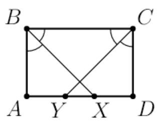
Вводное занятие по олимпиадным задачам (2019-20 уч.год)

8 января 2020 г.

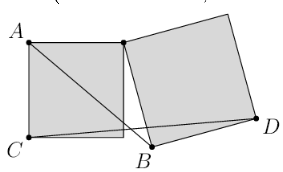
2018-19

1. (школьная, 8 класс)



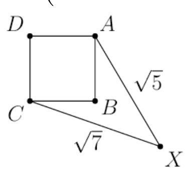
В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 6, сторона BC равна 11. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающих сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка XY.

2. (школьная, 9 класс)



Два квадрата имеют общую вершину. Найдите отношение отрезков AB и CD, показанных на рисунке.

3. (школьная, 11 класс)

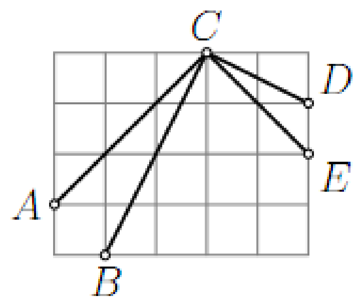


На плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной 1 и точка X. Известно, что $XA = \sqrt{5}$, $XC = \sqrt{7}$. Чему равно XB?

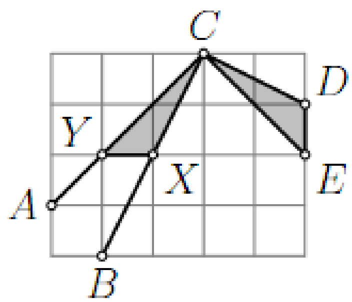
4. (окружная, 11 класс) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ боковое ребро равно a, плоский угол при вершине S равен 10^0. Муравей ползет по поверхности пирамиды из вершины A, стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку A. Какова длина кратчайшего пути?

2019-20
Школьный уровень
8 класс.

Задача 4. На клетчатой бумаге отмечены точки A, B, C, D, E, как на рисунке справа. Докажите, что $\angle ACB = \angle DCE$.



Решение.



Отметим точки X и Y, как показано на рисунке. Заметим, что $\triangle CXY = \triangle CDE$ по трём сторонам, поэтому $\angle ACB = \angle ECD$, что и требовалось доказать. □

9 класс.

Задача 5. На стороне AD квадрата $ABCD$ отметили точку K, а на продолжении луча AB за точку B — точку L. Известно, что $\angle LKC = 45^\circ$, $AK = 1$, $KD = 2$. Найдите LB.

Ответ: $LB = 2$.

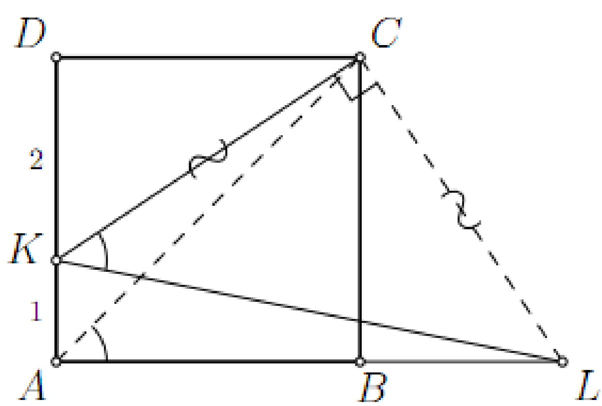


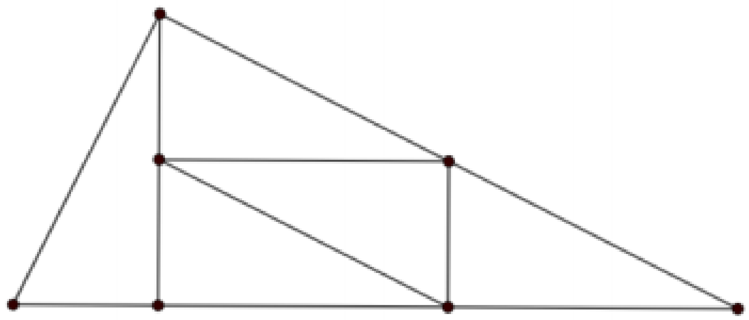
Рис. 1: к решению задачи 5

Решение. Заметим, что $\angle LAC = 45^\circ = \angle LKC$, откуда следует, что четырёхугольник $LAKC$ вписанный. Тогда $\angle KCL = 90^\circ$ (рис. 1). Значит, треугольник LCK равнобедренный прямоугольный, т. е. $LC = KC$. Прямоугольные треугольники BLC и DKC равны по гипотенузе и катету, поэтому $BL = KD = 2$. □

10 класс.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике один катет в два раза больше другого. Разрежьте его на 5 равных треугольников.

Решение. Проведём высоту из вершины треугольника к его гипотенузе. В большем из двух получившихся треугольников проведём все средние линии. Нетрудно понять, что получившееся разбиение удовлетворяет условию задачи: все треугольники прямоугольные и подобны исходному, а их гипотенузы равны меньшему катету исходного.



$\square$

Задача 5. Внутри квадрата $ABCD$ отмечены точки K и M (точка M находится внутри треугольника ABD, точка K — внутри BMC) так, что треугольники BAM и DKM равны ($AM = KM$, $BM = MD$, $AB = KD$). Найдите $\angle KCM$, если $\angle AMB = 100°$.

Ответ: $35°$.

Решение. Заметим, что треугольники ABM и AMD также равны по трём сторонам. Таким образом, точка M лежит на диагонали AC квадрата, то есть $\angle MCD = \angle MAD = \angle MAB = 45°$ (рис. 1).

Кроме этого, из равенства треугольников BAM и DKM следует, что $\angle MKD = \angle BAM = 45°$. Получается, что четырёхугольник $MKCD$ — вписанный. Тогда $\angle KCM = \angle KDM = 180° - 100° - 45° = 35°$. $\square$

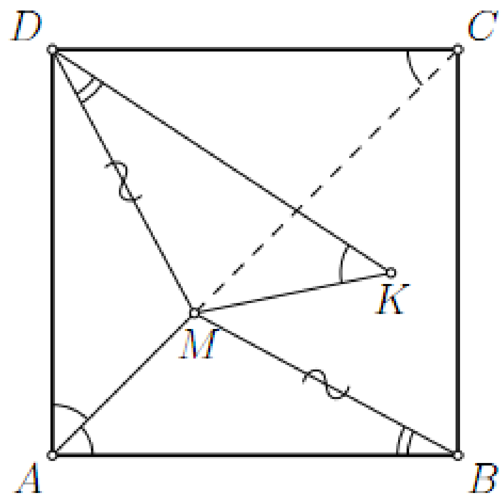


Рис. 1: к решению задачи 5

11 класс

Задача 3. На плоскости даны квадрат и правильный треугольник такие, что площадь каждой из этих двух фигур численно равна периметру другой. Найдите сторону данного квадрата.

Ответ: $2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$.

Решение. Пусть сторона правильного треугольника равна a, а сторона квадрата равна b. Тогда $3a = b^2$ и $4b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Отсюда $b^4 = 9a^2 = 48\sqrt{3}b$. Получается, что $b^3 = 48\sqrt{3}$, откуда $b = 2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$. □

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P — середина ребра AA_1, точка Q — середина ребра CD, точка R — середина ребра B_1C_1. Докажите, что $\angle PB_1Q < \angle PRQ$.

Решение. Пусть сторона куба равна $2a$. Тогда по теореме Пифагора

$$PB_1 = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$$QB_1 = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + a^2} = 3a,$$

$$PR = RQ = PQ = \sqrt{4a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6}a.$$

Тогда треугольник PQR правильный, откуда $\angle PRQ = 60^\circ$. По теореме косинусов

$$\cos\angle PB_1Q = \frac{PB_1^2 + QB_1^2 - PQ^2}{2\cdot PB_1\cdot QB_1} = \frac{5a^2 + 9a^2 - 6a^2}{6\sqrt{5}a^2} = \frac{4}{3\sqrt{5}} > \frac{1}{2}.$$

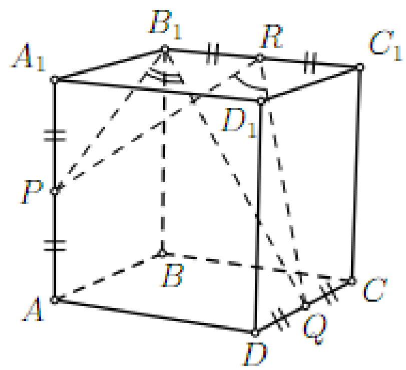


Рис. 1: к решению задачи 5

Последнее неравенство выполнено, поскольку $64 > 45$, откуда $8 > 3\sqrt{5}$.

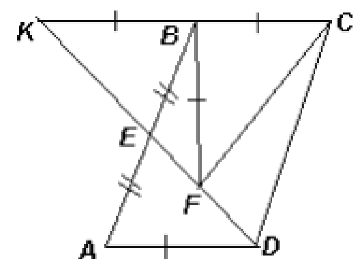
Тогда $\cos\angle PB_1Q > \cos 60^\circ = \cos\angle PRQ$, откуда $\angle PB_1Q < \angle PRQ$. □

Муниципальный уровень

8 класс.

8.4. Точка E – середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. На отрезке DE нашлась такая точка F, что $AD = BF$. Найдите величину угла CFD.

Ответ: 90°.



Решение. Продолжим DE до пересечения с прямой BC в точке K (см. рис. 8.4). Так как $BK \parallel AD$, то $\angle KBE = \angle DAE$. Кроме того, $\angle KEB = \angle DEA$ и $AE = BE$, значит, равны треугольники BKE и ADE. Тогда $BK = AD = BC$.

Таким образом, в треугольнике CFK медиана FB равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный с прямым углом F. Следовательно, и угол CFD – прямой.

8.5. Кузя разрезал выпуклый бумажный 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом разрезал один из двух получившихся многоугольников, затем – один из трёх получившихся, и так далее. В итоге у него получилось восемь n-угольников. Найдите все возможные значения n.

Ответ: $n = 11$.

Решение. Прямолинейный разрез бывает трёх видов: от стороны к стороне, от вершины к стороне и от вершины до вершины. Значит, после одного разреза суммарное количество сторон многоугольников увеличивается на 4, 3 или 2 соответственно. Кузя сделал 7 разрезов, поэтому добавилось не меньше, чем 14, но не больше, чем 28 сторон, Следовательно, у восьми n-угольников в сумме от 81 до 95 сторон. Из целых чисел этого отрезка только число 88 делится на 8 без остатка, поэтому $n = 88 : 8 = 11$.

9 класс.

9.2. Дана равнобокая трапеция с основаниями 4 и 12 и высотой 4. Можно ли разрезать её на три части и сложить из этих частей квадрат?

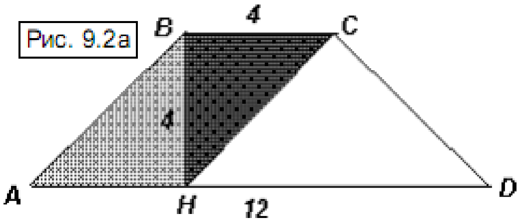


Рис. 9.2а

Ответ: можно.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$: $BC = 4$, $AD = 12$ и высота $BH = 4$ (см. рис. 9.2а). Проведем также отрезок CH. Так как $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = 4 = BC$, то $ABCH$ – параллелограмм, составленный из двух равных прямоугольных и равнобедренных треугольников. Треугольник DCH – также равнобедренный и прямоугольный, так как $CH = AB = CD$ и $\angle CDH = \angle CAH = \angle CHD = 45°$.

Значит, разрезав трапецию на три части по прямым BH и CH и сложив так, как показано на рис. 9.2б, получим ромб с прямым углом, то есть квадрат.

Отметим, что поиску решения могут также помочь вычисления: площадь трапеции равна 32, а боковая сторона равна $\sqrt{32}$, *откуда следует, что стороной квадрата должна стать боковая сторона трапеции.*

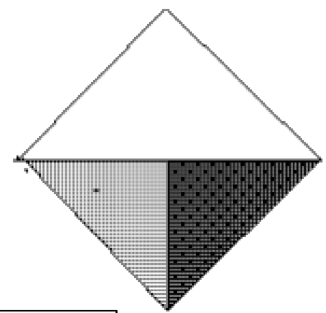


Рис. 9.2б

9.4. На полуокружности с диаметром AD отмечены точки B и C. Точка M – середина отрезка BC. Точка N такова, что M – середина отрезка AN. Докажите, что прямые BC и DN перпендикулярны.

Решение. Первый способ. Пусть O – центр окружности. Так как M – середина BC, то $OM \perp BC$ (см. рис. 9.4а). Кроме того, OM – средняя линия треугольника AND, поэтому $OM \parallel DN$. Следовательно, $DN \perp BC$.

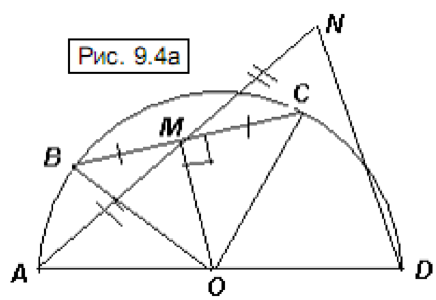


Рис. 9.4а

Второй способ. Из условия задачи следует, что $ABNC$ – параллелограмм (см. рис. 9.4б). Поэтому $NC \parallel AB$ и $BN \parallel AC$. Вписанные углы ACD и ABD – прямые, так как они опираются на диаметр. Следовательно, $DC \perp BN$ и $DB \perp NC$. Значит, высоты треугольника DNB лежат на прямых DC и NC, тогда C – ортоцентр этого треугольника. Поэтому третья высота треугольника DNB лежит на прямой BC, то есть $BC \perp DN$.

Эти же идеи можно также реализовать, используя векторы.

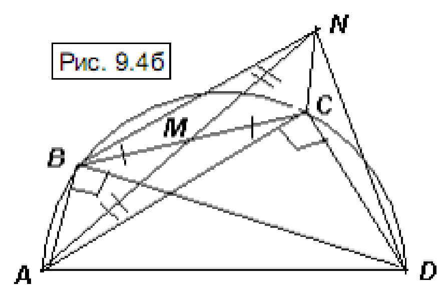


Рис. 9.4б

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

10 класс.

10.2. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

Ответ: можно.

Решение. Разделим квадрат на два равных прямоугольника размером 4×8. Диагональ такого прямоугольника равна $\sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} < 9$. Следовательно, каждый из полученных прямоугольников можно покрыть описанным около него кругом, диаметр которого равен длине диагонали прямоугольника. Значит, и кругом с диаметром 9 такой прямоугольник покрыть можно. Тогда данный квадрат можно покрыть двумя кругами диаметра 9.

«–»*Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.4. Вписанная окружность треугольника *ABC* касается стороны *AC* в точке *D*. Вторая окружность проходит через точку *D*, касается луча *BA* в точке *A* и, кроме того, касается продолжения стороны *BC* за точку *C*. Найдите отношение *AD* : *DC*.

Ответ: 3 : 1.

Решение. Пусть вторая окружность касается луча *BC* в точке *K*, а вписанная окружность касается сторон *AB* и *BC* треугольника в точках *P* и *Q* соответственно (см. рис. 10.4). Далее можно рассуждать по-разному.

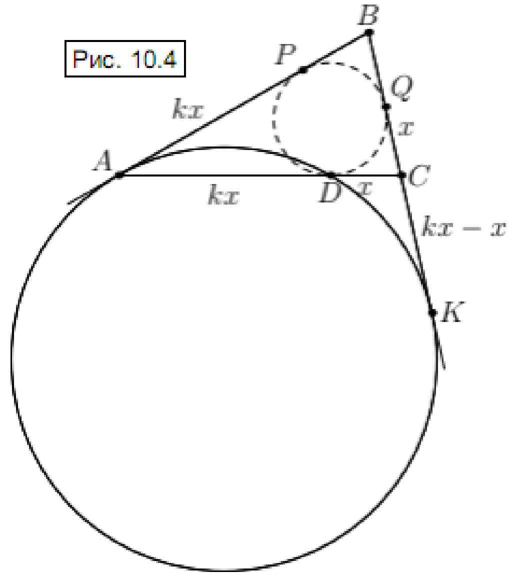


Рис. 10.4

Первый способ. Пусть $CD = CQ = x$ и $AD = AP = kx$. Так как $BA = BK$ и $BP = BQ$, то $PA = QK$, откуда $CK = kx - x$. По теореме о касательной и секущей: $CD \cdot CA$

$= CK^2$, то есть $x(x + kx) = (kx - x)^2$. Разделив обе части этого равенства на x^2, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $k^2 = 3k$, то есть $k = 3$.

Второй способ. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда $CD = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$, $CK = BK - BC = AB - BC = c - a$. По теореме о касательной и секущей: $CD \cdot CA = CK^2$, то есть $\frac{a+b-c}{2} \cdot b = (c-a)^2 \Leftrightarrow b^2 - (c-a)b - 2(c-a)^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное

11 класс.

«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.2. В треугольной пирамиде *SABC* боковое ребро *SA* перпендикулярно основанию *ABC*. Известно, что биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются. Докажите, что углы *ABC* и *ACB* равны.

Решение. Биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются в точке *D*, лежащей на ребре *BC* (см. рис. 11.2).

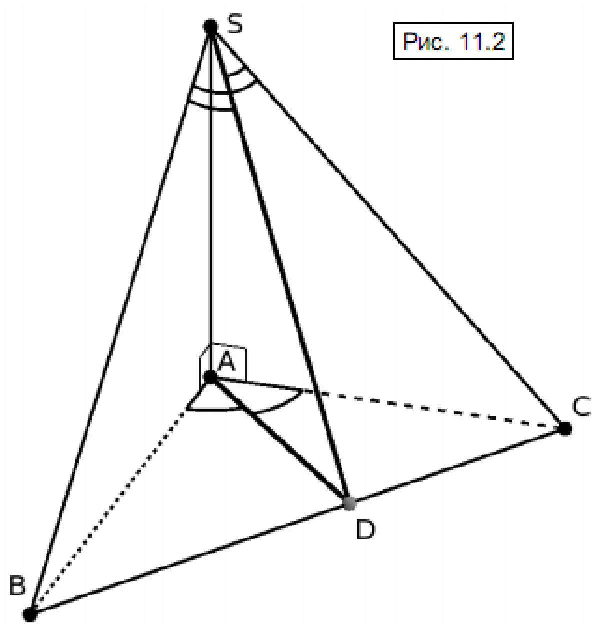


Рис. 11.2

По свойству биссектрисы треугольника: *BD* : *DC* = *AB* : *AC* и *BD* : *DC* = *SB* : *SC*. Следовательно, *AB* : *AC* = *SB* : *SC*. Перепишем эту пропорцию в виде *AB* : *SB* = *AC* : *SC*. Тогда в прямоугольных треугольниках *SAB* и *SAC* равны косинусы острых углов *ABC* и *ACB*, значит, равны и сами углы.

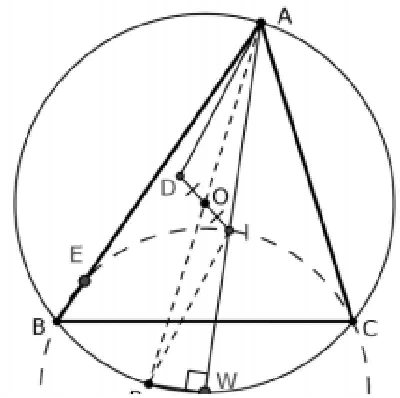
Получив пропорцию AB : AC = SB : SC, искомое равенство углов можно также получить из равенства треугольников SAB и SAC.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

11.6. В треугольнике ABC построена точка D, симметричная центру I вписанной окружности относительно центра O описанной окружности. Докажите, что $AD^2 = 4R^2 - AB\cdot AC$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC.

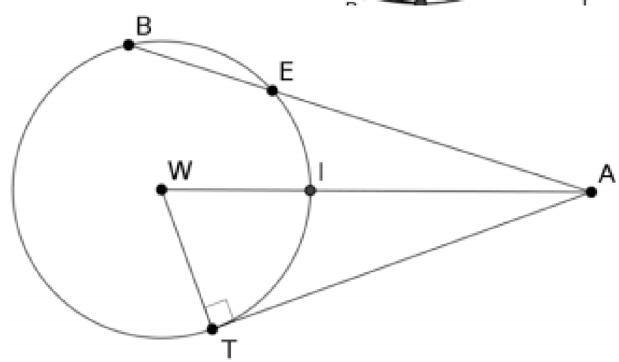
Решение. Пусть биссектриса AI пересекает описанную окружность в точке W. Проведем диаметр AP (см. рис 11.6а). Тогда $ADPI$ – параллелограмм и $AD = PI$.



Тогда доказываемое равенство можно записать в виде: $AB\cdot AC = 4R^2 - AD^2 = AP^2 - PI^2$ (1). Кроме того, так как AP – диаметр окружности, то угол AWP – прямой. Тогда правую часть равенства (1) можно преобразовать: $AP^2 - PI^2 = (AW^2 + PW^2) - (WI^2 + PW^2) = AW^2 - WI^2$.

Таким образом, задача сводится к доказательству равенства $AB\cdot AC = AW^2 - WI^2$ (2).

Воспользуемся известным фактом: $WB = WC = WI$, который называют *теоремой трилистника* или *леммой о трезубце*. Центр W описанной окружности треугольника BIC лежит на биссектрисе угла BAC, поэтому точки пересечения этой окружности со сторонами угла BAC попарно симметричны относительно биссектрисы AW. В частности, симметричны точки C и E, значит, $AE = AC$.



Пусть AT – касательная к описанной окружности треугольника BIC (см. рис. 11.6б). Тогда $AB\cdot AE = AT^2$ (3). Из треугольника AWT по теореме Пифагора $AT^2 = AW^2 - WT^2 = AW^2 - WI^2$ (4). Из равенств (3) и (4), учитывая также, что $AC = AE$, получим: $AB\cdot AC = AB\cdot AE = AT^2 = AW^2 - WI^2$, то есть равенство (2), которое равносильно утверждению задачи.

В заключительной части решения можно обойтись без теоремы Пифагора, если использовать степень s точки A относительно окружности (BIC): $s = AB\cdot AE = AB\cdot AC = AW^2 - WI^2$. Это утверждение, равно как и теорему о трилистнике, школьники могут использовать без доказательства.