

Игнаточкина Л.А.

Руководство к решению задач по тензорной
алгебре векторных пространств.

2014

Содержание

1.	Предварительные сведения из линейной алгебры.	4
1.1.	Векторное пространство.	4
1.2.	Линейные операторы.	6
1.3.	Формулы перехода.	7
2.	Ковекторы.	9
2.1.	Векторное пространство ковекторов.	9
2.2.	Формулы перехода для дуальных базисов.	13
3.	Тензоры.	14
3.1.	Определение тензора.	14
3.2.	Примеры тензоров.	16
4.	Операции с тензорами.	19
4.1.	Определение тензорных операций.	19
4.2.	Операции с тензорами в компонентах.	23
5.	Канонический базис в векторном пространстве тензоров типа (r, s).	27
6.	Симметрические и кососимметрические тензоры.	29
6.1.	Определения.	29
6.2.	Операторы альтернирования и симметризации.	31
6.3.	Альтернирование и симметризация тензоров по части аргументов.	35
7.	Операция внешнего умножения.	41
8.	Линейные отображения векторных пространств тензоров.	50
9.	Операции поднятия и опускания индексов в тензорной алгебре (псевдо) евклидова пространства V	52
10.	Псевдо-евклидова структура в пространствах тензоров $\mathfrak{T}_0^r(V)$ и $\mathfrak{T}_r^0(V)$	57

§1. Предварительные сведения из линейной алгебры.

1.1. Векторное пространство. Пусть V – непустое множество произвольной природы.

Будем называть множество V *вещественным векторным пространством* (или, просто, *векторным пространством* или *вещественным линейным пространством*), а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $X, Y \in V$ ставит в соответствие элемент $Z \in V$, называемый *суммой векторов X и Y* и обозначаемый $Z = X + Y$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $X \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $Y \in V$, называемый *произведением вектора X на число λ* и обозначаемый $Y = \lambda X$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1⁰. $X + Y = Y + X$ (коммутативность);

2⁰. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (ассоциативность);

3⁰. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $X \in V$ выполняется $X + 0 = X$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

4⁰. Для любого элемента $X \in V$ существует элемент $-X \in V$, такой что $X + (-X) = 0$ (элемент $-X$ называется *противоположным* элементу X);

5⁰. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$;

6⁰. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

7⁰. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$;

8⁰. $1X = X$,

где $X, Y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Условия 1⁰ – 8⁰ называются *аксиомами векторного пространства*. Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на вещественное число*.

Система векторов (e_1, \dots, e_n) называется *линейно зависимой*, если существуют вещественные числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n$, не равные нулю одновременно, такие

что

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n = 0. \quad (*)$$

Если равенство (*) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$, то система векторов (e_1, \dots, e_n) называется *линейно независимой*.

Если в векторном пространстве V существует система из n линейно независимых векторов (e_1, \dots, e_n) , такая что для любого вектора $X \in V$ имеем

$$X = X^1 e_1 + \dots + X^n e_n,$$

то векторное пространство V называется *n -мерным*, а система векторов (e_1, \dots, e_n) — *базисом* V . Числа (X^1, \dots, X^n) называются *координатами* вектора X в данном базисе.

В дальнейшем мы будем работать только с n -мерными векторными пространствами, не оговаривая это дополнительно.

Замечание 1.1. В дальнейшем нам часто придется использовать суммы от 1 до некоторого фиксированного числа. Будем обозначать сумму следующим образом:

$$\alpha^1 a_1 + \dots + \alpha^n a_n = \sum_{i=1}^n \alpha^i a_i.$$

Чтобы еще сократить запись, договоримся, что по одинаковым верхнему и нижнему индексам производится суммирование от 1 до этого числа:

$$\alpha^i a_i = \alpha^1 a_1 + \dots + \alpha^n a_n.$$

Индекс, обозначающий суммирование, называется *индексом суммирования*. Индекс суммирования можно обозначать любой буквой. Например, $\alpha^i a_i \equiv \alpha^j a_j \equiv \alpha^k a_k \equiv \dots$. Введенная договоренность об обозначении суммирования называется *правилом суммирования Эйнштейна*.

Заметим, что для того чтобы иметь возможность использовать правило суммирования Эйнштейна, в определении координат вектора мы пишем номер координаты сверху.

Также договоримся о сокращенной записи систем равенств. Пусть дана

система равенств

$$\begin{cases} b_1 = b_1^1 a_1 + \dots + b_1^n a_n \\ \dots \\ b_m = b_m^1 a_1 + \dots + b_m^n a_n. \end{cases}$$

Будем записывать такую систему в виде $b_p = b_p^i a_i$, ($i = 1, \dots, n; p = 1, \dots, m$). Индекс, не являющийся индексом суммирования, называется *свободным индексом*. В данном примере индекс p является свободным индексом. При использовании свободного индекса будем указывать, в каких пределах он изменяется.

1.2. Линейные операторы. Напомним определение линейного оператора.

Линейным оператором на векторном пространстве V называется отображение $L : V \rightarrow V$ удовлетворяющее условию *линейности*, то есть

$$L(\alpha X + \beta Y) = \alpha L(X) + \beta L(Y),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – произвольные числа, $X, Y \in V$ – произвольные векторы.

Пусть дан линейный оператор L . Если в векторном пространстве V фиксирован базис $E = (e_1, \dots, e_n)$, то оператор L однозначно определяется своей матрицей (L_j^i) , $i, j = 1, \dots, n$. Напомним, что числа L_j^i получаются следующим образом. Рассмотрим вектор e_j из базиса E и подействуем на него оператором L . В результате мы получим вектор $L(e_j)$, который разложим по базису E :

$$L(e_j) = L_j^i e_i. \quad (1.1)$$

Таким образом, числа L_j^i суть координаты векторов $L(e_j)$ в базисе E . В матрицу координаты векторов $L(e_j)$ записываются по столбцам. Учитывая эту договоренность, мы видим, что верхний индекс в обозначении L_j^i (номер координаты) обозначает номер строки в матрице, а нижний индекс – номер столбца. Таким образом, элемент L_j^i стоит в i -й строке и j -м столбце матрицы (L_j^i) .

С помощью матрицы линейного оператора можно выразить результат действия этого оператора на произвольный вектор пространства V . Пусть дан вектор $X \in V$. Обозначим его координаты в базисе E через (X^1, \dots, X^n) .

Тогда

$$L(X) = L(X^i e_i) = X^i L(e_i) = X^i L_i^k e_k. \quad (1.2)$$

Здесь мы воспользовались линейностью оператора L и формулой (1.1) (в формуле мы заменили индекс j на i , а индекс i – на k). В частности, мы получили, что координаты вектора $L(X)$ в базисе E имеют вид $(L_i^1 X^i, \dots, L_i^n X^i)$.

1.3. Формулы перехода. Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Выведем формулы преобразования координат произвольного вектора X при переходе от базиса E к базису \tilde{E} .

Пусть

$$\varepsilon_i = C_i^j e_j, \quad (1.3)$$

то есть C_i^j – это j -я координата i -го вектора ε_i в базисе E . Координаты векторов ε_i записывают по столбцам в матрицу C , которая называется *матрицей перехода от базиса E к базису \tilde{E}* .

Обозначим координаты вектора X в базисе E через (X^i) , $i = 1, \dots, n$, а в базисе \tilde{E} – через (\tilde{X}^i) . Тогда по определению координат вектора получим

$$X^j e_j = X = \tilde{X}^i \varepsilon_i = \tilde{X}^i C_i^j e_j.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим *формулы преобразования координат вектора* при переходе от одного базиса к другому

$$X^j = C_i^j \tilde{X}^i. \quad (1.4)$$

Замечание 1.2. Из полученной формулы нам хотелось бы выразить координаты \tilde{X}^i . Для этого заметим, что соотношение (1.4) можно записать в матричной форме в виде $X = C\tilde{X}$, где X – столбец из координат вектора X в базисе E , C – матрица перехода от базиса E к базису \tilde{E} , \tilde{X} – столбец из координат вектора X в базисе \tilde{E} (здесь мы вспомнили правило умножения матриц „строка на столбец“). Чтобы выразить столбец \tilde{X} , нам нужно полученное матричное равенство умножить слева на матрицу обратную матрице C . Будем обозначать такую матрицу $C^{-1} = ((C^{-1})_j^i)$: $C^{-1}X = \tilde{X}$. От этого равенства нам нужно вернуться обратно к „координатному соотношению“. Для этого опять вспоминаем правило из алгебры умножения матриц „строка

на столбец“ и видим, чтобы получить i -й элемент в столбце \tilde{X} , нужно элементы i -ой строки матрицы C^{-1} умножить на элементы столбца X и результаты сложить:

$$\tilde{X}^i = (C^{-1})_j^i X^j. \quad (1.5)$$

Из проведенного рассуждения вытекает следующее правило: чтобы выразить \tilde{X}^i из равенства (1.4), нужно найти свободный индекс у элемента матрицы C (в нашем случае это индекс j), умножить каждое из равенств на элемент $(C^{-1})_j^k$ и сложить полученные равенства:

$$(C^{-1})_j^k X^j = (C^{-1})_j^k C_i^j \tilde{X}^i. \quad (1.6)$$

Рассмотрим выражение $(C^{-1})_j^k C_i^j$. Это элемент k -ой строки i -го столбца матрицы, равной произведению матриц C^{-1} и C , то есть 1, если $k = i$ и 0 в противном случае. Такую величину обозначают следующим образом

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i; \\ 0, & \text{если } k \neq i. \end{cases}$$

и называют *дельтой Кронекера* или *символом Кронекера*. С учетом этого обозначения из (1.6) получим

$$(C^{-1})_j^k X^j = \delta_i^k \tilde{X}^i.$$

Нам осталось вычислить $\delta_i^k \tilde{X}^i = \delta_1^k X^1 + \dots + \delta_n^k X^n$. Это сумма, в которой все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Отличным от нуля будет слагаемое, в котором индекс суммирования i принимает значение k , то есть $\delta_i^k \tilde{X}^i = \tilde{X}^k$. Итак, окончательно, равенство (1.6) принимает вид

$$(C^{-1})_j^k X^j = \tilde{X}^k.$$

Это выражение совпадет с (1.5), если переобозначить k на i . (Обратите внимание, что свободный индекс мы можем обозначать любой буквой, но заменять его нужно во всем выражении.)

Аналогичным образом получим соотношения между элементами матриц линейного оператора L . Обозначим (L_j^i) матрицу линейного оператора в базисе E и через \tilde{L}_j^i матрицу оператора L в базисе \tilde{E} . Тогда

$$L(\varepsilon_i) = \tilde{L}_i^j \varepsilon_j = \tilde{L}_i^j C_j^k e_k; \quad L(\varepsilon_i) = L(C_i^j e_j) = C_i^j L(e_j) = C_i^j L_j^k e_k.$$

Здесь мы использовали линейность оператора L и формулы (1.3), (1.1). Таким образом,

$$(\tilde{L}_i^j C_j^k - C_i^j L_j^k) e_k = 0.$$

В силу линейной независимости базисных векторов имеем $\tilde{L}_i^j C_j^k = C_i^j L_j^k$. Выразим \tilde{L}_i^j (см. замечание 1.2): $\tilde{L}_i^j C_j^k (C^{-1})_k^t = C_i^j L_j^k (C^{-1})_k^t$ или

$$\tilde{L}_i^t = C_i^j (C^{-1})_k^t L_j^k. \quad (1.7)$$

§2. Ковекторы.

2.1. Векторное пространство ковекторов. Пусть V – векторное пространство.

Рассмотрим отображение $u : V \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждому вектору $X \in V$ ставит в соответствие число $\alpha \in \mathbb{R}$. Если это отображение удовлетворяет условиям:

- 1) $u(X + Y) = u(X) + u(Y)$;
- 2) $u(\alpha X) = \alpha u(X)$

для любых $X, Y \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то отображение u называется *линейным отображением* или *линейной формой* или *ковектором*. Первое условие называется *аддитивностью*, а второе – *однородностью* отображения u .

Условия аддитивности и однородности эквивалентны (докажите самостоятельно) выполнению условия

$$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y)$$

для любых $X, Y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Оно называется *линейностью* отображения u .

Пример 2.1. Рассмотрим отображение $0 : V \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $0(X) = 0$ для любого вектора X . Докажем, что это отображение линейно. В самом деле, для любых $X, Y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ получим

$$0(\alpha X + \beta Y) = 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha 0(X) + \beta 0(Y).$$

Таким образом, условие линейности выполняется и отображение 0 является линейным, то есть ковектором. \square

Обозначим множество всех ковекторов $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ через V^* . Введем в этом множестве операции сложения ковекторов и умножения ковектора на число по формулам:

$$(u + v)(X) = u(X) + v(X); \quad (\lambda u)(X) = \lambda(u(X))$$

для любых $u, v \in V^*$, $X \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1. *Введенные операции корректны, то есть $u + v$ и λu являются ковекторами.*

Доказательство. По определению операций сложения и свойству линейности получим

$$\begin{aligned} (u + v)(\alpha X + \beta Y) &= u(\alpha X + \beta Y) + v(\alpha X + \beta Y) = \\ &= \alpha u(X) + \beta u(Y) + \alpha v(X) + \beta v(Y) = \alpha(u(X) + v(X)) + \beta(u(Y) + v(Y)) = \\ &= \alpha((u + v)(X)) + \beta((u + v)(Y)). \end{aligned}$$

Таким образом, сумма отображений u и v является ковектором, то есть принадлежит V^* . Аналогично доказывается, что произведение ковектора на число также является ковектором (докажите самостоятельно). \square

Теорема 2.1. *Множество V^* ковекторов $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ со введенными операциями сложения и умножения на число является векторным пространством.*

Доказательство. Нам нужно проверить выполнение 8 аксиом векторного пространства. Проверим, например, аксиому 1⁰. Остальные проверяются аналогично.

Для любых $u, v \in V^*$, $X \in V$ по определению суммы ковекторов и свойствам сложения вещественных чисел получим

$$(u + v)(X) = u(X) + v(X) = v(X) + u(X) = (v + u)(X).$$

Итак, мы получили, что $(u + v)(X) = (v + u)(X)$ для любого вектора X . Так как два отображения $u + v$ и $v + u$ принимают одно и тоже значение на любом векторе $X \in V$, то эти отображения равны по определению равенства отображений.

Заметим, что нуль-вектором в векторном пространстве V^* будет отображение $0 : V \rightarrow \mathbb{R}$, построенное в примере 2.1. Докажите самостоятельно, что $u + 0 = u$ для любого $u \in V^*$. Этот ковектор мы будем называть *нуль-ковектором*.

Пусть $u \in V^*$ – произвольный элемент. Тогда через $(-u) : V \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим отображение, действующее по формуле $(-u)(X) = -(u(X))$. Аналогично лемме 2.1 доказывается, что отображение $(-u)$ будет линейно, а значит, будет принадлежать множеству V^* . Докажите самостоятельно, что $u + (-u) = 0$.

Итак, все 8 аксиом векторного пространства выполняются, а значит, множество V^* является векторным пространством. \square

Пример 2.2. Пусть V – векторное пространство, $E = (e_1, \dots, e_n)$ – произвольный базис V . Рассмотрим отображения $e^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$), которые каждому вектору $X \in V$ ставят в соответствие его i -ю координату в базисе E , то есть $e^i(X) = X^i$. В силу свойств координат векторов (координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат векторов слагаемых и аналогичное утверждение для произведения вектора на число) эти отображения будут линейными. В самом деле, для любых $X, Y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ получим

$$e^i(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)^i = \alpha X^i + \beta Y^i = \alpha e^i(X) + \beta e^i(Y).$$

Найдем значения ковекторов e^1, \dots, e^n на векторах базиса E . Так как координаты вектора $e_1(1, 0, \dots, 0)$, то $e^1(e_1) = 1$. Аналогично получим $e^2(e_1) = 0, \dots, e^n(e_1) = 0$. Рассматривая аналогичным образом остальные векторы базиса E , получим, что

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Правая часть этого равенства есть δ_j^i . \square

Теорема 2.2. Система ковекторов (e^1, \dots, e^n) является базисом векторного пространства V^* , а значит, V^* является n -мерным векторным пространством.

Доказательство. Докажем, что система (e^1, \dots, e^n) линейно независима. Рассмотрим ковекторы e^i ($i = 1, \dots, n$), построенные в примере 2.2. Докажем, что система (e^1, \dots, e^n) линейно независима. Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 e^1 + \dots + \alpha_n e^n = 0, \quad (2.1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. В левой и правой частях этого равенства стоят ковекторы. Подействуем ими на вектор e_1 базиса E (см. пример 2.2). В результате получим $\alpha_1 e^1(e_1) + \dots + \alpha_n e^n(e_1) = 0(e_1)$, то есть $\alpha_1 = 0$. Аналогично, действуя обеими частями равенства (2.1) на остальные вектора базиса E , получим $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Таким образом, система ковекторов (e^1, \dots, e^n) является линейно независимой.

Докажем, что любой ковектор можно представить в виде линейной комбинации ковекторов (e^1, \dots, e^n) . Рассмотрим произвольный ковектор u . Тогда для любого вектора $X \in V$ получим

$$u(X) = u(X^i e_i) = X^i u(e_i) = u(e_i) e^i(X). \quad (2.2)$$

Обозначим числа $u(e_i) = u_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $u = u_i e^i$, то есть любой ковектор u является линейной комбинацией ковекторов (e^1, \dots, e^n) .

Итак, система (e^1, \dots, e^n) является базисом V^* по определению. \square

Следствие 2.1. Из формулы (2.2) получим, что при фиксированном базисе (e_1, \dots, e_n) в V

$$u(X) = u_i X^i.$$

Замечание 2.3. Оказывается, что свойство $e^i(e_j) = \delta_j^i$ является характеристическим для базиса (e^1, \dots, e^n) . Это означает следующее: если для ковектора u верно, что $u(e_j)$ равно нулю для любого $j = 1, \dots, n$ кроме одного ($j = i$), для которого $u(e_i) = 1$, то $u = e^i$.

Действительно, рассмотрим произвольный ковектор u , удовлетворяющий указанному свойству. Тогда

$$u(X) = u(X^j e_j) = X^j u(e_j) = X^i.$$

Итак, ковектор u любому вектору X ставит в соответствие его i -ю координату, а значит, $u = e^i$. Это верно для любого фиксированного i , $i = 1, \dots, n$.

Базис (e^1, \dots, e^n) пространства V^* называется *дуальным базисом* векторного пространства V .

Из замечания 2.3 следует, что система ковекторов (e^1, \dots, e^n) будет дуальным базисом для векторного пространства V тогда и только тогда, когда выполняется характеристическое свойство

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

где (e_1, \dots, e_n) – базис в V , $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в V . Обозначим через (e^1, \dots, e^n) и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ соответствующие дуальные базисы. Пусть C – матрица перехода от базиса E к базису \tilde{E} , то есть $\varepsilon_i = C_i^j e_j$. Рассмотрим произвольный ковектор $u \in V^*$ и обозначим (u_i) – координаты u в дуальном базисе (e^1, \dots, e^n) , (\tilde{u}_i) – координаты u в дуальном базисе $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Выясним, как связаны между собой числа u_i и \tilde{u}_i . Имеем

$$\tilde{u}_i = u(\varepsilon_i) = u(C_i^j e_j) = C_i^j u(e_j) = C_i^j u_j.$$

Итак,

$$\tilde{u}_i = C_i^j u_j.$$

2.2. Формулы перехода для дуальных базисов. Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в V . Обозначим через (e^1, \dots, e^n) и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ соответствующие дуальные базисы. Пусть C – матрица перехода от базиса E к базису \tilde{E} , то есть $\varepsilon_i = C_i^j e_j$.

Лемма 2.2. *Во введенных обозначениях*

$$\varepsilon^i = (C^{-1})_j^i e^j. \quad (2.3)$$

Доказательство. Рассмотрим систему ковекторов $(\varepsilon^i = (C^{-1})_j^i e^j)$. Чтобы доказать, что они составляют дуальный базис, согласно замечанию 2.3 достаточно показать, что $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Имеем,

$$\varepsilon^i(\varepsilon_j) = ((C^{-1})_k^i e^k)(C_j^t e_t) = (C^{-1})_k^i C_j^t e^k(e_t) = (C^{-1})_k^i C_j^t \delta_t^k = (C^{-1})_t^i C_j^t = \delta_j^i.$$

□

Замечание 2.4. Пусть дан произвольный базис (e^1, \dots, e^n) векторного пространства V^* . Покажем, что существует базис (e_1, \dots, e_n) векторного пространства V , для которого базис (e^1, \dots, e^n) будет дуальным.

Рассмотрим произвольный базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V . Обозначим через $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ его дуальный базис. Пусть $C = (C_j^i)$ матрица перехода от базиса (e^1, \dots, e^n) к базису $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$, то есть $e^i = C_j^i \varepsilon^j$. Рассмотрим систему векторов (e_1, \dots, e_n) , заданную формулой

$$e_i = (C^{-1})_i^j \varepsilon_j.$$

Эта система векторов образует базис V , для которого (e^1, \dots, e^n) будет дуальным. Действительно, согласно замечанию 2.3 для этого достаточно показать, что $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Имеем

$$e^i(e_j) = C_\ell^i \varepsilon^\ell((C^{-1})_j^k \varepsilon_k) = C_\ell^i (C^{-1})_j^k \varepsilon^\ell(\varepsilon_k) = C_\ell^i (C^{-1})_j^k \delta_k^\ell = C_k^i (C^{-1})_j^k = \delta_j^i.$$

§3. Тензоры.

3.1. Определение тензора. Пусть V – векторное пространство, V^* – дуальное пространство.

Тензором типа (r, s) называется отображение

$$t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

линейное по каждому аргументу. Запишем определение линейности по первому аргументу (линейность по остальным аргументам аналогична)

$$t(\alpha X_1 + \beta \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = \alpha t(X_1, X_2, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) + \beta t(\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – произвольные числа, $X_1, \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_r \in V$ – произвольные векторы, $u^1, \dots, u^s \in V^*$ – произвольные ковекторы.

Будем считать по определению, что вещественные числа являются тензорами типа $(0,0)$.

Пусть (e_1, \dots, e_n) – базис V , (e^1, \dots, e^n) – дуальный базис. Договоримся, что все индексы (если не оговорено противное) пробегают значения от 1 до

n . Тогда для любого тензора t типа (r, s) определен набор чисел $\{t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$ по формуле

$$t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e^{i_1}, \dots, e^{i_s}).$$

Эти числа называются *компонентами* тензора t в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Задача 3.1. Пусть даны (e_1, \dots, e_n) – базис V , (e^1, \dots, e^n) – дуальный базис и тензор t типа (r, s) . Докажите, что значение тензора t на произвольном наборе $X_1, \dots, X_r \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$ вычисляется по формуле

$$t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} (X_1)^{j_1} \dots (X_r)^{j_r} (u^1)_{i_1} \dots (u^s)_{i_s},$$

где $X_k = (X_k)^i e_i$, $u^k = (u^k)_i e^i$ (см. §2.).

Указания. Разложите векторы и ковекторы по соответствующим базисам и воспользуйтесь линейностью тензора. \square

Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в V . Обозначим через (e^1, \dots, e^n) и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ соответствующие дуальные базисы. Пусть C – матрица перехода от базиса E к базису \tilde{E} , то есть $\varepsilon_i = C_i^j e_j$.

Обозначим $\{t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$ компоненты тензора t в базисе E , а $\{\tilde{t}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$ – компоненты тензора t в базисе \tilde{E} . Используя доказанную лемму, получим формулы, связывающие компоненты тензора t в базисах E и \tilde{E} . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} &= t(\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_r}, \varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_s}) = \\ &= t(C_{j_1}^{k_1} e_{k_1}, \dots, C_{j_r}^{k_r} e_{k_r}, (C^{-1})_{t_1}^{i_1} e^{t_1}, \dots, (C^{-1})_{t_s}^{i_s} e^{t_s}) = \\ &= C_{j_1}^{k_1} \dots C_{j_r}^{k_r} (C^{-1})_{t_1}^{i_1} \dots (C^{-1})_{t_s}^{i_s} t(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) = \\ &= C_{j_1}^{k_1} \dots C_{j_r}^{k_r} (C^{-1})_{t_1}^{i_1} \dots (C^{-1})_{t_s}^{i_s} t_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили соотношение

$$\tilde{t}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = C_{j_1}^{k_1} \dots C_{j_r}^{k_r} (C^{-1})_{t_1}^{i_1} \dots (C^{-1})_{t_s}^{i_s} t_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s}. \quad (3.1)$$

Этот закон преобразования компонент тензора называется *тензорным законом*.

Задача 3.2. Докажите, что верно и обратное утверждение. А именно, если для каждого базиса векторного пространства V задан набор n^{r+s} веществен-

ных чисел $\{t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$, которые при переходе от одного базиса ко второму преобразуются по тензорному закону (3.1), то однозначно определен тензор t типа (r, s) , для которого эти числа будут компонентами в соответствующем базисе.

Указания. Задайте отображение

$$t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

по формуле

$$t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} (X_1)^{j_1} \dots (X_r)^{j_r} (u^1)_{i_1} \dots (u^s)_{i_s}$$

где $X_1, \dots, X_r \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$. Докажите, что это отображение не зависит от выбора базиса и линейно по каждому аргументу. Наконец, вычислите компоненты тензора t и убедитесь, что они совпадают с числами $\{t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$. \square

Следствие 3.2. Два тензора равны (то есть совпадают как отображения) тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты в каком-либо базисе. Другими словами, чтобы убедиться, что два тензора равны, нужно выбрать „удобный“ базис и вычислить в нем компоненты обоих тензоров. Если для соответствующих компонент получим одни и те же числа, то два тензора равны.

3.2. Примеры тензоров. Приведем примеры тензоров.

Пример 3.3. Пусть в каждом базисе пространства V задан набор $n^2 - n$ нулей и n единиц. Расположим их в виде единичной $n \times n$ -матрицы. Тогда эти числа мы можем обозначить символом Кронекера $\{\delta_j^i\}$. По определению обратной матрицы имеем $\delta_j^i = (C^{-1})_k^i C_j^k$ или $\delta_j^i = (C^{-1})_k^i \delta_t^k C_j^t$. Сравним это равенство с тензорным законом. Мы видим, что наборы чисел $\{\delta_j^i\}$ преобразуются как компоненты тензора типа $(1,1)$, а значит, определяют его. Этот тензор обозначим $\{\delta_j^i\}$ (или id – тождественный оператор. Смысл этого обозначения будет понятен в примере 3.6). \square

Пример 3.4. Рассмотрим произвольный ковектор u . Напомним, что по определению это линейное отображение $u : V \rightarrow \mathbb{R}$, а значит, по определению тензора это тензор типа $(1,0)$. \square

Пример 3.5. Рассмотрим произвольный вектор $X \in V$. Относительно каждого базиса вектор X определяет набор из n чисел $\{X^i\}$ – координат этого вектора в данном базисе. При переходе от базиса к базису эти наборы чисел преобразуются по закону (1.5). Сравнивая это равенство с тензорным законом (3.1), получаем, что вектор определяет тензор типа $(0,1)$ с компонентами $\{X^i\}$. Обозначим этот тензор через t и выясним, как он действует на произвольный ковектор u . Так как числа $\{X^i\}$ являются компонентами тензора t (см. задачу 3.2), получим

$$t(u) = t(u_i e^i) = u_i t(e^i) = u_i X^i = u(e_i) X^i = u(X^i e_i) = u(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что координаты ковектора $u_i = u(e_i)$, то есть совпадают с его компонентами как тензора типа $(1,0)$ (см. теорему 2.2).

Итак, мы получили, что любой вектор $X \in V$ однозначно определяет тензор t типа $(0,1)$, действующий по формуле $t(u) = u(X)$, $u \in V^*$. Договоримся обозначать тензор t той же буквой X и говорить, что вектор X является тензором типа $(0,1)$ и действует на произвольный ковектор u по формуле

$$X(u) = u(X). \square$$

Пример 3.6. Рассмотрим произвольный линейный оператор L . В каждом базисе он определяет n^2 вещественных чисел – матрицу (L_j^i) оператора L . Сравнивая закон преобразования элементов матрицы линейного оператора (1.7) с тензорным законом (3.1), получаем, что любой оператор L определяет тензор типа $(1,1)$ с компонентами $\{L_j^i\}$. Обозначим полученный тензор t и аналогично предыдущему примеру получим

$$\begin{aligned} t(X, u) = t(X^i e_i, u_j e^j) &= X^i u_j t(e_i, e^j) = L_j^i X^i u_j = L_j^i X^i u(e_j) = \\ &= u(L_j^i X^i e_j) = u(L(X)). \end{aligned}$$

Мы воспользовались линейностью t , u и формулой (1.2).

Итак, мы получили, что любой линейный оператор L однозначно определяет тензор типа $(1,1)$ по формуле $t(X, u) = u(L(X))$. Договоримся обозначать этот тензор t той же буквой L и говорить, что линейный оператор L является тензором типа $(1,1)$ и действует на произвольный вектор X и ковектор u по

формуле

$$L(X, u) = u(L(X)). \quad (3.2)$$

В частности, для тождественного линейного оператора $id(X) = X$ матрица будет иметь вид (δ_j^i) (проведите вычисления самостоятельно), следовательно, он будет тензором типа (1,1) с компонентами $\{\delta_j^i\}$. \square

Пример 3.7. Пусть дано четно мерное векторное пространство V^{2n} . Рассмотрим относительно фиксированного базиса (e_1, \dots, e_{2n}) в V набор $(2n)^2$ нулей, единиц и минус единиц, которые расположим в виде $2n \times 2n$ -матрицы

$$((J_0)_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где I_n – единичная матрица порядка n , $i, j = 1, \dots, 2n$. В любом другом базисе зададим набор чисел, которые будут получаться из $((J_0)_j^i)$ по тензорному закону (3.1). Согласно задаче 3.2 полученные наборы чисел задают тензор J_0 типа (1,1), причем сами являются его компонентами. Этот тензор называется *оператором канонической комплексной структуры* на векторном пространстве V . \square

Задача 3.3. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство (его элементами являются классы эквивалентности равных по длине и сонаправленных направленных отрезков). Определим отображение $g : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

где $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ – произвольные векторы. Другими словами, значение отображения g на векторах \vec{a} и \vec{b} является скалярным произведением этих векторов. Докажите, что отображение g является тензором типа (2,0). Найдите 1) компоненты тензора g в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторного пространства V^3 ; 2) компоненты тензора g в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, если известно, что углы между парами векторов этого базиса равны 60° , а длины векторов равны a_i соответственно.

Ответ: 1) $g_{ij} = 0$, если $i \neq j$; $g_{ii} = 1$, $i, j = 1, 2, 3$; 2) $g_{ij} = \frac{1}{2}a_i a_j$, если $i \neq j$; $g_{ii} = a_i^2$.

Задача 3.4. Пусть V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство. Определим отображение $\omega : V^3 \times V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

где $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ обозначает смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Докажите, что отображение ω является тензором типа $(3,0)$. Найдите компоненты этого тензора 1) в правом ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) в левом ортонормированном базисе.

Ответ: 1) $\omega_{ijk} = 1$, если (i, j, k) – четная подстановка; $\omega_{ijk} = -1$, если (i, j, k) – нечетная подстановка, в остальных случаях $\omega_{ijk} = 0$.

Задача 3.5. Пусть V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство. Зададим отображение $t : V^3 \times V^3 \times (V^3)^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$t(\vec{a}, \vec{b}, u) = u([\vec{a}, \vec{b}]),$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов. Докажите, что отображение t является тензором типа $(2,1)$ и найдите его компоненты в правом ортонормированном базисе.

§4. Операции с тензорами.

4.1. Определение тензорных операций. Пусть даны тензоры t_1 и t_2 типа (r, s) .

Суммой тензоров t_1 и t_2 называется отображение

$$t_1 + t_2 : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

определенное по формуле

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2)(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) &= \\ &= t_1(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) + t_2(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s), \end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_r \in V, u^1, \dots, u^s \in V^*$.

Задача 4.6. Докажите, что сумма тензоров является тензором, то есть отображение $t_1 + t_2$ линейно по каждому аргументу.

Для суммы тензором имеют место свойства:

$$1^0. t_1 + t_2 = t_2 + t_1;$$

$$2^0. (t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3),$$

t_1, t_2, t_3 – тензоры типа (r, s) .

Докажите эти свойства самостоятельно, используя определение суммы тензоров.

Пусть t – тензор типа (r, s) , λ – вещественное число. Произведением тензора t на вещественное число λ называется отображение

$$\lambda t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R}$$

определенное по формуле

$$(\lambda t)(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = \lambda(t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)),$$

$X_1, \dots, X_r \in V, u^1, \dots, u^s \in V^*$.

Задача 4.7. Докажите, что произведение тензора на число является тензором, то есть отображение λt линейно по каждому аргументу.

Для произведения тензора на число имеют место свойства:

$$1^0. \lambda(t_1 + t_2) = \lambda t_1 + \lambda t_2;$$

$$2^0. (\lambda + \mu)t = \lambda t + \mu t;$$

$$3^0. (\lambda(\mu t)) = (\lambda\mu)t,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, t$ – тензор типа (r, s) .

Докажите эти свойства самостоятельно, используя определение произведения тензора на число.

Пусть t_1 – тензор типа (r, s) , t_2 – тензор типа (p, q) . Тензорным произведением тензоров t_1 и t_2 называется отображение

$$t_1 \otimes t_2 : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r+p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s+q \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

определенное по формуле

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes t_2)(X_1, \dots, X_{r+p}, u^1, \dots, u^{s+q}) &= \\ &= t_1(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) t_2(X_{r+1}, \dots, X_{r+p}, u^{s+1}, \dots, u^{s+q}), \end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_{r+p} \in V, u^1, \dots, u^{s+q} \in V^*$.

Положим по определению $\lambda \otimes t = \lambda t, \lambda \in \mathbb{R}, t$ – тензор типа (r, s) .

Задача 4.8. Докажите, что тензорное произведение тензоров является тензором, то есть отображением линейным по каждому аргументу.

Используя введенные определения легко доказать

$$1^0. (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3);$$

$$2^0. (t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3;$$

$$3^0. t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3;$$

$$4^0. (\lambda t_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (\lambda t_2) = \lambda(t_1 \otimes t_2),$$

где тензоры t_1, t_2, t_3 – тензоры подходящих типов (для суммы тензоров нужно брать тензоры одного и того же типа, а для тензорного произведения можно брать тензоры произвольных типов), $\lambda \in \mathbb{R}$.

В общем случае операция тензорного умножения не коммутативна. Действительно, пусть $X, Y \in V$ – произвольные векторы. Рассмотрим тензорные произведения $X \otimes Y$ и $Y \otimes X$. Это тензоры типа $(0, 2)$. Докажем, что эти отображения различны. Для этого нужно привести пример пары ковекторов, на которых отображения $X \otimes Y$ и $Y \otimes X$ принимают различные значения.

Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в V и дуальный базис (e^1, \dots, e^n) . Пусть i, j – различные фиксированные индексы ($i, j = 1, \dots, n$). Тогда

$$X \otimes Y(e^i, e^j) = X(e^i)Y(e^j) = e^i(X)e^j(Y) = X^i Y^j;$$

$$Y \otimes X(e^i, e^j) = Y(e^i)X(e^j) = e^i(Y)e^j(X) = Y^i X^j.$$

Мы можем взять векторы X и Y такими, что произведения их координат $X^i Y^j$ и $Y^i X^j$ будут различными, а значит, $X \otimes Y \neq Y \otimes X$.

Задача 4.9. Докажите, что для тензора t типа $(r, 0)$ и тензора T типа $(0, s)$ имеет место равенство $t \otimes T = T \otimes t$.

Указание. Подействуйте обеими частями равенства на набор $X_1, \dots, X_r \in V, u^1, \dots, u^s \in V^*$. \square

Пример 4.8. Пусть η – произвольный ковектор, ξ – произвольный вектор из V . Тогда их тензорное произведение $\eta \otimes \xi$ является тензором типа $(1, 1)$.

Вычислим значение этого тензора на паре $X \in V$, $u \in V^*$:

$$(\eta \otimes \xi)(X, u) = \eta(X)\xi(u) = \eta(X)u(\xi) = u(\eta(X)\xi).$$

Мы воспользовались определением тензорного произведения и примером 3.5. Согласно (3.2) левая часть этого выражения равна $u((\eta \otimes \xi)(X))$. Тогда получим

$$u((\eta \otimes \xi)(X)) = u(\eta(X)\xi). \quad (4.1)$$

Фиксируем в V базис (e_1, \dots, e_n) и дуальный базис (e^1, \dots, e^n) . Тогда соотношение (4.1), верное для любого u , верно, в частности, для всех ковекторов дуального базиса, то есть

$$e^i((\eta \otimes \xi)(X)) = e^i(\eta(X)\xi).$$

Это означает, что у векторов $(\eta \otimes \xi)(X)$ и $\eta(X)\xi$ равны все соответствующие координаты, а значит, равны и сами векторы. Таким образом, мы получаем

$$(\eta \otimes \xi)(X) = \eta(X)\xi; \quad \forall X \in V. \square$$

Пусть t тензор типа (r, s) . Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в V и определим отображение

$$C_{(b)}^{(a)}t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r-1 \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s-1 \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R}$$

по формуле

$$\begin{aligned} (C_{(b)}^{(a)}t)(X_1, \dots, X_{r-1}, u^1, \dots, u^{s-1}) &= \\ &= \sum_{k=1}^n t(X_1, \dots, X_{b-1}, e_k, X_b, \dots, X_{r-1}, u^1, \dots, u^{a-1}, e^k, u^a, \dots, u^{s-1}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Это отображение называется *сверткой тензора t по a -му верхнему и b -му нижнему индексам*.

Задача 4.10. Докажите, что свертка тензора определена корректно в смысле независимости от выбора базиса. Докажите, что свертка тензора типа (r, s) является тензором типа $(r - 1, s - 1)$.

Указание. Возьмите два базиса и докажите, что правые части формулы (4.2) в этих базисах равны. Воспользуйтесь определением матрицы перехода

да и формулой (2.3). Для второй части задачи нужно доказать линейность отображения (4.2) по каждому аргументу. \square

Замечание 4.5. Если тензор t типа (r, s) нужно свернуть по двум парам индексов, то мы получим тензор типа $(r-2, s-2)$, который будем обозначать $C_{(b)(d)}^{(a)(c)}t$. Этот тензор будет вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} (C_{(b)(d)}^{(a)(c)}t)(X_1, \dots, X_{r-2}, u^1, \dots, u^{s-2}) = \\ = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n t(X_1, \dots, X_{b-1}, e_k, X_b, \dots, X_{d-1}, e_t, X_d, \dots, X_{r-2}, u^1, \dots, u^{a-1}, e^k, \\ u^a, \dots, u^{c-1}, e^t, u^c, \dots, u^{s-2}). \end{aligned}$$

Аналогичные формулы имеют место для сверток по большему числу пар индексов.

4.2. Операции с тензорами в компонентах. Запишем введенные операции с тензорами в компонентах.

Теорема 4.3. Пусть (e_1, \dots, e_n) – произвольный базис в V , (e^1, \dots, e^n) – дуальный базис. Тогда

$$\begin{aligned} 1) (t_1 + t_2)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} &= (t_1)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + (t_2)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}; & 2) (\lambda t)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} &= \lambda t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}; \\ 3) (t \otimes T)_{j_1 \dots j_{r+p}}^{i_1 \dots i_{s+q}} &= t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} T_{j_{r+1} \dots j_{r+p}}^{i_{s+1} \dots i_{s+q}}, & 4) (C_{(b)}^{(a)}t)_{j_1 \dots j_{r-1}}^{i_1 \dots i_{s-1}} &= t_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_{r-1}}^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{s-1}}, \end{aligned}$$

где t_1, t_2, t – тензоры типа (r, s) , T – тензор типа (p, q) , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Легко проверить, используя определение компонент тензора и определения операций с тензорами. \square

Задача 4.11. Выведите формулу, аналогичную 4) в теореме 4.3, для свертки по двум парам индексов.

Ответ: $(C_{(b)(d)}^{(a)(c)}t)_{j_1 \dots j_{r-2}}^{i_1 \dots i_{s-2}} = t_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_{d-1} t j_d \dots j_{r-2}}^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{c-1} t i_c \dots i_{s-2}}$

Пример 4.9. Пусть L – тензор типа $(1, 1)$. Рассмотрим базис (e_1, \dots, e_n) в V и дуальный базис (e^1, \dots, e^n) . Тогда свертка тензора L по первому нижнему и первому верхнему индексам (см. (3.2))

$$C_{(1)}^{(1)}L = L(e_k, e^k) = e^k(L(e_k)) = L_k^k$$

будет вещественным числом. Это число не зависит от выбора базиса, называется *следом тензора* L и обозначается $tr L$. \square

Задача 4.12. Пусть η – ковектор, X, Y – произвольные векторы, L – тензор типа (1,1) (линейный оператор), g – тензор типа (2,0), (e_1, \dots, e_n) – базис векторного пространства V . Докажите, что

$$1) \eta(X) = \eta_i X^i; \quad 2) L(X) = L_i^j X^i e_j; \quad 3) g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Решение. Докажем второе равенство (остальные доказываются аналогично). Разложим вектор X по базису: $X = X^i e_i$ и подставим в $L(X)$

$$L(X) = L(X^i e_i) = X^i L(e_i) = X^i L_i^j e_j.$$

Здесь мы воспользовались линейностью оператора L и определением матрицы линейного оператора в базисе (напомним, что элементы матрицы линейного оператора совпадают с компонентами L , рассматриваемого как тензор типа (1,1)).

В частности, из доказанной формулы получим, что координаты вектора $L(X)$ имеют вид

$$(L(X))^j = L_i^j X^i.$$

\square

Пример 4.10. „Упростим“ тензорные выражения: а) $C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi)$; б) $C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X)$; в) $C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X)$, где $\xi, X \in V$, $\eta \in V^*$, L – тензор типа (1,1).

а) Это тензор типа (0,0). Воспользуемся теоремой 4.3:

$$C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi) = (\eta \otimes \xi)_k^k = \eta_k \xi^k = \eta(\xi).$$

Здесь мы воспользовались примером 3.5 и следствием 2.1.

б) Рассмотрим тензор $C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X)$. Это тензор типа (0,1), то есть вектор. Найдем координаты этого вектора (воспользуемся теоремой 4.3):

$$(C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)_j^{ij} = L_j^i X^j$$

Сравнивая полученный результат с формулой (1.2), получим, что числа $(C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X))^i$ суть координаты вектора $L(X)$, то есть

$$C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X) = L(X).$$

в) Рассмотрим тензор $C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X)$. Это тензор типа $(0,1)$, то есть вектор. Найдем его координаты (воспользуемся теоремой 4.3):

$$(C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)_j^{ji} = L_j^j X^i = (\text{tr } L) X^i.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 4.9. Аналогично пункту б) делаем вывод, что

$$C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X) = (\text{tr } L)X. \square$$

Задача 4.13. Пусть L – тензор типа $(1,1)$, то есть линейный оператор, $X \in V$, $\eta \in V^*$. „Упростите“ тензорные выражения: а) $C_{(1)(2)}^{(1)(2)}(\eta \otimes L \otimes X)$, б) $C_{(2)(1)}^{(1)(2)}(\eta \otimes L \otimes X)$.

Ответ: а) $\eta(L(X))$; б) $(\text{tr } L)\eta(X)$.

Пример 4.11. Рассмотрим два линейных оператора I и J . Как известно из курса алгебры композиция $I \circ J$ этих линейных операторов также является линейным оператором, то есть тензором типа $(1,1)$. Выразим его с помощью тензорных операций через линейные операторы I и J .

Рассмотрим произвольный вектор $X \in V$. Тогда $(I \circ J)(X)$ – вектор. Выразим его координаты:

$$\begin{aligned} ((I \circ J)(X))^i &= (I(J(X)))^i = I_j^i (J(X))^j = I_j^i J_k^j X^k = (I \otimes J)_{jk}^{ij} X^k = \\ &= (C_{(1)}^{(2)}(I \otimes J))_k^i X^k = ((C_{(1)}^{(2)}(I \otimes J))(X))^i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так как координаты векторов в крайне правой и крайне левой частях цепочки равенств равны, то равны и сами вектора, то есть

$$(I \circ J)(X) = (C_{(1)}^{(2)}(I \otimes J))(X).$$

Это верно для любого вектора X , а значит, равны и сами отображения, то есть

$$I \circ J = C_{(1)}^{(2)}(I \otimes J).$$

В частности, из цепочки равенств (4.3) еще одну полезную формулу

$$(I \circ J)_j^i = I_k^i J_j^k. \quad (4.4)$$

Эту формулу мы можем получить и непосредственно, используя определение компонент тензора, формулы (3.2), (1.2) и свойство линейности линейного оператора:

$$\begin{aligned}(I \circ J)_j^i &= (I \circ J)(e_j, e^i) = e^i(I(J(e_j))) = e^i(I(J_j^k e_k)) = J_j^k e^i(I(e_k)) = \\ &= J_j^k e^i(I_k^t e_t) = J_j^k I_k^t e^i(e_t) = J_j^k I_k^t \delta_t^i = J_j^k I_k^i. \quad \square\end{aligned}$$

Задача 4.14. Пусть L – линейный оператор, $\eta \in V^*$. Выразите через тензорные операции композицию $\eta \circ L$ и определите вид полученного тензора. Выразите компоненты тензора $\eta \circ L$ через компоненты тензоров L и η .

$$\text{Ответ: } \eta \circ L = C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes L); (\eta \circ L)_i = \eta_j L_i^j.$$

Пример 4.12. Пусть на четно мерном векторном пространстве V^{2n} задан оператор канонической комплексной структуры J_0 (см. пример 3.7). Докажем, что $J_0 \circ J_0 = -id$. Согласно следствию 3.2 нам достаточно доказать, что в некотором фиксированном базисе компоненты тензора $J_0 \circ J_0$ равны

$$(J_0 \circ J_0)_j^i = -\delta_j^i,$$

где $i, j = 1, \dots, 2n$.

Согласно примеру 3.6 тензор типа (1,1) отождествляется с линейным оператором, причем его компоненты суть элементы матрицы этого оператора. Тогда $(J_0 \circ J_0)_j^i$ – элементы матрицы оператора $J_0 \circ J_0$. Как мы знаем из курса алгебры, чтобы матрицей композиции двух операторов является произведение матриц этих операторов, то есть

$$((J_0 \circ J_0)_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = -(\delta_j^i).$$

Доказанное свойство оператора канонической комплексной структуры называется *свойством антиинволютивности* J_0 . \square

Задача 4.15. Выясните геометрический смысл действия оператора канонической комплексной структуры векторного пространства V^2 на произвольный вектор этого пространства. Здесь предполагается, что базис, относительно которого матрица J_0 имеет вид (3.3), является ортонормированным.

$$\text{Ответ: поворот на угол } \frac{\pi}{2}.$$

Задача 4.16. Пусть в четномерном векторном пространстве V^{2n} относительно некоторого фиксированного базиса (e_1, \dots, e_{2n}) задана матрица

$$(\Pi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $i, j = 1, \dots, 2n$. При переходе к любому другому базису эти числа преобразуются по тензорному закону. Аналогично примеру 3.7 получаем тензор Π типа $(1,1)$.

Докажите, что $\Pi \circ \Pi = id$. Выясните геометрический смысл тензора Π в случае векторного пространства V^2 в предположении, что базис, относительно которого задана матрица (4.5), является ортонормированным.

Ответ: Осевая симметрия относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§5. Канонический базис в векторном пространстве тензоров типа (r, s) .

Пусть V – векторное пространство. Обозначим множество всех тензоров на V типа (r, s) через $\mathfrak{T}_r^s(V)$. Из свойств операций сложения тензоров и умножения тензора на число (см. § 4.) следует, что множество $\mathfrak{T}_r^s(V)$ является векторным пространством. Нулевым элементом в этом векторном пространстве будет отображение, ставящее любому набору из r векторов и s ковекторов число ноль.

Задача 5.17. Аналогично примеру 2.1 докажите, что определенный выше нулевой элемент действительно является тензором, то есть докажите, что он линеен по каждому аргументу. Этот тензор обозначается 0 и называется *нуль-тензором*. Докажите, что нуль-тензор действительно является нейтральным по сложению, то есть для любого тензора $t \in \mathfrak{T}_r^s(V)$ верно равенство $t + 0 = t$.

Задача 5.18. Докажите, что для любого тензора $t \in \mathfrak{T}_r^s(V)$ отображение

$$-t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

определенное формулой

$$(-t)(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = -t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s),$$

является тензором. Докажите, что тензор $(-t)$ является противоположным для тензора t , то есть $t + (-t) = 0$.

Итак, мы выяснили, что множество тензоров типа (r, s) является векторным пространством. Оказывается это векторное пространство конечномерно. Чтобы узнать размерность пространства $\mathfrak{T}_r^s(V)$, нам нужно построить какой-нибудь его базис.

Пусть (e_1, \dots, e_n) – произвольный базис в векторном пространстве V , обозначим через (e^1, \dots, e^n) дуальный базис. Рассмотрим систему тензоров

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}\}. \quad (5.1)$$

Из определения операции тензорного умножения следует, что $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$ – это тензоры типа (r, s) .

Теорема 5.4. Система тензоров (5.1) является базисом векторного пространства $\mathfrak{T}_r^s(V)$. В частности, размерность пространства $\mathfrak{T}_r^s(V)$ равна n^{r+s} . Координаты тензоров относительно этого базиса совпадают с компонентами этого тензора в базисе $E = (e_1, \dots, e_n)$.

Доказательство. 1. Докажем, что система тензоров (5.1) линейно независима. Составим линейную комбинацию этих тензоров и приравняем ее нуль-тензору:

$$\lambda_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} = 0. \quad (5.2)$$

Фиксируем произвольный набор e_{k_1}, \dots, e_{k_s} векторов базиса и e^{t_1}, \dots, e^{t_r} ко-векторов дуального базиса. Подействуем на них обеими частями уравнения (5.2). По определению операции тензорного умножения получим

$$\lambda_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1}(e^{t_1}) \dots e_{i_s}(e^{t_s}) e^{j_1}(e_{k_1}) \dots e^{j_r}(e_{k_r}) = 0(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}),$$

то есть

$$\lambda_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \delta_{i_1}^{t_1} \dots \delta_{i_s}^{t_s} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_r}^{j_r} = 0,$$

то есть

$$\lambda_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s} = 0.$$

Итак, мы получили, что все коэффициенты $\lambda_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s}$ в уравнении (5.2) должны быть равны нулю, то есть система тензоров (5.1) линейно независима.

2. Докажем, что любой тензор может быть представлен в виде линейной комбинации тензоров системы (5.1). Пусть t – произвольный тензор типа (r, s) . Обозначим через $\{t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}\}$ компоненты тензора t в базисе E и построим тензор

$$T = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}.$$

Докажем, что тензоры T и t совпадают. Согласно следствию 3.2 для этого достаточно показать, что тензоры T и t имеют одинаковые компоненты в базисе E . Компоненты тензора t у нас уже есть. Вычислим компоненты тензора T :

$$\begin{aligned} T_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s} &= T(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) = \\ &= t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) = \\ &= t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \delta_{i_1}^{t_1} \dots \delta_{i_s}^{t_s} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_r}^{j_r} = t_{k_1 \dots k_r}^{t_1 \dots t_s}. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем, что тензоры T и t совпадают, а значит, тензор t представим в виде линейной комбинации тензоров (5.1). При этом координатами тензора t в построенном базисе являются его компоненты относительно базиса E . □

Базис $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}\}$ пространства тензоров $\mathfrak{T}_r^s(V)$ назовем *каноническим*.

§6. Симметрические и кососимметрические тензоры.

6.1. Определения. Рассмотрим тензор t типа (r, s) .

Тензор t называется *симметричным по a -му и b -му векторным аргументам*, если

$$\begin{aligned} t(X_1, \dots, X_a, \dots, X_b, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) &= \\ &= t(X_1, \dots, X_b, \dots, X_a, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s). \end{aligned}$$

Сформулируйте аналогичное определение для ковекторных аргументов самостоятельно.

В компонентах определения симметричности по паре одноименных аргументов выглядят следующим образом:

$$t_{j_1 \dots j_a \dots j_b \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = t_{j_1 \dots j_b \dots j_a \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}; \quad t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_a \dots i_b \dots i_s} = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_b \dots i_a \dots i_s}.$$

При этом говорят, что тензор t *симметричен по a - му и b - му верхним (соответственно, нижним) индексам*.

Тензор t называется *кососимметричным по a - му и b - му векторным аргументам*, если

$$\begin{aligned} t(X_1, \dots, X_a, \dots, X_b, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = \\ = -t(X_1, \dots, X_b, \dots, X_a, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s). \end{aligned}$$

Сформулируйте аналогичное определение для ковекторных аргументов самостоятельно.

В компонентах определения кососимметричности по паре одноименных аргументов выглядят следующим образом:

$$t_{j_1 \dots j_a \dots j_b \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = -t_{j_1 \dots j_b \dots j_a \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}; \quad t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_a \dots i_b \dots i_s} = -t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_b \dots i_a \dots i_s}$$

При этом говорят, что тензор t *кососимметричен по a - му и b - му верхним (соответственно, нижним) индексам*.

Для тензоров типов $(r, 0)$ и $(0, s)$ можно ввести еще два определения.

Будем называть тензор t типа $(r, 0)$ *симметрическим* (соответственно, *кососимметрическим*), если он симметричен (соответственно, кососимметричен) по любой паре своих аргументов.

Аналогичное определение имеет место и для тензора типа $(0, s)$.

Пример 6.13. Тензор $\eta \otimes \eta$, где $\eta \in V^*$, является симметрическим тензором типа $(2, 0)$. Действительно, для любых векторов $X, Y \in V$ имеем

$$\eta \otimes \eta(X, Y) = \eta(X)\eta(Y) = \eta(Y)\eta(X) = \eta \otimes \eta(Y, X). \quad \square$$

6.2. Операторы альтернирования и симметризации. Далее будем рассматривать множество $\mathfrak{T}_r^0(V)$ всех тензоров типа $(r, 0)$. Заметим, что аналогичные рассуждения справедливы для тензоров типа $(0, s)$.

Обозначим множество всех симметрических тензоров типа $(r, 0)$ через $\mathcal{S}_r(V)$, а множество всех кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ – через $\Lambda_r(V)$.

Напомним, что *подстановкой степени r* называется произвольное биективное соответствие σ множества $\{1, \dots, r\}$ на себя. Обычно подстановка обозначается двустрочной таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix}.$$

Подстановки делятся на четные и нечетные в зависимости от того, четно или нечетно число пар $(\sigma(i), \sigma(j))$, для которых $i < j, \sigma(i) > \sigma(j), (i, j = 1, \dots, r)$. *Знаком подстановки* называется число $+1$, если подстановка четная и число -1 , если подстановка нечетная. Знак подстановки обозначается $\varepsilon(\sigma)$.

Фиксируем произвольную подстановку $\sigma \in S_r$. Определим отображение, которое будем обозначать той же буквой σ

$$\sigma : \mathfrak{T}_r^0(V) \rightarrow \mathfrak{T}_r^0(V)$$

по формуле $(\sigma t)(X_1, \dots, X_r) = t(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})$, где $X_1, \dots, X_r \in V$ – произвольные векторы. Это отображение называется *действием подстановки σ* на векторном пространстве тензоров типа $(r, 0)$. Так как действие на векторном пространстве тензоров определено для любой подстановки из группы S_r , говорят, что *группа подстановок S_r действует на векторном пространстве тензоров типа $(r, 0)$* .

Предложение 6.1 . *Действие группы подстановок обладает следующим свойством*

$$\sigma(\tau t) = (\tau \circ \sigma)(t).$$

Доказательство. Рассмотрим две произвольные подстановки $\sigma, \tau \in S_r$. То-

гда

$$\begin{aligned} (\sigma(\tau t))(X_1, \dots, X_r) &= (\tau t)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = t(X_{\tau(\sigma(1))}, \dots, X_{\tau(\sigma(r))}) = \\ &= ((\tau \circ \sigma)(t))(X_1, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Так как это верно для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in V$, то получим

$$\sigma(\tau t) = (\tau \circ \sigma)(t).$$

Если для действия группы имеет место такой закон композиции, то говорят, что *группа действует справа*. В нашем случае получаем, что группа подстановок действует справа на векторном пространстве тензоров типа $(r, 0)$. Заметим, что закон композиции самих подстановок $\sigma, \tau \in S_r$ остается прежним $\sigma(\tau(k)) = (\sigma \circ \tau)(k)$, где k – натуральное число от 1 до r . \square

Задача 6.19. Докажите, что действие группы подстановок на векторном пространстве тензоров $\mathfrak{T}_r^0(V)$ линейно, то есть

$$\sigma(\alpha t_1 + \beta t_2) = \alpha \sigma(t_1) + \beta \sigma(t_2),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}_r^0(V)$.

Задача 6.20. Тензор $t \in \mathfrak{T}_r^0(V)$ является симметрическим тогда и только тогда, когда $\sigma t = t$.

Тензор $t \in \mathfrak{T}_r^0(V)$ является кососимметрическим тогда и только тогда, когда $\sigma t = \varepsilon(\sigma)t$. Докажите.

Указание. Напомним, что любая подстановка раскладывается в композицию транспозиций (подстановка, в которой меняются местами только два элемента, а остальные остаются на своих местах). Четная подстановка раскладывается в четное число транспозиций, а нечетная – в нечетное число. \square

Определим два отображения

$$Alt : \mathfrak{T}_r^0(V) \rightarrow \Lambda_r(V); \quad Sym : \mathfrak{T}_r^0(V) \rightarrow \mathcal{S}_r(V)$$

по формулам

$$Alt(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma t; \quad Sym(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma t.$$

Отображение Alt называется *оператором альтернирования*, а отображение Sym – *оператором симметризации*.

Докажем, что операции определены корректно, то есть тензор $Alt(t)$ является кососимметрическим, а $Sym(t)$ – симметрическим тензором.

В самом деле, согласно задаче 6.20 нам нужно доказать, что любой фиксированной подстановки τ получим $\tau(Alt(t)) = \varepsilon(\tau)Alt(t)$ для любой подстановки $\tau \in S_r$. Согласно определению оператора альтернирования получим

$$\tau(Alt(t)) = \tau \left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma(t) \right) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) ((\sigma \circ \tau)(t)). \quad (6.1)$$

Здесь мы воспользовались задачей 6.19 и предложением 6.1. Обозначим подстановку $\sigma \circ \tau$ через σ' . Тогда если подстановка σ пробегает все множество S_r , то его пробегает и подстановка σ' . Кроме того, так как $\sigma' = \sigma \circ \tau$, то для знаков этих подстановок получим $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. Откуда получим $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\tau)$ (напомним, что знак подстановки – это либо $+1$, либо -1). Вернемся к цепочке равенств (6.1):

$$\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) ((\sigma \circ \tau)(t)) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma' \in S_r} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma')\sigma'(t) = \varepsilon(\tau)Alt(t).$$

Здесь мы воспользовались задачей 6.19 в обратную сторону и определением оператора альтернирования в обратную сторону. Итак, мы получаем, что образом произвольного тензора t при операции альтернирования является кососимметрический тензор.

Доказательство для оператора Sym аналогично (докажите самостоятельно).

Задача 6.21. Докажите, что отображения Alt и Sym линейны, то есть

$$Alt(\alpha t_1 + \beta t_2) = \alpha Alt(t_1) + \beta Alt(t_2),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}_r^0(V)$ и аналогичное равенство для отображения Sym .

Указание. Непосредственно следует из того, что $\sigma(t_1 + t_2) = \sigma t_1 + \sigma t_2$, $\sigma(\alpha t) = \alpha \sigma(t)$. \square

Задача 6.22. Докажите, что $Alt(t) = t$ для любого $t \in \Lambda_r(V)$ и $Sym(T) = T$ для любого $T \in \mathcal{S}_r(V)$. Другими словами, любой кососимметрический тензор

оператор альтернирования переводит в себя; любой симметрический тензор оператор симметризации переводит в себя.

Указания. Примените определение операций альтернирования и симметризации и задачу 6.20. \square

Задача 6.23. А что будет, если к симметрическому тензору применить оператор альтернирования, а к кососимметрическому тензору – оператор симметризации?

Ответ: нуль.

Пример 6.14. Рассмотрим множество $\mathfrak{T}_2^0(V)$ тензоров типа $(2,0)$. Пусть t – произвольный тензор из $\mathfrak{T}_2^0(V)$. Фиксируем в V базис (e_1, \dots, e_n) и найдем компоненты тензоров $Alt(t)$ и $Sym(t)$ в этом базисе. По определению компонент тензора и определению оператора альтернирования имеем

$$\begin{aligned} (Alt(t))_{ij} &= (Alt(t))(e_i, e_j) = \left(\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \sigma(t) \right) (e_i, e_j) = \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) (\sigma(t)(e_i, e_j)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

В группе подстановок S_2 всего две подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Первая из них является четной, а вторая – нечетной. Тогда продолжая цепочку равенств (6.2), получим

$$(Alt(t))_{ij} = \frac{1}{2} (t(e_i, e_j) - t(e_j, e_i)) = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji}).$$

Обычно компоненты $(Alt(t))_{ij}$ обозначают $t_{[ij]}$. В этих обозначениях полученная формула примет вид:

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji}).$$

Аналогично рассуждая и вводя обозначение $(Sym(t))_{ij} = t_{(ij)}$, получим формулу для компонент тензора $Sym(t)$:

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}). \quad \square$$

Задача 6.24. Вычислите компоненты тензоров $Alt(t)$ и $Sym(t)$ для тензора t типа $(3,0)$.

Ответ: $t_{[ijk]} = \frac{1}{6}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij} - t_{jik} - t_{kji} - t_{ikj})$; $t_{(ijk)} = \frac{1}{6}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij} + t_{jik} + t_{kji} + t_{ikj})$. Здесь введены обозначения $(Alt(t))_{ijk} = t_{[ijk]}$, $(Sym(t))_{ijk} = t_{(ijk)}$.

6.3. Альтернирование и симметризация тензоров по части аргументов. Пусть дан тензор t типа (r, s) . Рассмотрим отображение T , заданное формулой

$$T(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = \frac{1}{2!}(t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) + t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)),$$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_r \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$. Легко видеть, что отображение T линейно по каждому, а значит, является тензором типа (r, s) . Будем называть тензор T *результатом симметризации тензора t по первым двум векторным аргументам*.

Используя определение компонент тензора, легко получить, что компоненты тензора T имеют вид

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = \frac{1}{2!}(t_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + t_{j_2 j_1 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}). \quad (6.3)$$

Договоримся обозначать компоненты тензора T через $t_{(j_1 j_2) j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$. В этих обозначениях формула (6.3) примет вид

$$t_{(j_1 j_2) j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = \frac{1}{2!}(t_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + t_{j_2 j_1 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}).$$

Будем при этом говорить, что тензор T получен из тензора t *симметризацией по первым двум нижним индексам*.

Если индексы, по которым проводится симметризация стоят не подряд, то будем выделять индексы, не участвующие в симметризации, прямыми „скобками“. Например,

$$t_{(i|jk|t)\ell}^m = \frac{1}{2!}(t_{ijk\ell}^m + t_{tjkil}^m).$$

Здесь симметризация проводится по индексам i и t .

Аналогичным образом определяется симметризация тензора по ковекторным аргументам. Заметим, что симметризация по одному верхнему и одному нижнему индексам не определяется.

Аналогичным образом определим *операцию альтернации по двум одноименным аргументам* по формуле

$$T(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = \frac{1}{2!} (t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) - t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)),$$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_r \in V, u^1, \dots, u^s \in V^*$.

В компонентах эта операция будет выглядеть следующим образом:

$$t_{[j_1 j_2] j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = \frac{1}{2!} (t_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - t_{j_2 j_1 j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}).$$

Здесь компоненты $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ обозначены через $t_{[j_1 j_2] j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$. Будем говорить, что тензор T получен из тензора t *альтернацией по первым двум нижним индексам*. Если индексы идут не подряд, то будем выделять, не участвующие в альтернации индексы прямыми „скобками“:

$$t_{[i|jk|t]l}^m = \frac{1}{2!} (t_{ijktl}^m - t_{tjkil}^m).$$

Операции симметризации и альтернирования по двум одноименным аргументам можно распространить на большее число аргументов. Так как операции симметризации и альтернирования по части аргументов нам чаще всего придется применять в „компонентном“ виде, то приведем эти определения сразу в компонентах. Например, альтернация по трем первым нижним индексам задается формулой

$$t_{[ijk]l}^m = \frac{1}{3!} (t_{ijkil}^m + t_{jkil}^m + t_{kijl}^m - t_{jikl}^m - t_{kjil}^m - t_{ikjl}^m).$$

Общий принцип следующий: перед скобкой ставится единица деленная на факториал количества индексов, участвующих в альтернации, а в скобках идут компоненты тензора t , взятые со знаком $+$, если соответствующая перестановка индексов подстановка является четной и со знаком $-$, если нечетной. При этом перебираются все возможные перестановки индексов, участвующих в альтернации.

Симметризация тензора по трем нижним индексам задается формулой

$$t_{[ijk]l}^m = \frac{1}{3!} (t_{ijkil}^m + t_{jkil}^m + t_{kijl}^m + t_{jikl}^m + t_{kjil}^m + t_{ikjl}^m).$$

При симметризации также как при альтернации перебираются все возможные перестановки индексов, участвующих в симметризации, но перед всеми компонентами тензора всегда ставится знак $+$.

Задача 6.25. Запишите в компонентах альтернацию тензора t типа $(3,5)$ по второму, четвертому и пятому верхним индексам.

Задача 6.26. Докажите, что если симметризовать тензор по паре нижних индексов, то полученный тензор будет симметричен по этим индексам. Докажите аналогичное утверждение для альтернации по паре нижних индексов.

Задача 6.27. Пусть тензор t кососимметричен по первой паре нижних индексов. Докажите, что компоненты тензора t вида $t_{ii\dots}$ равны нулю.

Задача 6.28. Докажите, что в трехмерном векторном пространстве V^3 любой кососимметрический тензор типа $(r, 0)$, $r > 3$ является нуль-тензором.

Задача 6.29. Докажите, что если $t_1 \in \Lambda^2(V)$ (то есть кососимметрический тензор типа $(0,2)$), $t_2 \in \mathcal{S}_2(V)$, то $C_{(1)(2)}^{(1)(2)}(t_1 \otimes t_2) = 0$.

Задача 6.30. Докажите, что любой тензор t типа $(3,0)$ можно представить в виде

$$t_{ijk} = t_{(ijk)} + t_{[ijk]} + \frac{2}{3}(t_{(ij)k} - t_{j(ik)}) + \frac{2}{3}(t_{i[jk]} + t_{[ik]j}).$$

Задача 6.31. Докажите, что если тензор $t \in \mathfrak{T}_3^0(V)$ кососимметричен по первым двум индексам, то

$$t_{[ijk]} = \frac{1}{3}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij}).$$

Задача 6.32. Докажите, что если тензор $t \in \mathfrak{T}_3^0(V)$ симметричен по первым двум индексам, то

$$t_{(ijk)} = \frac{1}{3}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij}).$$

Пример 6.15. Рассмотрим тензор B типа $(2,1)$, кососимметричный по паре векторных аргументов (в другой терминологии – кососимметричный по паре нижних индексов).

Назовем *следом* тензора B тензор $C_{(1)}^{(1)}B$. След тензора B будем обозначать $tr B$. Это тензор типа $(1,0)$, то есть ковектор. Найдем его компоненты в произвольном базисе (e_1, \dots, e_n) векторного пространства V . Согласно теореме

4.3 получим

$$(tr B)_i = B_{ji}^j.$$

Будем говорить, что тензор B *бесследный*, если $tr B = 0$. В компонентах это условие примет вид $B_{ji}^j = 0$.

Назовем тензор B *примитивным*, если

$$B = \frac{1}{2}(u \otimes id - id \otimes u), \quad (6.4)$$

где u – некоторый подходящий ковектор, id – тождественный оператор (тензор типа $(1,1)$).

Выясним, как выглядит соотношение (6.4) в компонентах. По определению компонент тензора (см. § 3.) и формуле (3.2) получим

$$\begin{aligned} B_{ij}^k &= B(e_i, e_j, e^k) = \frac{1}{2}(u \otimes id - id \otimes u)(e_i, e_j, e^k) = \\ &= \frac{1}{2}(u(e_i)id(e_j, e^k) - id(e_i, e^k)u(e_j)) = \frac{1}{2}(u_i e^k(e_j) - u_j e^k(e_i)) = \frac{1}{2}(u_i \delta_j^k - u_j \delta_i^k). \end{aligned}$$

Используем определение альтернации по двум индексам и запишем полученный результат в виде

$$B_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_i \delta_j^k - u_j \delta_i^k) \equiv u_{[i} \delta_{j]}^k. \quad (6.5)$$

Наконец, выразим ковектор u через тензор B . Подобного рода вычисления удобно проводить „в компонентах“, то есть выразить компоненты ковектора u через компоненты тензора B .

Рассмотрим соотношения (6.5). Это n^3 равенств. Выберем из них равенства, у которых индексы k и i принимают одинаковые значения и сложим эти равенства:

$$B_{kj}^k = \frac{1}{2}(u_k \delta_j^k - u_j \delta_k^k).$$

В левой части равенства мы получили компоненты следа $tr B$ тензора B . Вычислим правую часть равенства. Способ вычисления первого слагаемого нам уже знаком (см. замечание 1.2): в сумме $u_k \delta_j^k$ все слагаемые кроме слагаемого, для которого $k = j$, равны нулю, то есть $u_k \delta_j^k = u_j$. Рассмотрим второе слагаемое: $\delta_k^k = \delta_1^1 + \dots + \delta_n^n$ – это сумма из n штук 1, то есть $\delta_k^k = n$. Итак,

мы получим $(tr B)_j = \frac{1}{2}(u_j - nu_j)$. Выражая отсюда u_j имеем

$$u_j = \frac{2}{1-n}(tr B)_j.$$

Так как компоненты двух ковекторов равны, то равны и сами ковекторы. Окончательно получим

$$u = \frac{2}{1-n}(tr B). \quad (6.6)$$

Вывод: ковектор u из определения примитивного тензора определен однозначно с помощью формулы (6.6). \square

Пример 6.16. Пусть B – тензор типа $(2,1)$, кососимметричный по паре векторных аргументов (в другой терминологии – кососимметричный по паре нижних индексов). Докажем, что тензор B можно представить в виде суммы

$$B = C + D,$$

где C – бесследный тензор типа $(2,1)$, D – примитивный тензор типа $(2,1)$.

Поставленную задачу удобно решать в компонентах. Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в векторном пространстве V . Тогда тензор B имеет компоненты $\{B_{ij}^k\}$. Рассмотрим тензор C с компонентами

$$C_{ij}^k = B_{ij}^k - \frac{1}{n-1}((tr B)_j \delta_i^k - (tr B)_i \delta_j^k).$$

В правой части этого соотношения записаны операции с тензорами (см. теорему 4.3), а значит, числа C_{ij}^k являются компонентами тензора типа $(2,1)$. Вычислим его след (см. пример 6.15):

$$\begin{aligned} C_{kj}^k &= B_{kj}^k - \frac{1}{n-1}((tr B)_j \delta_k^k - (tr B)_j) = \\ &= B_{kj}^k - \frac{1}{n-1}((tr B)_j n - (tr B)_j) = (tr B)_j - \frac{n-1}{n-1}(tr B)_j = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, тензор C – бесследный.

Наконец, тензор D зададим с помощью его компонент D_{ij}^k :

$$D_{ij}^k = B_{ij}^k - C_{ij}^k.$$

Покажем, что тензор D является примитивным. Действительно,

$$D_{ij}^k = B_{ij}^k - B_{ij}^k + \frac{1}{n-1}((tr B)_j \delta_i^k - (tr B)_i \delta_j^k) = \frac{1}{n-1}((tr B)_j \delta_i^k - (tr B)_i \delta_j^k).$$

Если обозначить $u_i = \frac{2}{1-n}(tr B)_i$, то получим

$$D_{ij}^k = u_{[i}\delta_{j]}^k.$$

Таким образом, тензор D является примитивным тензором и, кроме того, $B_{ij}^k = C_{ij}^k + D_{ij}^k$. \square

Задача 6.33. Запишите решение примера 6.16 в инвариантном виде (то есть без использования компонент тензора).

Задача 6.34. Можно ли придумать что-то аналогичное примеру 6.16 для тензора B типа $(2,1)$, симметричного по векторным аргументам (то есть симметричного по паре нижних индексов)?

Задача 6.35. Докажите, что любой тензор C типа $(2,0)$ можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического тензора.

Указание. Очевидно, что $C_{ij} = C_{[ij]} + C_{(ij)}$.

Пример 6.17. Пусть дан тензор B типа $(3,0)$, кососимметричный по последней паре векторных аргументов (то есть по последней паре индексов). Докажите, что тензор B можно представить в виде суммы

$$B = C + D,$$

где C – кососимметрический тензор типа $(3,0)$ (то есть тензор кососимметричный по любой паре аргументов), D – тензор типа $(3,0)$, такой что $Alt(D) = 0$ (такие тензоры называются *квазисимметричными*).

Решим поставленную задачу в компонентах. Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в векторном пространстве V . Тогда компоненты тензора B имеют вид B_{ijk} . Обозначим через $C = Alt(B)$, то есть $C_{ijk} = B_{[ijk]}$. Тогда

$$D_{ijk} = B_{ijk} - B_{[ijk]} = B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij}) = \frac{2}{3}B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{jki} + B_{kij}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $B_{ijk} = -B_{ikj}$. Таким образом,

$$D_{ijk} = \frac{2}{3}B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{jki} + B_{kij}). \quad (6.7)$$

Вычислим $D_{[ijk]}$. Имеем

$$D_{[ijk]} = \frac{2}{3}B_{[ijk]} - \frac{1}{3}(B_{[jki]} + B_{[kij]}) = \frac{2}{3}B_{[ijk]} - \frac{1}{3}(B_{[ijk]} + B_{[ijk]}) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что образом произвольного тензора при альтернировании будет кососимметрический тензор, то есть тензор, кососимметричный по любой паре индексов.

Запишем определение тензора D в инвариантной форме. Применим определение компонент тензора к формуле (6.7):

$$D(e_i, e_j, e_k) = \frac{2}{3}B(e_i, e_j, e_k) - \frac{1}{3}(B(e_j, e_k, e_i) + B(e_k, e_i, e_j)). \quad (*)$$

Рассмотрим произвольные векторы $X, Y, Z \in V$. Тогда $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$. Умножим обе части равенств (*) на соответствующие X^i, Y^j, Z^k и просуммируем по индексам i, j, k :

$$D(X^i e_i, Y^j e_j, Z^k e_k) = \frac{2}{3}B(X^i e_i, Y^j e_j, Z^k e_k) - \frac{1}{3}(B(Y^j e_j, Z^k e_k, X^i e_i) + B(Z^k e_k, X^i e_i, Y^j e_j)).$$

Здесь мы воспользовались линейностью тензоров. Тогда получим

$$D(X, Y, Z) = \frac{2}{3}B(X, Y, Z) - \frac{1}{3}(B(Y, Z, X) - B(Z, X, Y)).$$

Итак, мы разложили тензор B в сумму $B = C + D$, где $C = Alt(B)$, $D(X, Y, Z) = \frac{2}{3}B(X, Y, Z) - \frac{1}{3}(B(Y, Z, X) - B(Z, X, Y))$. \square

Задача 6.36. Придумайте что-нибудь аналогичное для тензора B типа $(3,0)$, симметричного по последней паре индексов.

§7. Операция внешнего умножения.

Напомним, что множество кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ мы обозначили через $\Lambda_r(V)$. Будем называть такие тензоры r -ковекторами. Аналогично, будем называть кососимметрические тензоры типа $(0, r)$ r -векторами и обозначим через $\Lambda^r(V)$ множество всех r -векторов. Все дальнейшие построения настоящего параграфа мы будем проводить для r -ковекторов. Аналогичные результаты для r -векторов получите самостоятельно.

Пусть $t_1 \in \Lambda_{r_1}(V)$, $t_2 \in \Lambda_{r_2}(V)$ – произвольные кососимметрические тензоры. Внешним произведением тензоров t_1 и t_2 называется кососимметрический

тензор $t_1 \wedge t_2$ типа $(r_1 + r_2, 0)$, определенный формулой

$$t_1 \wedge t_2 = \frac{(r_1 + r_2)!}{r_1!r_2!} \text{Alt}(t_1 \otimes t_2). \quad (7.1)$$

Теорема 7.5. *Операция внешнего умножения обладает следующими свойствами:*

1. $(t_1 + t_2) \wedge t_3 = t_1 \wedge t_3 + t_2 \wedge t_3$;
2. $t_1 \wedge (t_2 + t_3) = t_1 \wedge t_2 + t_1 \wedge t_3$;
3. $(\alpha t_1) \wedge t_2 = t_1 \wedge (\alpha t_2) = \alpha(t_1 \wedge t_2)$;
4. $(t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3)$,

где t_1, t_2, t_3 – кососимметрические тензоры подходящих типов, α – вещественное число.

Доказательство. Первые три свойства доказываются легко по определениям и свойствам линейности тензорного умножения и оператора Alt .

Докажем четвертое свойство. Прежде всего заметим, что если $p < r$, то имеет место естественное вложение $S_p \subset S_r$ по формуле

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & r \\ i_1 & \dots & i_p & p+1 & \dots & r \end{pmatrix}.$$

Будем отождествлять подстановку σ с подстановкой $\bar{\sigma}$ и обозначать ее той же буквой σ . Тогда очевидна следующая лемма.

Лемма 7.3. *Пусть $t_1 \in \mathfrak{T}_p^0(V)$, $t_2 \in \mathfrak{T}_{r-p}^0(V)$, $\sigma \in S_p$, $\tau \in S_{r-p}$. Тогда*

$$\sigma(t_1 \otimes t_2) = \sigma(t_1) \otimes t_2; \quad \tau(t_1 \otimes t_2) = t_1 \otimes \tau(t_2).$$

Лемма 7.4. *Пусть $\sigma \in S_r$, $t \in \mathfrak{T}_r^0(V)$. Тогда*

$$\sigma \circ \text{Alt}(t) = \varepsilon(\sigma) \text{Alt}(t); \quad \text{Alt} \circ \sigma(t) = \varepsilon(\sigma) \text{Alt}(t).$$

В частности, $\sigma \circ \text{Alt} = \text{Alt} \circ \sigma$.

□ Пусть $X_1, \dots, X_r \in V$ – произвольные векторы. Тогда

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \text{Alt}(t))(X_1, \dots, X_r) &= \text{Alt}(t)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau) (\tau t)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau) t(X_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, X_{\tau \circ \sigma(r)}). \end{aligned}$$

Обозначим $\sigma' = \tau \circ \sigma$. Тогда $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ и, продолжая цепочку равенств, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau) t(X_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, X_{\tau \circ \sigma(r)}) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma' \in S_r} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') t(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(r)}) = \\ &= \varepsilon(\sigma) \text{Alt}(t)(X_1, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Второе соотношение доказывается аналогично. ■

Лемма 7.5. Для любых $t_1 \in \mathfrak{T}_p^0(V)$, $t_2 \in \mathfrak{T}_{r-p}^0(V)$ имеем

$$\text{Alt}(\text{Alt}(t_1) \otimes t_2) = \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(t_2)) = \text{Alt}(t_1 \otimes t_2).$$

Другими словами, внешняя альтернация „сзедает“ все внутренние.

□ По определению операции альтернирования получим

$$\text{Alt}(t_1) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \sigma(t_1).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \text{Alt}(t_1) \otimes t_2 &= \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \sigma(t_1) \right) \otimes t_2 = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) (\sigma(t_1) \otimes t_2) = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \sigma(t_1 \otimes t_2). \end{aligned}$$

Наконец, вычислим $\text{Alt}(\text{Alt}(t_1) \otimes t_2)$:

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\text{Alt}(t_1) \otimes t_2) &= \text{Alt} \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \sigma(t_1 \otimes t_2) \right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \text{Alt} \circ \sigma(t_1 \otimes t_2) = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma) \text{Alt}(t_1 \otimes t_2) = \frac{1}{p!} |S_p| \text{Alt}(t_1 \otimes t_2) = \text{Alt}(t_1 \otimes t_2). \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь мы можем доказать ассоциативность внешнего умножения. Имеем

$$\begin{aligned} (t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 &= \frac{(r_1 + r_2 + r_3)! (r_1 + r_2)!}{(r_1 + r_2)! r_3! r_1! r_2!} \text{Alt}(\text{Alt}(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3) = \\ &= \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{r_1! r_2! r_3!} \text{Alt}((t_1 \otimes t_2) \otimes t_3) = \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{r_1! r_2! r_3!} \text{Alt}(t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3)) = \\ &= \frac{(r_1 + r_2 + r_3)! (r_2 + r_3)!}{(r_2 + r_3)! r_1! r_2! r_3!} \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(t_2 \otimes t_3)) = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3). \end{aligned}$$

□

Предложение 7.2 . Для любых $\omega, \theta \in \Lambda_1(V) \equiv V^*$ имеем

$$\begin{aligned}\omega \wedge \theta(X, Y) &= \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X); \\ \omega \wedge \theta &= -\theta \wedge \omega,\end{aligned}$$

$X, Y \in V$. В частности, $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. По определению внешнего произведения и операции альтернирования имеем

$$\begin{aligned}\omega \wedge \theta(X, Y) &= 2(\text{Alt}(\omega \otimes \theta))(X, Y) = 2 \cdot \frac{1}{2!} \left(\sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \sigma(\omega \otimes \theta) \right) (X, Y) = \\ &= \omega \otimes \theta(X, Y) - \omega \otimes \theta(Y, X) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X).\end{aligned}$$

Вычисляя значения $\omega \wedge \theta$ и $\theta \wedge \omega$ на паре произвольных векторов, легко видеть, что $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$. \square

Задача 7.37. Докажите, что для ковекторов $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеет место формула

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 3! \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3).$$

Обобщите эту формулу на случай внешнего произведения набора из r ковекторов.

Ответ. $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = r! \text{Alt}(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r)$.

Задача 7.38. Пусть $\Omega \in \Lambda_2(V)$, $\theta \in \Lambda_1(V) \equiv V^*$. Докажите, что

$$\Omega \wedge \theta(X, Y, Z) = \Omega(X, Y)\theta(Z) + \Omega(Y, Z)\theta(X) + \Omega(Z, X)\theta(Y); \quad \Omega \wedge \theta = \theta \wedge \Omega.$$

Пример 7.18. Пусть (e_1, \dots, e_n) – базис векторного пространства V , обозначим через (e^1, \dots, e^n) дуальный базис. Построим n -ковектор $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ и вычислим его значение на векторах e_1, \dots, e_n . Применяя лемму 7.5, получим

$$\begin{aligned}e^1 \wedge \dots \wedge e^n(e_1, \dots, e_n) &= n! \text{Alt}(e^1 \otimes \dots \otimes e^n)(e_1, \dots, e_n) = \\ &= n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma(e^1 \otimes \dots \otimes e^n)(e_1, \dots, e_n).\end{aligned}$$

Каждая подстановка $\sigma \in S_n$ будет „по-своему“ расставлять аргументы e_1, \dots, e_n , а ковекторы e^1, \dots, e^n – разбирать их по порядку. Среди всех полученных слагаемых будет только одно отличное от нуля (см. замечание 2.3),

а именно, слагаемое соответствующее тождественной подстановке. В результате получим

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

В частности, из этого следует, что n -ковектор $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ отличен от нуль-тензора типа $(n, 0)$. \square

Задача 7.39. Докажите, что для произвольных векторов $X_1, \dots, X_n \in V$ имеет место формула

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n(X_1, \dots, X_n) = \det(X_{(i)}^j),$$

где $(X_{(i)}^j)$ – матрица, составленная из координат векторов X_1, \dots, X_n в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Докажем, что векторное пространство $\Lambda_r(V)$ всех кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ конечномерно.

Теорема 7.6. Пусть (e_1, \dots, e_n) – базис векторного пространства V , обозначим через (e^1, \dots, e^n) дуальный базис. Тогда для любого $r = 1, 2, \dots$ система r -ковекторов $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\}$, где $i_1 < \dots < i_r$, образует базис пространства $\Lambda_r(V)$. В частности, размерность $\Lambda_r(V)$ равна $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что система тензоров $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\}$, где $i_1 < \dots < i_r$, образует базис, нужно, во-первых, убедиться в том, что она линейно независима и, во-вторых, нужно доказать, что любой r -ковектор раскладывается по данной системе r -ковекторов.

1. Рассмотрим линейную комбинацию данных r -ковекторов, равную нулю.

$$\lambda_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r} = 0; \quad i_1 < \dots < i_r \quad (7.2)$$

Нужно доказать, что из (7.2) следует, что для любого фиксированного набора индексов $k_1 < \dots < k_r$ числа $\lambda_{k_1 \dots k_r} = 0$. Фиксируем такой набор чисел. Пусть числа (j_{r+1}, \dots, j_n) дополняют набор чисел k_1, \dots, k_r до подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & j_{r+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части равенства (7.2) на $(n-r)$ -ковектор $e^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n}$. Получим

$$\lambda_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r} \wedge e^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n} = 0. \quad (7.3)$$

Заметим, что если среди слагаемых этой суммы имеются слагаемые с двумя одинаковыми индексами, то в силу леммы они равны нулю. Следовательно, ненулевыми могут быть лишь те слагаемые, для которых (i_1, \dots, i_r) – перестановка индексов (k_1, \dots, k_r) . Поэтому, произведя над индексами $i_1 \dots i_r$ соответствующую перестановку, перепишем соотношение (7.3) в виде

$$\pm \lambda_{k_1 \dots k_r} e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_r} \wedge e^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n} = 0. \quad (7.4)$$

Но так как набор $(k_1 \dots k_r j_{r+1} \dots j_n)$ является перестановкой индексов $(1 \dots n)$, то (7.4) можно записать в виде

$$\pm \lambda_{k_1 \dots k_r} e^1 \wedge \dots \wedge e^n = 0.$$

Поддействуем обеими частями этого равенства на вектора e_1, \dots, e_n . Тогда согласно примеру 7.18 получим $\pm \lambda_{k_1 \dots k_r} = 0$, то есть $\lambda_{k_1 \dots k_r} = 0$.

Итак, система r -ковекторов $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\}$, $i_1 < \dots < i_r$ линейно независима.

2. Пусть $\omega \in \Lambda_r(V)$ – произвольный r -ковектор. В частности, $\omega \in \mathfrak{T}_r^0(V)$, а значит, он раскладывается по базису $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}\}$ пространства $\mathfrak{T}_r^0(V)$, то есть $\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$, где согласно теореме 5.4, $\omega_{i_1 \dots i_r}$ – компоненты тензора ω в базисе (e_1, \dots, e_n) . Применим к этому соотношению оператор альтернирования. Так как ω – кососимметрический тензор, $Alt(\omega) = \omega$, а значит,

$$\omega = Alt(\omega_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}) = \omega_{i_1 \dots i_r} Alt(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}) = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}.$$

В крайне правой части полученной цепочки равенств внешние произведения ковекторов дуального базиса еще не упорядочены по возрастанию. Чтобы сделать это воспользуемся предложением 7.2 и соберем в скобки коэффициенты при одинаковых r -ковекторах $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$:

$$\omega = \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}; \quad i_1 < \dots < i_r.$$

Итак, мы получили, что любой r -ковектор раскладывается по данной системе r -ковекторов. □

Построенный базис называется *каноническим* базисом пространства $\Lambda_r(V)$.

Задача 7.40. Используя теорему 7.6 и предложение 7.2, докажите, что для любых $\omega \in \Lambda_r(V)$ и $\theta \in \Lambda_s(V)$ имеем

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega.$$

Пример 7.19. При доказательстве теоремы 7.6 мы обозначили $\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_r}$ координаты r -ковектора ω . Выразим их через компоненты этого тензора. Рассмотрим подробно случаи $\omega \in \Lambda_2(V)$ и $\omega \in \Lambda_3(V)$.

Пусть $\omega \in \Lambda_2(V)$. Еще раз повторим доказательство теоремы 7.6 для этого случая. Мы рассматриваем 2-ковектор ω как тензор типа $(2,0)$ и согласно теореме 5.4 раскладываем его по базису $(e^i \otimes e^j)$ тензоров типа $(2,0)$:

$$\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j. \quad (7.5)$$

Согласно той же теореме 5.4 коэффициенты ω_{ij} в разложении (7.5) (то есть координаты 2-ковектора ω относительно базиса $(e^i \otimes e^j)$) совпадают с его компонентами относительно базиса (e_1, \dots, e_n) . Применим к равенству (7.5) оператор альтернирования и воспользуемся формулой (7.1):

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j. \quad (7.6)$$

Здесь мы учли, что 2-ковектор ω кососимметричный тензор, следовательно, принадлежит образу проектора альтернирования, следовательно, $Alt(\omega) = \omega$.

Далее,

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j = \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j (j < i).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i = j) = 0$ согласно предложению 7.2. В правой части полученного равенства переобозначим индексы суммирования i и j . Получим

$$\frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j (j < i) = \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2} \omega_{ji} e^j \wedge e^i (i < j).$$

Так как ω – кососимметрический тензор, его компоненты кососимметричны

по нижней паре индексов (см. § 6.), а значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{ij}e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ji}e^j \wedge e^i (i < j) = \\ = \frac{1}{2}\omega_{ij}e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ij}e^i \wedge e^j (i < j) = \omega_{ij}e^i \wedge e^j (i < j). \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j (i < j).$$

Это разложение по базису 2-ковекторов, следовательно, коэффициенты разложения ω_{ij} являются координатами 2-ковектора в базисе $(e^i \wedge e^j (i < j))$.

Итак, мы показали, что для 2-ковекторов их компоненты в базисе (e_1, \dots, e_n) совпадают с координатами в базисе $(e^i \wedge e^j (i < j))$.

Аналогично рассмотрим 3-ковектор ω . Тогда

$$\omega = \omega_{ijk}e^i \otimes e^j \otimes e^k,$$

где ω_{ijk} – компоненты 3-ковектора ω в базисе (e_1, \dots, e_n) . Применяя оператор альтернирования, получим

$$\omega = \frac{1}{3!}\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{3!}\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k = \frac{1}{3!}(\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < j < k) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (j < k < i) + \\ + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (k < i < j) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (j < i < k) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (k < j < i) + \\ + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < k < j)). \end{aligned}$$

В каждом слагаемом переобозначим индексы суммирования так, чтобы выполнялись неравенства $i < j < k$. Тогда с учетом кососимметричности компонент тензора ω по любой паре нижних индексов и предложению 7.2 получим

$$\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k = 6\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < j < k) = 3!\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < j < k).$$

Итак, мы получаем, что

$$\omega = \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < j < k),$$

то есть координаты 3-ковектора ω относительно базиса $(e^i \wedge e^j \wedge e^k (i < j < k))$ совпадают с компонентами этого ковектора относительно базиса (e_1, \dots, e_n) .

Общий случай r -ковектора ω рассматривается аналогично и получается результат

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r} (i_1 < \dots < i_r).$$

Таким образом, координаты r -ковектора относительно канонического базиса пространства $\Lambda_r(V)$ совпадают с его компонент в базисе (e_1, \dots, e_n) пространства V . \square

Пример 7.20. Покажем, что произвольного тензора t типа $(2,0)$ верно равенство

$$t_{ij} e^i \wedge e^j = t_{[ij]} e^i \wedge e^j.$$

Здесь индексы i и j не упорядочены в обеих частях равенства.

Действительно,

$$\begin{aligned} t_{[ij]} e^i \wedge e^j &= \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji}) e^i \wedge e^j = \frac{1}{2} t_{ij} e^i \wedge e^j - \frac{1}{2} t_{ji} e^i \wedge e^j = \\ &= \frac{1}{2} t_{ij} e^i \wedge e^j + \frac{1}{2} t_{ij} e^i \wedge e^j = t_{ij} e^i \wedge e^j. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом мы поменяли местами индексы суммирования i и j и воспользовались антикоммутативностью внешнего произведения ковекторов.

Задача 7.41. Докажите, что для любого тензора t_{ijk} типа $(3,0)$ имеет место равенство

$$t_{ijk} e^i \wedge e^j \wedge e^k = t_{[ijk]} e^i \wedge e^j \wedge e^k,$$

где индексы i, j, k не упорядочены в обеих частях равенства.

Задача 7.42. Докажите, что для произвольного тензора $t \in \mathfrak{T}_2^0(V)$ имеет место равенство

$$t_{ij} e^i \wedge e^j = 2t_{[ij]} e^i \wedge e^j (i < j).$$

Получите соответствующее соотношение для тензора $t \in \mathfrak{T}_3^0(V)$ и обобщите результат на случай произвольного тензора типа $(r, 0)$.

Замечание 7.6. Векторное пространство $\Lambda_*(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda_r(V)$ называется алгеброй Грассмана векторного пространства V или внешней алгеброй.

Вопрос. Если n – размерность векторного пространства V , то чему равна размерность векторного пространства $\Lambda_n(V)$?

§8. Линейные отображения векторных пространств тензоров.

Пусть $f_* : V \rightarrow \tilde{V}$ – линейное отображение n -мерного векторного пространства V в m -мерное векторное пространство \tilde{V} . Тогда канонически определяется отображение $f^* : \tilde{V}^* \rightarrow V^*$ дуальных векторных пространств по формуле

$$f^*(\tilde{u})(X) = \tilde{u}(f_*X), \quad \tilde{u} \in \tilde{V}^*, \quad X \in V.$$

Это отображение называется отображением *антиувлечения ковекторов*.

Задача 8.43. Покажите, что отображение $f^*(\tilde{u})$ будет линейным, то есть ко-вектором. Тем самым будет доказана корректность введенного определения.

Отображение антиувлечения линейно. Действительно, для любых вещественных чисел α, β и ковекторов $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}^*$ получим

$$\begin{aligned} f^*(\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v})(X) &= (\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v})(f_*X) = \alpha\tilde{u}(f_*X) + \beta\tilde{v}(f_*X) = \\ &= \alpha f^*(\tilde{u})(X) + \beta f^*(\tilde{v})(X). \end{aligned}$$

Откуда получим $f^*(\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v}) = \alpha f^*(\tilde{u}) + \beta f^*(\tilde{v})$.

Отображение антиувлечения $f^* : \Lambda_r(\tilde{V}) \rightarrow \Lambda_r(V)$ можно определить для любых r -ковекторов по формуле

$$f^*(\tilde{t})(X_1, \dots, X_r) = \tilde{t}(f_*X_1, \dots, f_*X_r), \quad \tilde{t} \in \Lambda_r(\tilde{V}), \quad X_1, \dots, X_r \in V.$$

Аналогично случаю ковекторов доказывается, что это отображение определено корректно и является линейным по каждому аргументу.

Пример 8.21. Фиксируем в векторных пространствах V и \tilde{V} базисы (e_1, \dots, e_n) и $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ соответственно. Тогда в дуальных пространствах возникают дуальные базисы (e^1, \dots, e^n) и $(\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^m)$. Пусть индексы i, j, k принимают значения от 1 до n , а индексы a, b, c – от 1 до m . Обозначим через (f_i^a) матрицу отображения f_* в данных базисах. Другими словами, f_i^a – числа, определяемые равенствами

$$f_*(e_i) = f_i^a \tilde{e}_a.$$

Выразим ковектор $f^*\tilde{u}$ через матрицу (f_i^a) и координаты \tilde{u}_a ковектора \tilde{u} в соответствующем дуальном базисе.

$$f^*(\tilde{u})(X) = \tilde{u}(f_*X) = (\tilde{u}_a \tilde{e}^a)(f_i^b X^i \tilde{e}_b) = \tilde{u}_a f_i^b X^i \delta_b^a = f_i^a X^i \tilde{u}_a = f_i^a \tilde{u}_a e^i(X).$$

Таким образом, $f^*(\tilde{u}) = (f_i^a \tilde{u}_a) e^i$.

Пусть линейное отображение $f_* : V \rightarrow \tilde{V}$ является биекцией, то есть изоморфизмом векторных пространств. Отметим, что в этом случае размерности векторных пространств равны. Так как это отображение биективно, существует обратное к нему $(f_*)^{-1}$, которое мы обозначим через $f^* : \tilde{V} \rightarrow V$. Оно также будет изоморфизмом векторных пространств. Это отображение называется отображением *антиувлечения векторов*.

Определим отображение $f_* : \mathfrak{T}_r^s(V) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(\tilde{V})$ векторных пространств тензоров типа (r, s) по формуле

$$(f_*t)(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^s) = t(f^*\tilde{X}_1, \dots, f^*\tilde{X}_r, f^*\tilde{u}^1, \dots, f^*\tilde{u}^s).$$

где $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r \in \tilde{V}$, $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^s \in \tilde{V}^*$. Это отображение называется *отображением увлечения* тензоров типа (r, s) . Можно показать, что оно линейно по каждому аргументу и, более того, является изоморфизмом векторных пространств тензоров. В частности, мы получаем отображение увлечения для ковекторов (то есть тензоров типа $(1, 0)$) по формуле

$$(f_*u)(\tilde{X}) = u(f^*\tilde{X}), \quad u \in V^*, \tilde{X} \in \tilde{V}.$$

Задача 8.44. Докажите, что отображение увлечения для ковекторов является обратным для отображения антиувлечения ковекторов.

Доказательство. Нам нужно доказать, что $f^*(f_*u) = u$ и $f_*(f^*\tilde{u}) = \tilde{u}$ для любых $u \in V^*$ и $\tilde{u} \in \tilde{V}^*$. Докажем первое равенство. Второе докажете самостоятельно. Имеем для любого $X \in V$

$$f^*(f_*u)(X) = (f_*u)(f_*X) = u(f^*(f_*X)) = u(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображения f_* и f^* для векторов являются взаимнообратными. Таким образом, $f^*(f_*u) = u$ для любого $u \in V^*$. \square

Определим отображение $f^* : \mathfrak{T}_r^s(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(V)$ векторных пространств тензоров типа (r, s) по формуле

$$(f^*t)(X_1, \dots, X_n, u^1, \dots, u^s) = t(f_*X_1, \dots, f_*X_r, f_*u^1, \dots, f_*u^s),$$

где $X_1, \dots, X_n \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$.

Задача 8.45. Докажите, что отображения увлечения f_* и антиувлечения f^* тензоров являются взаимнообратными.

Задача 8.46. Пусть (e_1, \dots, e_n) и $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ – базисы векторных пространств V и \tilde{V} соответственно. Выразите отображения увлечения f_* и антиувлечения f^* тензоров через матрицу (f_j^i) изоморфизма $f_* : V \rightarrow \tilde{V}$.

Доказательство. Пусть матрица отображения $f_* : V \rightarrow \tilde{V}$ в паре соответствующих базисов обозначается (f_j^i) . Так как $f^* : \tilde{V} \rightarrow V$ является обратным отображением для f_* , Имеем с учетом (8.21)

$$\begin{aligned} (f_*t)(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^s) &= t(f^*\tilde{X}_1, \dots, f^*\tilde{X}_r, f^*\tilde{u}^1, \dots, f^*\tilde{u}^s) = \\ &= t((f^{-1})_{j_1}^{i_1} \tilde{X}_1^{j_1} e_{i_1}, \dots, (f^{-1})_{j_r}^{i_r} \tilde{X}_r^{j_r} e_{i_r}, f_{\ell_1}^{k_1} \tilde{u}_{k_1}^{\ell_1}, \dots, f_{\ell_s}^{k_s} \tilde{u}_{k_s}^{\ell_s}) = \\ &= (f^{-1})_{j_1}^{i_1} \tilde{X}_1^{j_1} \dots (f^{-1})_{j_r}^{i_r} \tilde{X}_r^{j_r} f_{\ell_1}^{k_1} \tilde{u}_{k_1}^{\ell_1} \dots f_{\ell_s}^{k_s} \tilde{u}_{k_s}^{\ell_s} t_{i_1 \dots i_r}^{\ell_1 \dots \ell_s} = \\ &= t_{i_1 \dots i_r}^{\ell_1 \dots \ell_s} (f^{-1})_{j_1}^{i_1} \dots (f^{-1})_{j_r}^{i_r} f_{\ell_1}^{k_1} \dots f_{\ell_s}^{k_s} \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_r} \tilde{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_{k_s}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^s). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$f_*t = t_{i_1 \dots i_r}^{\ell_1 \dots \ell_s} (f^{-1})_{j_1}^{i_1} \dots (f^{-1})_{j_r}^{i_r} f_{\ell_1}^{k_1} \dots f_{\ell_s}^{k_s} \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_r} \tilde{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_{k_s}.$$

□

§9. Операции поднятия и опускания индексов в тензорной алгебре (псевдо) евклидова пространства V .

Пусть V – векторное пространство.

Псевдо-евклидовой структурой векторного пространства V называется симметрический тензор g типа $(2,0)$, обладающий свойством *невыврожденности*, то есть

$$g(X, Y) = 0 \forall X \in V \Rightarrow Y = 0.$$

Векторное пространство V с фиксированной на нем псевдо-евклидовой структурой называется *псевдо-евклидовым пространством*.

Значение $g(X, Y)$ псевдо-евклидовой структуры g на паре векторов $X, Y \in V$ называется *скалярным произведением* этих векторов.

С помощью псевдо-евклидовой структуры вводится понятие *длины (или нормы)* $\|X\|$ вектора X по формуле

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}.$$

Заметим, что в псевдо-евклидовом пространстве ненулевые векторы могут иметь вещественную, нулевую и мнимую длину.

Задача 9.47. Выразите скалярное произведение векторов и норму вектора через компоненты псевдо-евклидовой структуры и компоненты векторов.

Ответ: $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$, $\|X\| = \sqrt{g_{ij}X^iX^j}$.

Евклидовой структурой векторного пространства V называется симметрический тензор g типа $(2,0)$, обладающий свойством *положительной определенности*, то есть

$$g(X, X) \geq 0, \text{ при этом } g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Векторное пространство V с фиксированной на нем евклидовой структурой называется *евклидовым пространством*.

Задача 9.48. Докажите, что евклидово пространство является псевдо-евклидовым, то есть любая евклидова структура невырождена.

Теорема 9.7. Пусть (V, g) – псевдо-евклидово пространство. Тогда отображение $\ell : V \rightarrow V^*$, заданное формулой

$$\ell(X)(Y) = g(X, Y); \quad X, Y \in V$$

является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Докажем сначала, что отображение ℓ определено корректно, то есть $\ell(X)$ – ковектор, то есть линейное отображение. Действительно, для любых векторов $Y', Y'' \in V$ и произвольных вещественных чисел α, β

имеем

$$\begin{aligned}\ell(X)(\alpha Y' + \beta Y'') &= g(X, \alpha Y' + \beta Y'') = \alpha g(X, Y') + \beta g(X, Y'') = \\ &= \alpha \ell(X)(Y') + \beta \ell(X)(Y''),\end{aligned}$$

то есть отображение $\ell(X)$ является линейным, а значит, ковектор.

Далее, докажем, что отображение ℓ является гомоморфизмов векторных пространств, то есть

$$\ell(\alpha X' + \beta X'') = \alpha \ell(X') + \beta \ell(X''),$$

$X', X'' \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Доказательство этого факта аналогично проведенному доказательству.

Осталось доказать, что ℓ – биекция. Инъективность ℓ , то есть $\text{Ker} \ell = \{0\}$, следует из невырожденности псевдо-евклидовой метрики g . Сюръективность ℓ следует из того, что

$$\dim(\text{Im} \ell) = \dim V - \dim(\text{Ker} \ell) = n = \dim V^*.$$

□

Пусть в пространстве V фиксирован базис (e_1, \dots, e_n) . Найдем компоненты ковектора $\ell(X)$, $X \in V$. По определению компонент получим

$$(\ell(X))_j = g(X, e_j) = g(X^i e_i, e_j) = X^i g(e_i, e_j) = g_{ij} X^i.$$

Итак,

$$(\ell(X))_j = g_{ij} X^i. \quad (9.1)$$

Из полученной формулы вытекает название изоморфизма ℓ – *операция опускания индекса у вектора*. Обратный изоморфизм ℓ^{-1} называется *операцией поднятия индекса у ковектора*.

В частности, для вектора e_k базиса получим

$$(\ell(e_k))_j = g_{ij} (e_k)^i = g_{ij} \delta_k^i = g_{kj}.$$

Найдем формулу для ℓ^{-1} , аналогичную формуле (9.1). Рассмотрим компоненты (g_{ij}) псевдо-евклидовой структуры g как $n \times n$ - матрицу. Так как g – невырождена, то матрица (g_{ij}) также является невырожденной, а значит, для

нее существует обратная матрица. Обозначим ее (g^{ij}) . С помощью матрицы (g^{ij}) выразим в формуле (9.1) компоненты X^i (см. замечание 1.2). Получим

$$X^k = g^{kj}(\ell(X))_j.$$

Так как ℓ – изоморфизм, то для любого ковектора u существует единственный вектор X , такой что $u = \ell(X)$. Тогда $X = \ell^{-1}(u)$. С учетом этого последняя формула переписется в виде

$$(\ell^{-1}(u))^k = g^{kj}u_j. \quad (9.2)$$

Эта формула объясняет введенное название для изоморфизма ℓ^{-1} . Применяя формулу (9.2) к ковектору e^i дуального базиса, получим

$$(\ell^{-1}(e^i))^k = g^{kj}(e^i)_j = g^{kj}\delta_j^i = g^{ki}.$$

С помощью изоморфизмов ℓ и ℓ^{-1} мы можем определить операции поднятия и опускания индексов у любых тензоров. Начнем с примера.

Пример 9.22. Рассмотрим псевдо-евклидову структуру g векторного пространства V и определим отображение $\tilde{g} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{g}(u, v) = g(\ell^{-1}u, \ell^{-1}v),$$

$u, v \in V^*$ – произвольные ковекторы. В силу линейности g и ℓ^{-1} введенное отображение \tilde{g} будет тензором типа $(0, 2)$.

Фиксируем базис (e_1, \dots, e_n) в векторном пространстве V и найдем компоненты тензора \tilde{g} в этом базисе.

$$\tilde{g}(e^i, e^j) = g(\ell^{-1}e^i, \ell^{-1}e^j) = g_{kt}(\ell^{-1}e^i)^k(\ell^{-1}e^j)^t = g_{kt}g^{ik}g^{jt} = \delta_t^i g^{jt} = g^{ij}.$$

Заметим, что в приведенной цепочке равенств мы использовали, что псевдо-евклидова структура является симметрическим тензором, а значит, его матрица симметрическая, следовательно, и обратная матрица симметрическая. Итак, мы получили

$$\tilde{g}(e^i, e^j) = g^{ij}.$$

Таким образом, мы получили, что элементы матрицы, обратной матрице псевдо-евклидовой структуры, являются компонентами тензора \tilde{g} . Этот тен-

зор называется *контравариантным метрическим тензором*. Будем говорить, что мы получили контравариантный метрический тензор с помощью *операции поднятия индексов у псевдо-евклидовой структуры*. \square

Аналогичным образом мы можем определить операции поднятия и опускания индексов у любого тензора. Если у тензора есть и верхние и нижние индексы, то нам нужно договориться на какое место будет подниматься или опускаться индекс. Для этого для каждого тензора будем говорить, в каком порядке берутся его аргументы. Например, для тензора t типа $(3,4)$ пусть порядок аргументов будет таким: $t(X_1, u^1, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3)$. Тогда компоненты этого тензора будут иметь вид $t_i^{jk} t^{mp}_s$. Каждый из индексов будет подниматься или опускаться на место, расположенное над или под ним. Поднимем у тензора t первый нижний и опустим первый верхний индексы. В результате мы получим тензор \tilde{t} того же типа $(3,4)$, который будет задаваться формулой

$$\tilde{t}(v, Y, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3) = t(\ell^{-1}v, \ell Y, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3).$$

Если фиксировать базис (e_1, \dots, e_n) , то компоненты тензора \tilde{t} будут выражаться через компоненты тензора t следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_j^{i \cdot k} t^{pm}_s &= \tilde{t}(e^i, e_j, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = t(\ell^{-1}e^i, \ell e_j, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = \\ &= t(g^{iu}e_u, g_{jv}e^v, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = g^{iu}g_{jv}t(e_u, e^v, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = \\ &= g^{iu}g_{jv}t_u^{vk} t^{pm}_s. \end{aligned}$$

Обычно волну над получающимся тензором не ставят, а обозначают его той же буквой. К путанице это не приводит, так набор и порядок аргументов у исходного и полученного тензоров отличаются. Итак, полученная нами формула с учетом введенной договоренности будет выглядеть следующим образом

$$t_j^{i \cdot k} t^{pm}_s = g^{iu}g_{jv}t_u^{vk} t^{pm}_s.$$

Пример 9.23. Рассмотрим тензор J типа $(1,1)$. Договоримся записывать его аргументы в следующем порядке $J(X, u)$, $X \in V$, $u \in V^*$. Тогда компоненты этого тензора будут иметь вид J_i^j . Опустим у тензора J верхний индекс. В

результате мы получим тензор типа $(2,0)$, который обозначим Ω . Его компоненты будут иметь вид

$$\Omega_{ij} = g_{tj} J_i^t. \quad (9.3)$$

Запишем это равенство в инвариантном виде. Заметим, что по определению матрицы линейного оператора имеет место равенство $J(e_i) = J_i^j e_j$, то есть j -я координата вектора $J(e_i)$ есть число J_i^j . В виде равенства мы можем записать это следующим образом: $(J(e_i))^j = J_i^j$. Теперь воспользуемся определением компонент тензора в равенстве (9.3) и линейностью тензоров

$$\Omega(e_i, e_j) = g((J(e_i))^t e_t, e_j) \quad (9.4)$$

Рассмотрим два вектора $X, Y \in V$ и разложим их по базису: $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$. Умножим каждое равенство из (9.4) на соответствующее X^i и Y^j и просуммируем по i и j :

$$\Omega(X^i e_i, Y^j e_j) = g((J(X^i e_i))^t e_t, Y^j e_j).$$

Итак, окончательно получим

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y).$$

В правой части этого равенства мы воспользовались отождествлением тензоров типа $(1,1)$ с линейными операторами. При этом скобки у вектора X опускаются. \square

Задача 9.49. Какие изменения нужно произвести в примере 9.23, чтобы получить формулу

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)?$$

Задача 9.50. Докажите, что если $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$, $X, Y \in V$, $J \in \mathfrak{T}_1^1(V)$, g – псевдо-евклидова структура на V , то, опустив у тензора J верхний индекс, мы получим кососимметрический тензор.

§10. Псевдо-евклидова структура в пространствах тензоров $\mathfrak{T}_0^r(V)$ и $\mathfrak{T}_r^0(V)$.

Пусть в векторном пространстве V фиксирована псевдо-евклидова структура g . Рассмотрим пространство тензоров $\mathfrak{T}_0^r(V)$. Заметим, что аналогичные

рассуждения можно провести и для пространства тензоров $\mathfrak{T}_r^0(V)$.

Фиксируем в пространстве V базис (e_1, \dots, e_n) и определим отображение

$$\mathfrak{g} : \mathfrak{T}_0^r(V) \times \mathfrak{T}_0^r(V) \rightarrow \mathbb{R},$$

по формуле

$$\mathfrak{g}(t, T) = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_r j_r} t^{i_1 \dots i_r} T^{j_1 \dots j_r},$$

где g_{ij} – компоненты псевдо-евклидовой структуры g .

Задача 10.51. Используя тензорный закон (3.1), докажите, что отображение \mathfrak{g} не зависит от выбора базиса.

Задача 10.52. Докажите, что отображение \mathfrak{g} линейно по каждому аргументу и симметрично, а значит, является симметрическим тензором типа $(2,0)$ на векторном пространстве $\mathfrak{T}_0^r(V)$.

Предложение 10.3 . *Отображение \mathfrak{g} невырождено.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}(t, T) = 0$ для любого тензора $T \in \mathfrak{T}_0^r(V)$. В частности, оно равно нулю для тензора $T = e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_r}$, где e_{k_1}, \dots, e_{k_r} – произвольный набор векторов базиса (e_1, \dots, e_n) векторного пространства V , то есть

$$g_{i_1 j_1} \dots g_{i_r j_r} t^{i_1 \dots i_r} (e_{k_1})^{j_1} \dots (e_{k_r})^{j_r} = 0$$

Преобразовывая левую часть, получим

$$g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} t^{i_1 \dots i_r} = 0.$$

Свернем последнее соотношение с компонентами контравариантного метрического тензора (то есть умножим каждое равенство на $g^{k_1 t_1}, \dots, g^{k_r t_r}$ и просуммируем)

$$g^{k_1 t_1} \dots g^{k_r t_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} t^{i_1 \dots i_r} = 0.$$

Так как компоненты контравариантного метрического тензора образуют матрицу обратную матрице компонент псевдо-евклидовой структуры, то в левой части получим

$$\delta_{i_1}^{t_1} \dots \delta_{i_r}^{t_r} t^{i_1 \dots i_r} = 0,$$

то есть $t^{t_1 \dots t_r} = 0$ для любого набора t_1, \dots, t_r , то есть $t = 0$. \square

Следствие 10.3. Отображение \mathfrak{g} является псевдо-евклидовой структурой на векторном пространстве тензоров $\mathfrak{T}_0^r(V)$.

Замечание 10.7. Можно доказать, что псевдо-евклидова структура \mathfrak{g} на векторном пространстве $\mathfrak{T}_0^r(V)$ будет евклидовой тогда и только тогда, когда будет евклидовой псевдо-евклидова структура g на векторном пространстве V .

С помощью псевдо-евклидовой структуры \mathfrak{g} можно ввести понятие нормы тензора $t \in \mathfrak{T}_0^r(V)$.

Назовем *нормой* тензора t число $\|t\| = \sqrt{\mathfrak{g}(t, t)}$.

Заметим, что в случае псевдо-евклидовой структуры, отличной от евклидовой, норма тензора может быть мнимым числом. В дальнейшем мы встретим такие тензоры.

Пример 10.24. Пусть $X, Y \in V$. Рассмотрим 2-вектор $X \wedge Y$. Его еще называют *бивектором*. Выясним геометрический смысл нормы бивектора $X \wedge Y$.

Пусть фиксирован базис (e_1, \dots, e_n) в векторном пространстве V . Выразим компоненты 2-вектора $X \wedge Y$ через компоненты векторов X и Y . Имеем (см. § 7.)

$$\begin{aligned} (X \wedge Y)^{ij} &= (X \wedge Y)(e^i, e^j) = 2! \text{Alt}(X \otimes Y)(e^i, e^j) = \\ &= 2! \cdot \frac{1}{2} (X(e^i)Y(e^j) - X(e^j)Y(e^i)) = X^i Y^j - X^j Y^i. \end{aligned}$$

Тогда норма бивектора $X \wedge Y$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \|X \wedge Y\|^2 &= \mathfrak{g}(X \wedge Y, X \wedge Y) = g_{ij} g_{kt} (X \wedge Y)^{ik} (X \wedge Y)^{jt} = \\ &= g_{ij} g_{kt} (X^i Y^k - X^k Y^i) (X^j Y^t - X^t Y^j) = \\ &= g_{ij} g_{kt} X^i Y^k X^j Y^t - g_{ij} g_{kt} X^i Y^k X^t Y^j - g_{ij} g_{kt} X^k Y^i X^j Y^t + g_{ij} g_{kt} X^k Y^i X^t Y^j = \\ &= 2(g_{ij} g_{kt} X^i Y^k X^j Y^t - g_{ij} g_{kt} X^i Y^k X^t Y^j) = 2(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(X, Y)). \end{aligned}$$

Здесь при приведении подобных слагаемых мы переобозначили индексы суммирования. Итак, мы получили, что

$$\|X \wedge Y\|^2 = 2 \begin{vmatrix} g(X, X) & g(X, Y) \\ g(X, Y) & g(Y, Y) \end{vmatrix}. \quad (10.1)$$

В правой части этого равенства стоит определитель матрицы Грама векторов X, Y . Как известно, это квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах X и Y . Таким образом, мы получаем, что норма бивектора $\|X \wedge Y\|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах X и Y , с точностью до постоянного множителя $\sqrt{2}$. \square

Замечание 10.8. Пусть в векторном пространстве V фиксирована псевдо-евклидова структура g . Будем называть базис (e_1, \dots, e_n) векторного пространства V *базисом сопряженных векторов*, если $g(e_i, e_j) = 0$ для любых различных i и j от 1 до n . Будем называть базис сопряженных векторов *ортонормированным* относительно псевдо-евклидовой структуры g , если $g(e_\alpha, e_\alpha) = 1$ для некоторых α от 1 до n и $g(e_\alpha, e_\alpha) = -1$ для остальных α от 1 до n . Как мы знаем из курса Элементы многомерной геометрии, количество векторов базиса, которые выдают -1 при действии на них псевдо-евклидовой структуры, не зависит от выбора базиса и называется *индексом g* . Для евклидовой структуры g индекс равен нулю и мы получаем привычный ортонормированный базис, который задается условием $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Замечание 10.9. Пусть дано векторное пространство V . Напомним, как в нем вводится понятие ориентации. Рассмотрим два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V . Разложим векторы $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ по векторам базиса E : $\varepsilon_i = C_i^j e_j$. Матрица (C_i^j) называется *матрицей перехода от базиса E к базису \tilde{E}* . Так как векторы, образующие базис, линейно независимы, матрица (C_i^j) невырождена, то есть имеет ненулевой определитель. Будем называть два базиса E и \tilde{E} *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от базиса E к базису \tilde{E} положителен (в противном случае базисы называются *противоположно ориентированными*). Нетрудно показать, что отношение на множестве базисов векторного пространства V быть одинаково ориентированными является отношением эквивалентности. Тогда определено фактормножество по этому отношению эквивалентности. Оно содержит два класса: в каждом классе находятся одинаково ориентированные базисы, а любые два базиса из различных классов противоположно ориентированы. Каждый из полученных классов называется *ориентацией*

на векторном пространстве V . Векторное пространство V называется *ориентированным*, если фиксирована одна из ориентаций. Базисы фиксированной ориентации называются *правыми базисами*. Базисы второй ориентации называются *левыми базисами*.

Замечание 10.10. Пусть V^2 – ориентированное двумерное векторное пространство. Рассмотрим пару линейно независимых векторов X и Y из V . Будем называть *ориентированной площадью параллелограмма* P , построенного на векторах X и Y , число, равное площади P , если базис (X, Y) – правый и число, равное минус площади P , если базис (X, Y) – левый.

Пример 10.25. Пусть (ξ_0, η_0) – ортонормированный базис двумерного векторного пространства V . Рассмотрим пару векторов A и B из векторного пространства V , которые образуют базис той же ориентации, что и (ξ_0, η_0) . Покажем, что

$$A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}} \|A \wedge B\| \xi_0 \wedge \eta_0.$$

Разложим векторы A и B по базису (ξ_0, η_0) :

$$A = a_1 \xi_0 + a_2 \eta_0; \quad B = b_1 \xi_0 + b_2 \eta_0.$$

Тогда

$$A \wedge B = (a_1 \xi_0 + a_2 \eta_0) \wedge (b_1 \xi_0 + b_2 \eta_0) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \xi_0 \wedge \eta_0.$$

Здесь мы воспользовались линейностью внешнего произведения, его кососимметричностью для векторов и свойством $X \wedge X = 0$ для любого вектора X .

С другой стороны, согласно формуле (10.1) имеем

$$\|A \wedge B\|^2 = 2 \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} = 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Здесь мы воспользовались ортонормированностью базиса (ξ_0, η_0) .

Так как число $a_1 b_2 - a_2 b_1$ является определителем матрицы перехода от базиса (ξ_0, η_0) к базису (A, B) и базисы (A, B) и (ξ_0, η_0) имеют одинаковую ориентацию, получим $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$. Тогда

$$\|A \wedge B\| = \sqrt{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Таким образом, мы получаем требуемое равенство.

Задача 10.53. Пусть (ξ_0, η_0) – ортонормированный базис двумерного векторного пространства V . Рассмотрим пару векторов A и B из векторного пространства V . Докажите, что

$$A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}} |A \wedge B| \xi_0 \wedge \eta_0,$$

где $|A \wedge B|$ – ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах A и B .

Список литературы

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения., Москва, УРСС, 1998.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра., Москва, Наука, 1978.
3. Кириченко В.Ф., Арсеньева О.Е. Введение в современную геометрию., Тверь, 1997.
4. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия., Москва, Наука, 1979.