$

С другой стороны, из треугольника ABC по формуле для вычисления радиуса окружности, описанной около этого треугольника получаем (специально записываем в непривычном виде)

$$2\rho \sin \angle B = AC; \quad 2\rho \sin \angle A = BC.$$

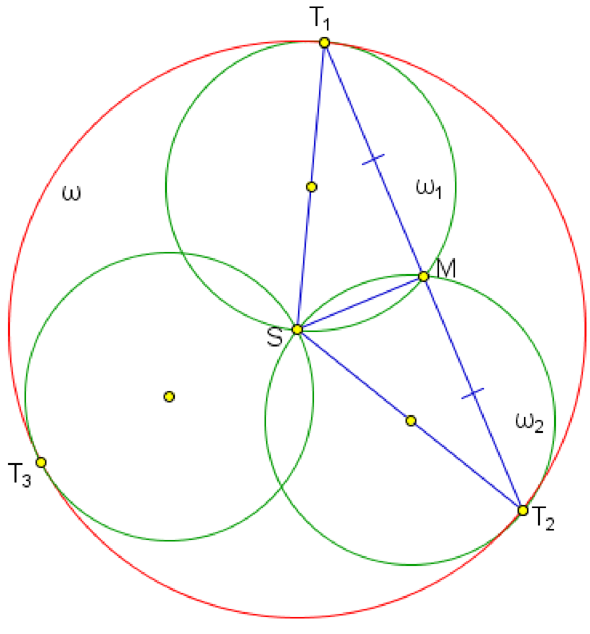
Теперь перемножаем все четыре равенства и сокращаем одинаковое

$$\rho^2 = Rr.$$

Итак, $\rho = \sqrt{Rr}$, то есть не зависит от AB. □

Задача 2. (11 класс, окружная) Три окружности ω_1, ω_2, ω_3 радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R ($R > r$) в точках T_1, T_2 и T_3. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2.

Решение. Рисуем картинку.



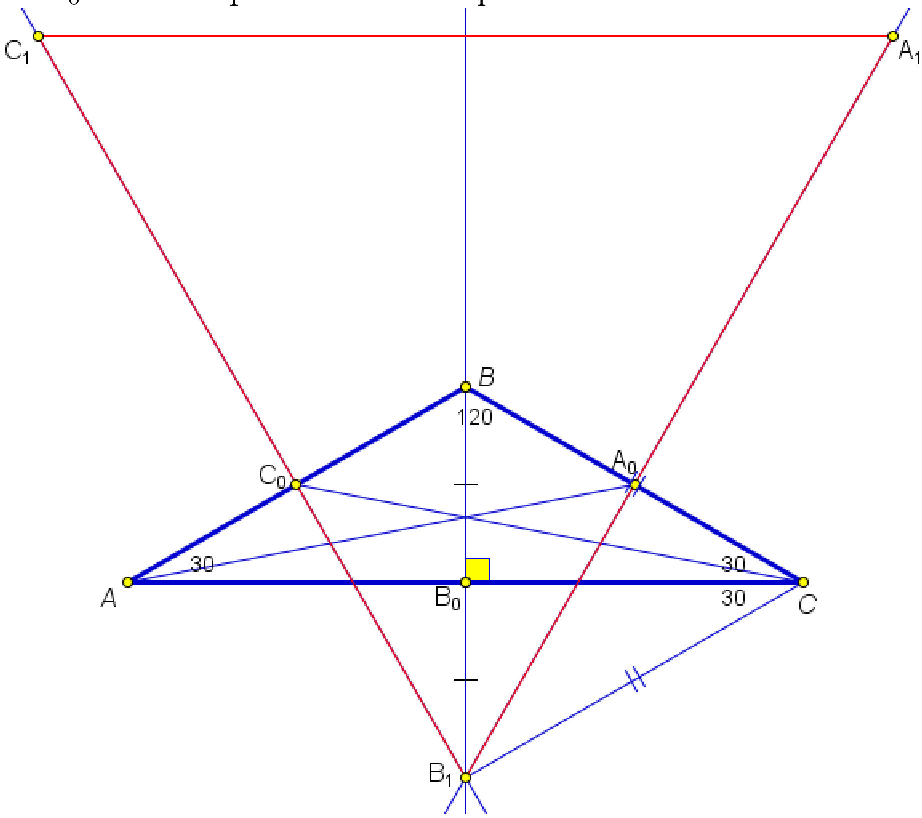
Если ее правильно нарисовать, то задача решена на три четверти. Обозначим O_1, O_2, O_3, O – центры окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ω. Точка S на одинаковом расстоянии от T_1, T_2, T_3. Значит, она является точкой O. Рисунок завершен.

Чтобы доказать, что точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 лежит на прямой T_1T_2, мы угадаем, где лежит эта точка на прямой и затем докажем, что она будет принадлежать обеим окружностям. Картинка очень симметричная. Значит на роль общей точки имеет смысл взять точку M – середину отрезка T_1T_2. Тогда SM будет медианой равнобедренного треугольника T_1ST_2, а значит, и высотой. Тогда угол T_1MS является вписанным в окружность с диаметром T_1S – это окружность ω_1. Аналогично с ω_2. □

Та же идея: точки лежат на одной прямой, но их еще нужно увидеть.

Задача 3. (8 класс) Медиану AA_0 треугольника ABC отложили от точки A_0 перпендикулярно стороне BC во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника ABC равны 30^0, 30^0, 120^0.

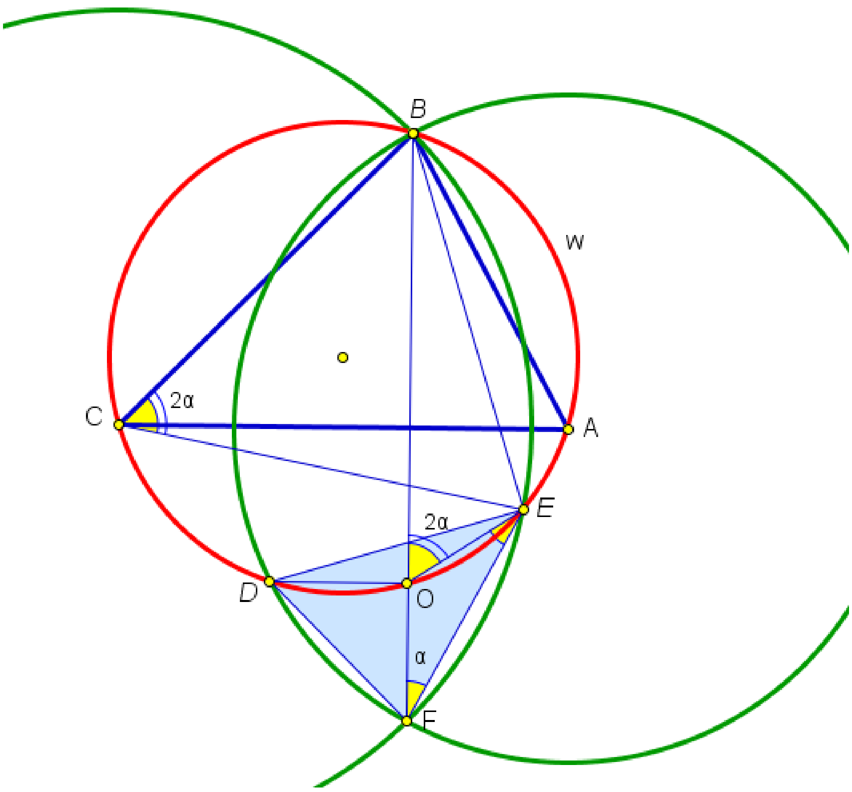
Решение. Пусть угол B равен 120^0, а два других по 30^0. Видим, что треугольник равнобедренный. Рисуем его. Точка B_1 лежит на одной прямой с точками B и B_0 и вся картинка симметрична относительно этой прямой.



Треугольник BB_1C. В нем CB_0 является высотой и медианой. Значит, он равнобедренный. Угол B_1 в нем равен углу B и равен 60^0. Значит, он равносторонний. Отрезок B_1A_0 в нем медиана, а значит, и высота. Тогда B_1, A_0, A_1 лежат на одной прямой – прямой, перпендикулярной BC. Аналогичная ситуация с симметричной стороны. Итак, мы получили, что точки A_0 и C_0 лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. В силу симметрии этот треугольник равнобедренный и угол BB_1A_0 равен 30^0 (так как B_1A_0 еще и биссектриса). Следовательно, в треугольнике $A_1B_1C_1$ все углы по 60^0. □

Задача 4. (11 класс, окружная, 2015) Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность w в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность w в точке O. Докажите, что O – центр описанной окружности треугольника DEF.

Решение. Рисуем картинку.

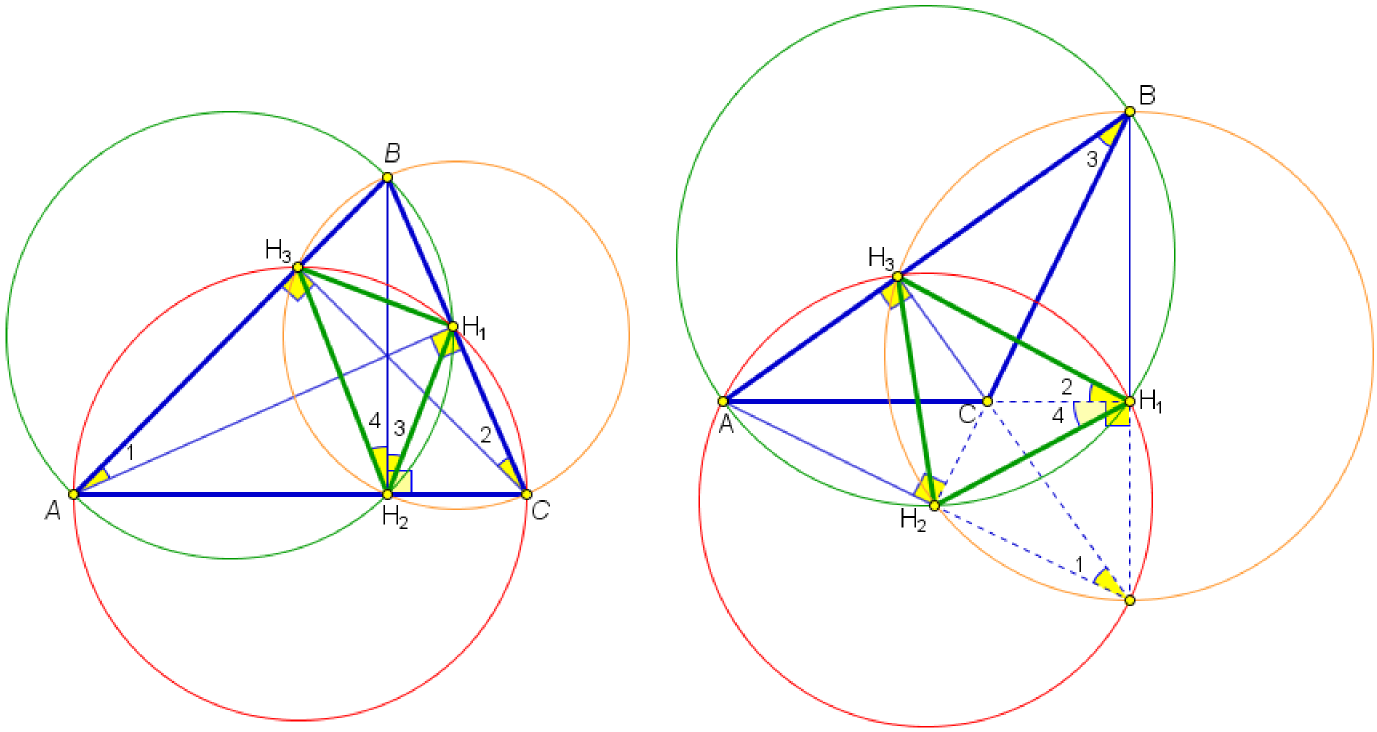


Нам нужно доказать, что O – центр описанной окружности, то есть нужно доказать, либо что O – точка пересечения серединных перпендикуляров, либо что O равноудалена от точек F, E, D. Что легче: проводить через точку O перпендикуляры и доказывать, что они попали в середины (или соединять середины сторон с точкой O и доказывать, что они перпендикулярны) или доказать, что $FO = EO = DO$? Второе наверное легче. Покажем, что $FO = EO$. Опять можно идти разными путями: найти равные треугольники с отрезками FO и EO или доказать, что треугольник FOE равнобедренный (то есть доказать, что углы при отрезке FE равны). По какому пути пойти сначала? Здесь целых три окружности. Конечно, окружности дают равные отрезки, а значит вероятность нахождения равных треугольников есть. Но вероятность обнаружения равных углов с помощью окружностей все-таки больше. Поэтому попробуем показать, что углы при отрезке FE равны.

Потянули ниточку от угла $EFO = \alpha$. Он вписан в окружность с центром в C и опирается на BE. Тогда центральный угол ECB равен 2α. Он является вписанным в окружность w и опирается на BE, а значит равен углу EOB. Тогда EOB – внешний угол треугольника FOE и следовательно, угол E этого треугольника равен $2\alpha - \alpha = \alpha$. Мы показали, что треугольник FOE равнобедренный, следовательно, $EO = FO$. Аналогичные рассуждения с окружностью с центром A показывают, что $DO = FO$ (проведите их самостоятельно.) □

Задача 5. (вспоминаем теоремы элементарной геометрии) Пусть дан не прямоугольный треугольник ABC. Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – его высоты. Тогда они содержат биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$.

Доказательство. Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC.

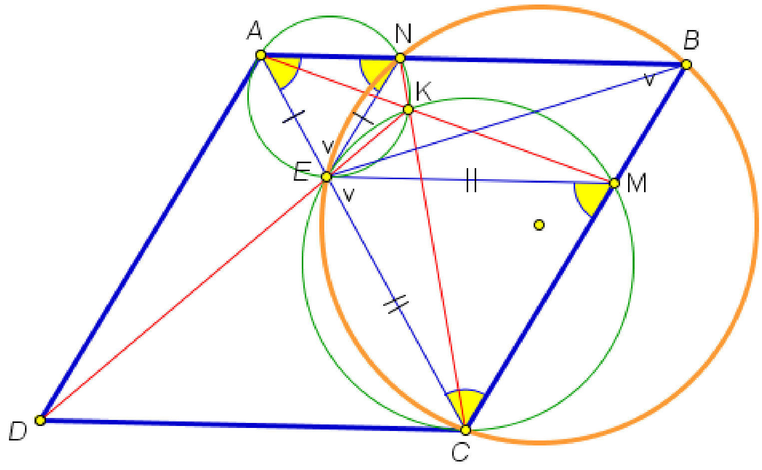


Высоты выдают прямые углы и у нас получается три пары прямых углов, каждая из которых опирается на одну из сторон треугольника. Следовательно, у нас получается три окружности (красная, зеленая и рыжая), которые проходят через две вершины треугольника и две точки основания высот. В красной окружности обнаруживаем равные углы 1 и 2 (опираются на H_1H_2), в зеленой 1 и 3 (опираются на H_1B) и в рыжей – 4 и 2 (опираются на H_3B). В результате получаем, что H_2B содержит биссектрису угла H_2 треугольника $H_1H_2H_3$. Остальные две биссектрисы получаются аналогичным образом.

В случае тупоугольного треугольника рассуждения аналогичны. Посмотрите на рисунок и проведите их самостоятельно. □

Задача 6. (9 класс, окружная) На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC – точки N и M так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K – точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

Решение. Пусть AC – меньшая диагональ ромба. Для большей рассуждения аналогичны, проведите самостоятельно.



Рисуем картинку. Как вообще возможно доказать, что точки лежат на одной прямой. Во-первых, это векторный или координатный методы. Либо связать с парами точек векторы и доказать, что они коллинеарны, либо ввести систему координат, ввести координаты точек и убедиться, что они удовлетворяют уравнению одной прямой. Во-вторых, если мы договоримся пользоваться только методами элементарной математики, это теорема Менелая (или другие аналогичные специфические теоремы, которые школьник не обязан знать), либо доказать, что три точки образуют развернутый угол, либо, что точки находятся на одинаковом расстоянии от какой-нибудь прямой. Подход с развернутым углом, наверно, самый универсальный. Его мы и выберем. В нашей задаче нужно показать, что

$$\angle KEC + \angle CED = \pi. \tag{6.1}$$

Сначала отметим на рисунке все, что мы знаем про углы. Треугольники AEN, CEM, ABC равнобедренные. Углы при основаниях равны. Следовательно,

$$\angle NA = \angle ANE = \angle ECM = \angle EMC; \angle AEN = \angle MEC = \angle ABC.$$

Откуда можно достать π (это наша цель, см. равенство (6.1))? Во-первых, сумма углов треугольника равна π, во-вторых, сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна π, и, в-третьих, сумма двух углов, вписанных в окружность, опирающихся на одну хорду и лежащих по разные стороны от нее, равна π (четырехугольник, вписанный в окружность). Что выбрать? Параллельность наблюдается только в самом ромбе, внутри него параллельности не видно. Треугольников, связанных друг с другом, здесь не много. Поэтому попробуем окружности. В плане четырехугольников, вписанных в окружности сразу бросаются в глаза две возможных окружности: описанная вокруг $ANKE$ и вокруг $KMCE$. Сразу утверждать, что окружности могут быть описаны около этих четырехугольников мы не можем. Поэтому сделаем шаг назад, перейдем в каждом случае к треугольникам. По одной вершине нужно выкинуть. Посмотрим на первый четырехугольник: если выкинуть одну из вершин A, N, E (они более или менее равноправны), то теряются хорошие равнобедренные треугольники с хорошими углами. Поэтому выкидываем вершину K. Аналогично во втором четырехугольнике. Около оставшихся треугольников описываем окружности. Интуиция подсказывает, что обе окружности пройдут через точку K. Но это еще нужно доказать.

Заметим, что точка E не лежит на линии центров этих окружностей (если это было бы так, то треугольники были бы прямоугольные). Поэтому окружности пересекаются (кроме точки E) еще в одной точке. Обозначим ее K_1 и докажем, что она совпадает с K. Для этого мы покажем, что точка K_1 лежит как на отрезке AM, так и на отрезке NC. Заметьте, опять та же проблема: загнать три точки на одну прямую! Мы решили доказывать это, убеждаясь, что угол, определяемый данными тремя точками, является развернутым. Докажем для AM, для NC докажите самостоятельно. Нам надо доказать, что

$$\angle AK_1E + \angle EK_1M = \pi.$$

Заметим, что $\angle AK_1E = \angle EAN =$ (опираются на равные хорды в левой окружности) $= \angle ECM$ (в самом начале отмечали все равные углы). Получаем

$$\angle AK_1E + \angle EK_1M = \angle ECM + \angle EK_1M = \pi$$

(противоположные углы в четырехугольнике, вписанном в окружность).

Итак, точки $K = K_1$. Возвращаемся к нашей основной проблеме (6.1). Здесь фигурирует точка D. Она расположена в нижней части ромба, а все события до сих пор разворачиваются в верхней части ромба. Поэтому хотелось бы угол, связанный с точкой D заменить на угол равный ему и связанный с верхней частью ромба. Видим, что $\angle CED = \angle CEB$ (симметрия ромба). В верхней части ромба у нас получились два четырехугольника $NMCE$ и $NECB$, которые в принципе могут быть вписаны в окружности в выдать нам требуемую сумму π. Какой из них более предпочтителен? Сразу видим по отмеченным равным углам на картинке, что $\angle NBC + \angle NEC = \pi$. Значит возьмем четырехугольник $NECB$. (Попробуйте выяснить, можно ли описать около второго четырехугольника окружность.)

$$\angle BEC = \angle CNB = \pi - \angle ANC = \pi - (\pi - \angle AEK) = \pi - \angle CEK.$$

Вспоминаем, что $\angle BE = \angle CED$ и утверждение (6.1) доказано. □

6.2. Домашнее задание

1. (11 класс, окружная, 2014)Если увидеть три точки на одной окружности и ее центр, то задача решится.

В треугольнике ABC угол C равен 75^0, а угол B равен 60^0. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BMC с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

2. (8 класс, окружная) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричные B и C относительно прямых AC и AB соответственно. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

3. Вспоминаем множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

   (Московские математические олимпиады, 1938 год, 2-й тур) Постройте треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

4. (Московские математические олимпиады, 1941 год, 2-й тур, 7-8 классы) Постройте треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2, H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

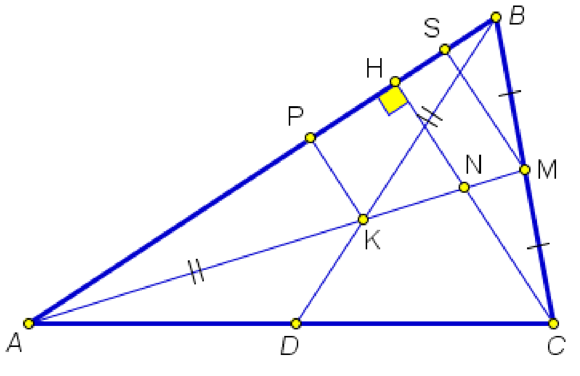
5. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 8-9 классы) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Занятие 7.

7.1. подобие+площади

Задача 1. (задача для 9, 10 класса, окружная) На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

Доказательство. Рисуем картинку.



Нам нужно показать, что $AN = 2KM$ или $\frac{AN}{KM} = 2$. Если мы видим отношение отрезков, то в первую очередь это или Фалес (обобщенный), или подобие. Подобие более универсально. Попробуем применить здесь его.

Подобие – это прежде всего подобные треугольники и, скорее всего, это подобие будет с коэффициентом 2 или будет выходить на таковое. Двойка, половина, середина. Смотрим, что у нас есть в задаче, связанного с серединой. Это медиана. Проведя отрезок SM параллельный высоте CH, мы получим точку S, такую, что она является серединой отрезка HB. Что еще осталось из условия? Осталось равенство $AK = KB$. Здесь вроде не наблюдается ни подобия, ни двойки. Соорудим их. Мы видим, что точка K равноудалена от точек A и B, а значит лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Проводим серединный перпендикуляр PK. Мы видим, что сверху от медианы AM появились подобные треугольники. С ними и будем работать. Вернемся к тому, что нужно доказать:

$$\frac{AN}{KM} = 2.$$

Отрезок AN встраивается в серию подобных треугольников хорошо. А вот KM – нет. Поэтому нам нужно перейти от KM к каким-то (очевидно двум) более удобным отрезкам:

$$\frac{AN}{KM} = \frac{AN}{AM - AK}.$$

Не удобно работать с дробью, в которой разность в знаменателе. Поэтому будем работать с обратным выражением:

$$\frac{AM - AK}{AN} = \frac{AM}{AN} - \frac{AK}{AN}. \tag{7.1}$$

Максимальная информация сейчас располагается на стороне AB. С помощью подобия к ней все и сведем. Обозначим $AP = a$, $HS = b$. Тогда, используя то, что P – середина AB, а S – середина HB, получим

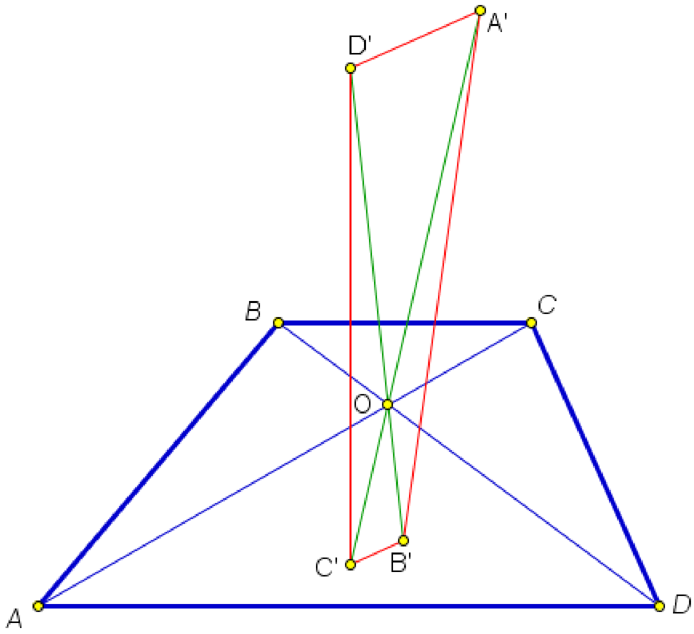
$$\frac{AM}{AN} - \frac{AK}{AN} = \frac{AS}{AH} - \frac{AP}{AH} = \frac{2a - b}{2a - 2b} - \frac{a}{2a - 2b} = \frac{a - b}{2a - 2b} = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что даже можно было в (7.1) почленно не делить выражение. Итак, мы получили, что $AN = 2KM$. □

комбинация подобия и симметрии.

Задача 2. (9 класс, окружная) Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

Решение. Рисуем картинку.



Исходная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть ее вершины отражаются в точки A', B', C', D'. Нарисуем сначала точки B', D'. Заметим, что отрезок BD при осевой симметрии переходит в отрезок $B'D'$, следовательно они равны и пересекаются на прямой AC (ось симметрии).

Так как BD пересекает AC в точке O, то их общая точка – это точка O. Получаем два подобных треугольника BOB' и DOD'. Откуда $\frac{BO}{OD} = \frac{B'O}{OD'}$. Аналогично рассуждаем с точками A и C и получаем $\frac{CO}{OA} = \frac{C'O}{OA'}$. Из исходной трапеции имеем $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$, следовательно, $\frac{B'O}{OD'} = \frac{C'O}{OA'}$. Значит, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ подобны, следовательно $B'C' \| A'D'$.

Покажем, что две остальные стороны четырехугольника $A'B'C'D'$ не параллельны. Предположим противное: пусть $A'B' \| C'D'$. Тогда треугольники $A'B'O$ и $C'D'O$ подобны по двум парам равных углов. Тогда получаем отношение и еще допишем полученное выше.

$$\frac{OA'}{OC'} = \frac{OB'}{OD'} \qquad \frac{B'O}{OD'} = \frac{C'O}{OA'}.$$

Умножим одно равенство на другое и разделим одно на другое. Тогда получим два соотношения:

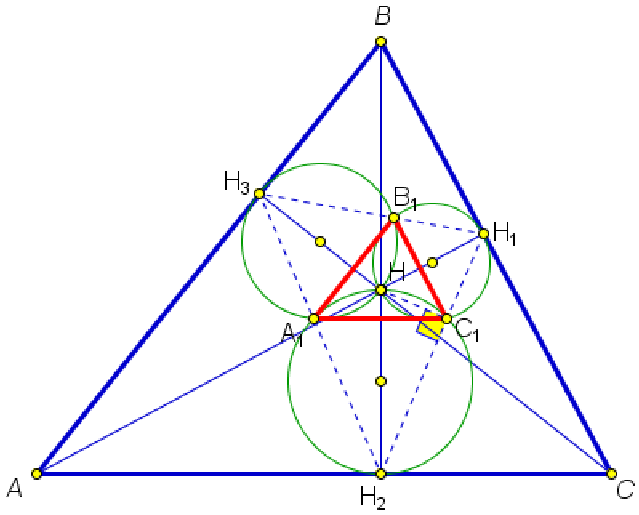
$$OA' = OC'; \qquad OB' = OD'.$$

Тогда и $OA = OC$, $OB = OD$, то есть исходный четырехугольник должен быть параллелограммом. Итак, мы получили, что $A'B'C'D'$ действительно трапеция.

P.S. Выясните, в каком случае все четыре точки A', B', C', D' лежат на одной прямой. $\square$

Задача 3. (10 класс, окружная) Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Решение. Рисуем картинку.



Высоты обозначаем AH_1, BH_2, CH_3, а вторые точки пересечения окружностей A_1, B_1, C_1. Окружности построены на кусочках высот как на диаметрах, а значит, угол HC_1H_2, опирающийся на диаметр, является прямым. Аналогично, прямым является угол HC_1H_1.

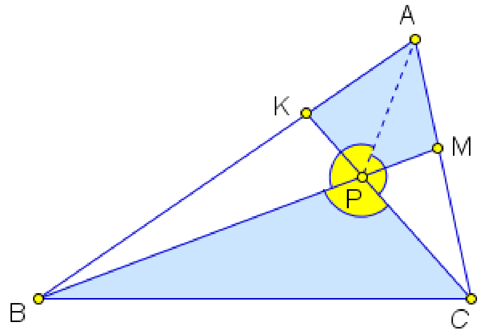
Следовательно, точки H_1, C_1, H_2 лежат на одной прямой. Аналогично рассуждая, получаем, что точки H_3, A_1, H_2 тоже лежат на одной прямой.

Углы A_1H_2H и C_1H_2H равны, так как в ортотреугольнике высоты исходного треугольника являются биссектрисами. Тогда при осевой симметрии с осью BH_2 прямая H_2H_3 переходит в прямую H_2H_1, а окружность, проходящая через точки A_1, H_2, C_1, H – в себя. Тогда точка A_1, являющаяся пересечением H_2H_1 и окружности перейдет в точку пересечения H_2H_1 и той же окружности, то есть в точку C_1. Значит, эти точки симметричны относительно прямой H_2B и отрезок A_1C_1 перпендикулярен ей, следовательно, параллелен AC. Аналогично для других двух отрезков A_1B_1, B_1C_1. Следовательно у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны соответствующие стороны, следовательно, они подобны. □

В огороде бузина, а в Киеве дядька. Комплексная задача на подобие, площади и все те же треугольники с углами в 60^0.

Задача 4. (10 класс, окружная, 2014) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC – точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по 120^0, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

Решение. Рисуем картинку.



Соединяем точку P с точкой A и отмечаем вокруг точки P все углы по 60^0. Начнем раскручивать площади. Нам нужно переходить к углам и линейным величинам. Считать площадь четырехугольника не хочется, так как в любом случае при этом мы уйдем далеко от отрезков и углов, связанных с треугольником ABC. Поэтому равенство площадей четырехугольника и треугольника мы превратим в равенство двух треугольников, не нарушив его.

Для этого прибавим к обеим частям площадь треугольника BPK (можно прибавлять и площадь MPC, существенно от этого ничего не изменится). Тогда получим $S_{AMB} = S_{KCB}$, $AB \cdot AM \sin A = BC \cdot BK \sin B$. Так как по теореме синусов $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{AC}{BC}$, получим

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BK}{AB},$$

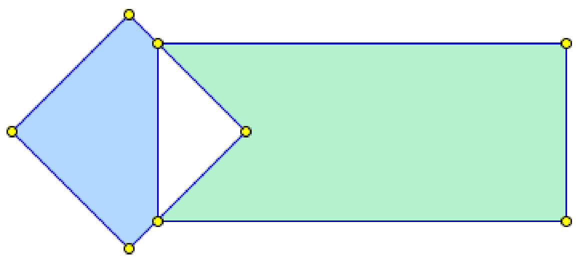
то есть точки M и K делят отрезки AC и BA в одном и том же отношении, считая от точек A и B соответственно. Другими словами, $\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MA}$. Идем дальше и видим много углов по 60^0. Значит, в треугольниках BPA и CPA отрезки PK и PM являются биссектрисами. И опять отношение отрезков

$$\frac{BK}{KA} = \frac{PB}{PA}; \; \frac{AM}{MC} = \frac{PA}{PC}.$$

Откуда получаем, что треугольники BPA и APC подобны (угол 120^0 и отношение сторон). Значит, и углы CAP и PBA в этих треугольниках равны. Тогда $\angle A = \angle CAP + \angle PAB = \angle PBA + \angle PAB = 180^0 - \angle BPA = 60^0$. $\square$

Задача 5. Прямоугольник со сторонами 4 и 9 см наложили на квадрат со стороной 6 см как показано на рисунке. Докажите, что площади закрашенных частей данных фигур равны.

Решение. Нарисуем картинку.



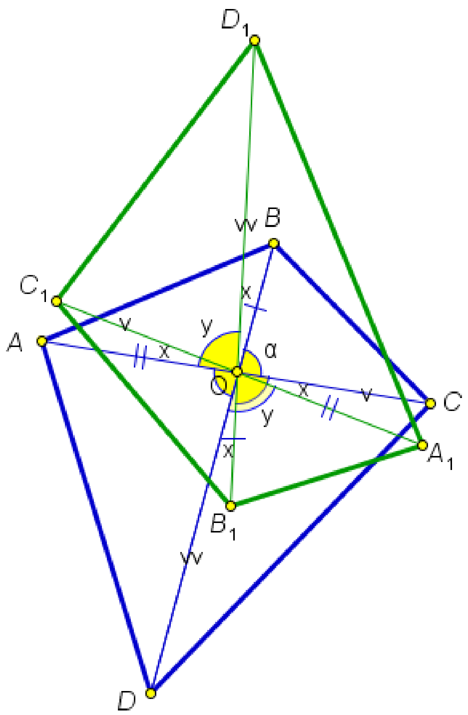
Решение для нас здесь достаточно очевидно: площади закрашенных частей – это площади квадрата и прямоугольника без площади общей их части – треугольника. Так как площади квадрата и прямоугольника одинаковы, то и площади закрашенных частей одинаковы.

Давайте попробует усложнить задачу: во-первых, наложить квадрат на прямоугольник можно не только по такой простой фигуре, как треугольник, но и по более сложному многоугольнику (сдвиньте квадрат вправо). Во-вторых, мы видим, что форма фигур здесь не важна, важно, чтобы их площади были одинаковы. Значит, годятся любые две фигуры равной площади. В-третьих, задачу можно сформулировать так (но это уже для более старших классов): даны те же квадрат и прямоугольник. Найдите разность площадей их заштрихованных частей. □

площадь четырехугольника и свойства осевой симметрии

Задача 6. (11 класс, окружная) Каждую вершину выпуклого четырехугольника площади S отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Обозначим площадь получившегося четырехугольника через S'. Докажите, что $\frac{S'}{S} < 3$.

Решение. Половина решения этой задачи заключается в правильном изображении чертежа с учетом всех свойств осевой симметрии.



Пусть O – точка пересечения диагоналей данного четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим сначала осевую симметрию с осью AC. Эта осевая симметрия работает с точками B и D. Они переходят в точки B_1 и D_1 соответственно. Так как прямая BD пересекала ось AC в точке O, то образ этой прямой, то есть прямая B_1D_1 пройдет через ту же точку O. При этом отрезок BO будет равен отрезку B_1O. Аналогичная ситуация с остальными тремя кусками диагоналей. В результате получаем, что у четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ диагонали равны диагоналям четырехугольника $ABCD$.

Это нам уже встречалось в задаче выше. Зачем мы здесь об этом вспомнили? Одна из формул для вычисления площади четырехугольника имеет вид: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1, d_2 – длины диагоналей четырехугольника, а α – угол между ними. Благодаря этой формуле мы видим, что нам нужно найти угол между диагоналями четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Тогда отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ будет равно отношению синусов углов между их диагоналями.

Обозначим угол $\angle BOC = \alpha$. Используя равенство вертикальных углов и свойство сохранения величины угла при осевой симметрии, мы получаем четыре равных угла, которые на рисунке отмечены одной дугой. Обозначим угол $B_1OA_1 = x$ (угол между диагоналями четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$). Тогда из равенства углов DOA_1 и B_1OC получаем, что углы DOB_1 и COA_1 равны. Обозначим эти углы (и вертикальные к ним) через x. Тогда $x + y = \alpha$ (посмотрите на угол DOA_1). Кроме того, вокруг O сложить все углы, то получим

$$2\alpha + 4x + 2y = 360^0.$$

Решаем полученную систему и получаем

$$y = 3\alpha - 180^0.$$

Угол не удобен. Возьмем смежный к нему (с ним формула для вычисления площади четырехугольника тоже верна). Смежный угол будет иметь величину

$$180^0 - (3\alpha - 180^0) = 360^0 - 3\alpha.$$

Так как нас интересуют геометрические углы, то это будет угол 3α.

Итак, отношение площадей четырехугольников будет равно отношению

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Осталось вспомнить или вывести формулу для тройного угла:

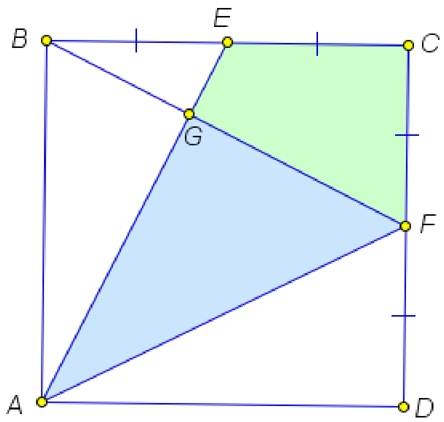
$$\begin{aligned}\sin(2\alpha + \alpha) &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha).\end{aligned}$$

Делим на $\sin \alpha$ и получаем то, что нужно. □

Еще один красивый подход к решению задач на площади.

Задача 7. (11 класс, окружная, 2016) В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

Решение. Рисуем картинку.



Обозначим площадь треугольника S_1, четырехугольника S_2, а всего квадрата – S. Видно, что $S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$ (два треугольника образуют прямоугольник в полквадрата).

Нам нужно сравнить площади, следовательно, мы можем оценить знак разности площадей. Прикинем

$$S_1 - S_2 = \frac{S}{2} - S_2 - S_2 = \frac{S}{2} - 2(S_{BCF} - S_{BEG}) =$$
$$= \frac{S}{2} - 2(\frac{S}{4} - S_{BEG}) = 2S_{BEG} > 0.$$

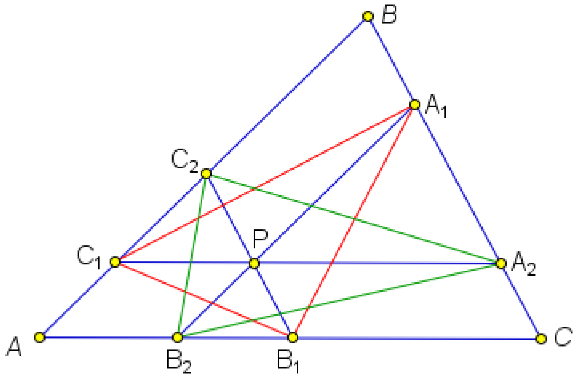
Значит площадь треугольника больше. □

7.2. Домашнее задание

1. На одной строчке нарисованы два сердечка. Одно движется по строчке, проезжая через другое. Докажите, что в каждый момент времени разность площадей не пересекающихся частей сердечек постоянна. Сформулируйте аналогичную задачу для пространства.

2. (10 класс, школьная, 2015)
Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?

3. (10 класс, окружная, 2016)



Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC проведены три отрезка, параллельные его сторонам. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

4. (10 класс, школьная, 2016)
Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

5. (Московские математические олимпиады, 1984 год, 7 класс) Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что площадь параллелограмма не превосходит половины площади треугольника.

Занятие 8.

8.1. стереометрия

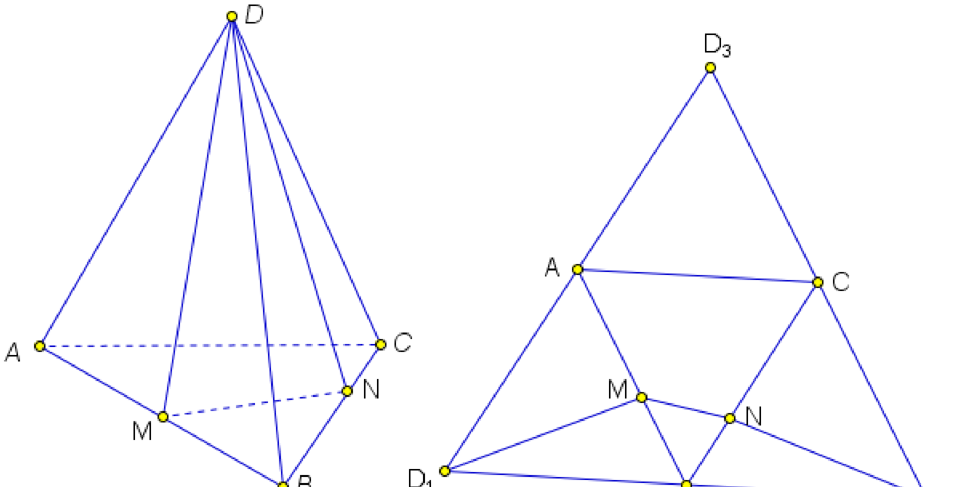
Параллельность плоскостей.

Задача 1. (10 класс, окружная, 2015) В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек A, B, C, D, E, F. известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

Решение. Разберемся, что и где лежит. Пересекающиеся прямые AB и CD определяют плоскость. Аналогично прямые DE и EF определяют плоскость. Согласно условию в этих плоскостях есть две пары параллельных прямых. Значит, эти две плоскости параллельны. Тогда отрезки AF и CD – это параллельные отрезки между параллельными плоскостями, следовательно, они равны по длине. Для двух других пар рассуждения аналогичны. □

Задача 2. (11 класс, окружная, 2012) Длина ребра правильного тетраэдра равна a. Через одну из вершин тетраэдра проведено треугольное сечение. Докажите, что периметр P этого треугольника удовлетворяет неравенству $P > 2a$.

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$.

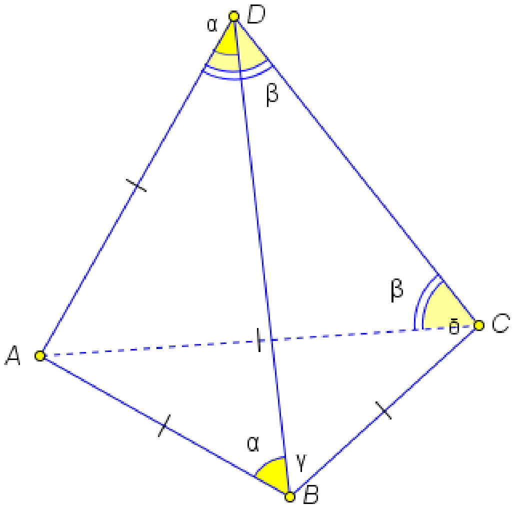


Рассматриваем развертку и все становится понятным. □

Достаточно тривиальная (для окружной олимпиады) на свойства трехгранных углов.

Задача 3. (11 класс, окружная, 2015) Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по 150^0?

Решение. При такой постановке вопроса с большой долей вероятности ответ нет. Поэтому мы можем попытаться воспользоваться доказательством от противного. Предположим, что такой тетраэдр существует. Нам нужно прийти к противоречию.



Рисуем картинку и отмечаем на ней все, что известно. ABC оказывается равносторонним треугольником, а BAD и CAD – равнобедренными (хотя и не обязательно равными друг другу). Обозначаем углы. Внизу все по 60^0. Теперь сбоку: $\angle ABD = \angle ADB = \alpha$, $\angle ACD = \angle ADC = \beta$. Про треугольник BCD ничего хорошего сказать не можем. Значит его два нижних угла обозначаем буквами: $\angle DBC = \gamma$, $\angle DCB = \delta$, а верхний будет равен $180^0 - \gamma - \delta$.

Теперь раскручиваем условие с углами: $\alpha+\gamma+60^0 = 150^0$ и $\beta+\delta+60^0 = 150^0$. Тогда $\alpha+\gamma = 90^0$, $\beta+\delta = 90^0$. Эти два равенства мы можем сложить или вычесть и тогда получим еще два соотношения.

Идем на поиски противоречия. У нас остались еще две не использованные вершины пирамиды: A и D. С вершиной A связаны всего два угла – это α и β, а вот в вершине D присутствуют все четыре. Туда и пойдем. Имеем

$$\angle BDC = 180^0 - \gamma - \delta = 180^0 - (180^0 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta.$$

Итак, у трехгранного угла D сумма двух плоских равна третьему плоскому, что не может быть. Противоречие получили. □

Задача 4. (11 класс, окружная, 2016) Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

Решение. Пусть основанием пирамиды является многоугольник $SA_1A_2\ldots A_n$. Тогда возможны два случая:

1) для каких-то двух соседних граней у прямых углов общая вершина. Пусть $\angle A_1A_2S = \angle A_3A_2S = 90^0$. Тогда по признаку SA_2 перпендикулярна основанию пирамиды и является высотой.

2) у прямых углов нет общей вершины во всех гранях. Пусть $\angle A_1A_2S = \angle A_2A_3S = 90^0$. Так как гипотенуза больше катета получим из цепочки прямоугольных треугольников $SA_1 > SA_2 > SA_3 > \ldots > SA_n > SA_1$. Противоречие. Такого расположения прямых углов быть не может. □

задача на доказательство параллельности плоскостей. Опять гомотетия.

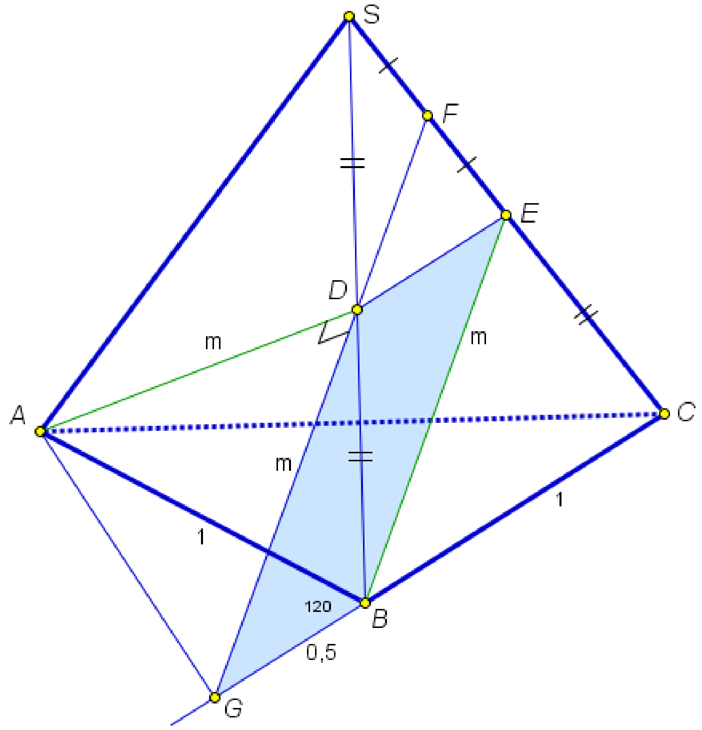
Задача 5. (11 класс, окружная) В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости BCD.

Решение. Тихий ужас, даже рисовать картинку не хочется. Вспоминаем, откуда может взяться параллельность плоскостей. Все признаки с прямыми подразумевают чертеж и какие-то построения. Об этом сейчас даже думать страшно. Еще параллельность присутствует в параллельном переносе и гомотетии. Наличие пирамиды намекает на гомотетию и скорее всего с центром A, в которой плоскость $(B'C'D')$ перейдет в (BCD).

Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B'', так как плоскости (BCD) и (ACD) симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''. При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $(B''C''D'') = (BCD)$ переходит в плоскость $(B'C'D')$. Значит, они параллельны. $\square$

Задача 6. (11 класс, окружная, 2014) Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Решение. Сначала подумаем, зачем здесь куб? Медианы скрещивающиеся, значит ребра куба будут скрещивающимися. Скрещивающиеся ребра куба перпендикулярны. Следовательно, медианы пирамиды перпендикулярны. Рисуем картинку и отмечаем на ней все равные отрезки, которые можем найти: пирамида правильная, значит боковые грани равные равнобедренные треугольники, медианы будут равными;отрезки SD, DB, SE, EC равны между собой.



Теперь нужно использовать угол. Его очень трудно использовать, если отрезки скрещивающиеся. Нужно сделать пересекающиеся отрезки, а еще лучше, чтобы получился треугольник, ну и конечно при этом прямой угол остался. Проводим прямую, параллельную медиане BE через точку D. F – конец этого отрезка, лежащий на SC, а G – точка пересечения этой прямой с прямой BC.

Тогда получаем, во-первых, параллелограмм $DEBG$ и, во-вторых, прямоугольный треугольник ADG. В этом прямоугольном треугольнике катеты равны m (длина медианы боковой грани, проведенной к боковому ребру). Тогда $AG = m\sqrt{2}$.

С другой стороны, (исследуем основание) средняя линия $DE = GB$ и следовательно, $BG = 0,5$. Тогда из треугольника ABG по теореме косинусов

$$AG^2 = 1 + 0,25 - 2 \cdot 0,5 \cos 120^0 = \frac{7}{4}.$$

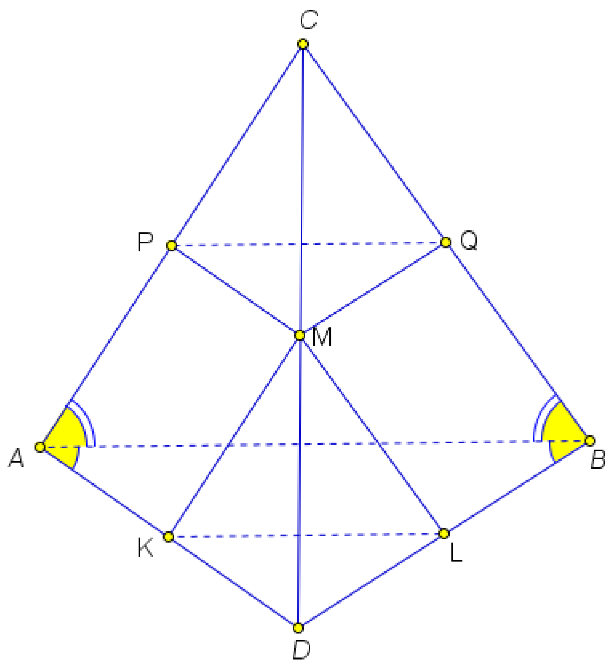
Тогда из треугольника ADG получим $m^2 = \frac{7}{8}$.

В результате мы пришли к планиметрической задаче: найти боковую сторону равнобедренного треугольника, зная его основание и длину медианы, проведенной к боковой стороне. Решить ее можно, например, два раза использовав теорему косинусов. □

опять работает симметрия

Задача 7. (11 класс, окружная) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC BC, DC в точках P, Q, M. Оказалось, что $KL \| PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

Решение. Рисуем картинку.



Совпадение биссектрис говорит о том, что картинка должна быть симметрична. Попробуем по максимуму эту симметрию обнаружить. Так как прямые PQ и KL параллельны между собой, то они параллельны и прямой AB, по которой пересекаются плоскости, в которых лежат эти прямые. Тогда четырехугольники $AKLB$ и $APQB$ – трапеции. Для каждой трапеции (по отдельности) вершины лежат на одной окружности (из-за сфер, проходящих через эти точки). Значит, трапеции равнобокие.

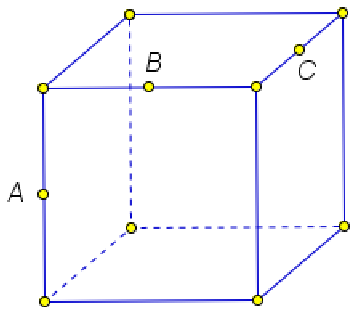
Углы при большем основании равны (отмечаем на картинке) и треугольники ABC и ABD равнобедренные. Тогда пирамида $ABCD$ симметрична относительно плоскости α, проходящей через ее ребро CD и середину ребра AB (эта плоскость будет перпендикулярна ребру AB). Тогда при симметрии относительно плоскости α точка $P \to Q$ (сфера перейдет в себя), а $K \to L$. Значит, угол PML перейдет в угол QMK. Понятно, что биссектриса перейдет в биссектрису (интересующих нас углов), то нам нужно, чтобы она перешла в себя при симметрии относительно α, следовательно, она должна там лежать. Другими словами, нам нужна еще одна симметрия относительно плоскости β, перпендикулярной α, и проходящей через точку M. Проведем через точку M плоскость β, перпендикулярно CD. Тогда так как $C, D \in \alpha, (BCD)$, $\beta \perp \alpha$, $\beta \perp (BCD)$. Нам нужно убедиться, что система лучей MQ, ML, MK, MP симметрична относительно β. Для этого достаточно показать, что углы CMQ и LMD равны. Для этого заметим, что четырехугольники $MQBD$ и $CMLB$ вписаны в окружности, а значит, суммы их противоположных углов равны 180^0. Тогда имеем

$$\angle CMQ = \angle CML - \angle QML = (180^0 - \angle CBL) - \angle QML = \\ = \angle QMD - \angle QML = \angle LMD.$$

Создали дважды симметричную картинку, а теперь создаем биссектрису. Отложим на лучах MQ, MP, MK, ML равные отрезки и обозначим их теми же буквами со штрихами. Эти точки симметричны относительно плоскостей α и β, следовательно, $Q'P'K'L'$ – параллелограмм. Пусть O – точка пересечения его диагоналей. Тогда MO – биссектриса нужных углов. □

8.2. Домашнее задание

1. (11 класс, школьная, 2015)



Дан куб, A, B, C – середины его ребер. Чему равен угол ABC?

2. (11 класс, школьная, 2016)
Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на ребрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Примет обоснуйте.

3. (11 класс, региональный, 2012) На такую идею уже решали задачу в планиметрии.

   Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A – параллельно SC и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

4. Хотя задача из стереометрии, все идеи решения из планиметрии
(11 класс, окружная, 2011) Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. M и N – точки пересечения медиан граней ABC и ABD соответственно. Докажите, что отрезки CN и DM равны.

5. (11 класс, окружная, 2011) Здесь несколько способов решения. Попробуйте координатный.

   Укажите точки на поверхности куба, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

Занятие 9.

9.1. Применение геометрии в решении алгебраических задач

Задача 1. Для положительных x, y, z из условий $y^2 + z^2 = 50$, $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169$, $x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$, не находя значений x, y, z, вычислите значение выражения $xy + yz + zx$.

Решение. Первое равенство – теорема Пифагора. Два остальных из-за того, что справа стоят квадраты чисел, наводят на мысль применить теорему косинусов. Преобразуем для этого второе равенство:

$$13^2 = x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2x\frac{y}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Получаем треугольник со сторонами $x, \frac{y}{\sqrt{2}}, 13$ и углом 135^0. Аналогично для третьего равенства получаем треугольник со сторонами $x, \frac{z}{\sqrt{2}}, 12$ и углом 135^0. Эти два треугольника очень хорошо прикладываются друг к другу по стороне x. Первое равенство тоже дает треугольник, но если взять стороны y и z, то он остается в стороне от двух других. Меняем стороны, делим на два. Тогда одна его сторона равна стороне второго треугольника, а другая – третьего. Причем $135 + 135 + 90 = 360$. Вершины этих углов рисуем совпадающими. Тогда они складываются в один треугольник. Внешние стороны треугольников оказываются $12, 13, 5$. По теореме обратной теореме Пифагора получаем прямоугольный треугольник.

Смотрим, что нужно найти: произведения букв – сторон треугольников. Произведение сторон связано с площадью треугольника. Три произведения, три площади. Пытаемся вычислить:

$$\frac{1}{2}x\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}x\frac{z}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(xy + xz + yz).$$

Это площадь большого треугольника. Она равна 30. Тогда получаем

$$xy + xz + yz = 120.$$

□

Задача 2. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

решение для положительных x, y, z?

Решение. Теорема косинусов позволяет построить три треугольника с общей вершиной как в предыдущей задаче. Тогда объемлющий треугольник получается со сторонами 2,3, 6. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система решения не имеет.

Пойдем дальше. Выясним, имеет ли вообще решения эта система (не обязательно положительные). Начнем с нуля. Пусть $x = 0$. Тогда $y = \pm 2$,

$z = \pm 3$. Тогда третье уравнение противоречиво. Значит, x не может быть нулем. Две остальные переменные не могут быть нулями по аналогичным рассуждениям.

Рассмотрим теперь случай отрицательных значений. Если все три переменные отрицательные, то обозначая $-x = \xi > 0$, $-y = \eta > 0$, $-z = \chi > 0$, получим систему такого же вида с положительным решением, которого нет. Значит, все три отрицательными быть не могут.

Пусть одна буква отрицательна, две положительны, например, x. Тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (-x)^2 - (-x)y + y^2 = 4 \\ (-x)^2 - (-x)z + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

Исследуем ее решения для $-x$, y, z. Они все положительны. Получаем три треугольника с углами $60^0, 60^0, 120^0$. От одной точки откладываем отрезки $-x$, y, z. Теперь $-x$ лежит между y и z и концы этих отрезков должны образовывать треугольник со сторонами $2, 3, 6$, которого не может быть.

Если две буквы отрицательны, а одна положительна, опять получаем два угла по 60^0 и один 120^0. Опять треугольник не получается.

Итак, мы полностью исследовали систему уравнений и выяснили, что она не имеет решений. □

Задача 3. Решите систему уравнений для положительных x,y

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24. \end{cases}$$

Решение. Разность квадратов под корнем наводит на мысль, что здесь используется прямоугольный треугольник с гипотенузой x и катетами y, $\sqrt{x^2 - y^2}$. Из первого уравнения следует, что его площадь равна 24, а второе уравнение – дает периметр 24. Что еще можем узнать про этот треугольник? Желательно, чтобы новые знания позволили составить новые уравнения на x, y, но более простые. Радиус вписанной окружности равен площадь делить на полупериметр, то есть он равен 2. Тогда гипотенуза – это сумма катетов минус удвоенный радиус вписанной окружности: $x = y + \sqrt{x^2 - y^2} - 4$. Добавляем к этому второе уравнение системы и находим $x = 10$. Тогда $y_{1,2} = 6$ и 8. □

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу можно решить несколькими способами. Вроде два уравнения и три неизвестные. Прикинем, сколько может быть решений. Если ввести в пространстве прямоугольную декартову систему координат, то первое уравнение задает плоскость, а второе сферу радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. В зависимости от того, как расположена плоскость относительно сферы, мы будем иметь либо целую окружность решений, либо одно решение (точка касания), либо не иметь решений. Интуиция подсказывает, что здесь одно решение, то есть сфера касается плоскости. Чтобы убедиться в этом, нам нужно вычислить расстояние от начала системы координат (центра сферы) до плоскости. Так как в школьной программе нет формулы для непосредственного вычисления этого расстояния, мы можем воспользоваться тем, что это расстояние равно высоте треугольной пирамиды, которую отрезает плоскость в первом октанте. Вычисляя ее объем двумя способами, мы найдем расстояние и убедимся, что оно равно радиусу сферы. Так как эта точка – центр равностороннего треугольника получаем, что $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Второй способ (векторный). Рассматриваем два вектора $\vec{a}(x, y, z)$ и $\vec{b}(1, 1, 1)$. огда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},\ \vec{a}\vec{b} = 1.$$

Тогда $|\vec{a}||\vec{b}| = \vec{a}\vec{b}$, следовательно, векторы сонаправлены и $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. □

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1 \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$$

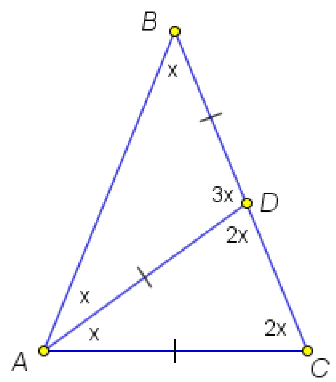
Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x^4, y^4, z^4)$ и $\vec{b}(1, -2, 3)$. Тогда

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{14}, \cos\varphi = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} > 1.$$

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений. □

Задача 6. Докажите тождество $\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{1}{2}$.

Решение. Мы видим в этом тождестве два угла: 36^0 и 72^0. Построим равнобедренный треугольник как показано на рисунке (а точнее два в одном), в котором будут эти углы.



Пусть треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. Возьмем точку D так, чтобы треугольники ACD и BDA были равнобедренными. Временно вопрос о существовании таких треугольников мы откладываем. Обозначим угол B через x. Тогда угол BAD тоже равен x. Угол ADC равен $2x$ как внешний, и BCA тоже $2x$ как угол при основании равнобедренного треугольника. Угол BAC равен $2x$ из равнобедренного треугольника ABC, значит, угол DAC будет x.

Наконец, угол BDA будет $3x$ как внешний. Таким выбором равнобедренных треугольников мы добились, что $x = 36^0$, $2x = 72^0$, то есть те углы, которые нужны по задаче. Сумма возникает на стороне BC

$$BC = BD + DC.$$

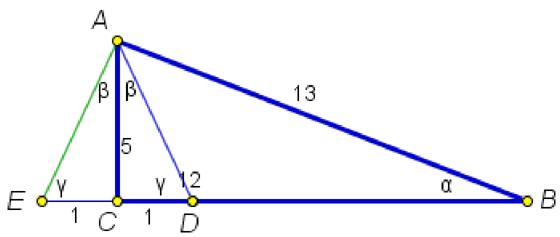
Пусть $AC = 1$. Тогда, проводя к основанию равнобедренного треугольника медиану-высоту-биссектрису, получим $DC = 2\cos 72^0$ и $BC = AB = 2\cos 36^0$. Соединяем вместе и получаем $1 + 2\cos 72^0 = 2\cos 36^0$.

Вернемся к вопросу о существовании точки D. Вычислив необходимые углы, мы можем построить такой треугольник. Начинаем с $AC = 1$. Далее откладываем угол два угла по 72^0. Лучи, пересекаясь, выдают точку B. Если провести биссектрису угла A, то получим точку D. Равенство BD, DA, AC доказывается непосредственными вычислениями. □

Задача 7. Докажите, что

$$2\,\mathrm{arcctg}\,5 - \mathrm{arctg}\,\frac{5}{12} = 0.$$

Решение. Видим $\mathrm{arctg}\,\frac{5}{12}$. Для него нужен прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Рисуем треугольник ABC с катетами $BC = 12$ и $AC = 5$.



Тогда $\mathrm{arctg}\,\frac{5}{12} = \angle B$. Обозначим его α. Теперь пристраиваем к треугольнику ABC еще один треугольник так, чтобы образовался угол $\mathrm{arctg}\,5$. Нужен прямоугольный треугольник с катетами 5 и 1. Катет $5 = AC$ уже есть, прямой угол есть.

Рисуем гипотенузу AD. Но нам нужны два таких угла. Тогда рисуем гипотенузу еще и с другой стороны от катета AC. Обозначим получившуюся точку через E. Тогда $\angle DAE = 2\,\mathrm{arcctg}\,5$. Обозначим $\angle DAC = \angle CAE = \beta$. Нам нужно показать, что $\alpha = 2\beta$.

Треугольник ABE равнобедренный с основанием AE. Обозначим угол AEB через γ. Тогда $\angle BAE = \gamma$ и $\angle ADE = \gamma$. Из треугольников ADE и ABE получаем $2\gamma + 2\alpha = 180^0$ и $2\gamma + \beta = 180^0$. Откуда получаем нужное равенство. □

9.2. Домашнее задание

1. Для положительных x, y, z найдите $\sqrt{3}xz+y(x+z)$, если $x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{xy}{\sqrt{3}} = 625$, $\frac{y^2}{3} + z^2 + \frac{yz}{\sqrt{3}} = 49$, $x^2 + z^2 + xz = 576$.

2. Решите системы уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9 \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27 \\ x^y + y^z + z^x = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y^2 + z^3 = 2 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 4 \\ x^3 + y^4 + z^5 = 8. \end{cases}$$

3. Докажите, что $\arccos \frac{15}{17} - 2 \operatorname{arcctg} 4 = 0$.

4. Докажите, что $\arcsin \frac{4}{\sqrt{17}} + \operatorname{arctg} 4 + \arcsin \frac{8}{17} = 180^0$.

5. Вычислите $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Занятие 10.

10.1. Геометрия+Комбинаторика

Вспоминаем задачу 5 – 6 класса. Дан круглый пирог. Нужно тремя прямыми разрезами разделить его на семь частей.

Более сложная задача, но доступная еще до систематического изучения геометрии.

Задача 1. Куб со стороной 3 можно разрезать на 9 кубов с ребром 1 с помощью шести разрезов плоскостями. Можно ли уменьшить количество разрезаний, если разрешить перемещать полученные при разрезании части куба?

Решение. Сначала представим себе, как можно разрезать куб шестью плоскостями (рисунок). Теперь с перекладываниями. Сразу разрезание куба со стороной 3 представить сложно. Что делать? Упрощать себе задачу. Сначала решить более простую. Что значит более простую. Здесь очевидно, что куб нужно взять с меньшим ребром: 2 или 1. Куб с ребром 1 резать не нужно, значит берем куб с ребром 2. Без перекладываний было бы 3 разреза. Теперь режем один раз и перекладываем так, чтобы при втором разрезе получить наибольшее количество частей: части $2 \times 2 \times 1$ кладем одну на другую. Теперь режем и получаем четыре части вида $1 \times 1 \times 2$. Опять складываем их одну на другую и режем: получаем нужные кубики. Получаем опять три разреза. Каждый раз мы сразу резали по максимуму частей, следовательно, уменьшить число разрезов не удалось. В упрощенной задаче у нас получился ответ нет. Переходим к изначальной задаче и применяем ту же технику. Сначала прикинем, сколько частей мы можем получить из куба, ставя все его части так, чтобы они делились на две части очередным разрезом. После первого разреза – две чисти, после второго – четыре, после третьего – восемь, … Каждый раз при разрезе мы получаем в два раза больше частей, чем было. Следовательно, при n-м разрезе мы получим 2^n (детям 5 – 6 класса об этом сообщать не обязательно). Но вот что нужно им показать, что после четвертого разреза получается 16 частей, а после пятого разреза получается 32 части.

Вспоминаем нашу задачу: нам нужно 27 кубиков. Значит, пятью разрезами, ставя одну на другую все части, которые еще нужно резать, мы получим нужные 27 кубиков. За четыре разреза это сделать не удастся. Объясните, почему за пять разрезов мы получаем 27 кубиков, а не 32 кубика.

Итак, мы не только решили задачу, но еще дополнительно доказали, что что наше решение наилучшее.

Здесь можно пойти дальше (это конечно будет уже задача не для 5 – 6 классов): разрезать аналогичным образом куб с ребром 4. Там нужно 9 разрезов. Можно ли обойтись меньшим числом разрезов? Всего кубиков должно быть 64. Это 2^6. Значит, обойдемся шестью разрезами.

Идем дальше: куб с ребром 5. Получаем 125 кубиков и 12 стандартных разрезов. Можно ли меньше? Рассуждая аналогично, получаем 7 разрезов. Дальше разница в количестве стандартных разрезов и минимальном числом разрезов будет расти. Для школьников старших классов можно сформулировать задачу в общем виде: исследовать случай куба с ребром n. Для студентов математических факультетов можно пойти еще дальше: исследовать аналогичную задачу для куба в многомерном пространстве.

Итак, уже на первой задаче мы увидели, что олимпиадная задача не только маленькое исследование, но и дает возможность формулировать более сложные задачи путем обобщения исходной. Это еще один прием научных исследований, который можно показать школьникам на примере олимпиадных задач. □

Задача 2. (6 – 8 классы) Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» – это скобка в виде буквы «П», состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

Решение. Считаем, сколько нам нужно отрезков: три каркаса разделенного квадрата – это $3 \cdot 12$ и $2 \cdot 9$ отрезков для их соединения. Итого, 54 единичных отрезка. Каждая буква «П» – это три отрезка, следовательно, нужно 18 таких букв. Рассмотрим одну из восьми вершин куба. Для того, чтобы припаять к ней три отрезка, нужно использовать не менее двух деталей. То есть для формирования вершин куба нужно не менее 16 деталей. Рассмотрим центр куба. Из него должно выходить 6 отрезков, и для этого необходимо не менее трех деталей. А так как одна и та же деталь не может использоваться в вершине куба и в его центре, то необходимо не менее 19 деталей. Противоречие. □

Задача 3. (10 класс, окружная) У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geq 3$)и все грани являются треугольниками. Докажите, что число вершин у такого многогранника, в которых сходится ровно три ребра, не превосходит $\frac{2n}{3}$.

Решение. Назовем вершину, в которой сходится три ребра, хорошей. Покажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное – пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани. Обозначим ее ABD. Поскольку вершина A – хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани – ABC, ABD и грани, содержащая ребра AC и AD, то есть грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \geq 3$. Итак, мы показали, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\frac{2n}{3}$. □

Задача 4. (10 класс, окружная) Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

Решение. Обозначим углы первого треугольника α_1, α_2, α_3, а углы второго треугольника β_1, β_2, β_3. Начинаем набирать информацию об углах: из условия мы знаем, что косинусы альф равны синусам бет. Значит, косинусы положительны и первый треугольник остроугольный. Из того же условия следует, что $\beta_i = \frac{\pi}{2} \pm \alpha_i$ (вспоминаем формулы приведения). Так как сумма углов треугольника равна π получаем

$$\pi = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{3\pi}{2} + (\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3).$$

В треугольнике может быть лишь один тупой угол (пусть β_1), следовательно, плюс будет только перед α_1. Перед остальными слагаемыми будут минусы. Тогда

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

и $\frac{\pi}{2} + 2\alpha_1 - \pi = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$. □

Задача 5. (10 класс, окружная) На плоскости отмечено $N \geq 3$ различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \leq (n+1)^2$.

Решение. Нужно соединить между собой два числа N и n: количество точек и количество числовых значений. Точка и число – это окружность. Поэтому пытаемся проводить окружности.

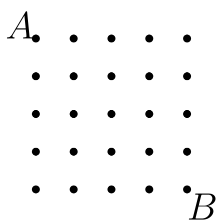
Пусть A_1, A_2, …, A_N – отмеченные точки и каждое из расстояний A_iA_j равно одному из n фиксированных чисел r_1, r_2, …, r_n. Фиксируем произвольное i. Тогда каждая из точек A_j, $j \neq i$ лежит на одной из окружностей $O(A_i, r_1)$, $O(A_i, r_2)$, …, $O(A_i, r_n)$. Введем на плоскости систему координат так, что ее оси не параллельны прямым A_iA_j. Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1 (самая левая точка). Среди прямых A_1A_2, A_1A_3, …, A_1A_N найдем прямую с наибольшим угловым коэффициентом, пусть это прямая A_1A_2 (самая круто стоящая прямая). Тогда все остальные точки A_3, …, A_N расположены в одной полуплоскости α относительно нее (все правее ее).

По условию каждая из точек A_3, A_4, …, A_N является точкой пересечения окружностей $O(A_1, r_k)$, $O(A_2, r_\ell)$ для некоторых $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждая из n^2 пар таких окружностей имеет не более одной точки пересечения, принадлежащей полуплоскости α. Следовательно, среди $N-2$ точек A_3, A_4, …, A_N имеется не более n^2 различных. Отсюда $N - 2 \leq n^2$, $N \leq n^2 + 2 \leq (n+1)^2$. $\square$

10.2. Домашнее задание

1. (6 класс, школьная, 2013) Как разрезать квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых?

2. (7 класс, окружная, 2014)



Соедините точки A и B ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:
1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;
2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;
3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

3. (к задаче 2) Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности.

4. (10 класс, школьная, 2015)
В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

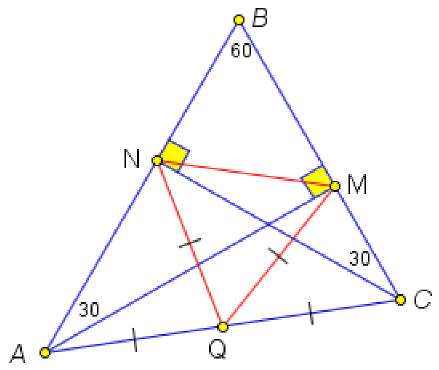
5. (8 класс, школьная, 2016)
Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линия сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

Занятие 11.

11.1. Решение различных задач (планиметрия)

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60^0, AM и CN – его высоты, а Q – середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ – равносторонний.

Решение. Рисуем картинку.



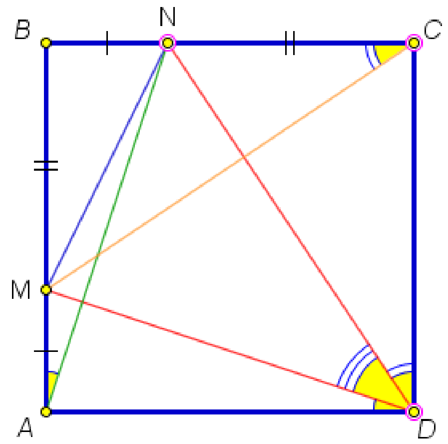
Сразу видим, что NQ и MQ – медианы в прямоугольных треугольниках, проведенные из вершин прямых углов. Следовательно, они равны половине гипотенузы (общей у этих треугольников), следовательно, треугольник NMQ – равнобедренный. Осталось показать, что NM равно NQ или MQ или AQ или QC или $\frac{1}{2}AC$.

Конечно, еще можно попытаться доказать, что угол NQM равен 60^0. На картинке сразу бросаются в глаза два прямых угла, опирающихся на один отрезок. Значит, четырехугольник $ANMC$ вписанный в окружность, а это даст равенство углов. Причем из прямоугольных треугольников ABM и CNB мы получим, что угол BAM равен углу BCN и они равны 30^0.

Попробуем первый путь. Причем наличие прямоугольного треугольника с углом в 30^0 намекает на то, что здесь есть соотношение линейных величин $2:1$, то что нам нужно. Рассматриваем треугольник ABM. В нем $BM = \frac{1}{2}AB$. Аналогично, из треугольника BNC получаем $BN = \frac{1}{2}BC$. Следовательно, треугольник NMB подобен треугольнику CAB с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Откуда и получаем, что $NM = \frac{AC}{=}NQ$. Итак, треугольник NMQ равносторонний. □

Задача 2. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму трех углов, под которыми видна гипотенуза из трех оставшихся вершин.

Доказательство. Рисуем картинку и наносим на нее данные.

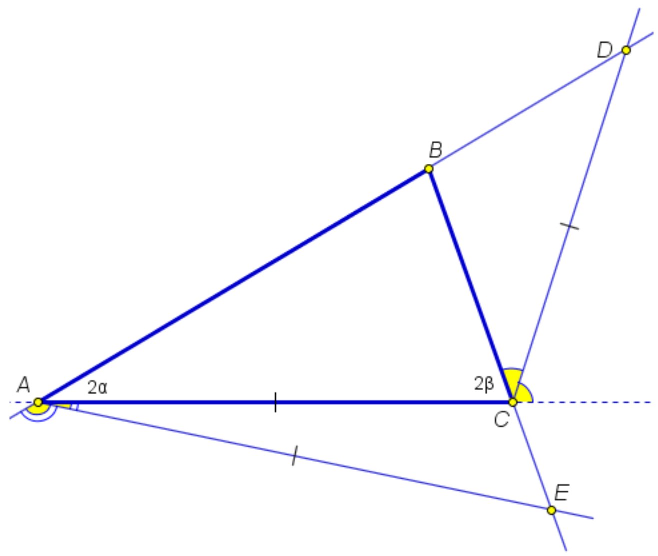


От нас требуют найти сумму углов. Скорее всего, находить каждый угол по отдельности не нужно. Значит, нужно сложить эти три угла в один угол (помните, как это делалось при доказательстве суммы углов треугольника). Раз нам дан квадрат, у него все углы прямые, то и складывать, наверно, нужно в его прямой угол и ответ будет 90^0.

У нас на выбор три угла квадрата: A, D, C. В каждом из них один из нужных нам углов уже лежит. Перенести нужно еще два. Угол D является более привлекательным, так как более сложный угол MDN там уже есть. Смотрим на два оставшихся угла вокруг него. Угол MDA из треугольника MDA равен углу BAN из треугольника BAN, так как треугольники равны (по двум катетам). Аналогично поступаем с углом NCM и получаем ожидаемый ответ: 90^0. □

Задача 3. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D, а биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Рисуем картинку.

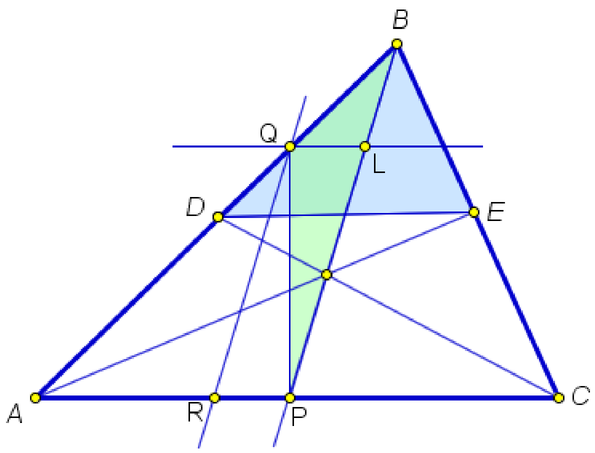


Видим, что нет ни одного числового данного ни для углов, ни для линейных элементов. Есть два равнобедренных треугольники и две биссектрисы несколько в стороне от этих треугольников. Если здесь были бы какие-то линейные соотношения, то была бы надежда выйти либо на равнобедренный прямоугольный треугольник, либо на прямоугольный с углами 30^0 и 60^0. Но их нет. Что делать?

Нам нужно найти три угла в треугольнике. Если найдем два то по сумме углов 180^0 найдем третий. Следовательно, у нас две неизвестные величины. Поэтому обозначим α и β два угла треугольника ABC. Так как биссектрисы находятся рядом с углами A и C этого треугольника, то обозначим $\angle A = 2\alpha$, а $\angle C = 2\beta$ (Двойки ввели, так как наверняка придется идти к биссектрисам, а они делят углы пополам и придется делить на два). Вычисляем смежные углы и делим их пополам: $90^0 - \alpha$ и $90^0 - \beta$. Биссектрисы сработали. Теперь время равнобедренных треугольников. В треугольнике ACD получаем: $\angle A = \angle D = 2\alpha$, $\angle C = 90^0 + \beta$. В треугольнике ACE с помощью вертикальных углов получаем: $\angle C = \angle E = 180^0 - 2\beta$, $\angle A = 90^0 - \alpha$. Тогда по сумме углов треугольника получаем два уравнения: $4\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$ и $90^0 + 360^0 - \alpha - 4\beta = 180^0$. Решая эту систему, находим, что углы треугольника ABC равны 12^0, 132^0, 36^0. □

Задача 4. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная AC (точка D на AB, точка E – на BC). Прямая, проходящая через вершину B и точку пересечения диагоналей трапеции $ADEC$, пересекает сторону AC в точке P. На отрезке BD взята точка Q. Найдите площадь треугольника QBP, если площадь треугольника DBE равна 8, а $QB : AQ = DE : AC = 1 : 7$.

Решение. Рисуем картинку.



Сразу видим, что есть площадь маленького треугольника DEB и есть отношение сторон этого треугольника и большого треугольника ABC. Тогда сразу можно найти площадь большого треугольника. Она равна

$$S_{ABC} = 8 \cdot 7 \cdot 7 = 8 \cdot 49.$$

Прямая BP проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, а значит, она проходит через середины ее оснований.

Тогда прямая BP делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника и

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 49 = 4 \cdot 49.$$

Треугольник BQP (площадь которого нужно найти) очень плохо расположен по отношению к данным задачи для нахождения его сторон, углов или высот. Поэтому его площадь придется вычислять либо разбивая на части, либо как часть какого-то более удобного треугольника. Информация в этом треугольнике есть для точки Q. Поэтому попробуем разбить этот треугольник на части, проводя прямые через Q. Понятно, что их нужно проводить параллельно DE и BP, чтобы иметь возможность воспользоваться подобием.

Пусть L, такая, что $QL \| DE$ и R такая, что $QR \| BP$. Тогда

$$S_{AQR} = \frac{7}{8}\frac{7}{8}4 \cdot 49; \; S_{QBL} = \frac{1}{8}\frac{1}{8}4 \cdot 49.$$

Тогда

$$S_{QLP} = \frac{1}{2}(4 \cdot 49 - \frac{49}{16} - \frac{49 \cdot 49}{16}).$$

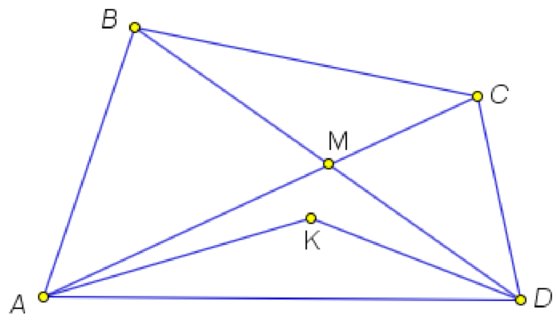
Наконец, по частям находим искомую площадь

$$S_{BQP} = S_{QBL} + S_{QLP} = \frac{49}{2}.$$

□

Задача 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ верны равенства $AB = BC = CD$, M – точка пересечения диагоналей, K – точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

Решение. Рисуем картинку.



Изображаем четырехугольник $ABCD$ и его диагонали. Теперь нужно нарисовать точку K пересечения биссектрис углов A и D. Понятно, что раз нужно доказать, что точки M, K, A, D лежат на одной окружности, значит точка K не может лежать ни внутри треугольника AMD, ни внутри треугольника BMC. Но это нужно строго доказать. Предположим, что K лежит внутри треугольника AMD.

Обозначим углы $\angle KAD = \alpha$, $\angle MAK = \beta$, $\angle KDA = \gamma$, $\angle MDK = \delta$. Учитывая, что треугольники ABC и BCD равнобедренные, получаем

$$\angle BCM = \angle BAM = \alpha - \beta; \; \angle CBM = \angle CDM = \gamma - \delta.$$

Из треугольника AMD

$$\angle BMC = \angle AMD = 180^0 - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta).$$

Так как в треугольнике BMC сумма углов должна быть 180^0, получим

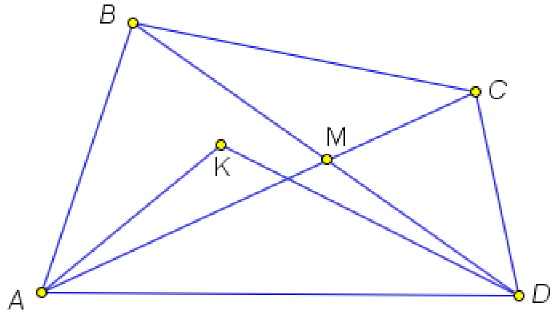
$$\alpha - \beta + \gamma - \delta + 180^0 - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) = 180^0.$$

Откуда получаем, что $\beta + \delta = 0$, что противоречит теории измерения углов. Аналогично доказывается, что точка K не может лежать внутри треугольника BMC.

Возможны еще случаи, когда $K = M$. Этот случай возможен. $ABCD$ является ромбом. и, очевидно, что все точки A, D, M, K лежат на одной окружности.

Еще возможны случаи, когда K лежит либо на AC, либо на BD. Тогда рассуждая аналогично, мы получим, что либо $\delta = 0$, либо $\beta = 0$, что означает $K = M$.

Остаются случаи, когда K лежит либо в треугольнике BMA, либо в треугольнике CMD.



Обозначаем углы также и точно также вычисляем углы. Но теперь получаем, что $\beta = \delta$. Таким образом, углы KAM и KDM равны, а значит, точки A, K, D, M лежат на одной окружности. □

Задача 6. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\angle APB = \angle ACB + 60^0$, $\angle BPC = \angle BAC + 60^0$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^0$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP за точку P с описанной окружностью треугольника ABC лежат в вершинах равностороннего треугольника.

Решение. Обозначим точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью через T, R, S соответственно. Мы получаем треугольник TRS, вписанный в окружность. Если знать, что угол с вершиной внутри окружности равен полусумме дуг, высекаемых его сторонами и их продолжениями, то задача решается в одну строчку. Предположим, что этот факт не известен.

Обозначим углы треугольника ABC через α, β, γ, соответственно. Отрезки AP, BP, CP делят каждый из этих углов на две части. Отметим их разного вида символами. От треугольника ABC нужно уходить к треугольнику TRS. Раз оба треугольника вписаны в одну и ту же окружность, то, используя равенство углов, опирающихся на одну и ту же хорду, переносим символы с треугольника ABC на треугольник TSR. Каждый из углов треугольника TSR равен сумме двух частей. Вычисляем их, используя треугольник ABC. □

11.2. Домашнее задание

1. Даны две не пересекающиеся окружности. Из центра каждой из этих окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите,

что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны между собой.

2. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

3. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

4. Пусть CM – медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^0$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный или прямоугольный.