Планы занятий по тензорной алгебре.

Занятие 1. (24.02.2015)

Примеры ковекторов. Базис векторного пространства ковекторов. Линейные операторы (эндоморфизмы).

Повторение: векторное пространство, ковектор, множество ковекторов – линейное пространство.

1. Пример ковектора e^i. Доказать, что ковектор.

2. $(e^1, \dots, e^n)$ – базис сопряженного пространства. Это дуальный базис для $(e_1, \dots, e_n)$. Доказать. Напомнить определение базиса, линейной независимости.

3. Компоненты ковектора относительно базиса. Совпадение компонент ковектора и координат относительно дуального базиса.

4. Замечание: система ковекторов $(e^1, \dots, e^n)$ будет дуальным базисом для $(e_1, \dots, e_n)$ тогда и только тогда, когда $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Домашнее задание: пусть дано двумерное векторное пространство V^2 всех векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$ – фиксированный не нулевой вектор, $(\vec{i}, \vec{j})$ – ортонормированный базис V^2. Зададим отображение $u : V^2 \to \mathbb{R}$ по формуле $u(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x}$, то есть вектор $\vec{a}$ скалярно умножается на вектор $\vec{x}$. Докажите, что u является ковектором. Найдите компоненты этого ковектора в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

4. Правило суммирования Эйнштейна. Системы равенств с помощью свободных индексов. Расписать $b_i = C^j_i a_j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

5. Линейный оператор (определение еще раз). Матрица линейного оператора в базисе. Сначала на 2×2, затем общий случай. Пример линейного оператора – поворот на 90^0. Проверить линейность на картинке. Написать его матрицу в правом ортонормированном базисе.

Домашнее задание: пусть дано двумерное векторное пространство V^2 всех векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$ – фиксированный не нулевой вектор, $(\vec{i}, \vec{j})$ – правый ортонормированный базис V^2. Зададим отображение $L : V^2 \to V^2$ по формуле $L(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$. Докажите, что это отображение является линейным оператором (эндоморфизмом). Найдите матрицу L в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

Занятие 2. (03.03.2015)

Линейные операторы (продолжение). Формулы перехода.

Повторение: векторное и сопряженное пространство (векторы и ковекторы). Равенство размерностей, базис и дуальный базис. Координаты вектора и компоненты ковектора (координаты ковектора). Линейный оператор и его матрица в базисе.

1. С помощью матрицы линейного оператора находим значение для любого вектора. Общий случай. Посчитать для поворота на 90^0. Пример для матрицы 2×2, переход к матричному умножению. Пример для поворота в матричном виде.

Домашнее задание: пусть в векторном пространстве V^3 относительно базиса (e_1, e_2, e_3) даны матрица линейного оператора

$$(L^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $X(1, 0, -1)$. Вычислите координаты вектора $L(X)$. Найдите числа: $L^i_j X^j$, L^i_i.

Домашнее задание: пусть даны две матрицы

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = (C_j^i); \quad D = \begin{pmatrix} D_1^1 & D_2^1 \\ D_1^2 & D_2^2 \end{pmatrix} = (D_j^i).$$

Проверьте, что для этих матриц выполняется равенство $(CD)_j^i = C_k^i D_j^k$, где CD – обычное произведение матриц.

Дополнительное задание (для интересующихся, выполнять не обязательно). Проверьте формулу $(CD)_j^i = C_k^i D_j^k$ для матриц размера $n \times n$.

2. Векторное пространство V. Матрица перехода от базиса к базису. Пересчет координат вектора. Выразить новые через старые (умножение на обратную матрицу в индексном виде через матричное умножение).

Домашнее задание: пусть в векторном пространстве V дано два базиса (e_1, e_2) (старый) и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (новый), $\varepsilon_1(1, 2)$, $\varepsilon_2(-1, -3)$ в базисе (e_1, e_2). Вектор X имеет координаты $(2, -1)$ в новом базисе. Найдите его координаты в старом базисе.

Занятие 3. (10.03.2015)

Формулы перехода (продолжение).

Повторение: Векторное пространство и два базиса в нем. Матрица перехода от старого базиса к новому. Преобразование координат вектора (старые=матрица новые). Выражение новых через старые (умножение на обратную матрицу и суммирование с дельтой).

1. Формулы преобразования матрицы линейного оператора в общем виде.

Домашнее задание: пусть в геометрическом векторном пространстве V^2 задан поворот вокруг точки O на угол 90^0 (мы с ним работали на прошлых занятиях и написали матрицу этого линейного оператора в правом ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j})$). Найдите его матрицу в базисе $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$, где $\vec{\varepsilon}_1(1, 1)$, $\vec{\varepsilon}_2(-1, 1)$.

Указания. Можно либо „в лоб“ воспользоваться выведенной формулой, либо сообразить как записать эту формулу в матричном виде.

2. Формулы преобразования ковекторов дуального базиса (дать новому ковектору аргумент, формулы преобразования координат вектора).

3. Формулы преобразования компонент ковекторов.

Домашнее задание: пусть дано двумерное векторное пространство V^2 всех векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Напишите формулы перехода для координат вектора от базиса $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ к базису $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$. Найдите матрицу перехода от старого базиса к новому. Напишите формулы преобразования а) координат вектора, б) компонент ковектора.

Занятие 4. (17.03.2015)

Тензоры.

Повторение: Векторное пространство, дуальное пространство.

Домашнее задание: пусть дан тетраэдр $ABCD$. Пусть DM, DN, DQ – медианы граней DAB, DAC, DBC этого тетраэдра. Найдите матрицу перехода от базиса $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ к базису $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DQ})$. Найдите компоненты ковектора u в старом базисе, если его компоненты в новом базисе $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$. Найдите матрицу линейного оператора L в новом базисе, если его матрица в старом базисе имеет вид

$$(L_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Определение тензора (линейность в двух частях). Вещественные числа – тензоры типа (0,0).

Домашнее задание: убедитесь, что ковектор является тензором типа (1,0).

2. Компоненты тензора в базисе.

Домашнее задание: пусть в геометрическом векторном пространстве V^3 задано скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. Докажите, что отображение $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ заданное по формуле $g(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$ является тензором типа (2,0). Найдите его компоненты в базисе а) $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, б) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, где $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 2$, углы между парами векторов этого базиса равны 60^0.

3. Вывод тензорного закона. Сначала на примере тензора (1,3).

Занятие 5. (24.03.2015)

Тензоры (продолжение).

1. Вычисление значения тензора через его компоненты. Сначала для частного случая.

2. Доказать, что если системы чисел преобразуются по тензорному закону, то они однозначно определяют тензор, для которого являются компонентами. Сначала на примере тензора типа (2,2). Если компоненты какого-то отображения преобразуются по тензорному закону, то это тензор. Это поможет доказать, что вектор и векторное произведение векторов являются тензорами. (остановились на доказательстве корректности определения отображения t.)

Домашнее задание: пусть дан тензор t типа (2,1). Найдите значение $t(2X_1+\tilde{X}_1, -X_2+\tilde{X}_2, 2u+\sqrt{2}\tilde{u})$, если $t(X_1,X_2,u)=0$, $t(\tilde{X}_1,X_2,u)=1$, $t(X_1,\tilde{X}_2,u)=0$, $t(X_1,X_2,\tilde{u})=-1$, $t(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,u)=0$, $t(\tilde{X}_1,X_2,\tilde{u})=1$, $t(X_1,\tilde{X}_2,\tilde{u})=-2$, $t(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\tilde{u})=0$.

Домашнее задание: пусть в двумерном пространстве V^2 тензор t типа (1,2) относительно базиса (e_1,e_2) задан своими компонентами: $t_1^{11}=1$, $t_2^{11}=-1$, $t_1^{12}=0$, $t_2^{12}=-2$, $t_1^{21}=3$, $t_2^{21}=1$, $t_1^{22}=0$, $t_2^{22}=2$. Найдите значение $t(X,u^1,u^2)$, если $X(1,0)$, $u^1(0,1)$, $u^2(1,1)$.

Если в следующий раз буду вести занятия я, то мы с вами проведем маленькую проверочную работу (20 минут). Она будет состоять из трех заданий.

Задание 1: сформулировать определение. Будет одно из следующих определений: линейно зависимая система векторов, линейно независимая система векторов, базис, координаты вектора в базисе, дельта Кронекера, ковектор, компоненты ковектора в базисе, ковектор e^i в дуальном базисе, линейный оператор, матрица линейного оператора в базисе, тензор, компоненты тензора в базисе.

Задание 2: доказать утверждение или вывести формулу. Будет одно из следующих утверждений.

1. Докажите, что система ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$ является линейно независимой.
2. Докажите, что любой ковектор u может быть представлен в виде линейной комбинации ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$.
3. Докажите, что если $(e^1,\ldots,e^n)$ – дуальный базис для базиса $(e_1,\ldots,e_n)$, то $e^i(e_j)=\delta^i_j$.
4. Выведите формулы преобразования координат вектора при переходе от базиса к базису.
5. Выведите формулы преобразования компонент ковектора при переходе от базиса к базису.
6. Выведите формулы преобразования элементов матрицы линейного оператора при переходе от базиса к базису.

Задание 3: решить задачу. Будет одна задача, аналогичная следующим.

1. Пусть $\vec{a}(a_1,a_2)$ – фиксированный не нулевой вектор, $(\vec{i},\vec{j})$ – ортонормированный базис V^2. Зададим отображение $u : V^2 \to \mathbb{R}$ по формуле $u(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x}$, то есть вектор $\vec{a}$ скалярно умножается на вектор $\vec{x}$. Докажите, что u является ковектором. Найдите компоненты этого ковектора в базисе $(\vec{i},\vec{j})$.

2. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Пусть L – осевая симметрия с осью Ox. Напишите матрицу оператора L в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

3. пусть в векторном пространстве V дано два базиса (e_1, e_2) (старый) и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (новый), $\varepsilon_1(1, 2)$, $\varepsilon_2(-1, -3)$ в базисе (e_1, e_2). Вектор X имеет координаты $(2, -1)$ в новом базисе. Найдите его координаты в старом базисе.

4. пусть дан тетраэдр $ABCD$. Пусть DM, DN, DQ – медианы граней DAB, DAC, DBC этого тетраэдра. Найдите матрицу перехода от базиса $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ к базису $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DQ})$. Найдите компоненты ковектора u в старом базисе, если его компоненты в новом базисе $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$.

5. пусть в геометрическом векторном пространстве V^3 задано скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Докажите, что отображение $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ заданное по формуле $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$ является тензором типа (2,0).

6. Пусть в геометрическом векторном пространстве V^3 задано скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Найдите компоненты тензора $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$, заданного по формуле $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$, в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Занятие 6. (31.03.2015)

Тензоры (продолжение).

1. Проверочная работа на 20 минут (вопросы в предыдущем занятии).

2. Закончить доказательство п. 2 из предыдущего занятия (пример тензора типа (2,2)).

Домашнее задание: пусть относительно каждого базиса $(e_1, \dots, e_n)$ задан набор чисел $\{t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}\}$, которые преобразуются по тензорному закону при переходе от базиса к базису. Докажите, что однозначно определен тензор типа (r, s), для которого эти числа будут компонентами. На семинаре мы начали доказывать корректность определения тензора t. Вам нужно закончить это доказательство, затем доказать, что полученное отображение линейно по каждому аргументу (выберете любой аргумент) и, наконец, доказать, что набор чисел будет компонентами этого тензора.

Занятие 7. (7.04.2015)

Примеры тензоров.

1. Доказать, что вектор и линейный оператор являются тензорами. Найти их тип. Найти инвариантную запись этих тензоров.

2. Определить тензор из векторного произведения.

Домашнее задание: на семинаре мы показали, что векторное произведение можно рассматривать как тензор типа (2,1). Пусть в векторном пространстве V^3 фиксирован правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Вычислите компоненты векторного произведения (рассматриваемого как тензор) в этом базисе.

Домашнее задание для интересующихся (выполнять не обязательно): пусть в геометрическом векторном пространстве V задано векторное произведение. Посмотрим на него как на отображение $[,] : V \times V \to V$. Тогда относительно каждого базиса (e_1, e_2, e_3) будет определяться набор чисел $\{t^k_{ij}\}$ по формуле $[e_i, e_j] = t^k_{ij} e_k$ (то есть векторное произведение перерабатывает два вектора базиса в вектор, который мы раскладываем по этому базису; его координаты обозначены t^k_{ij}). Выведите формулу преобразования этого набора чисел при переходе от одного базиса к другому. Убедитесь, что это тензорный закон для тензора типа $(2, 1)$. Используя этот факт выведите формулу $t(X, Y, u) = u([X, Y])$, которую мы записали на семинаре.

Занятие 8. (14.04.2015)

Операции с тензорами.

1. Сложение тензоров. Определение. Доказательство корректности определения. Коммутативность, ассоциативность, нулевой тензор, противоположный тензор (получаем коммутативную группу по сложению). Доказали свойство про противоположный тензор Сложение тензоров в компонентах (доказали).

Домашнее задание: докажите, что для любого тензора типа (r, s) имеет место равенство $t + 0 = t$.

2. Умножение тензора на число. Определение. Свойства (получаем векторное пространство) сформулированы (доказательство одного на дом). Умножение тензора на число в компонентах (доказали).

Домашнее задание: докажите одно из свойств (любое по вашему выбору) умножения тензора на число.

3. Тензорное умножение. Определение. Демонстрация доказательства корректности определения на конкретном примере. Сформулированы свойства. Тензорное произведение в компонентах (доказали).

Домашнее задание: докажите, что $(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3)$.

Домашнее задание для интересующихся (выполнять не обязательно): докажите (на примере векторов), что тензорное произведение не коммутативно.