Программа зачета по курсу Топология для студентов 7 группы 2 курса (2013/14 уч. год.)

6 декабря 2013 г.

Зачет состоит из 4 частей: Метрические пространства; Топологические пространства и различные виды точек в топологических пространствах; Связность топологических пространств; Компактность в топологических пространствах.

Каждая из четырех частей соответствует проверочной работе. Если проверочная работа засчитана (получен плюс), то соответствующая часть материала снимается с зачета.

Отчет по каждой части содержит 3 задания: 1) решить задачу (аналогичную приведенным ниже); 2) доказать утверждение (одно из приведенных ниже); 3) беседа по определениям понятий, которые встречаются в данной части (нужно уметь сформулировать определение, привести пример понятия, задаваемого определением, уметь определить, подходит ли предъявляемый пример под данное определение). Часть считается сданной, если задача решена хотя бы на 50 процентов, утверждение доказано хотя бы на 50 процентов и даны правильные ответы хотя бы по 3 определениям из 5.

Определения: метрическое пространство, каноническая метрика в $\mathbb{R}^n$, тривиальная метрика, метрическое подпространство, полный прообраз точки, полный прообраз множества, гомеоморфизм метрических пространств, открытый шар в метрическом пространстве, замкнутый шар в метрическом пространстве, сфера в метрическом пространстве, открытое множество в метрическом пространстве, непрерывное в точке отображение метрических пространств, непрерывное отображение метрических пространств, топология, дискретная топология, антидискретная топология, метрическая топология, топология Зариского, топологическое пространство, открытая окрестность множества, база топологии, непрерывное отображение топологических пространств, хаусдорфово топологическое пространство, гомеоморфизм топологических пространств, открытое множество топологического пространства, замкнутое множество топологического пространства, внутренняя точка множества, точка прикосновения множества, граничная точка множества, внутренность, замыкание, граница, несвязное топологическое пространство (подмножество), связное топологическое пространство (подмножество), открытое покрытие топологического пространства (подмножества), компактное топологическое пространство (подмножество).

Утверждения для доказательства.

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского.
2. Докажите неравенство Минковского.
3. Докажите, что для отображения $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2}$ удовлетворяет третьему условию метрического пространства.
4. Докажите, что если $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.
5. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.
6. Докажите, что отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности.
7. Докажите, что открытые шары в метрических пространствах являются открытыми множествами.
8. Докажите, что пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.
9. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.
10. Докажите, что если отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого в Y множества его полный прообраз открыт в X.
11. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств (X, τ_X) и (Y, τ_Y) является непрерывным тогда и только тогда, когда для любого множества V из базы топологии τ_Y его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит топологии τ_X.

12. Докажите, что интервал (топология индуцирована естественной топологией прямой) гомеоморфен прямой $\mathbb{R}$ (естественная топология).

13. Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

14. Докажите, что для любого множества $A \subset X$ топологического пространства X имеет место равенство $\partial A = cl\, A \setminus int\, A$.

15. Доказать, что если для подмножества $A \subset \mathbb{R}$ существуют точки $a, b, c \in \mathbb{R}$, такие что $a < b < c$ и $a, c \in A$, $b \notin A$, то A несвязно.

16. Докажите, что если X несвязно, то существует непрерывная ровно двузначная вещественная функция на X.

17. Докажите, что все промежутки на $\mathbb{R}$ связны.

18. Докажите, что прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией не компактное топологическое пространство.

19. Докажите, что отрезок прямой $[a, b]$ на $\mathbb{R}$ с естественной топологией компактен.

20. Докажите, что замкнутое подмножество компактного пространства является компактным.

21. Пусть X – компактное топологическое пространство, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Докажите, что $f(X)$ – компактное подмножество в топологическом пространстве Y.

Задачи.

1. Найдите такое метрическое пространство и два шара в нем, чтобы шар большего радиуса содержался в шаре меньшего радиуса.

2. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрическим вложением*, если $\rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_X(a, b)$ для любых $a, b \in X$. Биекция, являющаяся изометрическим вложением, называется *изометрией*. Докажите, что изометрия является гомеоморфизмом метрических пространств.

3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой, $Y = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой. Будет ли гомотетия непрерывным отображением?

4. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $a, x \in X$ и любого числа r, для которого $r < \rho(x, a)$ имеем $B_{\rho(x,a)-r}(x) \cap B_r(a) = \emptyset$.

5. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой и $Y = \mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho(A, B) = max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$. Будет ли параллельный перенос непрерывным отображением?

6. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой, $Y = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Будет ли гомотетия непрерывным отображением?

7. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой, $Y = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Будет ли параллельный перенос непрерывным отображением?

8. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$, где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Изобразите замкнутый шар с центром в точке $Q(3, -3)$ радиуса 1. Изобразите точку, находящуюся на расстоянии $\frac{1}{2}$ от точки Q.

9. Докажите, что параллельный перенос на плоскости $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой является непрерывным отображением.

10. Пусть $X = \mathbb{R}^2$,$Y = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Будет ли гомотетия непрерывным отображением?

11. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $a, x \in X$ и любого числа r, для которого $r > \rho(x, a)$ имеет место включение $B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a)$.

12. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ метрика задана формулой $\rho(A, B) = max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$, где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Будет ли параллельный перенос непрерывным отображением? Ответ обосновать.

13. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что тождественное отображение $id : X \to X$ является непрерывным.

14. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана тривиальная метрика. Изобразите открытый шар с центром в точке $Q(1, 1)$ радиуса 6.

15. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Будут ли следующие множества топологиями: 1) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$; 2) $\{\emptyset, X, \{a\}\}$?

16. Пусть $X = \Omega \setminus \{N\}$ – окружность с выколотой точкой и топологией, индуцированной естественной топологией плоскости, Y – прямая с естественной топологией, касающаяся окружности Ω в точке S, причем N и S – диаметрально противоположные точки. Зададим отображение $f : X \to Y$ следующим образом: каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие точку пересечения прямой Y и прямой NM. Докажите, что отображение f непрерывно.

17. Будет ли топология Зариского на прямой $\mathbb{R}$ хаусдорфовой?

18. Приведите пример множества открытого в топологическом подпространстве и не являющегося ни открытым, ни замкнутым в объемлющем топологическом пространстве.

19. Найдите внутренность интервала $(0, 1)$ в топологии Зариского. Являются ли связным пространство с антидискретной топологией? Ответ обосновать.

20. Являются ли связным пространство с дискретной топологией? Ответ обосновать.

21. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связным на прямой $\mathbb{R}$ (с естественной топологией)? Ответ обосновать.

22. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связным на прямой $\mathbb{R}$ (с топологией Зариского)? Ответ обосновать.

23. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связным на прямой $\mathbb{R}$ (с дискретной топологией)? Ответ обосновать.

24. Компактна ли прямая $\mathbb{R}$ с антидискретной топологией? Ответ обосновать.

25. Компактна ли прямая $\mathbb{R}$ с дискретной топологией? Ответ обосновать.

26. Компактна ли прямая $\mathbb{R}$ с топологией Зариского? Ответ обосновать.

27. Компактно ли множество $[1, 2)$ в $\mathbb{R}$ с естественной топологией? Ответ обосновать.

28. Компактно ли множество $[1, 2)$ в стрелке? Ответ обосновать.

29. Компактно ли множество $[1, 2)$ в $\mathbb{R}$ с топологией Зариского? Ответ обосновать.