Обзорные лекции по геометрии для студентов 5 курса (бакалавры математики)

20 июня 2014 г.

Общие требования.

1. Нужно знать определения всех терминов, употребляемых при ответе.
2. Каждый вопрос должен содержать доказательства. Чем больше доказательств, тем больше шансов получить высокую оценку.
3. Далее изложены примерные ответы на вопросы программы экзамена. В эти ответы могут вносится изменения.

1. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и применение к решению задач.

1.1. Напомним, что *вектором* (геометрического векторного пространства V^3) называется множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполентны. Каждый из направленных отрезков, принадлежащий вектору, называется *представителем* этого вектора. *Длиной* вектора называется длина любого его представителя. Обозначение $|\vec{a}|$.

Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}, \vec{b}$. Возьмем произвольную точку O пространства и отложим от нее представители $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ векторов $\vec{a}, \vec{b}$. Величина угла $\angle AOB$ называется *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Еще раз подчеркнем, что угол между векторами это число. Будем обозначать это число $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение векторов обладает четырьмя основными свойствами

(1) (линейность по каждому аргументу)

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}); \quad \vec{a}(\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}) + \beta(\vec{a}\vec{c});\ \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

(2) (коммутативность)

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a};$$

(3) (способность вылавливать перпендикулярные векторы)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\vec{b} = 0.$$

(4) (квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату)

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a}.$$

Скалярное произведение векторов можно вычислить через их координаты. Особенно простыми формулы будут для ортонормированного базиса.

Базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ называется *ортонормированным*, если длины всех его векторов равны 1 и они попарно ортогональны.

Теорема 1.1. *Пусть даны ортонормированный базис* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *и два вектора* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3), \vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. *Тогда*

$$1)\ |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2};\quad 2)\ \vec{a}\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Доказательство. По определению координат вектора имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k};\quad \vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}.$$

Тогда используя свойства скалярного произведения и определение ортонормированного базиса, получим

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Подставляя в эту формулу вместо вектора $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$, получим

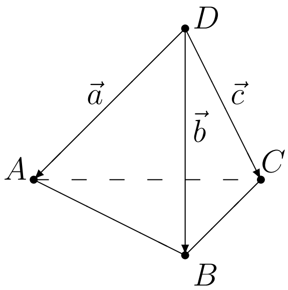
$$\vec{a}\vec{a} = a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3,$$

то есть с учетом четвертого свойства $|\vec{a}|^2 = (a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2$. □

В качестве примера использования скалярного произведения рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.1. Пусть $ABCD$ – произвольный тетраэдр; $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $\widehat{ADB} = \gamma$, $\widehat{BDC} = \alpha$, $\widehat{ADC} = \beta$. Найдите величину угла между ребрами DA и BC.

Решение.



□ 1. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
2.Задача на языке векторной алгебры: найти угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
3. Введем базис $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, где $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Из определения скалярного произведения векторов (§ **??**) получим

$$\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{DA}\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BC}|} \qquad (****)$$

Заметим, что введенный базис не является ортонормированным, а значит, использовать формулы для вычисления скалярного произведения и длин векторов в ортонормированном базисе мы не можем. Будем вычислять скалярное произведение векторов и их длины, используя свойства скалярного произведения. По правилу треугольника получим $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}+\vec{c}$. Кроме того, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{DA}\overrightarrow{BC} = \vec{a}(-\vec{b}+\vec{c}) = -\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c} = -ab\cos\gamma+ac\cos\beta$. Очевидно, что $|\overrightarrow{DA}| = a$. Найдем $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (-\vec{b}+\vec{c})(-\vec{b}+\vec{c}) = \vec{b}^2-2\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^2 = b^2-2bc\cos\alpha+c^2$. Подставим все найденное в $(****)$: $\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}) = \frac{-ab\cos\gamma+ac\cos\beta}{a\sqrt{b^2-2bc\cos\alpha+c^2}}$.
4. Итак, угол между ребрами DA и BC равен $\frac{ac\cos\beta-ab\cos\gamma}{a\sqrt{b^2-2bc\cos\alpha+c^2}}$. □

1.2. Пусть V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой что
1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$;
3) базис $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – правый.

Положим по определению векторное произведение двух коллинеарных векторов равным нуль-вектору.

Обозначение $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Основные свойства векторного произведения векторов

(1) (линейность по каждому аргументу)

$$[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{c}] + \beta[\vec{b}, \vec{c}]; \quad [\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}] + \beta[\vec{a}, \vec{c}],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

(2) (антикоммутативность)

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}].$$

Используя определение векторного произведения векторов и свойство антикоммутативности, позволяет легко получить таблицу "векторного умножения".

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Векторное произведение векторов, также как и скалярное, можно вычислить, зная их координаты. Наиболее простой будет формула в правом ортонормированном базисе.

Теорема 1.2. *Пусть даны правый ортонормированный базис* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *и векторы* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. *Тогда*

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Эту формулу легко запомнить в виде формального определителя

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство. По определению координат имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}; \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Подставляем эти разложения в $[\vec{a}, \vec{b}]$ и пользуемся свойствами при раскрытии скобок

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}] = (a_2b_3 - b_2a_3)\vec{i} + (b_1a_3 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k}.$$

□

Векторное произведение векторов позволяет вычислять площади треугольников и параллелограммов

$$S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|; \quad S_{ABC} = \tfrac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|.$$

Если в эти формулы подставить результат теоремы 1.2, то получим формулу для вычисления площади параллелограмма в координатах (для прямоугольной декартовой системы координат)

$$S_{ABCD} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_B - y_A & y_D - y_A \\ z_B - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_D - x_A \\ z_B - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_D - y_A \end{vmatrix}^2}$$

Аналогичная формула (отличается только коэффициентом $\frac{1}{2}$) имеет место для площади треугольника.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$. Обозначение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

С точки зрения геометрии смешанное произведение трех некомпланарных векторов – это число, равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах и взятому со знаком плюс, если векторы образую правый базис и – со знаком минус, если левую. В случае компланарных векторов смешанное произведение равно нулю.

Свойства смешанного произведения векторов

(1) (линейность по каждому аргументу)

$$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \alpha(\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + \beta(\vec{b}\vec{c}\vec{d}); \quad \vec{a}(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})\vec{d} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) + \beta(\vec{a}\vec{c}\vec{d}); \quad \vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}+\beta\vec{d}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + \beta(\vec{a}\vec{b}\vec{d}).$$

(2) (антикоммутативность)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}); \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}); \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}).$$

Оба свойства легко доказать, используя соответствующие свойства векторного произведения векторов и скалярного произведения векторов.

Смешанное произведение векторов можно вычислить через координаты этих векторов относительно произвольного базиса.

Теорема 1.3. *Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – произвольный базис в V^3, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательствам теорем для скалярного и векторного произведения. □

Следствие 1.1. *Пусть даны правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Доказательство. Очевидно, что смешанное произведение векторов правого ортонормированного базиса равно 1. Тогда нужная нам формула получается из формулы доказанной теоремы. □

Формула для вычисления объема параллелепипеда $ABCDEFGH$ непосредственно вытекает из определения смешанного произведения и формулы (1.1):

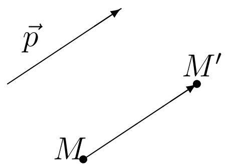
$$V = |(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AE})| = \left| det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_D - x_A & x_E - x_A \\ y_B - y_A & y_D - y_A & y_E - y_A \\ z_B - z_A & z_D - z_A & z_E - z_A \end{pmatrix} \right|$$

2. Движения плоскости. Классификация движений. Группа движений. Применение движений к решению задач.

2.1. Преобразование плоскости $f : \sigma \to \sigma$ называется *движением* , если для любых точек $A, B \in \sigma$ и их образов $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ имеет место равенство $A'B' = AB$. Другими словами, движением называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любой парой точек.

Пример 2.1. $id : \sigma \to \sigma$ – тождественное преобразование плоскости. Очевидно, является движением.

Пример 2.2. Пусть дан вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости σ.



Определим преобразование плоскости $T_{\vec{p}} : \sigma \to \sigma$ следующим образом: каждой точке M это преобразование ставит в соответствие такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Это преобразование называется *параллельным переносом.*

Предложение 2.1. *Параллельный перенос является движением.*

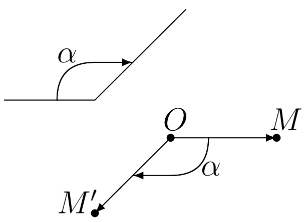
Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $A, B \in \sigma$. Обозначим $A' = T_{\vec{p}}(A)$, $B' = T_{\vec{p}}(B)$. По определению параллельного переноса имеем $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{p}$. Применим правило треугольника для вектора $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$$

Получим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. В частности, длины этих векторов равны, то есть $AB = A'B'$. $\square$

Обратное преобразование: $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$.

Пример 2.3. Пусть дана точка $O \in \sigma$ и ориентированный угол α $(-\pi \le \alpha \le \pi)$.

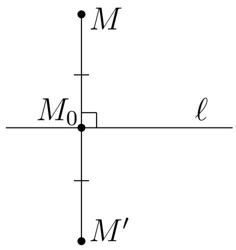


Определим преобразование плоскости $R_O^\alpha : \sigma \to \sigma$ следующим образом:
1) $O \to O$
2) $\forall M \neq O \to M'$ такую, что $OM = OM'$ и $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.

Это преобразование называется *поворотом* плоскости на угол α вокруг точки O. Точка O называется *центром поворота*, угол α – *углом поворота.* При $\alpha = \pi$ поворот называется *центральной симметрией* с центром в точке O.

Обратное преобразование: $(R_O^\alpha)^{-1} = R_O^{-\alpha}$.

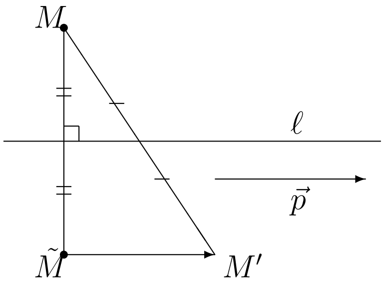
Пример 2.4. Пусть дана прямая ℓ на плоскости σ.



Определим преобразование плоскости $S_\ell : \sigma \to \sigma$ следующим образом:
1) $M \in \ell \to M' = M$
2) $M \notin \ell \to M'$ такую, что $(MM') \perp \ell$ и сер$[MM'] \in \ell$.
Это преобразование называется *осевой симметрией* относительно прямой ℓ. Прямая ℓ называется *осью симметрии.*

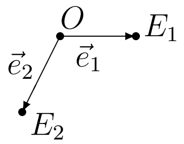
Обратное преобразование: $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$.

Пример 2.5. Пусть даны прямая $\ell \subset \sigma$ и вектор $\vec{p} \| \ell$.



Композиция осевой симметрии с осью ℓ и параллельного переноса на вектор $\vec{p} \| \ell$ называется *скользящей симметрией* с осью ℓ и вектором переноса $\vec{p}$.
Из теоремы Фалеса получаем, что сер$MM' \in \ell$.
Так как каждое движение сохраняет расстояние между точками, то их композиция (то есть последовательное выполнение) также сохраняет расстояние между точками, то есть является движением.
Обратное преобразование: $(T_{\vec{p}} \circ S_\ell)^{-1} = T_{-\vec{p}} \circ S_\ell$.

2.2. *Аффинным репером* на плоскости называется упорядоченная тройка точек, не лежащих на одной прямой. Обозначение $R = (O, A, B)$.



Каждому реперу $R = (O, A, B)$ мы можем однозначно поставить в соответствие аффинную систему координат $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ и наоборот, каждой аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер (O, E_1, E_2), где $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$.

Будем говорить, что точка M имеют координаты (x, y) в репере R, если она имеет координаты (x, y) в системе координат $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, то есть $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB})$.

Репер $R = (O, A, B)$ называется *ортонормированным*, если $OA = OB = 1$, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

Очевидно, что ортонормированному реперу соответствует аффинная система координат.

Ортонормированные реперы играют особую роль в теории движений плоскости, а именно верна основная теорема теории движений

Теорема 2.1. *Пусть дана упорядоченная пара R и R' ортонормированных реперов. Тогда существует единственное движение f плоскости, переводящее репер R в репер R'. При этом точка M с координатами (x, y) в репере R переходит в точку M' с теми же координатами (x, y) в репере R'.*

Из основной теоремы следует, что если два движения f и g одинаково действуют на какой-нибудь репер R, то эти движения совпадают.

Пусть плоскость σ ориентирована. Тогда все движения разделяются на два рода: первого рода – это движения, не меняющие ориентации плоскости, (каждый репер переходит в репер той же ориентации) и второго рода – это движения меняющие ориентацию плоскости (каждый репер переходит в репер противоположной ориентации).

Движения первого рода (относительно ортонормированного репера) задаются формулами

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0;$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0.$$

Движения второго рода задаются формулами

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0;$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0.$$

Здесь (x, y) – координаты произвольной точки M плоскости, (x', y') – координаты образа M' точки M.

Для каждого из пяти примеров движений плоскости можно получить свои формулы (относительно ортонормированного репера).

Тождественное преобразование

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Параллельный перенос на вектор $\vec{p}(x_0, y_0)$.

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

Поворот вокруг точки $S(a, b)$ на угол α.

$$\begin{cases} x' - a = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\sin\alpha \\ y' - b = (x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

Осевая симметрия с осью $s : Ax + By + C = 0$.

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2A}{A^2+B^2}(Ax + By + C); \\ y' = y - \frac{2B}{A^2+B^2}(Ax + By + C). \end{cases}$$

Скользящая симметрия с осью $s : Ax + By + C = 0$ и вектором $\vec{p}(x_0, y_0)$.

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2A}{A^2+B^2}(Ax + By + C) + x_0; \\ y' = y - \frac{2B}{A^2+B^2}(Ax + By + C) + y_0. \end{cases}$$

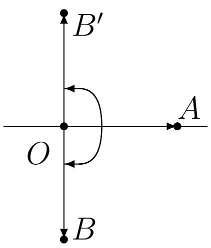
Классификация движений плоскости проводится для каждого рода движений по количеству инвариантных точек. При этом используются две леммы.

Лемма 2.1. *Движение, не имеющее ни одной инвариантной точки, имеет по крайней мере одну инвариантную прямую.*

Лемма 2.2. *Движение второго рода либо не имеет инвариантных точек, либо имеет бесконечно много инвариантных точек.*

Пусть f – движение первого рода.

1. Пусть f имеет по крайней мере две инвариантные точки.



Пусть A, O – две инвариантные точки. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B)$ (мы всегда можем принять отрезок $[OA]$ за единичный). Мы знаем, что любое движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер. Тогда движение f может перевести репер R либо в тот же самый репер R, либо в репер $R' = (O, A, B')$, где B' – точка, симметричная точке B относительно прямой (OA). (Напомним, что точки O и A остаются на месте, так как являются инвариантными). Второй случай нам не подходит, так как реперы R и R' имеют противоположные ориентации, а движение f – первого рода – ориентацию сохраняет. Следовательно, у нас имеет место первый случай, то есть $f : R \to R$. Мы знаем, что тождественное преобразование id действует точно так же. Тогда по основной теореме получаем, что $f = id$.

2. Пусть f имеет единственную инвариантную точку O. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$, то есть за начало репера берем инвариантную точку. Выясним, как в этом репере будут выглядеть общие формулы движения первого рода:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Так как точка $O(0, 0)_R$ – инвариантна, то есть $f : O(0, 0)_R \to O(0, 0)_R$, получим

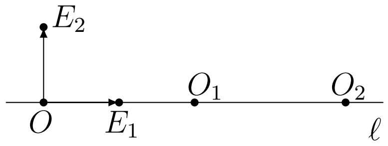
$$\begin{cases} 0 = 0\cos\alpha - 0\sin\alpha + x_0 \\ 0 = 0\sin\alpha + 0\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Откуда получим, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, то есть в выбранном репере формулы движения f имеют вид

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Но точно так же выглядят формулы поворота вокруг точки $O(0,0)$. Значит, движение f совпадает с поворотом вокруг точки O на угол α.

3. Пусть движение f не имеет ни одной инвариантной точки. Тогда по лемме оно имеет по крайней мере одну инвариантную прямую. Обозначим ее ℓ.



Возьмем ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$ такой, что точки O, E_1 лежат на прямой ℓ. Выясним, какой вид примут общие формулы движения первого рода в таком "удобном"репере. Обозначим $O_1 = f(O)$ и $O_2 = f(O_1)$. Эти точки лежат на прямой ℓ, так как она является инвариантной прямой.

Заметим, что $O_1 \neq O_2$, так как иначе середина отрезка $[OO_1]$ была бы инвариантной точкой. Тогда обозначим координаты $O_1(a,0)_R$. Так как движение сохраняет расстояния между точками и $f : [OO_1] \to [O_1O_2]$, то координаты точки $O_2(2a,0)$. Имеем $f : O(0,0) \to O_1(a,0)$ и $f : O_1(a,0) \to (2a,0)$. Подставляя эти значения в общие формулы движений первого рода, мы получим две системы уравнений

$$\begin{cases} a = x_0 \\ 0 = y_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2a = a\cos\alpha + x_0 \\ 0 = a\sin\alpha + y_0 \end{cases}$$

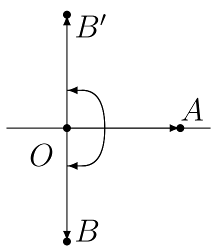
Из этих уравнений получаем $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$. Таким образом, в выбранном репере R мы получаем формулы для движения f

$$f : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$$

Точно также выглядят формулы параллельного переноса на вектор $\vec{p}(a,0)$, то есть движение первого рода, не имеющее инвариантных точек, является параллельным переносом.

Пусть f – движение второго рода. По лемме получаем, что они либо имеет бесконечно много инвариантных точек, либо не имеет ни одной инвариантной точки.

1. Пусть f имеет бесконечно много инвариантных точек. Обозначим две из этого множества инвариантных точек через O и A. Далее пойдут рассуждения полностью аналогичные первому случаю для движений первого рода.



Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B)$. Мы знаем, что любое движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер. Тогда движение f может перевести репер R либо в тот же самый репер R, либо в репер $R' = (O, A, B')$, где B' – точка симметричная точке B относительно прямой (OA). Первый случай не подходит, так как исходный репер и его образ имеют одинаковые ориентации. Следовательно, имеет место второй случай, то есть $f : R \to R'$.

Как мы знаем, осевая симметрия также переводит репер R в репер R'. Следовательно, движение f является осевой симметрией.

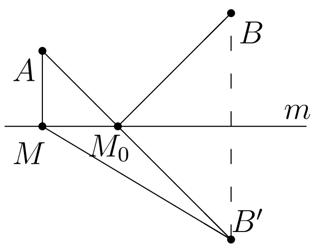
2. Пусть f не имеет инвариантных точек, а значит, имеет инвариантную прямую. Тогда аналогично случаю параллельного переноса, мы записываем формулы движения f в репере $R = (O, E_1, E_2)$, где O, E_1 лежат на инвариантной прямой и убеждаемся, что эти формулы совпадают с формулами скользящей симметрии. Таким образом, движение f является скользящей симметрией.

Итак, мы получаем, что на плоскости существует пять видов движений: тождественное, параллельный перенос, поворот – это движения первого рода; осевая симметрия и скользящая симметрия – это движения второго рода.

2.3. Множество движений плоскости образует подгруппу в группе всех преобразований плоскости. Действительно, композиция двух движений сохраняет расстояния, а значит, является движением. Также обратное отображение для движения сохраняет расстояния, а значит, является движением.

Задача 2.1. Дана прямая m и две точки A, B, лежащие по одну сторону от прямой m. Найдите точку $M_0 \in m$, такую что сумма $AM_0 + M_0B$ будет минимальной.

Решение.



Рассмотрим точку B', являющуюся образом точки B при осевой симметрии с осью m. Тогда $AM + MB = AM + MB'$. Как известно, среди всех получающихся ломаных наименьшая длина будет в том случае, когда точки A, M, B' лежат на одной прямой.
Итак, мы получили способ построения точки M_0: 1) построить точку $B' = S_m(B)$; 2) $M_0 = AB' \cap m$. $\square$

3. Преобразования подобия и их свойства. Применение подобия к решению задач.

Преобразованием подобия (или, короче, *подобием*) плоскости σ называется преобразование f плоскости, для которого существует положительное число k, такое что для любых точек $M, N \in \sigma$ и их образов $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ выполняется равенство $M'N' = kMN$. Число k называется *коэффициентом подобия.*

Простейшим примером подобия является любое движение ($k = 1$).

Теорема 3.1. *Множество P всех преобразований подобия плоскости является группой.*

Доказательство. 1) Пусть $f_1^{k_1}$, $f_2^{k_2}$ – подобия. Рассмотрим преобразование $g = f_2^{k_2} \circ f_1^{k_1}$. Пусть M, N – две произвольные точки плоскости σ. Обозначим $\tilde{M} = f_1^{k_1}(M)$, $\tilde{N} = f_1^{k_1}(N)$ и $M' = f_2^{k_2}(\tilde{M})$, $N' = f_2^{k_2}(\tilde{N})$. Тогда по определению композиции преобразований $M' = g(M)$, $N' = g(N)$. По определению подобия имеем $\tilde{M}\tilde{N} = k_1 MN$, $M'N' = k_2\tilde{M}\tilde{N}$. Тогда $M'N' = (k_1k_2)MN$. Итак, мы получили, что существует число k_1k_2, такое что для любых точек $M, N \in \sigma$ и их образов $M' = g(M)$, $N' = g(N)$: $M'N' = (k_1k_2)MN$, то есть $g = f_2^{k_2} \circ f_1^{k_1} \in P$.

2) Пусть $f^k \in P$ – подобие с коэффициентом k. Так как f^k – преобразование, то есть биекция, то для него существует обратное преобразование $(f^k)^{-1}$. Докажем, что это подобие. Рассмотрим две произвольные точки M, N плоскости σ. Так как подобие f^k является преобразованием, в частности, сюръективно, то для этих точек существуют прообразы M_0, N_0 при преобразовании f^k. По определению подобия имеем $MN = kM_0N_0$ или $M_0N_0 = \frac{1}{k}MN$. По определению обратного преобразования точки M_0, N_0 являются образами точек M, N при преобразовании $(f^k)^{-1}$. Итак, получаем, что существует положительное вещественное число $\frac{1}{k}$, такое что для любых точек M, N и их образов $M_0 = (f^k)^{-1}(M)$, $N_0 = (f^k)^{-1}(N)$ выполняется равенство $M_0N_0 = \frac{1}{k}MN$. По определению подобия это означает, что $(f^k)^{-1} \in P$.

Таким образом, множество P подобий плоскости является подгруппой группы всех преобразований плоскости, то есть само является группой. □

Следствие 3.1. *Композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом k_1k_2.*

$$f_1^{k_2} \circ f_2^{k_1} = f^{k_1k_2}$$

Преобразование обратное подобие с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

$$(f^k)^{-1} = f^{\frac{1}{k}}$$

Приведем пример подобия, отличного от движения.

Пусть на плоскости σ дана точка M_0 и фиксировано ненулевое вещественное число m. *Гомотетией* плоскости называется преобразование $H_{M_0}^m : M \to M'$, заданное соотношением $\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$. Точка M_0 называется *центром гомотетии*, а число m называется *коэффициентом гомотетии.*

Предложение 3.1. *Гомотетия $H_{M_0}^m$ с коэффициентом m является подобием с коэффициентом $|m|$.*

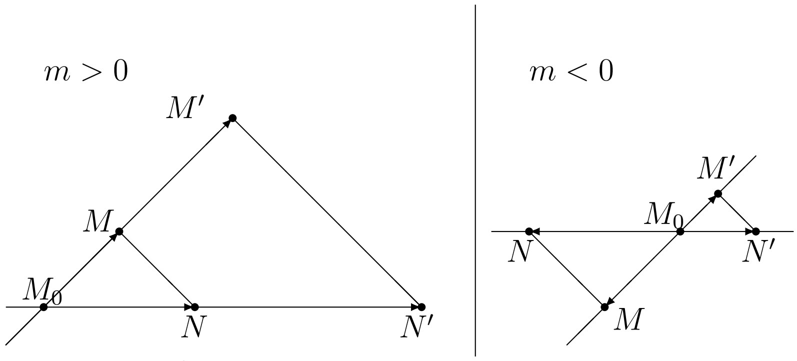
Доказательство. Пусть M, N – произвольные точки плоскости σ, $M' = H_{M_0}^m(M)$, $N' = H_{M_0}^m(N)$ – их образы при данной гомотетии. Тогда по определению гомотетии имеем $\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0N'} = m\overrightarrow{M_0N}$. Вычислим $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M_0} + \overrightarrow{M_0N'} = -m\overrightarrow{M_0M} + m\overrightarrow{M_0N} = m\overrightarrow{MN}$. Итак,

$$\forall M, N \in \sigma\ \overrightarrow{M'N'} = m\overrightarrow{MN} \tag{3.1}$$

В частности, из (3.1) следует, что $|\overrightarrow{M'N'}| = |m||\overrightarrow{MN}|$, то есть $M'N' = |m|MN$. По определению получаем, что $H_{M_0}^m$ – подобие с коэффициентом $|m|$. □

Следствие 3.2. $\forall M, N \in \sigma$

$$1)\ \overrightarrow{M'N'} = m\overrightarrow{MN} \quad 2)\ (M'N') \| (MN).$$



Выведем формулы гомотетии $H^m_{M_0}$ в произвольном репере$R = (O, E_1, E_2)$. Пусть $M_0(x_0, y_0)_R$. По определению гомотетии имеем $H^m_{M_0} : M(x, y) \to M'(x', y')$, такую, что $\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$. Распишем это равенство в координатах:

$$H^m_{M_0(x_0,y_0)} : \begin{cases} x' - x_0 = m(x - x_0) \\ y' - y_0 = m(y - y_0) \end{cases}$$

Это *формулы гомотетии.* Если в качестве центра гомотетии взять точку $O(0,0)$ – начало репера, то формулы примут более простой вид:

$$H^m_{O(0,0)} : \begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \tag{3.2}$$

Используя эти формулы, легко доказать свойства гомотетии.

Свойства.

1^0. Гомотетия переводит прямую в прямую. При этом если центр гомотетии M_0 принадлежит прямой ℓ, то ℓ переходит в себя. Если $M_0 \notin \ell$, то ℓ переходит в прямую $\ell' \| \ell$.

Доказательство. Возьмем репер R с началом в центре гомотетии – точке M_0. В таком репере формулы гомотетии имеют вид (3.2). Рассмотрим произвольную прямую ℓ. В репере R эта прямая задается уравнением $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Найдем ее образ. Для этого из формул гомотетии выразим $x = \frac{x'}{m}$, $y = \frac{y'}{m}$ и подставим в уравнение прямой ℓ. Мы получим, что прямая ℓ перейдет во множество точек ℓ', задаваемое уравнением $A\frac{x'}{m} + B\frac{y'}{m} + C = 0$ или $Ax' + By' + mC = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Это линейное уравнение, то есть ℓ' – прямая.

Если $M_0(0,0)_R$ принадлежит прямой ℓ, то в уравнении этой прямой $C = 0$, то есть $\ell : Ax + By = 0$. Тогда ее образ $\ell' : Ax' + By' = 0$. Здесь буквы x', y' обозначают координаты "бегающей"точки в репере R, то есть тоже самое, что и буквы x, y. Поэтому в уравнении прямой ℓ' мы можем переобозначить переменные и получить $\ell' : Ax + By = 0$. Итак мы видим, что прямые ℓ и ℓ' в репере R задаются одним и тем же уравнением, следовательно, совпадают.

Если $M_0(0,0)_R$ не принадлежит прямой ℓ, то в уравнении этой прямой $C \neq 0$ и образ $\ell' : Ax + By + mC = 0$. Если гомотетия отлична от тождественного преобразования (то есть $m \neq 1$), то уравнения прямых ℓ и ℓ' имеют пропорциональные коэффициенты при x, y и не пропорциональные им свободные члены, то есть эти прямые параллельны. $\square$

2^0. Гомотетия сохраняет простое отношение трех точек.

Доказательство. Пусть даны произвольные точки A, B, C, такие, что $(AB, C) = \lambda$. По определению простого отношения трех точек это означает, что

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \tag{3.3}$$

Обозначим A', B', C' – образы точек A, B, C при гомотетии $H^m_{M_0}$. Умножим обе части равенства (3.3) на коэффициент гомотетии m: $m\overrightarrow{AC} = \lambda m\overrightarrow{CB}$. Получим $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{C'B'}$. Это по определению простого отношения трех точек означает, что $(A'B', C') = \lambda$. □

Предложение 3.2. *Гомотетия сохраняет отношение "лежать между следовательно, переводит отрезок в отрезок (изменяя его длину в $|m|$ раз), луч переводит в луч.*

3^0. Гомотетия угол переводит в равный ему угол.

Доказательство. Пусть дан угол $\angle ABC$. Обозначим A', B', C' – образы точек A, B, C. Тогда $\cos\angle A'B'C' = \frac{\overrightarrow{B'A'}\overrightarrow{B'C'}}{|\overrightarrow{B'A'}||\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{(m\overrightarrow{BA})(m\overrightarrow{BC})}{|m\overrightarrow{BA}||m\overrightarrow{BC}|} = \cos\angle ABC$. □

4^0. Аналогично случаю подобия доказывается, что

$$H^{m_2}_{M_0} \circ H^{m_1}_{M_0} = H^{m_1 m_2}_{M_0}; \quad \left(H^m_{M_0}\right)^{-1} = H^{\frac{1}{m}}_{M_0}.$$

Теорема 3.2. *(о разложении подобия) Пусть f^k – произвольное подобие плоскости с коэффициентом k; H^k_O – гомотетия с тем же коэффициентом k и центром в произвольной фиксированной точке O. Тогда существует движение g, такое что $f^k = g \circ H^k_O$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование $f^k \circ (H^k_O)^{-1}$. Это композиция двух подобий с коэффициентами k и $\frac{1}{k}$, то есть подобие с коэффициентом 1, то есть движение. Обозначим его g. Имеем

$$g = f^k \circ (H^k_O)^{-1}$$

Умножим обе части этого равенства справа на H^k_O. Тогда получим, что $f^k = g \circ H^k_O$, то есть искомое разложение. □

Благодаря теореме о разложении подобия все общие свойства движений и подобий автоматически переносятся на подобия.

Свойства.

1^0. Подобие переводит прямую в прямую, параллельные прямые –в параллельные прямые.

2^0. Подобие сохраняет простое отношение трех точек. Следовательно, переводит отрезок в отрезок, луч в луч. (Заметим, что подобие изменяет длину отрезка в k раз.

3^0. Подобие переводит угол в равный угол. В частности, перпендикулярные прямые – в перпендикулярные прямые.

Задача 3.1. Даны произвольный четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Точка M отражена от середин сторон четырехугольника $ABCD$ и полученные точки обозначены M_1, M_2, M_3, M_4. Докажите, что M_1, M_2, M_3, M_4 – параллелограмм.

Решение. Обозначим середины сторон четырехугольника $ABCD$ через A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Гомотетия с центром в точке M и коэффициентом 2 переводит параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ в четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$. В силу свойств гомотетии $M_1M_2M_3M_4$ является параллелограммом. □

4. Плоскость Лобачевского. Свойства треугольников плоскости Лобачевского.

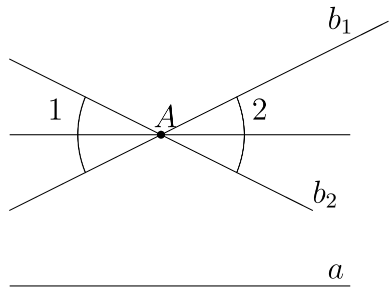
Пусть даны два непустые множества произвольной природы. Элементы первого множества будем называть *точками* и обозначать большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а элементы второго множества – *прямыми* и обозначать малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, \ldots$. Элементы этих множеств находятся в определенных отношениях, которые называются "принадлежность "лежать между "конгруэнтность". Эти отношения называются основными. Природа основных понятий, то есть основных объектов и отношений, может быть какой угодно, но они должны удовлетворять определенным требованиям – аксиомам.

Отношение принадлежности описывается аксиомами принадлежности – 3 аксиомы. (Например, через любые две различные точки проходит не более одной прямой.) Отношение лежать между – аксиомами порядка – 4 аксиомы (Например, если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C – три различные точки одной прямой и точка B лежит между точками C и A). Отношение конгруэнтности – аксиомами конгруэнтности – 5 аксиом (Например, если даны отрезок AB и луч с началом в точке A', то существует точка B', принадлежащая этому лучу, такая что отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB. Любой отрезок конгруэнтен самому себе). Также существует четвертая группа аксиом – аксиомы непрерывности – 2 аксиомы. Эта группа аксиом позволяет ввести понятия длины отрезка и величины угла. Геометрия, построенная на основе этих четырех групп аксиом называется *абсолютной геометрией.* В рамках абсолютной геометрии может быть доказано утверждение: через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, не пересекающую данную.

Добавим к четырем группам аксиом абсолютной геометрии аксиому Лобачевского V^*: через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

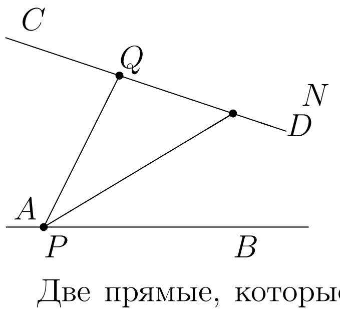
Геометрия, построенная на аксиомах абсолютной геометрии и аксиоме Лобачевского, называется *геометрией Лобачевского на плоскости.*

Заметим, что через точку, взятую вне прямой, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную прямую.



Пусть даны прямые a и точка A, не лежащая на ней. По аксиоме Лобачевского существует как минимум две прямые b_1 и b_2, проходящие через точку A и не пересекающие прямую a. Тогда любая прямая, находящаяся внутри углов $\angle 1$ и $\angle 2$ не пересекает прямую a.

Напомним, что на прямой существует два направления (классы сонаправленных лучей). Прямая, на которой задано направление, называется *направленной прямой.*



Направленная прямая (AB) называется *параллельной* направленной прямой (CD), если
1) $(AB) \cap (CD) = \emptyset$;
2) Для любой точки $P \in (AB)$, любой точки $Q \in (CD)$ и любого внутреннего луча h угла $\angle QPB$, проходящего через точку P, луч h пересекает луч $[QD)$ в некоторой точке N.
Обозначение $(AB) \| (CD)$.

Две прямые, которые не являются ни параллельными, ни пересекающимися, называются *расходящимися.*

На плоскости Лобачевского через каждую точку, не принадлежащую данной направленной прямой, проходит единственная направленная прямая, параллельная данной прямой в данном направлении.

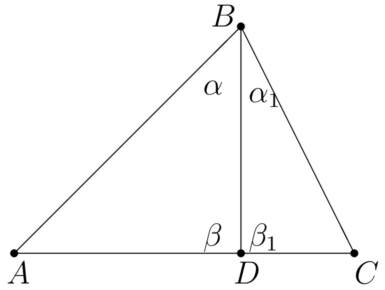
Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих данные точки. Это объект абсолютной геометрии, а значит, может быть рассмотрен в геометрии Лобачевского. На плоскости Лобачевского треугольники имеют ряд свойств, отличных от свойств треугольников евклидовой плоскости. Приведем примеры.

Теорема 4.1. *Сумма углов любого треугольника меньше двух прямых ($2d$).*

Доказательство. Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых по теореме Лежандра. Если предположить, что сумма углов какого-либо треугольника равна двум прямым, то будет выполняться пятый постулат Евклида. Это противоречит выполнению аксиомы Лобачевского (отрицание пятого постулата Евклида). □

Теорема 4.2. *Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского не постоянна.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle ABC$.



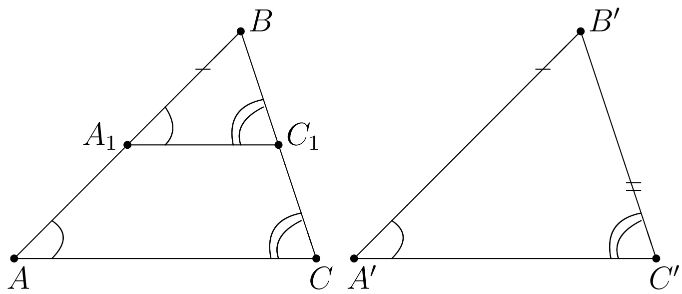
Возьмем любую точку D на отрезке AC. Тогда $\sigma(ABD) + \sigma(DBC) = (\hat{A} + \alpha + \beta) + (\hat{C} + \alpha_1 + \beta_1) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 2d$. Следовательно, $\sigma(ABD) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + (2d - \sigma(DBC))$, то есть, $\sigma(ABD) = \sigma(ABC) + (2d - \sigma(DBC))$. Так как сумма углов треугольника меньше $2d$, то $\sigma(ABD) > \sigma(ABC)$.

□

В абсолютной геометрии мы доказывали четыре признака равенства треугольников. На плоскости Лобачевского есть еще один признак равенства.

Теорема 4.3. *Если три угла одного треугольника равны соответственно трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$



такие, что $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Допустим, что $AB \neq A'B'$ и $AB > A'B'$. Тогда существует точка $A_1 \in AB$ такая, что $BA_1 = A'B'$. Пусть $C_1 \in [BC)$ такая, что $BC_1 = B'C'$.

Тогда треугольники $\triangle A_1BC_1 = \triangle A'B'C'$ по первому признаку, следовательно, $\angle A_1 = \angle A' = \angle A$. Тогда по лемме прямые (AC) и (A_1C_1) не пересекаются.

Рассмотрим точки A, B, C и прямую (A_1C_1). Тогда по аксиоме Паша $B - C_1 - C$. Мы получили выпуклый четырехугольник AA_1C_1C с суммой углов $\hat{A} + 2d - \hat{A} + \hat{C} + 2d - \hat{C} = 4d$, что противоречит теореме о сумме углов четырехугольника. □

5. Проективная плоскость, ее свойства и ее модели. Проективные преобразования, примеры.

5.1. Пусть V^3 – трехмерное векторное пространство, P – непустое множество произвольной природы. Рассмотрим отображение

$$\pi : V^3 \setminus \{\vec{0}\} \to P$$

удовлетворяющее двум условиям
1) π – сюръективно;
2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Множество P с заданным на нем отображением π называется *проективной* плоскостью. Условия 1) и 2) называются *аксиомами проективной плоскости.* Элементы проективной плоскости называются *точками* и обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Если $X = \pi(\vec{x})$, то будем говорить, что точка X *порождена вектором* $\vec{x}$.

Из второй аксиомы проективного пространства следует, что любая точка X проективной плоскости порождается одномерным векторным подпространством из V^3, то есть $X = \pi(L^1 \setminus \{\vec{0}\})$.

Рассмотрим V^2 – двумерное векторное подпространство в V^3. Подмножество $\pi(V^2 \setminus \{\vec{0}\})$ в P называется *проективной прямой.*

Свойства.

1^0. Через любые две различные точки A и B проективной плоскости P проходит единственная прямая.

Доказательство. Обозначим через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такие что $\pi(\vec{a}) = A$, $\pi(\vec{b}) = B$. Так как точки A и B различны, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (см. вторую аксиому проективного пространства). Рассмотрим линейную оболочку этих векторов $L(\vec{a}, \vec{b})$. Это двумерное векторное подпространство в V^3, а значит, $\pi(L(\vec{a}, \vec{b}) \setminus \{\vec{0}\})$ является прямой. Обозначим ее a. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$, то точки $A, B \in a$. Таким образом, мы доказали существование прямой a.

Докажем единственность прямой a. Допустим, что существует еще одна прямая b, такая что $A, B \in b$. Обозначим через L двумерное векторное подпространство, которое порождает прямую b. Так как $A \in b$, то $\vec{a} \in L$. Аналогично, $\vec{b} \in L$. Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, $L = L(\vec{a}, \vec{b})$, а значит, $a = b$. □

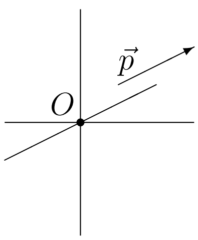
2^0. Любые две различные прямые на проективной плоскости пересекаются.

Доказательство. Пусть даны две различные прямые a и b на проективной плоскости P. Обозначим через L_a и L_b – двумерные векторные подпространства в V^3, которые порождают эти прямые. Так как прямые a и b различны, $L_a \neq L_b$. Так как два различные двумерные векторные подпространства в V^3 пересекаются по одномерному векторному подпространству L, то $a \cap b = \pi(L_a \setminus \{\vec{0}\}) \cap \pi(L_b \setminus \{\vec{0}\}) = \pi((L_a \cap L_b) \setminus \{\vec{0}\}) = \pi(L) = O$ – общая точка. □

3^0. На проективной плоскости существует бесконечно много точек.

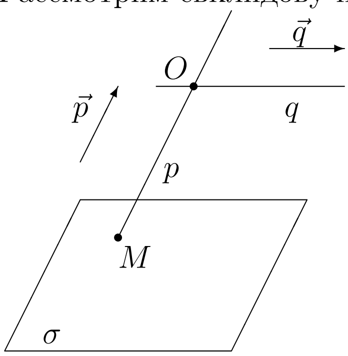
Теорема 5.1. *Моделями проективной плоскости являются связка прямых пространства и расширенная евклидова плоскость.*

Доказательство. Рассмотрим связку прямых $\mathscr{C}(O)$ с центром в точке O.



Построим отображение $\pi : V^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathscr{C}(O)$, ставя в соответствие каждому ненулевому вектору $\vec{p} \in V^3$ прямую связки $\mathscr{C}(O)$, которая параллельна этому вектору. Легко видеть, что обе аксиомы проективного пространства при этом выполняются.

Рассмотрим евклидову плоскость σ. Фиксируем точку O, не лежащую на плоскости σ.



Рассмотрим произвольный вектор $\vec{p}$, не параллельный плоскости σ. Проведем через точку O прямую p, параллельную вектору $\vec{p}$. Она пересечет плоскость σ в точке M. Для векторов $\vec{q}$, параллельных плоскости σ точек пересечения плоскости σ и прямых q нет. Поэтому к плоскости σ добавим элементы, которые будем называть *бесконечно удаленными точками*: для каждой прямой q своя бесконечно удаленная точка Q_∞. Плоскость σ, дополненную бесконечно удаленными точками будем называть *расширенной плоскостью* и обозначать $\bar{\sigma}$.

Докажем, что расширенная плоскость является проективной плоскостью. Действительно, отображение $\pi : V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ задается следующим образом: каждому ненулевому вектору $\vec{p}$, не параллельному плоскости σ, ставится в соответствие точка $M = p \cap \sigma$, а ненулевому вектору $\vec{q}$ ставится в соответствие бесконечно удаленная точка Q_∞, соответствующая прямой q. Очевидно, что такое отображение удовлетворяет обеим аксиомам проективной плоскости, а значит, расширенная плоскость $\bar{\sigma}$ является проективной плоскостью. $\square$

5.2. Пусть дана проективная плоскость σ. Биективное отображение проективной плоскости σ на себя называется *проективным преобразованием* этой плоскости, если точкам любой проективной прямой соответствуют точки также лежащие на одной проективной прямой и при этом сохраняется сложное отношение четырех точек.

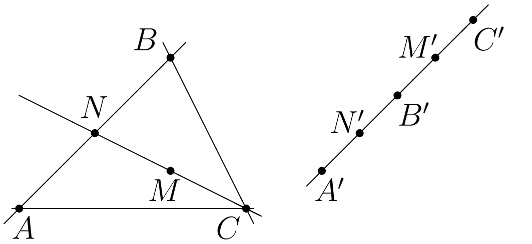
Теорема 5.2. *Проективное преобразование переводит проективную прямую в проективную прямую.*

Доказательство. Пусть дано проективное преобразование f проективной плоскости σ и произвольная проективная прямая d в этой плоскости. Рассмотрим три произвольные различные точки A, B, C, принадлежащие прямой d. Обозначим их образы при преобразовании f через A', B', C' соответственно. В силу определения проективного преобразования плоскости эти точки лежат на одной проективной прямой, которую мы обозначим d'. Докажем, что прямая d' является образом прямой d при преобразовании f.

Пусть M – произвольная точка прямой d, отличная от точек A, B, C. Тогда ее образ M' при преобразовании f принадлежит прямой d' по определению проективного преобразования. Обратно, пусть M' – произвольная точка прямой d'. Обозначим $(A'B', C'M') = \lambda$. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек прямой существует точка M на прямой d, для которой $(AB, CM) = \lambda$. В силу еще одного свойства сложного отношения четырех точек и определения проективного преобразования точка M перейдет в точку M' при преобразовании f. Итак, прямая d переходит в прямую d' при преобразовании f. $\square$

Теорема 5.3. *Проективное преобразование переводит три точки, не лежащие на одной проективной прямой в три точки также не лежащие на одной проективной прямой.*

Доказательство. Пусть существует проективное преобразование f, которое точки A, B, C плоскости σ, не лежащие на одной прямой, переводит в три точки A', B', C', лежащие на одной прямой.



Рассмотрим произвольную точку M плоскости σ, отличную от точек A, B, C, и докажем, что ее образ M' лежит на проективной прямой $(A'B')$. Обозначим через N точку пересечения проективных прямых (AB) и (CM). Так как проективное преобразование переводит прямую в прямую, образ N' точки N лежит на прямой $(A'B')$. Аналогично точка M' лежит на одной прямой с точками N' и C', то есть лежит на прямой $(A'B')$.
Итак, любая точка M проективной плоскости отображается в точку M' прямой $(A'B')$.

Фиксируем точку M, не лежащую на прямых (AB), (AC), (CB). По доказанному ее образ M' при отображении f лежит на прямой $(A'B')$. Обозначим сложное отношение $(A'B', N'M') = \lambda$, где N' – образ точки N при отображении f. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек прямоц существует точка $\tilde{M}$ на прямой (AB), такая что $(AB, N\tilde{M}) = \lambda$. Для ее образа $\tilde{M}'$ при преобразовании f будет выполняться равенство $(A'B', N'\tilde{M}') = \lambda$. Тогда $(A'B', N'M') = (A'B', N'\tilde{M}')$ и в силу свойства сложного отношения четырех точек прямой M' и $\tilde{M}'$ совпадают. В результате получаем противоречие с биективностью преобразования f. □

Следствие 5.1. *Любое проективное преобразование проективной плоскости переводит проективный репер в проективный репер.*

Лемма 5.1. *Пусть проективное преобразование f плоскости σ переводит проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ в проективный репер $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Тогда преобразование f переводит проективные реперы R_1, R_2, R_3 координатных прямых репера R соответственно в проективные реперы R'_1, R'_2, R'_3 координатных прямых репера R'.*

Доказательство. Докажем, что репер R_1 переходит в репер R'_1. Остальные случаи доказываются аналогично. По условию имеем $f(A_1) = A'_1$, $f(A_2) = A'_2$, $f(A_3) = A'_3$, $f(E) = E'$. Так как проективное преобразование прямые переводит в прямые, $f((A_1E)) = (A'_1E')$, $f((A_2A_3)) = (A'_2A'_3)$. Тогда

$$f(E_1) = f((A_1E) \cap (A_2A_3)) = f((A_1E)) \cap f((A_2A_3)) = (A'_1E') \cap (A'_2A'_3) = E'_1.$$

Таким образом, $f(R_1) = R'_1$. □

Теорема 5.4. *Пусть даны два проективных репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ на проективной плоскости σ. Тогда существует единственное проективное преобразование плоскости, переводящее репер R в репер R'. При этом каждой точке M плоскости σ с координатами (x_1, x_2, x_3) в репере R ставится в соответствие точка M' с теми же координатами в репере R'.*

5.3. Рассмотрим пример проективного преобразования проективной плоскости σ. Нетождественное проективное преобразование плоскости называется *гомологией* если оно имеет прямую s инвариантных точек (а значит, и пучок инвариантных прямых $P(S)$). Прямая s называется *осью гомологии*, а центр пучка инвариантных прямых называется *центром гомологии.* Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то гомология называется *параболической*, если нет – *гиперболической.*

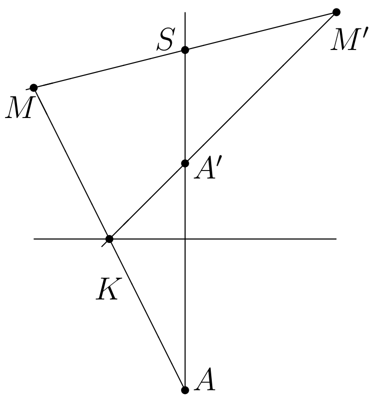
Свойства гомологии:

(1) Точки, соответствующие в гомологии, лежат на одной прямой с центром гомологии.

(2) Любая проективная прямая плоскости и ее образ при гомологии пересекаются на оси гомологии.

(3) Если на плоскости даны прямая s и три различные точки A, A' и S, лежащие на одной прямой, причем A и A' не лежат на прямой s, то существует единственная гомология с осью s и центром S.

Пример построения образа точки при гиперболической гомологии, заданной осью, центром и парой соответствующих точек A и A'.



6. Сложное отношение четырех точек проективной прямой. Гармонические четверки точек. Полный четырехвершинник. Применение к решению задач.

6.1. Пусть на проективной прямой d даны три различные точки A, B, C и точка D, отличная от точки A. Рассмотрим проективный репер $R_0 = (A, B, C)$ и обозначим координаты точки D относительно этого репера через (d_1, d_2). Число $\frac{d_1}{d_2}$ называется *сложным (двойным) отношением точек* A, B, C, D и обозначается (AB, CD).

Теорема 6.1. *Пусть даны три различные точки A, B, C на проективной прямой d и произвольное вещественное число λ. Тогда существует единственная точка D на прямой d, такая что $(AB, CD) = \lambda$.*

Доказательство. Рассмотрим точку D с координатами $(\lambda, 1)$ в репере $R_0 = (A, B, C)$. Очевидно, что $(AB, CD) = \lambda$. Допустим, что существует еще одна точка D', такая что $(AB, CD') = \lambda$. Обозначим координаты этой точки в репере R_0 через (d_1', d_2'). Тогда по определению сложного отношения четырех точек получим

$$\frac{d_1'}{d_2'} = \lambda = \frac{\lambda}{1},$$

то есть пары чисел (d_1', d_2') и $(\lambda, 1)$ пропорциональны, следовательно, являются координатами одной и той же точки. Итак, точка D совпадает с точкой D', следовательно, D единственна. $\square$

Получим формулу для вычисления сложного отношения четырех точек прямой через их координаты в произвольном репере.

Теорема 6.2. *Пусть на проективной прямой d даны три различные точки A, B, C и точка D, отличная от точки A. Обозначим их координаты относительно проективного репера $R = (A_1, A_2, E)$ этой прямой через $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$. Тогда*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Обозначим координаты точки D в репере $R_0 = (A, B, C)$ через (d_1^0, d_2^0). Тогда по определению сложного отношения четырех точек проективной прямой имеем

$$(AB, CD) = \frac{d_1^0}{d_2^0}. \tag{6.2}$$

Чтобы получить формулу (6.1), нужно выразить координаты (d_1^0, d_2^0) точки D в репере R_0 через координаты (d_1, d_2) этой точки в репере R и подставить их в (6.2). Для этого нужны формулы перехода от репера R к реперу R_0. Рассмотрим векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\vec{c}(c_1, c_2)$, порождающие соответственно точки A, B, C. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вообще говоря, не согласованы. Чтобы получить согласованную пару векторов нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1k_1 + b_1k_2 = c_1 \\ a_2k_1 + b_2k_2 = c_2 \end{cases}$$

с неизвестными k_1 и k_2. Как известно из алгебры,

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{6.3}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Тогда формулы перехода от репера R к реперу R_0 имеют вид (формулы (**??**))

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1 a_1 x_1' + k_2 b_1 x_2' \\ \rho x_2 &= k_1 a_2 x_1' + k_2 b_2 x_2'. \end{aligned}$$

Подставим координаты точки D в полученные формулы:

$$\begin{aligned} \rho d_1 &= k_1 a_1 d_1^0 + k_2 b_1 d_2^0 \\ \rho d_2 &= k_1 a_2 d_1^0 + k_2 b_2 d_2^0. \end{aligned}$$

Найдем d_1^0 и d_2^0 из полученных уравнений:

$$d_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & k_2 b_1 \\ \rho d_2 & k_2 b_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}; \quad d_2^0 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a_1 & \rho d_1 \\ k_1 a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}.$$

Подставляя выражения для d_1^0 и d_2^0 в (6.2) с учетом (6.3), получим (6.1). □

Теорема 6.3. *Для сложного отношения четырех точек проективной прямой имеем*

1. 1^0. $(AB, CD) = (CD, AB)$;
2. 2^0. *Если* $(AB, CD) \neq 0$, *то* $(AB, CD) = \frac{1}{(BA,CD)}$, $(AB, CD) = \frac{1}{(AB,DC)}$;
3. 3^0. $(AB, CC) = 1$, $(AB, CB) = 0$;
4. 4^0. $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

Доказательство. Свойство 3^0 легко доказать, используя определение сложного отношения четырех точек. Остальные свойства доказываются с использованием формулы (6.1). Докажем свойство 4^0. Остальные свойства докажите самостоятельно. Рассмотрим репер $R_0 = (A, B, C)$ и обозначим координаты точки D в нем через (d_1, d_2). Так как $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, получим по формуле (6.1)

$$(AC, BD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_2 - d_1}{d_2}. \tag{6.4}$$

По определению сложного отношения четырех точек имеем $(AB, CD) = \frac{d_1}{d_2}$. Тогда с учетом (6.4) получим 4^0. □

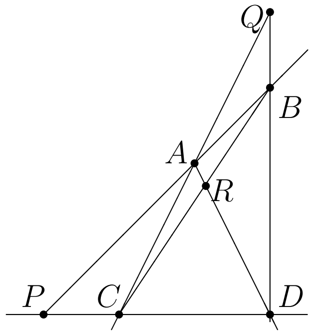
6.2. Четверка точек A, B, C, D проективной прямой называется *гармонической*, если их сложное отношение (AB, CD) равно -1. Говорят также, что точки C и D *гармонически сопряжены* относительно точек A и B. Также говорят, что пары точек A, B и C, D *гармонически разделяют одна другую*. Точка D называется *четвертой гармонической точкой* для точек A, B, C.

Замечание 6.1. Из свойств сложного отношения четырех точек следует, что для гармонической четверки точек справедливы равенства

$$(AB, CD) = (BA, CD) = (AB, DC) = (DC, AB) = -1.$$

Откуда следует, что порядок точек в парах A, B и C, D не важен. Также не важен порядок следования самих пар.

Пусть даны четыре точки A, B, C, D общего положения на проективной плоскости σ (то есть никакие три из них не лежат на одной проективной прямой). Фигура, образованная точками A, B, C, D и проективными прямыми, попарно соединяющими эти точки, называется *полным четырехвершинником.*



Точки A, B, C, D называются *вершинами* полного четырехвершинника. Проективные прямые (AB) и (CD); (AC) и (BD); (AD) и (BC) называются *противоположными сторонами.* Точки P, Q, R, в которых пересекаются противоположные стороны, называются *диагональными точками.* Проективные прямые (PQ), (QR), (PR), которые попарно соединяют диагональные точки, называются *диагоналями полного четырехвершинника.*

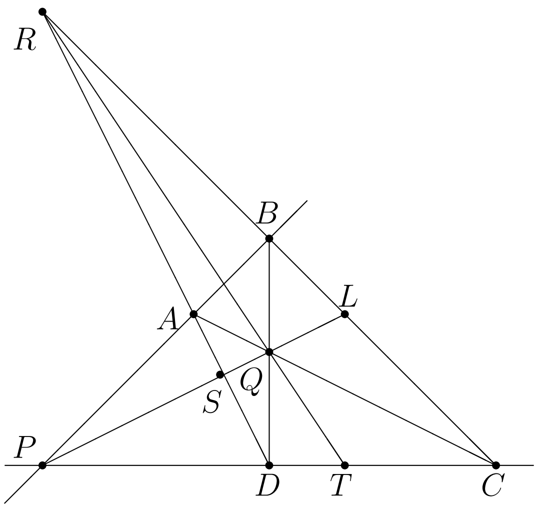
Теорема 6.4. *Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:*

1) На каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой – точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;

2) На каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая пара образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;

3) Через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой – диагонали.

Доказательство. Пусть дан полный четырехвершинник $ABCD$.



Спроектируем точки

$$\begin{array}{ccccc} & \text{на }(BC)\text{ из }D & & \text{на }(PQ)\text{ из }A & \\ P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q \\ Q & \longrightarrow & B & \longrightarrow & P \\ S & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S \\ L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \end{array}$$

Так как перспективное отображение является проективным, согласно определению проективного отображения и свойству сложного отношения четырех точек получим

$$(PQ, SL) = (QP, SL) = \frac{1}{(PQ, SL)}.$$

Возможны два случая:

1) $(PQ, SL) = 1$. Тогда точки S и L совпадают, а значит, совпадают прямые (AD) и (BC). Это противоречит определению полного четырехвершинника.

2) $(PQ, SL) = -1$, что и требовалось доказать в п. 1). При проектировании точек также получаем $(PQ, SL) = (CB, RL)$, то есть $(CB, RL) = -1$, что и требовалось доказать в п.2). Наконец, рассмотрим проективные прямые (PL), (RT), (AC) и (BD). Пересечем их проективной прямой (BC). Тогда по определению сложного отношения четырех прямых пучка (§ **??**) получим $((PL)(RT), (AC)(BD)) = (LR, CB) = \frac{1}{(CB,RL)} = -1$. □

7. Гладкие кривые. Сопровождающий репер. Формулы Френе.

7.1. *Простейшей линией* (или *простейшей кривой*) в пространстве E^3 называется прямая, интервал, полуинтервал (с конечным или бесконечным открытым концом) или отрезок прямой.

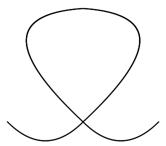
Элементарной линией (или *элементарной кривой*) называется множество точек из E^3, гомеоморфное простейшей кривой.

Полуокружность является элементарной линией. Окружность не является элементарной кривой, так как не гомеоморфна ни одной из простейших кривых.

Напомним, что подмножество X в E^3 называется *открытым*, если для каждой точки $x \in X$ найдется число $\varepsilon > 0$, такое что открытый шар с центром в точке x радиуса ε целиком содержится в X. Множество X из E^3 называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых, открытых, непересекающихся подмножеств.

Простой линией будем называть связное множество точек γ из E^3, для каждой точки x которого существует открытый шар с центром в этой точке, дающий в пересечении с γ элементарную линию. Простая линия является объединением таких элементарных линий.

Окружность является простой линией.



Множество точек X, изображенное на рисунке, не является простой линией из-за точки самопересечения. Действительно, любой шар достаточно малого радиуса с центром в этой точке пересекает множество X по кресту, который не гомеоморфен простейшей линии.

Если множество X разрезать в точке самопересечения, то получим три простые (даже элементарные) линии.

Будем называть *линией* (или *кривой*) множество точек из E^3, которое можно разбить на конечное или счетное множество простых линий.

Пусть в ориентированном пространстве E_3 задана правая прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда элементарная линия γ может быть задана аналитически. Пусть M – произвольная точка линии γ. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть разложен по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in I$$

или $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Это векторное параметрическое уравнение линии γ. Если расписать это уравнение в координатах, получим параметрические уравнения линии

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),\ t \in I.$$

Число t, принадлежащее интервалу I, называется параметром.

Элементарная линия называется гладкой линией класса C^k, если ее параметрические уравнения имеют непрерывные производные до порядка k включительно и первые производные $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ не равны нулю одновременно.

7.2. Пусть в качестве параметра в параметрических уравнениях линии γ выбрана длина дуги s (такая параметризация называется естественной или натуральной), то есть линия задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$. Тогда производная $\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ радиус-вектора $\vec{r}(s)$ линии γ определяет для каждого значения s единичный касательный вектор, который обозначим $\vec{\tau}(s)$:

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{\tau}(s).$$

Вектор $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \equiv \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$ называется *вектором кривизны* линии γ, а его длина $k(s)$ называется *кривизной линии* γ в точке, определяемой значением параметра s. Пусть $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \neq \vec{0}$. Обозначим через $\vec{\nu}(s)$ – орт вектора кривизны, то есть единичный вектор, сонаправленный с вектором $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}$. Тогда имеем

$$\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = k(s)\vec{\nu}(s).$$

Вектор $\vec{\nu}(s)$ называется *единичным вектором главной нормали* линии γ в точке с параметром s.

Так как вектор $\vec{\tau}(s)$ единичный, векторы $\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$ и $\vec{\tau}(s)$ перпендикулярны, то есть $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{\tau}(s)$ перпендикулярны.

Рассмотрим вектор $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$. Это единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$ и образующий с ними правую тройку. Он называется *единичным вектором бинормали.* Таким образом, в каждой точке кривой γ со значением параметра s определен правый ортонормированный базис $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$.

Обозначим через M точку кривой γ со значением параметра s, то есть $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(s)$. Четверка $(M, \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ называется *каноническим репером* или *репером Френе.* Тогда с репером Френе в точке M связаны три прямые и три плоскости:

$(M, \vec{\tau}(s))$ – касательная;	$(M, \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s))$ – соприкасающаяся плоскость;
$(M, \vec{\nu}(s))$ – главная нормаль;	$(M, \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ – нормальная плоскость;
$(M, \vec{\beta}(s))$ – бинормаль;	$(M, \vec{\tau}(s), \vec{\beta}(s))$ – спрямляющая плоскость.

При перемещении точки M вдоль кривой γ репер Френе меняется. Учитывая это, его называют подвижным репером.

7.3. Для линии γ, заданной векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в естественной параметризации, найдем изменение подвижного репера, когда его вершина перемещается по линии. Другими словами, выразим векторы $\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$, $\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds}$ и $\frac{d\vec{\beta}(s)}{ds}$ через векторы $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$. Формулы, которые мы получим называются *формулами Френе.*

Из определения вектора главной нормали мы получим

$$\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = k(s)\vec{\nu}(s). \tag{7.1}$$

Найдем $\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds}$. Так как это вектор $\vec{\nu}(s)$ – вектор постоянной длины, он будет перпендикулярен вектору $\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds}$. Следовательно, вектор $\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds}$ будет раскладываться по векторам $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$:

$$\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds} = \alpha(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s). \tag{7.2}$$

Найдем коэффициент α. Для этого равенство $\vec{\tau}(s)\vec{\nu}(s) = 0$, которое выполняется во всех точках линии γ в силу перпендикулярности векторов $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$, дифференцируем по параметру s и подставляем в него (7.2), (7.1), получим

$$k(s)\vec{\nu}(s)\vec{\nu}(s) + \vec{\tau}(s)(\alpha\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)) = 0.$$

Векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ перпендикулярны, следовательно их скалярное произведение равно нулю. Так как векторы $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\nu}(s)$ единичные, получим $k(s) + \alpha(s) = 0$, то есть $\alpha(s) = -k(s)$. Таким образом, получим

$$\frac{d\vec{\nu}(s)}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s). \tag{7.3}$$

Число $\varkappa(s)$ называется *кручением* γ в точке M.

Наконец, продифференцируем по s формулу, задающую вектор бинормали $\vec{\beta}(s) = [\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)]$:

$$\frac{d\vec{\beta}(s)}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}, \vec{\nu}(s)\right] + \left[\vec{\tau}(s), \frac{d\vec{\nu}(s)}{ds}\right]$$

и подставим (7.1) и (7.3)

$$\frac{d\vec{\beta}(s)}{ds} = k(s)[\vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s)] + [\vec{\tau}(s), -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s)] = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s).$$

Равенства

$$\tfrac{d\vec{\tau}}{dt} = k(s)\vec{\nu}(s); \quad \tfrac{d\vec{\nu}(s)}{ds} = -k(s)\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{\beta}(s); \quad \tfrac{d\vec{\beta}(s)}{ds} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s)$$

называются *формулами Френе.*

8. Гладкие поверхности. Первая квадратичная форма. Задачи, решаемые с помощью первой квадратичной формы.

8.1. *Простейшей поверхностью* будем называть плоскость, замкнутую полуплоскость (то есть объединение полуплоскости и ее границы) и прямоугольник.

Элементарной поверхностью назовем множество точек евклидова пространства E_3, гомеоморфное простейшей поверхности.

Поверхностью называется фигура в пространстве E_3, которую можно покрыть конечным или счетным множеством элементарных поверхностей.

Точка M поверхности F называется *обыкновенной*, если у этой точки как точки пространства существует ε-окрестность, которая в пересечении с F является элементарной поверхностью. При этом, если пересечение гомеоморфно плоскости, то такая точка называется *внутренней*, а если гомеоморфна полуплоскости – *граничной*. Поверхность, все точки которой обыкновенные, называется *простой*. Множество всех граничных точек простой поверхности называется ее *границей* или *краем*.

Пусть в E_3 задана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда поверхность F в некоторой окрестности любой ее внутренней точки можно задать с помощью векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v),$$

где $(u, v) \in G$ – произвольный элемент некоторой плоской области, гомеоморфной плоскости или с помощью параметрических уравнений

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v),\ (u, v) \in G.$$

Если левые части этих равенств имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно и

$$rg \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2,$$

то поверхность называется *гладкой*. Пара чисел $(u, v) \in G$ называется *криволинейными координатами* точки M, такой что $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v)$. Так как область G и элементарная поверхность F гомеоморфны, для каждой точки поверхности F криволинейные координаты определены однозначно.

8.2. Пусть элементарная поверхность F задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Запишем ее дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, где $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Найдем скалярный квадрат дифференциала $d\vec{r}$

$$d\vec{r}^2 = \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12} du dv + \gamma_{21} dv du + \gamma_{22}(dv)^2, \tag{8.1}$$

где $\gamma_{11} = \vec{r}_u \vec{r}_u$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u \vec{r}_v$, $\gamma_{22} = \vec{r}_v \vec{r}_v$. Выражение в правой части (8.1) называется *первой квадратичной формой* поверхности F.

Первая квадратичная форма позволяет вычислить длину кривой на поверхности F. Пусть на поверхности F дана кривая γ. Параметрические уравнения кривой γ в локальных координатах поверхности будут иметь вид $u = u(t), v = v(t)$. Так как кривая лежит на поверхности F, криволинейные координаты (u, v) ее точек будут удовлетворять параметрическим уравнениям поверхности F, а значит, в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторное параметрическое уравнение кривой γ имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Как мы знаем, длина кривой в E_3 вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt.$$

Вычислим $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ в нашем случае. Используя правило дифференцирования сложной функции и обозначение коэффициентов первой квадратичной формы, получим

$$\left|\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}} = \sqrt{(\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt})(\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt})} = \sqrt{\gamma_{11}(\frac{du}{dt})^2+2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\gamma_{22}(\frac{dv}{dt})^2}.$$

Откуда получаем формулу для вычисления длины дуги кривой на поверхности F

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Пусть даны две кривые γ_1 и γ_2 на поверхности F, пересекающиеся в точке M. Найдем угол между этими кривыми в точке M. Напомним, что углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между их касательными в этой точке.

Пусть поверхность F задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, кривые γ_1 и γ_2 в криволинейных координатах заданы уравнениями $u=u_1(t), v=v_1(t)$ и $u=u_2(t), v=v_2(t)$ соответственно. Пусть точке M соответствует значение параметра t_1 на линии γ_1 и значение параметра t_2 на второй линии. В прямоугольной декартовой системе координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ линии γ_1 и γ_2 задаются следующим образом

$$\gamma_1:\ \vec{r}=\vec{r}(u_1(t),v_1(t));\quad \gamma_2:\ \vec{r}=\vec{r}(u_2(t),v_2(t)).$$

Найдем какой-нибудь вектор, параллельный касательной к γ_1 в точке M. Как мы знаем, вектор $\frac{d\vec{r}(u_1(t),v_1(t))}{dt}(t_1)$ будет касательным к γ_1. Обозначим его $\vec{\xi_1}$. С учетом правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\vec{\xi_1}=\frac{d\vec{r}(u_1(t),v_1(t))}{dt}(t_1)=\vec{r}_u(u_1(t_1),v_1(t_1))\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)+\vec{r}_v(u_1(t_1),v_1(t_1))\frac{dv_1}{dt}(t_1).$$

Аналогично получаем вектор

$$\vec{\xi_2}=\frac{d\vec{r}(u_2(t),v_2(t))}{dt}(t_2)=\vec{r}_u(u_2(t_2),v_2(t_2))\frac{du_2(t)}{dt}(t_2)+\vec{r}_v(u_2(t_2),v_2(t_2))\frac{dv_2}{dt}(t_2),$$

касательный к кривой γ_2 в точке M. Так как $(u_1(t_1),v_1(t_1))$ и $(u_2(t_2),v_2(t_2))$ – это криволинейные координаты одной и той же точки M, получим $u_1(t_1)=u_2(t_2)$, $v_1(t_1)=v_2(t_2)$. Следовательно, $\vec{r}_u(u_1(t_1),v_1(t_1))=\vec{r}_u(u_2(t_2),v_2(t_2))\equiv\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v(u_1(t_1),v_1(t_1))=\vec{r}_v(u_2(t_2),v_2(t_2))\equiv\vec{r}_v$.

По определению скалярного произведения векторов получим

$$\cos\angle(\vec{\xi_1},\vec{\xi_2})=\frac{\vec{\xi_1}\vec{\xi_2}}{|\vec{\xi_1}||\vec{\xi_2}|}=\frac{\vec{\xi_1}\vec{\xi_2}}{\sqrt{(\vec{\xi_1})^2}\sqrt{(\vec{\xi_2})^2}}.$$

Вычислим числитель крайне правой части последнего равенства.

$$\vec{\xi_1}\vec{\xi_2}=(\vec{r}_u\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)+\vec{r}_v\frac{dv_1}{dt}(t_1))(\vec{r}_u\frac{du_2(t)}{dt}(t_2)+\vec{r}_v\frac{dv_2}{dt}(t_2))=$$
$$=\gamma_{11}\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)\frac{du_2(t)}{dt}(t_2)+\gamma_{12}\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)\frac{dv_2}{dt}(t_2)+\gamma_{12}\frac{dv_1}{dt}(t_1)\frac{du_2(t)}{dt}(t_2)+\gamma_{22}\frac{dv_1}{dt}(t_1)\frac{dv_2}{dt}(t_2).$$

В знаменателе получим

$$\sqrt{(\vec{\xi_1})^2}=\sqrt{(\vec{r}_u\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)+\vec{r}_v\frac{dv_1}{dt}(t_1))(\vec{r}_u\frac{u_1(t)}{dt}(t_1)+\vec{r}_v\frac{dv_1}{dt}(t_1))}=$$
$$=\sqrt{\gamma_{11}(\frac{du_1(t)}{dt}(t_1))^2+2\gamma_{12}\frac{du_1(t)}{dt}(t_1)\frac{dv_1}{dt}(t_1)+\gamma_{22}(\frac{dv_1}{dt}(t_1))^2}$$

Аналогично получаем

$$\sqrt{(\vec{\xi_2})^2} = \sqrt{(\vec{r}_u\frac{du_2(t)}{dt}(t_2) + \vec{r}_v\frac{dv_2}{dt}(t_2))(\vec{r}_u\frac{du_2(t)}{dt}(t_2) + \vec{r}_v\frac{dv_2}{dt}(t_2))} =$$

$$= \sqrt{\gamma_{11}(\frac{du_2(t)}{dt}(t_2))^2 + 2\gamma_{12}\frac{du_2(t)}{dt}(t_2)\frac{dv_2}{dt}(t_2) + \gamma_{22}(\frac{dv_2}{dt}(t_2))^2}$$

Объединяя вычисления, получаем

$$\cos\angle(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}) =$$

$$= \frac{\gamma_{11}\frac{du_1}{dt}(t_1)\frac{du_2}{dt}(t_2) + \gamma_{12}\frac{du_1}{dt}(t_1)\frac{dv_2}{dt}(t_2) + \gamma_{12}\frac{dv_1}{dt}(t_1)\frac{du_2}{dt}(t_2) + \gamma_{22}\frac{dv_1}{dt}(t_1)\frac{dv_2}{dt}(t_2)}{\sqrt{\gamma_{11}(\frac{du_1}{dt}(t_1))^2 + 2\gamma_{12}\frac{du_1}{dt}(t_1)\frac{dv_1}{dt}(t_1) + \gamma_{22}(\frac{dv_1}{dt}(t_1))^2}\sqrt{\gamma_{11}(\frac{du_2}{dt}(t_2))^2 + 2\gamma_{12}\frac{du_2}{dt}(t_2)\frac{dv_2}{dt}(t_2) + \gamma_{22}(\frac{dv_2}{dt}(t_2))^2}}.$$

Пример 8.1. Найдем угол между линиями $\gamma_1 : u = t, v = t+1$ и $\gamma_2 : u = t, v = 3-t$, лежащими на эллиптическом параболоиде: $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$, $u > 0$, $v \in [0, 2\pi)$.

Находим координаты общей точки линий: $t_1 = t_2 = 1$, $u = 1, v = 2$.

Находим $\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 2u)$, $\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 0)$. Тогда $\gamma_{11} = 1 + 4u^2$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = u^2$. В точке с криволинейными координатами $(1, 2)$ получим $\gamma_{11} = 5$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = 1$.

Теперь находим $\frac{du_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{dv_1}{dt}(t_1) = 1$, $\frac{du_2}{dt}(t_2) = 1$, $\frac{dv_2}{dt}(t_2) = -1$. Подставляем все в формулу и находим $\cos\angle(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}) = \frac{2}{3}$.

Пусть F – поверхность с краем, удовлетворяющая следующим условиям

- F гомеоморфна замкнутому кругу;
- F является частью некоторой гладкой поверхности Φ;
- край F является кусочно гладкой линией.

В курсе математического анализа устанавливается, что для такой поверхности определено понятие площади. Поверхность, имеющая площадь, называется *квадрируемой*.

Если квадрируемая поверхность F задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v),\ (u, v) \in G,$$

то ее площадь вычисляется по формулам

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}dudv = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|dudv.$$

9. Топология, порожденная метрикой, ее использование для определения непрерывного отображения метрических пространств.

9.1. *Метрическим пространством* называется пара (M, ρ), где M – произвольное множество, элементы которого называются *точками*, $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ – отображение, удовлетворяющее трем свойствам:
(1) $\rho(p, q) = \rho(q, p)$;
(2) $\rho(p, q) \geq 0$ и $\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
(3) $\rho(p, q) + \rho(q, r) \geq \rho(q, r)$,
$p, q, r \in M$ – произвольные точки.

Примером метрического пространства может служить арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^n$, в котором отображение ρ задается по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2},$$

$x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ – произвольные элементы из $\mathbb{R}^n$.

Пусть (M, ρ) – метрическое пространство.

ε- окрестностью точки $p \in M$ (или *шаровой окрестностью*) называется множество $O_\varepsilon p = \{q \in M : \rho(p, q) < \varepsilon\}$. ε- окрестность точки p также называется *открытым шаром с центром в точке p и радиусом ε.*

Подмножество $U \subset M$ назовем *открытым*, если для любой точки $p \in U$ существует $\varepsilon > 0$ и $O_\varepsilon p \subset U$.

Пример 9.1. Любая шаровая окрестность является открытым множеством.

Действительно, берем любую точку шаровой окрестности, измеряем расстояние от нее до сферы, ограничивающей шар, делим это число пополам и окружаем данную точку шаровой окрестностью с этим радиусом.

Теорема 9.1. *Семейство τ определенных выше открытых множеств и пустое множество образуют топологию на M.*

Доказательство. По условию пустое множество и все M принадлежат семейству τ.

Рассмотрим произвольное семейство $\{U_\alpha\}$ открытых множеств. Докажем, что их объединение принадлежит τ. Пусть точка p принадлежит объединению данного семейства множеств. Тогда существует множество U_α, в которое входит эта точка. Так как это открытое множество, то точка p входит в него с некоторой своей окрестностью $O_\varepsilon p$. Тогда $O_\varepsilon p$ содержится и в объединении множеств семейства $\{U_\alpha\}$. Таким образом, объединение произвольного семейства множеств $\{U_\alpha\} \subset \tau$ – открыто.

Рассмотрим пару множеств U_1 и U_2 из τ. Докажем, что их пересечение является открытым множеством. Пусть $p \in U_1 \cap U_2$ – произвольная точка. Так как U_1 и U_2 – открытые множества, то существуют положительные числа ε_1 и ε_2, такие что $O_{\varepsilon_1} p \subset U_1$, $O_{\varepsilon_2} p \subset U_2$. Пусть $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда окрестность $O_\varepsilon p \subset U_1, U_2$, то есть $O_\varepsilon p \subset U_1 \cap U_2$.

Итак, все четыре условия из определения топологии выполняются, следовательно, τ является топологией на множестве M. □

Построенная топология называется *метрической топологией.* Если метрическое пространство является евклидовым пространством, то топология называется *евклидовой топологией.*

9.2. Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ, такое что для всех точек x с условием $\rho_1(x, x_0) < \delta$ следует, что $\rho_2(fx, fx_0) < \varepsilon$. Отображение $f : X \to Y$, непрерывное в каждой точке из пространства X, называется *непрерывным.*

Определение непрерывности отображения в точке x_0 может быть сформулировано эквивалентным образом в терминах шаровых окрестностей

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ f(O_\delta x_0) \subset O_\varepsilon f x_0;$$
$$\forall O_\varepsilon f x_0 \, \exists O_\delta x_0 : \ f(O_\delta x_0) \subset O_\varepsilon f x_0.$$

Замечание 9.1. В классе произвольных топологических пространств было дано определение непрерывного отображения в следующем виде: отображение $f : X \to Y$ топологических пространств (X, τ_1), (Y, τ_2) называется *непрерывным*, если

$$\forall U \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_1,$$

где $f^{-1}(U)$ – полный прообраз открытого множества U.

Так как любое метрическое пространство наделено структурой топологического пространства, для него имеет место это определение. Покажем, что оно эквивалентно определению непрерывности, данного для метрических пространств.

Пусть отображение $f : X \to Y$ метрических пространств, непрерывное в каждой точке $x_0 \in X$. Покажем, что оно будет непрерывным в смысле общего определения непрерывности для топологических пространств.

Рассмотрим произвольное открытое множество V пространства Y и обозначим через $f^{-1}(V) = U$ его полный прообраз при отображении f. Нам нужно доказать, что U открыто в метрическом пространстве X. Возьмем произвольную точку $x \in U$. Тогда $f(x) \in V$. В силу открытости V существует шаровая окрестность $Of(x)$, целиком содержащаяся в V. Тогда в силу непрерывности f в точке x получим, что существует окрестность Ox точки x, такая что $f(Ox) \subset Of(x) \subset V$. Следовательно, $Ox \subset U = f^{-1}(V)$. Таким образом, U открыто.

Обратно, пусть f непрерывно. Докажем, что оно непрерывно в каждой точке. Пусть $x \in X$ – произвольная точка. Рассмотрим произвольную шаровую окрестность $O_\varepsilon f(x)$. Это открытое множество в Y. Тогда в силу непрерывности f получим, что полный прообраз $f^{-1}(O_\varepsilon f(x))$ будет открытым множеством, содержащим точку x. В этом открытом множестве существует шаровая окрестность $O_\delta x$ точки x. Тогда $f(O_\delta x) \subset f(f^{-1}(O_\varepsilon f(x))) = O_\varepsilon f(x)$. Таким образом, получаем, что для любой шаровой окрестности $O_\varepsilon f(x)$ существует шаровая окрестность $O_\delta x$, такая что $f(O_\delta x) \subset O_\varepsilon f(x)$. Это в точности определение непрерывности отображения f в точке x.

Отображение метрических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и обратное к нему также непрерывно.

Теорема 9.2. *Отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности в классе метрических пространств.*

Доказательство. 1) Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Очевидно, что тождественное отображение id является гомеоморфизмом. Действительно, фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и возьмем произвольное положительное число ε. В качестве δ возьмем то же ε, то есть $\delta = \varepsilon$. Тогда для всех точек $x \in X$, таких что $\rho(x_0, x) < \delta = \varepsilon$ получим $\rho(id(x_0), id(x)) = \rho(x_0, x) < \delta = \varepsilon$. Таким образом, отображение id непрерывно в любой точке $x_0 \in X$, а значит является непрерывным. Обратное к тождественному также является тождественным, а значит, id является гомеоморфизмом.

Имеем $id : X \to X$. Следовательно, X гомеоморфно X. Таким образом, отображение гомеоморфности рефлексивно.

2) Пусть метрическое пространство X гомеоморфно метрическому пространству Y. Тогда существует гомеоморфизм $f : X \to Y$. Так как гомеоморфизм является биекцией, существует отображение $f^{-1} : Y \to X$. Это отображение также является гомеоморфизмом, а значит Y гомеоморфно X и отношение гомеоморфности симметрично.

3) Докажем транзитивность отношения гомеоморфности. Пусть даны три метрических пространства (X, ρ_1), (Y, ρ_2) и (Z, ρ_3). Тогда определены два гомеоморфизма $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Нужно доказать, что $g \circ f : X \to Z$ является гомеоморфизмом.

Лемма 9.1. *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывны. Тогда отображение $g \circ f : X \to Z$ также непрерывно.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и обозначим $y_0 = fx_0$. Докажем, что отображение $g \circ f : X \to Z$ непрерывно в этой точке. Нам нужно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall x \in X \, \rho_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow \rho_3(g \circ f(x_0), g \circ f(x)) < \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как отображение g непрерывно, в частности, непрерывно в точке y_0, получим, что для взятого нами ε

$$\varepsilon \, \exists \, \eta > 0 : \, \forall y \in Y \, \rho_2(y_0, y) < \eta \, \Rightarrow \rho_3(gy_0, gy) < \varepsilon.$$

Так как f непрерывно, в частности, в точке x_0, для найденной η получим

$$\eta \, \exists \, \delta > 0 : \, \forall x \in X \, \rho_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow \rho_2(fx_0, fx) \equiv \rho_2(y_0, y) < \eta.$$

Собираем вместе полученные данные.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : \rho_1(x_0, x) < \delta \, \Rightarrow \rho_2(fx_0, fx) \equiv \rho_2(y_0, y) < \eta \, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho_3(gy_0, gy) \equiv \rho_3(g \circ f(x_0), g \circ f(x)) < \varepsilon.$$

□

Продолжим доказательство теоремы. Из доказанной леммы следует, что композиция $g \circ f$ является непрерывным. Так как отображения f и g биекции, существуют непрерывные отображения f^{-1} и g^{-1}, а значит, отображение $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ непрерывно. Таким образом, получаем, что $g \circ f$ гомеоморфизм. □

10. Компактность и связность в метрических пространствах. Компактные и связные подмножества числовой прямой.

10.1. Топологическое пространство X называется *не связным*, если его можно представить в виде объединения двух непустых, открытых, непересекающихся множеств. В противном случае X называется *связным*. Другими словами, топологическое пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств. Подмножество A топологического пространства X называется *несвязным*, если оно несвязно как топологическое пространство с топологией, индуцированной пространством X.

Лемма 10.1. *Если для подмножества $X \subset \mathbb{R}$ существуют точки $a, b, c \in \mathbb{R}$, такие что $a < b < c$ и $a, c \in X$, $b \notin X$, то X несвязно.*

Доказательство. Рассмотрим два множества $O_1 = X \cap (-\infty, b)$ и $O_2 = X \cap (b, +\infty)$. Эти множества не пусты, так как $a \in O_1$, $c \in O_2$. Также они открыты в индуцированной топологии X как пересечение открытых множеств в $\mathbb{R}$ и X. Наконец, $X = O_1 \cup O_2$. Получаем, что X несвязно по определению. □

Теорема 10.1. *(критерии несвязности)*

(1) X несвязно

(2) в X существуют два непустых непересекающихся замкнутых подмножества F_1 и F_2, таких что $X = F_1 \cup F_2$.

(3) в X существуют два открыто-замкнутых непересекающихся непустых подмножества G_1 и G_2, таких что $G_1 \cup G_2 = X$.

(4) в X существует нетривиальное открыто-замкнутое подмножество.

(5) на X существует непрерывная ровно двузначная вещественная функция.

Доказательство. (4) $\Rightarrow$ (5) Обозначим через G нетривиальное открыто-замкнутое множество в X. Обозначим $H = X \setminus G$ – это непустое открыто-замкнутое множество. Определим функцию $f : X \to \mathbb{R}$ по формуле

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in G \\ 1, \ x \in H \end{cases}$$

Покажем, что эта функция непрерывна. Пусть O – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда полный прообраз $f^{-1}O$ будет одно из следующих множеств

$$f^{-1}O = \begin{cases} \emptyset, \ 0 \notin O, \ 1 \notin O \\ G, \ 0 \in O, \ 1 \notin O \\ H, \ 0 \notin O, \in O \\ X, \ 0 \in O, \ 1 \in O \end{cases}$$

Все эти множества являются открытыми в X, а значит, полный прообраз любого открытого множества в $\mathbb{R}$ открыт в X. Следовательно, отображение f непрерывное.

(5) $\Rightarrow$ (1) Пусть на пространстве X существует ровно двузначная непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть a, b – ее значения ($a < b$). Рассмотрим число $c = \frac{a+b}{2}$. Обозначим $O_1 = f^{-1}(-\infty, c)$ и $O_2 = f^{-1}(c, +\infty)$. Это непустые ($f^{-1}(a) \subset O_1$, $f^{-1}(b) \subset O_2$), открытые (как полные прообразы открытых множеств при непрерывном отображении f). Если предположить, что пересечение множеств O_1 и O_2 не пусто, то есть существует $x \in O_1 \cap O_2$, то получим, что $f(x) \in (-\infty, c) \cap (c, +\infty) =$, что противоречит определению f. Наконец, $X = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) \subset O_1 \cup O_2$. Так как $O_1, O_2 \subset X$, получим $X = O_1 \cup O_2$. Таким образом, мы показали, что пространство X несвязно. □

Будем называть *промежутками* множества (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, где a, b – вещественные числа или бесконечности. Обозначать промежутки будем $\langle a, b\rangle$.

Подмножество прямой (плоскости, пространства) называется *выпуклым*, если с любыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок с концами в этих точках.

Теорема 10.2. *Все промежутки на $\mathbb{R}$ связны.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что промежуток $\langle a, b\rangle$ несвязен. Тогда на нем существует ровно двузначная непрерывная функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Обозначим ее значения c и d ($c < d$). Тогда существуют числа $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$, такие что $f(\alpha) = c$, $f(\beta) = d$, причем $\alpha \neq \beta$. Следовательно определяется отрезок $[\alpha, \beta]$ или $[\beta, \alpha]$ (в зависимости от того какое число меньше). Обозначим этот отрезок через I. Сужение $f|_I$ будет непрерывной функцией, а значит она принимает на этом отрезке все значения между c и d. Таким образом, мы получаем противоречие с ровно двузначностью функции f. Следовательно, промежуток $\langle a, b\rangle$ является связным множеством. □

10.2. *Открытым покрытием* топологического пространства X называется семейство $\lambda = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ открытых подмножеств этого пространства, такое что $X = \cup_{\alpha\in A}U_\alpha$. Если в семействе λ существует подсемейство μ, также образующее открытое покрытие пространства X, то μ называется *подпокрытием* покрытия λ.

Открытым покрытием подмножества A топологического пространства X называется семейство λ открытых множеств из X, таких что множество A содержится в их объединении.

Топологическое пространство (подмножество топологического пространста) называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом.*

Например, пустое множество и любое конечное множество компактны.

Теорема 10.3. $\mathbb{R}$ *не компактное топологическое пространство.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда из любого открытого покрытия пространства $\mathbb{R}$ можно выделить конечное подпокрытие. Возьмем в качестве такого покрытия покрытие $\lambda = \{(a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ интервалами. В силу предположения существует подпокрытие $\mu = \{(a_i, b_i), i = 1, \ldots, n\}$. Обозначим $\alpha = min\{a_i\}$, $\beta = max\{b_j\}$. Тогда объединение интервалов из подпокрытия μ будет содержаться в интервале (α, β), а значит не будет покрытием всей прямой $\mathbb{R}$. Таким образом, мы получаем, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ является не компактной. □

Компактом называется компактное хаусдорфово топологическое пространство.

Теорема 10.4. *Любой метрический компакт ограничен.*

Доказательство. Пусть X – метрическое, хаусдорфово, компактное топологическое пространство. Рассмотрим его открытое покрытие $\lambda = \{O_1x, x \in X\}$ шаровыми окрестностями единичного радиуса. Так как X компактно, в нем существует конечное подпокрытие $\mu = \{O_1x_1, \ldots, O_1x_n\}$. Обозначим через $c = max\rho(x_i, x_j)$ для точек $x_1, \ldots, x_n$ и положим $C = c + 2$.

Пусть $x, y \in X$ – произвольные точки. Тогда существуют индексы i и j, такие что $x \in O_1x_i$, $y \in O_1x_j$. Имеем

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_j) + \rho(x_j, y) < 1 + c + 1 = C.$$

Таким образом, множество X находится в шаре радиуса C, а значит, ограничено. □

Следствие 10.1. *Любое компактное подмножество в $\mathbb{R}$ содержится в некотором отрезке $[a, b]$.*

Теорема 10.5. *Отрезок $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ компактен.*

Доказательство. Пусть λ – произвольное открытое покрытие отрезка $I = [a, b]$.

Подмножество $A \subset I$ назовем *не конечно покрываемым* (короче, НКП), если для любой конечной подсистемы $\mu = \{\mu_i\}$ покрытия λ имеем $A \not\subset \cup\mu_i$.

Предположим, что отрезок I не компактен, то есть НКП. Тогда НКП является хотя бы одна из его половинок. Обозначим через $I_1 = [a_1, b_1]$, где a_1 и b_1 – либо точки a и $\frac{a+b}{2}$, либо $\frac{a+b}{2}$ и b, который не является НКП. Продолжая этот процесс дальше, получим для любого $n \in \mathbb{N}$ НКП отрезок $I_n = [a_n, b_n]$, причем $I \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ и длина этих отрезков $\frac{b-a}{2^n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Мы получаем систему вложенных отрезков. Тогда существует точка ξ, такая что $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\xi\}$. Точка ξ принадлежит исходному отрезку I, а значит, попадает в некоторый элемент O покрытия λ. Так как O – открытое множество, существует шаровая окрестность $O_\varepsilon\xi \subset O$. Также существует натуральное число n_0, такое что длина отрезка I_{n_0} будет удовлетворять неравенству $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Тогда $I_{n_0} \subset O_\varepsilon\xi \subset O$. Таким образом, получаем, что НКП отрезок I_{n_0} содержится в одном элементе покрытия λ, а значит, он конечно покрываем. Полученное противоречие показывает, что I не является НКП, а значит, компактен. □

Лемма 10.2. *Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset X$ – компактно. Тогда для любого элемента $x \in X \setminus A$ существует открытая окрестность Ox и открытая окрестность $O^x A$ множества A (которая зависит от выбора элемента x), такие что $Ox \cap O^x A = \emptyset$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in X \setminus A$. Так как X хаусдорфово и точки x и y различны, существуют окрестность Oy точки y и окрестность $O^y x$ точки x (окрестность точки x меняется в зависимости от выбора точки y), такие что $O^y x \cap Oy = \emptyset$. Тогда $A \subset \cup\{Oy, y \in A\}$. Рассмотрим открытое покрытие $\lambda = \{A \cap Oy, y \in A\}$. Так как A компактно, существует конечное подпокрытие $\mu = \{A \cap Oy_i, i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $A = \cup_{i=1}^n (A \cap Oy_i) \subset \cup_{i=1}^n Oy_i \equiv O^x A$ – требуемая окрестность множества A (открытое множество, содержащее A). Обозначим $Ox = \cap_{i=1}^n O^{y_i} x$. Имеем

$$O^x A \cap Ox = (\cup_{i=1}^n Oy_i) \cap Ox = \cup_{i=1}^n (Oy_i \cap Ox) \subset \cup_{i=1}^n (Oy_i \cap O^{y_i} x) = \emptyset.$$

□

Теорема 10.6. *Если подмножество A хаусдорфова топологического пространства X компактно, то A замкнуто в X.*

Доказательство. Покажем, что дополнение A в X, то есть множество $X \setminus A$, открыто в X. Тогда по определению получим, что A замкнуто.

По доказанной лемме для любой точки $x \in X \setminus A$ существуют непересекающиеся окрестности Ox и $O^x A$. Тогда окрестность Ox не пересекается и с множеством A, а значит, целиком лежит в множестве $X \setminus A$. Тогда $X \setminus A = \cup_{x \in X \setminus A} Ox$, а значит, открыто в X. □

Из теорем 10.4 и 10.6 следует необходимость в следующей теореме. Доказательство достаточности мы опускаем.

Теорема 10.7. *Подмножество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*