Программа зачета по курсу Многомерная дифференциальная геометрия для студентов 1 года магистратуры (Геометрия и Топология) (весенняя сессия 2013/14 уч. год.)

1 мая 2014 г.

Задание на зачете состоит из трех пунктов: 1) Доказать утверждение (список утверждений приведен ниже), 2) Решить задачу (список задач приведен ниже), 3) Беседа по определениям (все понятия, используемые в утверждениях и задачах).

Утверждения для доказательства.

1. Обозначим векторные поля натурального базиса через e_i, а 1-формы дуального базиса через e^i. Докажите, что система тензорных полей $(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s})$ является базисом модуля тензорных полей типа (r, s).

2. Докажите критерии кососимметричного и симметричного тензорного поля.

3. Проекторы альтернирования и симметризации. Доказательство корректности определения (проверить определение проектора и доказать, что образы этих проекторов суть модуль r-форм и симметричных тензорных полей соответственно).

4. Операция внешнего умножения форм. Свойства (дистрибутивность, ассоциативность со вспомогательными леммами).

5. Операция внешнего умножения форм. Свойства (Докажите, что для r-формы ω и s-формы θ имеет место равенство $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs}\theta \wedge \omega$).

6. Риманова и псевдо-риманова структуры. Контравариантный метрический тензор. Операция поднятия и опускания индексов. Докажите, что риманова структура является псевдо-римановой.

7. Сформулируйте и докажите основную теорему римановой геометрии.

8. Символы Кристоффеля римановой связности. Выразите символы Кристоффеля через компоненты римановой метрики.

9. Запишите тождество $X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ в компонентах.

10. Докажите, что контравариантное метрическое тензорное поле является ковариантно постоянным в римановой связности.

11. Тензор Римана-Кристоффеля и его свойства симметрии.

12. Тензоры Бианки, Риччи, скалярная кривизна. Примеры тензоров Бианки. Докажите, что тензор Риччи любого тензора Бианки симметричен.

13. Отображение Ric. Докажите его несюръективность при $n = 2$ и сюръективность при $n \geq 3$.

14. Тензоры Эйнштейна и Вейля. Докажите, что при $n = 3$ любой тензор Бианки является тензором Вейля.

15. Конформные преобразования риманова многообразия. Тензор Вейля конформной кривизны как конформный инвариант.

16. Операция внешнего дифференцирования. Свойства.

17. Дифференциал гладкого отображения (вектор как инфинитазимальное дифференцирование). Свойства. Формула для вычисления в картах.

18. Дифференциал гладкого отображения (вектор как класс эквивалентных путей). Доказать эквивалентность с определением из предыдущего пункта. Увлечение и антиувлечение тензоров.

19. ϕ-связанные векторные поля. Критерий. Отображение увлечения. Свойства.

20. Отображение антиувлечения r-форм. Свойства.

21. Распределения и корасределения на гладком многообразии. Ассоциированное корасределение и его свойства.

22. Инволютивность. Критерий инволютивности. Интегрируемость.

23. Интегральная кривая векторного поля. Локальные потоки на многообразиях и их свойства.

24. Дифференцирование Ли. Свойства. Некоторые производные Ли тензорных полей почти контактной метрической структуры.

Задачи.

1. Выразите компоненты тензорного поля $Sym\, t$ через компоненты тензорного поля t типа (0,3).

2. Докажите, что для 1-форм ω и θ имеет место формула $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$.

3. Докажите, что компоненты 2-формы совпадают с ее координатами в каноническом базисе 2-форм.

4. Докажите, что компоненты 3-формы совпадают с ее координатами в каноническом базисе 3-форм.

5. Докажите, что для почти эрмитовой структуры $g(X, JY) + g(JX, Y) = 0$.

6. Докажите, что для почти эрмитовой структуры (J, g) и римановой связности метрики g верно тождество $g(\nabla_X(J)(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(J)Z) = 0$.

7. Запишите тождество $g(\nabla_X(J)(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(J)Z) = 0$ в компонентах ковариантного дифференциала.

8. Докажите, что для почти контактной метрической структуры (Φ, η, ξ, g) имеет место тождество $\eta(X) = g(\xi, X)$.

9. Примените оператор ∇_X к условию $g(\Phi Y, \Phi Z) = g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)$ для почти контактной метрической структуры.

10. Запишите тождество $g(\nabla_X(\Phi)Y, \Phi Z) + g(\Phi Y, \nabla_X(\Phi)Z) = -(\nabla_X(\eta)Y)\eta(Z) - \eta(Y)\nabla_X(\eta)Z$ в компонентах ковариантных дифференциалов.

11. Выразите тензор Нейенхейса $N(X, Y) = \frac{1}{4}(-[X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ через ковариантную производную J в римановой связности.

12. Запишите в компонентах ковариантного дифференциала тождество $N(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X + \nabla_X(J)(JY) - \nabla_Y(J)(JX))$.

13. Докажите, что $\tilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y$, где $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, ∇ – риманова связность метрики g, $T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX$.

14. Пусть $T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX$. Выразите $\nabla_X(T)(Y, Z)$ через ковариантные производные J и ψ в римановой связности метрики g.

15. Докажите, что для почти контактной метрической структуры $g(\Phi X, Y) + g(X, \Phi Y) = 0$.

16. Докажите, что для почти контактной метрической структуры $g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$. Выведите из этого, что $\nabla_X(\eta)\xi = 0$.

17. Выразите через ковариантные производные эндоморфизма Φ отображение $N(X, Y) = \frac{1}{4}(\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y])$.

18. Докажите, что для 1-формы ω имеет место равенство $d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X$.

19. Выразите компоненты $d\omega$ через компоненты ω в натуральном базисе карты (ω – 1-форма).

20. Докажите, что для 2-формы Ω имеет место равенство $d\Omega(X, Y, Z) = \nabla_X(\Omega)(Y, Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z, X) + \nabla_Z(\Omega)(X, Y)$.

21. Выразите компоненты 3-формы $d\Omega$ через компоненты Ω.

22. Докажите, что $(\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \varepsilon_i$ и выведите из этого, что $(\varphi_*)_p = r_\varphi$.