Вариант 1. (Грудцына Д.А.)

1. Пусть CM – медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB+\angle MCB = 90^0$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный или прямоугольный.

2. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

3. Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками (с концами в этих точках) так, чтобы из каждой точки выходило ровно по четыре отрезка?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3+2y^3+z^3=3 \\ x^6+y^6+z^6=1. \end{cases}$$

Вариант 2. (Фомичева П.С.)

1. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

2. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму трех углов, под которыми видна гипотенуза из трех оставшихся вершин.

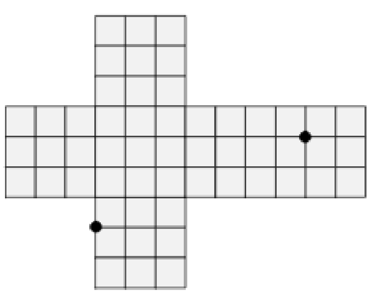
3. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D – центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AI_A, BI_B, CI_C, DI_D пересекаются в одной точке.

4. Вычислите $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3$.

Вариант 3. (Гурьев Н.С.)

1. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D, а биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\angle APB = \angle ACB + 60^0$, $\angle BPC = \angle BAC + 60^0$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^0$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP за точку P с описанной окружностью треугольника ABC лежат в вершинах равностороннего треугольника.



3. Рубик сделал развертку куба размером $3\times3\times3$ и отметил на ней две точки (см. рисунок). Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развертки куб?

4. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}+\operatorname{arctg} 5$.

Вариант 4. (Филатова С.И.)

1. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60^0, AM и CN – его высоты, а Q – середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ – равносторонний.

2. Даны две не пересекающиеся окружности. Из центра каждой из этих окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны между собой.

3. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с плоскими прямыми углами при вершине D, в которой $CD = AD + DB$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна 90^0.

4. Докажите, что система

$$\begin{cases} x^6 + y^6 + z^6 = 1 \\ 2x^3 + 3y^3 - 4z^3 = \sqrt{80} \end{cases}$$

не имеет решений.

Вариант 5. (Ларина И.В.)

1. Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырехугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие – к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок – квадрат. Обязательно ли это так? Ответ обосновать.

2. Один из углов трапеции равен 60^0. Найдите отношение ее оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

3. Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

4. Докажите, что система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

не имеет решений.

Вариант 6. (Ржанова О.В.)

1. С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

2. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная AC (точка D на AB, точка E – на BC). Прямая, проходящая через вершину B и точку пересечения диагоналей трапеции $ADEC$, пересекает сторону AC в точке P. На отрезке BD взята точка Q. Найдите площадь треугольника QBP, если площадь треугольника DBE равна 8, а $QB : AQ = DE : AC = 1 : 7$.

3. Укажите точки на поверхности куба, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

4. Вычислите $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Вариант 7. (Ануфриева Е.А.)

1. Пусть CM – медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^0$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный или прямоугольный.

2. В треугольнике ABC точка M – середина AC, MD и ME – биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если $DE = 7$,

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены четыре высоты – перпендикуляры из вершин на противоположные грани. Назовем высоту пирамиды длинной, если она не короче каждой из трех высот треугольника, являющегося гранью, к которой эта высота проведена. Докажите, что длинных высот не может быть больше трех.

4. Докажите, что система

$$\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1 \\ 5x^4 - 3y^4 + 7z^4 = 200 \end{cases}$$

не имеет решений.

Вариант 8. (Симонова А.А.)

1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

2. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^0$, $\angle CAB = 60^0$, $\angle CBD = 20^0$. Найдите $\angle CDB$.

3. Можно ли сложить сплошную стенку, имеющую форму параллелепипеда с размерами $27 \times 16 \times 15$, из кирпичей размером $3 \times 5 \times 7$, если кирпичи нельзя ломать, но можно поворачивать?

4. Докажите, что $\arccos\frac{15}{17} - 2\,\mathrm{arcctg}\,4 = 0$.

Вариант 9. (Коновалова О.В.)

1. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60^0, AM и CN – его высоты, а Q – середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ – равносторонний.

2. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

3. Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками (с концами в этих точках) так, чтобы из каждой точки выходило ровно по четыре отрезка?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 1. \end{cases}$$

Вариант 10. (Буга А.Г.)

1. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

2. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму трех углов, под которыми видна гипотенуза из трех оставшихся вершин.

3. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D – центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AI_A, BI_B, CI_C, DI_D пересекаются в одной точке.

4. Вычислите $\mathrm{arctg}\,1 + \mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3$.