Топология (магистратура).

18 января 2015 г.

1. Ю.Г. Борисович, Н.М.Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко Введение в топологию. (2-е издание)Москва, Наука, Физматлит, 1995.

2. В.А. Васильев Введение в топологию. Москва, Фазис, 1997.

3.О.Я.Виро, О.А.Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М.Харламов Элементарная топология, Москва, МЦНМО, 2010.

4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы теории гомологий, Москва, Наука, 1984.

5. И.А.Антипова, Н.А.Бушуева, А.К.Цих Лекции по курсу Кратное интегрирование. Гомологии. Красноярск, 2007.

6. В.В.Прасолов Элементы теории гомологий. Москва, МЦНМО, 2006.

Глава 1. Общая топология.

Курс общей топологии входит в программу бакалавриата. В настоящем курсе мы напомним основные понятия, введенные в курсе топологии бакалавриата, и дополним их новыми фактами и конструкциями.

§1.1. Топологическое пространство и гомеоморфизмы.

1. Пусть X – непустое множество произвольной природы. Обозначим τ семейство подмножеств множества X. Семейство τ называется *топологией* (или *топологической структурой*) на множестве X, если выполняются условия

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.

(2) для любого семейства подмножеств из τ их объединение также принадлежит τ.

(3) пересечение двух (а значит, и любого конечного) семейства множеств из τ принадлежит τ.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством.* Если из контекста понятно, какая топология задана на множестве X, то также говорят о топологическом пространстве X.

Множества семейства τ называются *открытыми.* Любое открытое множество, содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* точки x.

Дополнения открытых множеств в X, то есть множества вида $X \setminus U$, где $U \in \tau$, называются *замкнутыми. Замыканием* множества $A \subset X$ называется наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

Пример 1.1. Пусть X – произвольное множество. Обозначим $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, τ_2 – множество всех подмножеств множества X. Семейства τ_1 и τ_2 являются топологиями. Топология τ_1 называется *антидискретной топологией*, а τ_2 называется *дискретной топологией.*

В антидискретной топологии открытыми являются только множества $\emptyset$ и X. Они же являются замкнутыми. Остальные подмножества в X при этой топологии не являются ни открытыми, ни замкнутыми.

В дискретной топологии любое подмножество множества X является открытым и замкнутым одновременно.

Пример 1.2. Еще один пример топологии – *метрическая топология.* Напомним, что *метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X – непустое множество произвольной природы, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ – отображение, удовлетворяющее свойствам

(1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (правило треугольника).

Отображение ρ называется *метрикой.* Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками.

Пример 1.3. Зададим отображение ρ следующим образом:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Легко видеть, что это отображение удовлетворяет условиям (1)−−(3), следовательно, является метрикой. Она называется *тривиальной метрикой.*

Назовем *открытым шаром* радиуса $r \in \mathbb{R}^+$ с центром в точке $x_0 \in X$ в метрическом пространстве (X, ρ) множество

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}.$$

С помощью открытых шаров введем семейство τ следующим образом: подмножество U из X будет принадлежать τ, если с каждой своей точкой множество U содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке. Непосредственно проверяется (проверьте самостоятельно), что семейство τ является топологией. Эта топология называется *метрической топологией.* Метрическая топология на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}$ называется *евклидовой топологией.* Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой топологией будем называть *евклидовым пространством.*

Задача 1.1. Докажите, что открытые шары являются открытыми множествами в метрической топологии, то есть принадлежат τ.

Замкнутым шаром называется множество

$$\bar{B}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

Сферой называется множество

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\},$$

где $r > 0$, x_0 – произвольная точка метрического пространства.

Для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать открытый шар, замкнутый шар и сферу еще и таким образом: B^n, $\bar{B}^n$, S^{n-1}. Для плоскости $\mathbb{R}^2$ вводятся привычные термины B^2 – открытый круг, $\bar{B}^2$ – замкнутый круг, S^1 – окружность. Легко видеть, что эти объекты не просто называются привычными нам терминам, а действительно ими являются.

Пример 1.4. Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$. Обозначим $U_{k_1 \ldots k_N}$ множество всех вещественных чисел за исключением чисел $k_1, \ldots, k_N$, где N – не фиксированное натуральное число. Другими словами,

$$U_{k_1 \ldots k_N} = \mathbb{R} \setminus \{k_1, \ldots, k_N\},$$

то есть из прямой $\mathbb{R}$ выкидываем конечное семейство вещественных чисел.

Нетрудно видеть, что семейство $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, U_{k_1 \ldots k_N}\}$ для всевозможных наборов $k_1, \ldots, k_N$ является топологией. Эта топология называется *топологией Зариского.*

Говорят, что топология τ на множестве X *слабее* (*грубее*) топологии τ' на X, если из того, что $U \in \tau$ следует, что $U \in \tau'$. При этом пишут $\tau \prec \tau'$. В этом случае топология τ' называется *сильнее* (*тоньше*) топологии τ.

Очевидно, что самая слабая топология – антидискретная, а самая сильная топология – дискретная. Любая другая топология сильнее антидискретной и слабее дискретной.

Существуют несравнимые топологии. Две топологии несравнимы тогда и только тогда, когда каждая из них содержит лишь часть множеств, принадлежащих другой.

Задача 1.2. Приведите пример несравнимых топологий на двухточечном множестве.

Покажите, что топология $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a], (a, +\infty)\}$ не сравнима с евклидовой топологией прямой.

Будут ли сравнимыми естественная топология и топология Зариского на прямой $\mathbb{R}$.

Замечание 1.1. Топологию на множестве можно задавать, перечисляя множества, которые будут называться замкнутыми, а затем определять открытые множества как дополнения к замкнутым. Другими словами, *топологией* на множестве X будем называть семейство τ подмножеств множества X, если выполняются условия

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.

(2) для любого семейства подмножеств из τ их пересечение также принадлежит τ.

(3) объединение двух (а значит, и любого конечного) семейства множеств из τ принадлежит τ.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*, а множества семейства τ называются *замкнутыми.* Множества, дополнения которых являются замкнутыми, называются *открытыми.*

Нетрудно доказать эквивалентность обоих определений топологии.

2. Топологию на множестве не удобно задавать перечисляя все множества, принадлежащие ей, так как в общем случае их очень много. Гораздо проще задать подсемейство множеств $\mathscr{B}$ из топологии так, чтобы остальные множества топологии получались как объединения множеств из $\mathscr{B}$. Подсемейство $\mathscr{B}$ называется *базой топологии.*

Пример 1.5. Семейство всевозможных интервалов прямой $\mathbb{R}$ является базой евклидовой топологии на прямой.

Эту базу можно уменьшить, взяв только интервалы с рациональными концами. Оказывается из этой базы можно выкинуть любой интервал и мы опять получим базу метрической топологии на прямой. Действительно, пусть $I = (a, b)$ – интервал с рациональными концами, принадлежащий базе евклидовой топологии прямой. Очевидно, что его можно представить как объединение трех интервалов

$$(a, b) = (a, \frac{a+b}{2}) \cup (\frac{a+b}{2}, b) \cup (\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}).$$

Каждый из интервалов является открытым множеством, а значит его можно представить в виде объединения элементов I_α базы. При этом так как все три полученных интервала содержатся в I, то среди элементов I_α интервала I не будет. Тогда сам интервал I представим в виде объединения элементов базы, каждый из которых отличен от I. Следовательно, удалив интервал I из семейства интервалов базы, мы снова получим базу.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что любую базу евклидовой топологии прямой $\mathbb{R}$ можно уменьшить, выбросив любое конечное число ее элементов.

Существуют топологии, у которых есть базы, содержащие наименьшее число элементов. Например, дискретная топология. Наименьшей базой (то есть базой, состоящей из наименьшего числа элементов) является семейство всех одноточечных множеств.

Пример 1.6. На плоскости $\mathbb{R}^2$ в качестве базы евклидовой топологии можно взять всевозможные открытые круги. Эту базу можно уменьшить, взяв круги рациональных радиусов с центрами в рациональных точках (то есть центр круга – пара рациональных чисел). Также в качестве базы метрической топологии на плоскости можно взять семейство открытых квадратов.

Как мы видим одна и та же топология может иметь различные базы.

Докажем критерий для базы топологии. Его часто берут в качестве определения.

Теорема 1.1. *Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Тогда подмножество $\mathscr{B}$ из τ является базой тогда и только тогда, когда для любого множества $U \in \tau$ и любой точки $x \in U$ найдется множество $V \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V \subset U$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ является базой топологии τ. Рассмотрим произвольное множество $U \in \tau$ и произвольную точку $x \in U$. Так как по определению базы любое открытое множество является объединением множеств из базы, найдется множество $V \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V$ и $V \subset U$.

Обратно, рассмотрим произвольное множество $U \in \tau$. Тогда для любой его точки x существует множество $V \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V \subset U$. Таким множествами V можно окружить любую точку множества U, следовательно, U является объединением множеств из $\mathscr{B}$. По определению получаем, что $\mathscr{B}$ – база. □

Пусть X – произвольное множество (топологическое пространство). Семейство $\{V_\alpha\}$ его (открытых) подмножеств называется *(открытым) покрытием* X, если $X = \cup_\alpha V_\alpha$. Возникает вопрос: любое ли покрытие является базой некоторой топологии на множестве X?

Теорема 1.2. *Пусть $\mathscr{B} = \{V_\alpha\}$ – покрытие множества X. Семейство $\mathscr{B}$ будет базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда для любых $V_\alpha, V_\beta \in \mathscr{B}$ и каждого $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ существует $V_\gamma \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ – база некоторой топологии на X. Тогда произвольные множества V_α и V_β из $\mathscr{B}$ будут открытыми в этой топологии. Их пересечение также открытое множество. Пусть $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ – произвольная точка. Тогда по теореме 1.1 существует множество $V_\gamma \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

Обратно, легко видеть, что совокупность множеств U, являющихся всевозможными объединениями множеств V_α, и пустое множество образуют топологию. Обозначим ее τ. Первые два условия из определения топологии проверьте самостоятельно, а мы проверим третье. Пусть U_1, U_2 – произвольные множества из τ. Тогда

$$U_1 \cap U_2 = (\cup V_\alpha) \cap (\cup V_\beta) = \cup(V_\alpha \cap V_\beta).$$

Для каждой точки $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ существует $V_\gamma \in \mathscr{B}$, такое что $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$, а значит, множество $V_\alpha \cap V_\beta$ имеет вид $\cup V_\gamma$. Тогда $U_1 \cap U_2 = \cup V_\gamma \in \tau$. □

Следствие 1.1. Пусть $\mathscr{B} = \{V_\alpha\}$ – открытое покрытие топологического пространства (X, τ). Если $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии, то эта топология совпадает с τ.

В доказанной теореме мы указали способ построения топологии, если покрытие $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию теоремы. Выясним, можно ли (и если да, то как) построить топологию по покрытию, не удовлетворяющему условию теоремы 1.2.

Теорема 1.3. *Произвольное покрытие $\{S_\alpha\}$ множества X естественно порождает топологию на X, а именно совокупность множеств $\{V = \cap_{\alpha \in K} S_\alpha\}$, где K – произвольное конечное подмножество индексов α, является базой этой топологии.*

Доказательство. Проверим, что совокупность $\{V\}$ удовлетворяет критерию базы. Очевидно, что для любых двух элементов из $\{V\}$ их пересечение будет иметь тот же вид, то есть принадлежать $\{V\}$. Таким образом, критерий базы выполняется. □

Итак, покрытие $\{S_\alpha\}$ множества X определяет на X топологию τ, открытыми множествами которой являются всевозможные объединения $\cup(\cap_{\alpha \in K} S_\alpha)$ и пустое множество. Покрытие $\{S_\alpha\}$ называется *предбазой* топологии τ.

Задачи.

1. Могут ли разные топологии иметь одну и ту же базу?
2. Приведите примеры баз дискретного и антидискретного пространства.
3. Может ли множество всех интервалов с целыми концами быть базой метрической топологии на прямой?
4. Покажите, что система открытых кругов и система открытых квадратов на плоскости порождают одну и ту же топологию.
5. Опишите топологию на прямой $\mathbb{R}^1$, предбазой которой являются все бесконечные интервалы вида (∞, b) и (a, ∞), $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Опишите топологию на прямой $\mathbb{R}^1$, предбазой которой являются все бесконечные интервалы (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$.

3. Напомним понятие полного прообраза множества. Пусть X, Y – произвольные множества (не обязательно топологические пространства). Рассмотрим отображение $f : X \to Y$. *Полным прообразом точки* $y \in Y$ называется множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Другими словами, полный прообраз точки y из множества Y – это множество всех элементов $x \in X$, которые отображаются в y при отображении f. *Полным прообразом множества* $A \subset Y$ называется множество

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{y \in A} f^{-1}(y).$$

Другими словами, полный прообраз множества $A \subset Y$ – это объединение полных прообразом точек множества A.

Например, рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, заданное формулой $f(x) = x^2$. Это хорошо знакомая со школы парабола. Тогда $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

Задача 1.3. Докажите, что для любого отображения $f : X \to Y$ произвольных множеств X и Y и любых подмножеств $A_\alpha, A, B \subset Y$ имеют место равенства

$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in C} f^{-1}(A_\alpha); \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); \quad f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств (X, τ_X) и (Y, τ_Y) называется *непрерывным*, если полный прообраз любого открытого в Y множества открыт в X. Другими словами, $f : X \to Y$ непрерывное отображение, если для любого $V \in \tau_Y$ имеем $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Пример 1.7. Пусть X – произвольное топологическое пространство, Y – топологическое пространство с антидискретной топологией. Докажем, что любое отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

Действительно, в антидискретной топологии всего два открытых множества – $\emptyset$ и Y. Очевидно, что $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$. Эти множества открыты в X по определению топологии. Следовательно, f непрерывно по определению.

Пример 1.8. Пусть X – топологическое пространство с дискретной топологией, Y – произвольное топологическое пространство. Покажем, что любое отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

Действительно, в дискретной топологии все множества открыты. Тогда для любого множества V, открытого в Y, его полный прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ всегда открыто в X. Следовательно отображение f непрерывно.

Пример 1.9. (еще один пример топологии)

Пусть (Y, τ_Y) – топологическое пространство, $X \subset Y$ – произвольное подмножество топологического пространства Y. На множестве X можно ввести топологию τ_X так, чтобы отображение вложения $in : X \to Y$ ($x \in X \to x \in Y$) было непрерывным. Множество τ_X будет состоять из всевозможных пересечений $X \cap V$, где $V \subset Y$ – открытое множество. Такая топология называется *индуцированной топологией.*

Эту конструкцию можно обобщить. Пусть X – произвольное множество, (Y, τ_Y) – топологическое пространство и $f : X \to Y$ – произвольное отображение X в Y. Тогда в качестве τ_X возьмем всевозможные множества вида $f^{-1}(V)$, где V – открытые множества в Y.

Задача 1.4. Докажите, что построенное множество τ_X является топологией.

Топология τ_X называется *индуцированной отображением f топологией.* Она хороша тем, что отображение f в этой топологии автоматически становится непрерывным. Это самая слабая (она содержит меньше всего множеств) из всех возможных топологий пространства X, для которых отображение f будет непрерывным.

Задача 1.5. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, A – произвольное подмножество в X. Докажите, что множество $F \subset A$ будет замкнутым в индуцированной топологии на A тогда и только тогда, когда $F = A \cap P$, где P – некоторое замкнутое множество в X.

Решение. Пусть F – произвольное замкнутое множество в A (топология индуцирована топологией τ объемлющего пространства X). По определению замкнутого множества множество $A \setminus F$ является открытым в A, то есть представимо в виде $A \setminus F = A \cap U$, где U – некоторое открытое множество в X. Отметим, что так как $F \subset A$, имеем $F \cap U = \emptyset$.

Нам нужно представить множество F в виде $P \cap A$, где P – замкнутое множество в X. Положим $P = X \setminus U$. Оно замкнуто в X по определению замкнутого множества. Убедимся, что $F = P \cap A$.

$$P \cap A = (X \setminus U) \cap ((A \cap U) \cup F) = ((X \setminus U) \cap (A \cap U)) \cup ((X \setminus U) \cap F) = \emptyset \cup (X \cap F).$$

Для последнего равенства в цепочке мы использовали, что $F \cap U = \emptyset$.

Обратно, пусть $F = A \cap P$, где P – замкнуто в X (то есть существует U –открытое в X, такое что $P = X \setminus U$). Нам нужно доказать, что F замкнуто в A, то есть что $A \setminus F$ – открыто. Имеем

$$A \setminus F = A \setminus (A \cap P) = A \setminus (A \cap (X \setminus U)) = A \setminus (X \cap (A \setminus (U \cap A))) = A \setminus (A \setminus (U \cap A)) = U \cap A.$$

По определению индуцированной топологии мы получаем, что $A \setminus F = U \cap A$ открыто в A, а значит, F – замкнуто в A. □

Пример 1.10. Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное евклидово пространство. Его можно изобразить как плоскость, если взять в ней какую-либо систему координат, например, прямоугольную декартову. Тогда окружность S^1 и квадрат Φ будут топологическими пространствами с индуцированной топологией.

Задача 1.6. Опишите открытые множества индуцированной топологии на окружности и квадрате. Приведите примеры баз этих топологий.

Пример 1.11. Пусть окружность S^1 отображается в восьмерку плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим это отображение через f. Опишите топологию S^1, индуцированную отображением f. Будет ли эта топология совпадать с топологией окружности из примера 1.10.

Задача 1.7. Пусть A – открытое множество в топологическом пространстве X. Тогда открытое множество в A (с индуцированной топологией) открыто в X. Доказать.

Решение. Пусть $V \subset A$ – произвольное открытое множество. Тогда по определению индуцированной топологии существует открытое в X множество U, такое что $V = A \cap U$. Так как множества A и U открыты в X, их пересечение также открыто в X по определению топологии. □

Задача 1.8. Пусть A – замкнутое множество в X. Тогда замкнутые в A множества замкнуты в X. Доказать.

Решение. Пусть $F \subset A$ – произвольное замкнутое множество. Тогда множество $A \setminus F$ открыто в A. По определению индуцированной топологии получаем, что существует множество U, открытое в X, такое что $A \setminus F = U \cap A$. По определению операций с множествами получим

$$X \setminus F = (X \setminus A) \cup (A \setminus F) = (X \setminus A) \cup (U \cap A) = (X \setminus A \cup U) \cap (X \setminus A \cup A) = (X \setminus A) \cup U.$$

Так как $X \setminus A$ и U открыты в X, открыто в X и их объединение. □

Рассмотрим несколько критериев непрерывности отображений.

Теорема 1.4. *(критерий непрерывности в терминах замкнутых множеств)*

Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F из Y его полный прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X.

Доказательство. Пусть f – непрерывное отображение. Рассмотрим произвольное множество F, замкнутое в Y, то есть $Y \setminus F$ открыто в Y. Тогда в силу задачи 1.3 получим $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$. Так как отображение f непрерывно, множество $f^{-1}(Y \setminus F)$ открыто в X, следовательно, открыто и множество $X \setminus f^{-1}(F)$. Тогда $f^{-1}(F)$ замкнуто по определению.

Обратно, пусть полный прообраз любого замкнутого в Y множества замкнут в X.

Рассмотрим произвольное множество V открытое в Y. Тогда $Y \setminus V$ является замкнутым множеством в Y. Следовательно, $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ замкнуто в X, следовательно, множество $f^{-1}(V)$ открыто в X. Таким образом, мы получили, что отображение f непрерывно по определению. □

Оказывается не обязательно проверять открытость полных прообразов всех открытых в Y множеств. Достаточно проверить только множества базы. А именно, верна

Теорема 1.5. *Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого множества базы топологии пространства Y открыт в X.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно. Так как по определению непрерывного отображения полный прообраз любого открытого множества из Y открыт в X, это утверждение верно и для множеств базы (элементы базы суть открытые множества).

Обратно, пусть полный прообраз любого элемента базы Y открыт в X. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Тогда это множество можно представить как объединение элементов базы $V_\alpha \in \mathscr{B}$, то есть $V = \cup_\alpha V_\alpha$. Тогда $f^{-1}(V) = \cup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$. Так как по условию множества $f^{-1}(V_\alpha)$ открыты, то по определению топологии будет открыто и множество V. Получаем, что отображение f непрерывно по определению. □

Задача 1.9. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого элемента предбазы пространства Y открыт в X.

Теорема 1.6. *Пусть X и Y – топологические пространства, $f : X \to Y$ – некоторое отображение и $X = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 – замкнуты в X (эти множества могут пересекаться). Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны отображения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ в F_1 и F_2 соответственно ($f|_{F_1}(x) = f(x), x \in F_1$).*

Доказательство. Пусть f – непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f|_{F_1} : F_1 \to Y$. Пусть $V \subset Y$ – произвольное замкнутое множество. Тогда $(f|_{F_1})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap F_1$. Это множество замкнуто в F_1 в силу задачи 1.5. Для второго отображения доказательство аналогично.

Обратно, пусть отображения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ непрерывны соответственно на F_1 и F_2 (топология индуцированная). Рассмотрим произвольное замкнутое множество $V \subset Y$. Тогда

$$f^{-1}(V) = (f|_{F_1})^{-1}(V) \cup (f|_{F_2})^{-1}(V).$$

Оба множества правой части равенства замкнуты соответственно в F_1 и F_2, а значит замкнуты в X (задача 1.8). Тогда замкнутым в X является и множество $f^{-1}(V)$. Получаем, что отображение f непрерывно по критерию непрерывности в терминах замкнутых множеств. □

4. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно и обратное отображение также непрерывно.

Если для топологических пространств существует гомеоморфизм, то такие топологические пространства называются *гомеоморфными*.

Пример 1.12. Примеры гомеоморфных и не гомеоморфных пространств (если не указано противное, то топология берется индуцированная евклидовым пространством).

1. Интервал гомеоморфен прямой.

2. Любые два отрезка прямой гомеоморфны.

3. Прямая гомеоморфна окружности с выколотой точкой.

4. Сфера $S^n \setminus \{p\}$ с выколотой точкой гомеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^n$.

5. Отрезок и интервал не гомеоморфны.

6. Окружность не гомеоморфна прямой.

Доказательства этих фактов можно посмотреть в курсе топологии бакалавриата.

Пример 1.13**.** Отрезок $[0, 1]$ и интервал $(0, 1)$ с дискретными топологиями гомеоморфны. Действительно, они равномощны (мощность континуум), следовательно, существует биекция f между ними. Так как в дискретной топологии все множества открыты, полные прообразы любых множеств при отображениях f и f^{-1} (обратное отображение к f) открыты. Таким образом, отображение f является гомеоморфизмом.

Основная задача топологии – выявлять гомеоморфные и не гомеоморфные топологические пространства. Доказывать гомеоморфность топологических пространств относительно просто. Для этого нужно предъявить отображение, являющееся гомеоморфизмом. Подумав некоторое время, его удается предъявить. Хуже обстоит дело с доказательством негомеоморфности топологических пространств (универсального способа нет), то есть с доказательством того, что гомеоморфизма не существует. Для этого находят свойства топологических пространств, которые сохраняются при гомеоморфизмах (так называемые *топологические инварианты*). Тогда если одно топологическое пространство обладает этим свойством, а другое – нет, то они не могут быть гомеоморфными. Чем больше таких топологических инвариантов удастся построить, тем больше будет возможностей в отыскании негомеоморфных пространств.

Примером топологического инварианта является количество открытых множеств в топологическом пространстве. Действительно, гомеоморфизм топологических пространств устанавливает взаимно однозначное соответствие между их открытыми множествами. Используя этот топологический инвариант, легко видеть, что топологическое пространство с дискретной топологией (в нем больше одного элемента) не гомеоморфно топологическому пространству с антидискретной топологией (почему?).

Еще один пример топологического инварианта – хаусдорфовость. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (а его топология называется *топологией Хаусдорфа*), если любые две различные точки этого пространства имеют непересекающиеся окрестности.

Задача 1.10**.** Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – топологические пространства, $f : X \to Y$ – гомеоморфизм. Докажите, что если пространство X хаусдорфово, то пространство Y также хаусдорфово.

Задача 1.11**.** Покажите, что прямая с топологией Зариского не гомеоморфна прямой с метрической топологией тривиальной метрики.

§1.2. Топологические операции с топологическими пространствами.

1. Прямое произведение топологических пространств. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – топологические пространства. Рассмотрим декартово произведение X и Y как множеств

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Введем топологию на этом множестве, указав ее базу. Элементами базы будут множества

$$U \times V = \{(x, y) : x \in U, y \in V, U \in \tau_X, V \in \tau_Y, U, V \neq \emptyset\}.$$

Докажите самостоятельно, что совокупность указанных множеств является базой. Топология, определяемая этой базой, называется *топологией декартова произведения*, а топологическое пространство $X \times Y$ называется *топологическим произведением* топологических пространств X и Y.

Пример 1.14**.** Рассмотрим топологическое пространство $I^2 = (0, 1) \times (0, 1)$ (на интервалах $(0, 1)$ топология индуцирована евклидовой топологией прямой $\mathbb{R}$). Это открытый квадрат. Базой топологии будут открытые прямоугольники вида $(a, b) \times (c, d)$.

Поменяем топологию на втором интервале $(0, 1)$. Вместо евклидовой топологии возьмем дискретную топологию. Тогда базой топологии декартова произведения будут всевозможные горизонтальные интервалы.

Задача 1.12**.** Покажите, что топология декартова произведения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ совпадает с евклидовой топологией $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.13**.** Множество $T^2 = S^1 \times S^1$, где S^1 – окружность (с топологией индуцированной плоскостью $\mathbb{R}^2$), называется двумерным тором. Изобразите несколько открытых множеств в топологии декартова произведения на торе.

Теорема 1.7**.** *Пусть X, Y, Z – топологические пространства, $f : X \to Y \times Z$ – некоторое отображение. Отображение f является непрерывным тогда и только тогда, когда непрерывны отображения $pr_Y \circ f$ и $pr_Z \circ f$. Отображения $pr_Y \circ f$ и $pr_Z \circ f$ называются координатными отображениями. Здесь $pr_Y : Y \times Z \to Y$ задается формулой $pr_Y(y, z) = y$. Для pr_Z определение аналогично.*

Доказательство. Пусть f непрерывное отображение. Рассмотрим произвольное множество V_Y, открытое в Y. Тогда множество $V_Y \times Z$ является открытым в $Y \times Z$ (топология декартова произведения). Так как $(pr_Y \circ f)^{-1}(V_Y) = f^{-1}(V_Y \times Z)$, получаем, что множество $(pr_Y \circ f)^{-1}(V_Y)$ открыто в X. Для второго координатного отображения доказательство аналогично.

Обратно, пусть координатные отображения непрерывны. Покажем, что непрерывным является отображение f. Для этого достаточно показать, что полный прообраз любого элемента базы топологии пространства $Y \times Z$ открыт в X. Рассмотрим произвольный элемент $V_Y \times V_Z$ базы. Тогда

$$f^{-1}(V_Y \times V_Z) = f^{-1}((V_Y \times Z) \cap (Y \times V_Z)) = f^{-1}(V_Y \times Z) \cap f^{-1}(Y \times V_Z) = (pr_Y \circ f)^{-1}(V_Y) \cap (pr_Z \circ f)^{-1}(V_Z).$$

Получаем пересечение двух открытых в X множеств. Оно открыто. □

Задача 1.14. Пусть X – топологическое пространство. Докажите, что топологическое пространство $\{y\} \times X$ (с топологией декартова произведения) гомеоморфно X.

Решение. Зададим отображение $\varkappa : \{y\} \times X \to X$ по формуле $\varkappa(y, x) = x$, $x \in X$ – произвольный элемент. Очевидно, это биекция. Так как на множестве $\{y\} \times X$ топология декартова произведения, открытыми являются множества вида $\{y\} \times V$, где V – открытое множество в X, и их всевозможные объединения. Сами множества $\{y\} \times V$ образуют базу топологии декартова произведения. Полный прообраз такого множества при отображении $\varkappa$ есть множество V. Оно открыто в X. Следовательно, отображение $\varkappa^{-1}$ является непрерывным по критерию (см. теорема 1.5). Отображение $\varkappa$ также непрерывно, так как полный прообраз любого открытого множества V из X – это множество $\{y\} \times V$, которое является открытым в $\{y\} \times X$.

Итак, мы показали, что отображение $\varkappa$ является гомеоморфизмом. Следовательно, топологические пространства $\{y\} \times X$ и X гомеоморфны. □

Теорема 1.8. *Пусть даны топологические пространства X, Y и Z. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \times Y \to Z$. Тогда отображение $f_x : Y \to Z$, заданное формулой $f_x(y) = f(x, y)$, где $x \in X$ – произвольная фиксированная точка, будет непрерывным. Также будет непрерывным отображение $f_y : X \to Z$, заданное формулой $f_y(x) = f(x, y)$, где $y \in Y$ – произвольная фиксированная точка.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f_x : Y \to Z$. В силу задачи 1.14 топологическое пространство Y гомеоморфно топологическому пространству $\{x\} \times Y$ (гомеоморфизм обозначим $\varkappa : \{x\} \times Y \to Y$). Тогда отображение f_x можно представить в виде $f_x = \tilde{f} \circ \varkappa^{-1}$, где $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$, но x – фиксированный элемент. Если мы докажем, что отображение $\tilde{f}$ непрерывно, то непрерывным будет и f_x как композиция непрерывных отображений. Пусть V – произвольное открытое множество в Z. Тогда $\tilde{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \{x\} \times Y$. Это множество будет открытым в индуцированной топологии пространства $\{x\} \times Y$. Так как индуцированная топология этого пространства совпадает с топологией декартова произведения, множество $\tilde{f}^{-1}(V)$ будет открытым в пространстве $\{x\} \times Y$ с топологией декартова произведения. Тогда отображение $\tilde{f}$ является непрерывным.

Для отображения f_y доказательство аналогично. □

Доказанная теорема позволит нам получать из непрерывных отображений вида $F(x, t)$ с двумя аргументами непрерывные отображения с одним аргументом (второй аргумент фиксируется).

2. Фактортопология. Напомним, что *разбиением* множества называется его покрытие попарно непересекающимися подмножествами. С каждым разбиением S множества X связано отношение эквивалентности (то есть рефлексивное, симметричное и транзитивное): две точки объявляются эквивалентными, если они принадлежат одному элементу разбиения S. Обратно, с каждым отношением эквивалентности в множестве X связано разбиение этого множества на классы эквивалентных элементов. Так что разбиение множества на непустые подмножества и отношение эквивалентности в нем – это по существу одно и то же, точнее, это два способа описания явления.

Пусть X – множество, S – его разбиение. Множество, элементами которого являются подмножества X, составляющие разбиение S, называется *фактормножеством* X по разбиению S и обозначается $X/_S$.

Отображение $X \to X/_S$, ставящее в соответствие произвольному элементу $x \in X$, содержащий его элемент разбиения S, называется *канонической проекцией* или *отображением факторизации* и обозначается pr или pr_S.

Фактормножество $X/_S$ топологического пространства X по любому разбиению S на непустые подмножества наделяется естественной топологией: подмножество $U \subset X/_S$ объявляется открытым, если открыт его прообраз $pr^{-1}(U)$ при отображении $pr : X \to X/_S$.

Задача 1.15. Докажите, что семейство $\{U\}$ является топологией на $X/_S$. Эта топология называется *фактортопологией*, а множество $X/_S$, наделенное ею, называется *факторпространством* X по разбиению S.

Задача 1.16. Докажите, что каноническая проекция является непрерывным отображением.

Пример 1.15. Пусть $X = \mathbb{R}$. Отношение эквивалентности задается следующим образом: $a \sim b$ (то есть $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ попадают в один элемент разбиения) тогда и только тогда, когда существует ненулевое число λ, такое что $a = \lambda b$. Тогда $X/_\sim = \{\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Открытыми множествами в этом факторпространстве будут множества $X/_\sim$, $\emptyset$, $\{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Множество $\{\{0\}\}$ не является открытым в фактортопологии (будет ли оно замкнутым?).

Задача 1.17. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ (с евклидовой топологией) задано отношение эквивалентности: $x \sim y$ $x, y \in \mathbb{R}^2$, если существует ненулевое число λ, такое что $x = \lambda y$. Опишите фактормножество $\mathbb{R}^2/_\sim$, открытые множества в фактортопологии, приведите пример замкнутого множества в фактортопологии. Замените топологию на $\mathbb{R}^2$ на дискретную и опишите открытые множества фактортопологии в этом случае.

Пусть S – разбиение множества X на непустые подмножества, $f : X \to Y$ – отображение, постоянное на каждом элементе разбиения S. Тогда возниает отображение $X/_S \to Y$, определенное так: $A \in S \to f(x), x \in A$. Это определение корректно в силу постоянства f на элементах, принадлежащих одному множеству из S. Обозначим это отображение $f/_S$ и назовем *фактором* отображения f (по разбиению S).

Теорема 1.9. *Отображение $f : X \to Y$ постоянно на каждом элементе разбиения S множества X тогда и только тогда, когда существует такое отображение $g : X/_S \to Y$, что $f = g \circ pr$. При этом $g = f/_S$.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ постоянно на элементах разбиения. Нам надо предъявить отображение g. Положим $g = f/_S$. Посмотрим, чему будет равно отображение $f/_S \circ pr$. Сначала работает каноническая проекция pr. Она ставит каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент A из разбиения S, которому принадлежит x. Элемент A подхватывает фактор $f/_S$ и ставит ему в соответствие значение отображения f для любой точки $\tilde{x} \in A$ (нам все-равно какую брать точку из A, так как отображение f постоянно на элементах разбиения. Например, можем взять точку x). В результате каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие точка $f(x) \in Y$ – это отображение f.

Обратно, пусть $f = g \circ pr$. Тогда для любого элемента $A \in S$ и любых точек $x_1, x_2 \in A$ мы должны показать, что $f(x_1) = f(x_2)$. Действительно, получим

$$f(x_1) = g \circ pr(x_1) = g \circ pr(x_2) = f(x_2).$$

Таким образом, мы получаем, что отображение f постоянно на элементах из S. Наконец, пусть $A \in S$ – произвольный элемент. Тогда

$$f/_S(A) = f(A) = g(pr(x)) = g(A),$$

следовательно, $f/_S = g$. □

Более обще, если S и N – разбиения множеств X и Y, то всякому отображению $f : X \to Y$ переводящему элементы разбиения S в элементы разбиения T, отвечает отображение $X/_S \to Y/_T$, относящее элементу $A \in S$ элемент разбиения T, содержащий $f(x)$, $x \in A$. Это отображение обозначается $f/_{(S,T)}$ и называется *фактором* отображения f (по разбиениям S и T).

Аналогично предыдущей теореме доказывается следующая теорема (без доказательства)

Теорема 1.10. *Отображение f переводит элементы разбиения S в элементы разбиения T тогда и только тогда, когда существует отображение $g : X/_S \to Y/_T$, что $pr_Y \circ f = g \circ pr_X$. При этом $f/_{(S,Y)} = g$.*

Произвольное отображение $f : X \to Y$ определяет разбиение множества X на непустые прообразы элементов из Y. Это разбиение обозначается $S(f)$.

Очевидно, что отображение $f/_{S(f)} : X/_{S(f)} \to Y$, ставящее каждому полному прообразу точки $y \in Y$ эту точку, является инъективным. Оно называется *инъективным фактором* отображения f.

Пусть теперь X и Y – топологические пространства, S – разбиение X на непустые множества.

Теорема 1.11. *Если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение, постоянное на каждом элементе разбиения S, то фактор $f/_S$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Тогда

$$pr^{-1}((f/_S)^{-1}(V)) = (f/_S \circ pr)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$$

открыто в X. Тогда $(f/_S)^{-1}(V)$ открыто в $X/_S$ по определению фактортопологии. □

Аналогично доказывается следующая теорема (без доказательства).

Теорема 1.12. *Если $f : X \to Y$ непрерывное отображение, для которого существует отображение $f/_{(S,Y)} : X/_S \to Y/_T$, то это отображение непрерывно.*

Замечание 1.2. Обычно аккуратное буквальное описание разбиений громоздко. Но его можно сделать понятнее, употребляя такие слова как приклеим, стянем, отождествим. Некоторые из этих слов легко формализуются. Например, факторизация пространства X по разбиению, состоящему из множества A и одноточечных подмножеств в $X \setminus A$, называется *стягиванием множества A в точку*, а соответствующее факторпространство обозначается $X/_A$.

Если A и B – непересекающиеся подмножества множества X и $f : A \to B$ – биекция, то факторизация множества X по разбиению на одноточечные подмножества множества $X \setminus (A \cup B)$ и двух точечные множества $\{x, f(x)\}, x \in A$, называется *склеиванием или отождествлением* (множеств A и B посредством биекции f).

Удобный и гибкий подход к описанию разбиений открывается переходом к соответствующим отношениям эквивалентности. Благодаря транзитивности отношения эквивалентности достаточно указать лишь некоторые пары эквивалентных элементов $x \sim y$ (остальные эквивалентности будут следовать по транзитивности).

Пример 1.16. Пусть I – отрезок $[0, 1]$. Факторпространство $I/_{[0\sim1]}$ гомеоморфно окружности S^1. Другими словами, факторпространство отрезка I по разбиению, состоящему из множества $\{0, 1\}$ и множеств $\{a\}$, $a \in (0, 1)$ гомеоморфно окружности.

В самом деле, если $f : t \in [0, 1] \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$, то разбиение $S(f)$ совпадает с заданным, а факторотображение $f/_{S(f)} : [0, 1]/_{S(f)} \to S^1$ является непрерывным. Более того, можно доказать, что это гомеоморфизм (как непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово пространство. Берем этот факт без доказательства из курса общей топологии бакалавриата).

Пример 1.17. $\bar{B}^n/_{S^{n-1}}$ гомеоморфно сфере S^n. Другими словами, факторпространство шара $\bar{B}^n$ по его разбиению на одноточечные подмножества его внутренности и на множество S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n. далее мы будем говорить так: если стянуть границу шара в точку, то получится n-мерная сфера. В частности, если стянуть границу круга в точку, то получится обычная сфера (этот процесс легко представить себе наглядно).

Аналогично предыдущему примеру получаем, что отображение

$$f : x \in \bar{B}^n \to (\frac{x}{r} \sin \pi r, -\cos \pi r) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

задает разбиение, совпадающее с заданным, следовательно, $f/_{S(f)}$ – гомеоморфизм.

Задача 1.18. Докажите, что $I^2/_{[(0,t)\sim(1,t)],t\in I}$ гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$. Другими словами, факторпространство квадрата I^2 по разбиению на пары $\{(0, t), (1, t)\}, t \in I$ и на одноточечные подмножества из $(0, 1) \times I$ гомеоморфно цилиндру.

Задача 1.19. Докажите, что $S^1 \times I/_{[(z,0)\sim(z,1),z\in S^1]}$ гомеоморфно тору. Другими словами, факторпространство цилиндра $S^1 \times I$ по разбиению на одноточечные подмножества его внутренности $S^1 \times (0, 1)$ и пары точек оснований, лежащих на одной образующей, гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$. При этом говорят, что если склеить основания цилиндра, отождествив точки, лежащие на одной образующей, то получится тор.

Пример 1.18. *Лентой Мебиуса* называется факторпространство $I^2/_{[(0,t)\sim(1,1-t)]}$. Другими словами, это факторпространство квадрата I^2 по разбиению на пары симметричных относительно центра точек его боковых сторон и на не лежащие на боковых сторонах одноточечные подмножества.

Пример 1.19. *Бутылкой Клейна* называется факторпространство $I^2/_{[(t,0)\sim(t,1),(0,t)\sim(1,1-t)]}$. Другими словами, это факторпространство квадрата I^2 по разбиению на

- одноточечные подмножества его внутренности
- четверку вершин
- пары точек оснований, расположенных на одной вертикали
- пары точек боковых сторон, симметричных относительно центра квадрата.

Задача 1.20. Представьте бутылку Клейна как результат факторизации а) цилиндра, б) ленты Мебиуса.

Решение. Из определения бутылки Клейна следует, что она получается в результате двух последовательных склеек: 1) склеиваются вертикальные стороны квадрата (отождествляются точки, лежащие на одной горизонтали), 2) на паре оставшихся сторон склеиваются точки, симметричные относительно центра квадрата. В результате первой операции получается цилиндр. Тогда если провести вторую операцию после первой, получим бутылку Клейна из цилиндра. Если операции поменять местами, то получим бутылку Клейна из ленты Мебиуса (вторая операция выдает ленту Мебиуса). □

Задача 1.21. Докажите, что $S^1 \times S^1/_{[(z,w)\sim(-z,\bar{w})]}$ гомеоморфно бутылке Клейна. Здесь окружность рассматривается как множество комплексных чисел единичного модуля, черта означает комплексное сопряжение.

Задача 1.22. Докажите, что следующие факторпространства замкнутого круга $\bar{B}^2$ гомеоморфны самому кругу: 1)$\bar{B}^2/_{[(x,y)\sim(-x,-y)]}$, 2) $\bar{B}^2/_{[(x,y)\sim(x,-y)]}$, 3) $\bar{B}^2/_{[(x,y)\sim(-y,x)]}$.

Пример 1.20. Склеим каждую граничную точку круга $\bar{B}^2$ с диаметрально противоположной точкой, то есть профакторизуем круг по разбиению на пары симметричных относительно центра круга точек граничной окружности и одноточечных множеств внутренности круга. Результат называется *проективной плоскостью.*

Пример 1.21. Пусть S^n – n-мерная сфера. Отождествим диаметрально противоположные точки, то есть рассмотрим факторпространство $S^n/_{[x\sim -x]}$. Полученное топологическое пространство называется *n-мерным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{R}P^n$.

3. Приклеивание по отображению. Пусть X и Y – непересекающиеся топологические пространства, $A \subset X$ – некоторое подмножество и $\varphi : A \to Y$ – непрерывное отображение (на A берется индуцированная из X топология). Тогда *операция приклеивания X к Y по отображению* φ дает пространство

$$X \cup_\varphi Y = (X \cup Y)/_{[a\sim\varphi(a)]}.$$

Имеется в виду, что точка $a \in A$ эквивалентна точке $\varphi(a)$, а точки вне A и вне образа φ эквивалентны сами себе.

Задача 1.23. Покажите, что проективная плоскость есть результат склеивания круга и ленты Мебиуса при помощь гомеоморфизма между граничной окружностью круга и граничной окружностью ленты Мебиуса.

§1.3. Связность и линейная связность.

1. Связность. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если его можно представить в виде объединения непересекающихся, непустых, открытых множеств. В противном случае топологическое пространство называется *связным.*

Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется *связным* (соответственно, *несвязным*), если оно является таковым как топологическое пространство с индуцированной из X топологией.

Пример 1.22. Подмножество $A = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}^1$ является несвязным множеством (на прямой $\mathbb{R}^1$ евклидова топология).

То же подмножество $A \subset [0,+\infty)$ является связным подмножеством стрелки. Напомним, что топология стрелки на множестве $[0,+\infty)$ задается множествами $U = (a,+\infty)$, $a > 0$.

Пример 1.23. Любой промежуток прямой (с евклидовой топологией) связен, окружность связна.

Связность является топологическим свойством, то есть связность сохраняется при непрерывных отображениях (доказано в курсе топологии бакалавриата).

2. Линейная связность. *Путем* в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $s : I = [0,1] \to X$. Точка $s(0)$ называется *началом пути*, точка $s(1)$ называется *концом пути.*

Очевидно, что для всякого пути $s : I \to X$ его образ $s(I) \subset X$ является связным множеством (так как образ связного множества при непрерывном отображении связен).

Постоянное отображение $s : I \to X$, $s(t) = a \in X$ – фиксированная точка, называется *постоянным путем.*

Если $s : I \to X$ – путь, то *обратным* ему путем называется путь $s^{-1} : t \to s(1-t)$. Другими словами, обратный путь к s – это путь s, проходимый от конца к началу. Обратите внимание, что обратный путь это не обратное отображение!

Пусть $u : I \to X$ и $v : I \to X$ такие пути, что $u(1) = v(0)$ (конец пути u совпадает с началом пути v). Положим

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Отображение uv будет непрерывным в силу теоремы 1.6. Оно называется *произведением путей u и v.*

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем.

Пример 1.24. Отрезок линейно связен. Действительно, пусть дан отрезок $[a,b]$ и любые его две точки a_1, b_1. Тогда путь, соединяющий эти точки имеет вид $s(t) = (b_1 - a_1)t + a_1$, $t \in [0,1]$.

Задача 1.24. Докажите, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ линейно связно.

Указания. Произвольные точки $(a^1, \ldots, a^n)$ и $(b^1, \ldots, b^n)$ можно соединить путем $s(t) : x^i = a^i + (b^i - a^i)t$, $t \in [0, 1]$ – это отрезок прямой.

Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется *линейно связным*, если оно линейно связно как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Задача 1.25. Топологическое пространство $\mathbb{R}^n \setminus 0$ (при $n > 1$) с индуцированной топологией линейно связно.

Решение. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ – произвольные точки. Рассмотрим путь $u : I \to \mathbb{R}^n$, заданный формулой $u(t) = (1 - t)x + ty$. Это отрезок, соединяющий точки x и y. Если для любого $t \in I$ $u(t) \neq 0$, то путь u является путем, соединяющим точки x и y в топологическом пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Пусть существует $t \in I$, такое что $u(t) = 0$. Так как $n > 1$, существует точка $z \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, такая что z не принадлежит отрезку с концами x и y. На отрезке с концами x и z нет точки 0, следовательно, их соединяет отрезок (путь u_1), целиком лежащий в $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Аналогично получаем отрезок с концами z и y (путь u_2). Тогда произведение путей $u_1 u_2$ будет путем, соединяющим точки x и y и целиком лежащим в $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Таким образом, мы получаем, что топологическое пространство $\mathbb{R}^n \setminus 0$ является линейно связным. $\square$

Теорема 1.13. *Любое линейно связное пространство является связным.*

Доказательство. Пусть X – линейно связное топологическое пространство. Допустим, что оно не является связным. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 открыты, непусты и не пересекаются. Рассмотрим две точки $p \in U_1$ и $q \in U_2$. Такие точки существуют, так как множества U_1 и U_2 не пусты. В силу линейной связности пространства X существует путь $s : I \to X$, соединяющий точки p и q. Рассмотрим множества $s(I) \cap U_1$ и $s(I) \cap U_2$. Они не пусты, так как им принадлежат точки p и q. Они открыты в индуцированной на $s(I)$ топологии. Они не пересекаются, так как не пересекаются множества U_1 и U_2. В результате получаем, что $s(I)$ представимо в виде объединения непустых, открытых, непересекающихся множеств, то есть не связно. Полученное противоречие доказывает, что X является связным топологическим пространством. $\square$

Утверждение обратное утверждению теоремы, вообще говоря, не верно.

Пример 1.25. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$ и $X = A \cup \{(0, 0)\}$. Пространство X связно, но не линейно связно. Действительно, множество A является связным как образ при непрерывном отображении луча $(0, +\infty)$. Тогда X есть замыкание множества A, а значит, также связно (см. курс топологии бакалавриата). С другой стороны, можно показать, что точку $(0, 0)$ нельзя соединить непрерывным путем ни с одной точкой множества A.

Замечание 1.3. Для открытых подмножеств евклидова пространства связность и линейная связность эквивалентны.

Компонентой линейной связности топологического пространства X называется такое его линейно связное подмножество, которое не содержится ни в каком другом строго большем линейно связном множестве.

Очевидно, что каждая точка топологического пространства содержится в некоторой компоненте линейной связности. Две компоненты линейной связности либо не пересекаются, либо совпадают.

§1.4. Компактность.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Система подмножеств $\lambda = \{V_\alpha\}$ топологического пространства X называется *покрытием*, если объединение всех V_α совпадает с X. Покрытие называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств, то есть все $V_\alpha \in \tau$. Подмножество $\mu \subset \lambda$ называется *подпокрытием* покрытия λ, если оно является покрытием.

Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Подмножество топологического пространства X называется *компактным*, если оно компактно как топологическое пространство с индуцированной из X топологией.

В курсе топологии бакалавриата мы доказывали

Теорема 1.14. *Подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Пример 1.26. Сфера S^n и отрезок $[a, b]$ компактные множества. Прямая не компактна.

Замечание 1.4. Свойство компактности сохраняется при гомеоморфизмах. Прямое произведение компактных топологических пространств компактно.

Глава 2. Теория гомотопий.

§2.1. Гомотопии. Гомотопическая эквивалентность.

1. Гомотопные отображения и их свойства. Пусть X, Y – топологические пространства. Два непрерывных отображения $f, g : X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$, такое что $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$, $x \in X$. Обозначение $f \sim g$. Отображение F называется *гомотопией*, соединяющей непрерывные отображения f и g.

Пример 2.1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Докажем, что эти отображения гомотопны. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, заданное формулой $F(x,t) = (1-t)x$. Оно непрерывно как рациональная функция. Кроме того, $F(x,0) = x = f(x)$, $F(x,1) = 0 = g(x)$.

Задача 2.1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$. Гомотопны ли отображения $f(x) = x^2$, $g(x) = x$?

Ответ. Да. Гомотопия $F(x,t) = tx^2 + (1-t)x$.

Задача 2.2. Докажите, что любые непрерывные отображения $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ гомотопны.

Указания. Рассмотрите отображение $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Эта гомотопия называется *прямолинейной*.

Замечание 2.1. Гомотопия используется в решении следующих задач:

1) гомеоморфны ли топологические пространства Y и Y'. Для этого можно рассмотреть отображения некоторого топологического пространства X в Y и в Y' с точностью до гомотопии. Например, $X = S^1$. В таком случае получается два множества классов эквивалентных отображений. Если эти множества окажутся разными, то топологические пространства заведомо не гомеоморфны.

2) задача о продолжении отображения. Пусть $f, g : X \to Y$ – непрерывные отображения. Зададим отображение $\varphi : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to Y$ формулами $\varphi(x,0) = f(x)$, $\varphi(x,1) = g(x)$. Легко видеть, что продолжение отображения φ на топологическое пространство $X \times [0,1]$ существует тогда и только тогда, когда отображения f и g гомотопны.

Теорема 2.1. *Отношение гомотопности непрерывных отображений является отношением эквивалентности.*

Доказательство. 1) рефлексивность, то есть $f \sim f$. Положим $F(x,t) = f(x)$, $x \in X$, $t \in I$. Это непрерывное отображение является искомой гомотопией.

2) симметричность, то есть $f \sim g \Rightarrow g \sim f$.

Так как f и g гомотопны, существует непрерывное отображение $F(x,t) : X \times I \to Y$, такое что $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$. Рассмотрим отображение $\tilde{F} : X \times I \to Y$, заданное формулой $\tilde{F}(x,t) = F(x,1-t)$. Оно является непрерывным как композиция таковых. Кроме того, $\tilde{F}(x,0) = F(x,1) = g(x)$ и $\tilde{F}(x,1) = F(x,0) = f(x)$, то есть $\tilde{F}$ является гомотопией для отображений g и f.

3) транзитивность, то есть $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Так как отображения f и g гомотопны, то существует гомотопия F_1 между ними. Аналогично существует гомотопия F_2 для отображений g и h. Рассмотрим отображение $F : X \times I \to Y$, заданное формулой

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(x,2t-1)\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Это отображение непрерывно в силу теоремы 1.6. Кроме того, $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$. Следовательно, F – гомотопия для f и h. □

Задача 2.3. Докажите, что два постоянных отображения топологического пространства Z в топологическое пространство X гомотопны тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства X.

Решение. Пусть $f_0, f_1 : Z \to X$ – постоянные отображения, $x_0 = f_0(Z)$, $x_1 = f_1(Z)$. Если F – гомотопия между f_0 и f_1, то для любого фиксированного элемента $z \in Z$ определим отображение $u : I \to X$ по формуле $u(t) = H(z,t)$. Это отображение непрерывно, так как непрерывно отображение H, следовательно является путем. Он соединяет точки x_0 и x_1, следовательно они лежат в одной компоненте линейной связности.

Обратно, пусть точки x_0 и x_1 лежат в одной компоненте линейной связности, следовательно существует путь $u : I \to X$, такой что $u(0) = x_0$, $u(1) = x_1$. Зададим отображение $H : Z \times I \to X$ формулой $H(z,t) = u(t)$, $z \in Z$, $t \in I$. Это отображение является непрерывным, так как непрерывно u. Кроме того, $H(z,0) = u(0) = x_0 = f_0(z)$. Аналогично получим $H(z,1) = f_1(z)$. Таким образом, отображение H является гомотопией, соединяющей отображения f_0 и f_1. □

Теорема 2.2. *Пусть X и Y – гомеоморфные топологические пространства, $\tau : X \to Y$ – гомеоморфизм. Непрерывные отображения $f, g : Y \to Z$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны отображения $f \circ \tau$ и $g \circ \tau : X \to Z$.*

Доказательство. Пусть отображения f и g гомотопны. Тогда существует гомотопия $F(y,t) : Y \times I \to Z$, то есть непрерывное отображение, для которого $F(y,0) = f(y)$, $F(y,1) = g(y)$. Зададим отображение $H : X \times I \to Z$ по формуле $H(x,t) = F(\tau(x),t)$. Оно будет непрерывным как как композиция таковых. Кроме того, $H(x,0) = F(\tau(x),0) = f(\tau(x))$. Аналогично получаем, что $H(x,1) = g(\tau(x))$.

Обратно, аналогичные рассуждения с отображением τ^{-1}. □

Теорема 2.3. *Пусть X и Y – гомеоморфные топологические пространства, $\tau : X \to Y$ – гомеоморфизм, Z – топологическое пространство. Непрерывные отображения $f, g : Z \to X$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны отображения $\tau \circ f$ и $\tau \circ g : Z \to Y$.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущей теореме. В качестве гомотопии берется отображение $H(z,t) = \tau(F(z,t))$. □

Вывод: В гомотопных отображениях мы можем менять топологические пространства прообразов и образов на гомеоморфные, получая при этом снова гомотопные отображения.

Задача 2.4. Докажите, что всякое непрерывное не сюръективное отображение любого топологического пространства в сферу S^n гомотопно постоянному отображению.

Решение. Пусть $f : X \to S^n$ – не сюръективное отображение, $g : X \to S^n$, $g(x) = q$, $q \in S^n$ – фиксированная точка. Тогда существует точка $p \in S^n$, для которой нет прообраза и отображение f является отображением $X \to S^n \setminus \{p\}$. Как мы знаем из курса топологии бакалавриата, проколотая сфера (то есть $S^n \setminus \{p\}$) гомеоморфна арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизмом является стереографическая проекция $\tau : S^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим отображения $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} = \tau \circ f$ и $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{g} = \tau \circ g$. Согласно задаче 2.2 отображения $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ гомотопны. Тогда по теореме 2.3 гомотопными будут и отображения f и g, то есть отображение f гомотопно постоянному. □

Задача 2.5. Докажите, что любые два отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^n \setminus 0$ при $n > 1$ гомотопны.

Доказательство. Обозначим одноточечное пространство буквой O (она же обозначает единственную точку этого пространства). Пусть $f, g : O \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ – непрерывные отображения. Обозначим $x = f(O)$, $y = g(O)$. Так как пространство $\mathbb{R}^n \setminus 0$ линейно связно, существует путь $u : I \to \mathbb{R}^n \setminus 0$, соединяющий точки x и y (см. задачу 1.25). Согласно задаче 1.14 топологическое пространство $O \times I$ гомеоморфно интервалу I. Обозначим гомеоморфизм $\varkappa : O \times I \to I$. Тогда отображение $H = u \circ \varkappa : O \times I \to X$ будет непрерывным как композиция непрерывных. Кроме того, $H(O,0) = u(0) = x = f(O)$. Аналогично $H(O,1) = g(O)$. □

Задача 2.6. Найдите два не гомотопных отображения одноточечного множества в $\mathbb{R} \setminus 0$.

Доказательство. Постоянные отображения $f(O) = -1$, $g(O) = 1$ будут не гомотопными, так как их образы лежат в разных компонентах линейной связности топологического пространства $\mathbb{R} \setminus 0$ (см. задачу 2.3). □

Теорема 2.4. *Пусть X, Y, Z – топологические пространства. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны тогда и только тогда, когда $pr_Y \circ f$ гомотопно $pr_Y \circ g$ и $pr_Z \circ f$ гомотопно $pr_Z \circ g$. Другими словами, отображения f и g гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны их соответствующие координатные отображения.*

Доказательство. Пусть f и g гомотопны. Тогда существует гомотопия F. Рассмотрим отображение $pr_Y \circ F : X \times I \to Y$. Оно будет непрерывно как композиция непрерывных отображений. Кроме того, $pr_Y \circ F(x,0) = pr_Y \circ f(x)$. Аналогично для $pr_Y \circ F(x,1)$.

Обратно, пусть гомотопны координатные отображения. Обозначим через F_Y гомотопию между $pr_Y \circ f$ и $pr_Y \circ g$, а через F_Z – гомотопию между $pr_Z \circ f$ и $pr_Z \circ g$. Тогда отображение $F(x,t) = (F_Y(x,t), F_Z(x,t))$ будет гомотопией для отображений f и g. Подробные рассуждения проведите самостоятельно. □

В заключении этого пункта докажем техническую теорему.

Теорема 2.5. *(техническая теорема) Если $h : A \to X$; $f, f' : X \to Y$; $g : Y \to B$ – непрерывные отображения, $F : X \times I \to Y$ – гомотопия для f и f', то отображение $g \circ F \circ (h \times id_I)$ – гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h$.*

Доказательство. Отображение $H = g \circ F \circ (h \times id_I) : A \times I \to B$ непрерывно как композиция таковых. Кроме того, $H(a,0) = g(F(h(a),0) = g(f(h(a))) = g \circ f \circ h(a)$. Аналогично получим $H(a,1) = g(F(h(a),1)) = g(f'(h(a)))$. Следовательно, H – искомая гомотопия. □

2. Гомотопические классы непрерывных отображений. Обозначим $C(X,Y)$ множество всех непрерывных отображений $f: X \to Y$ топологических пространств X и Y. Фактормножество $C(X,Y)/_\sim$ по отношению гомотопности обозначается $\pi(X,Y)$. Его элементы (классы гомотопных отображений) называются *гомотопическими классами*. Гомотопический класс отображения $f \in C(X,Y)$ обозначается $[f]$.

Задача 2.7. Докажите, что для любого топологического пространства X множество $\pi(X,I)$ состоит из одного элемента ($I = [0,1]$).

Решение. Для любого отображения $f: X \to I$ отображение $F(x,t) = (1-t)f(x)$ является гомотопией между отображением f и постоянным отображением $h_0 : x \to 0$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие число 0. Следовательно, существует только один класс, а именно, $[h_0]$. □

Теорема 2.6. *Число элементов $\pi(I,Y)$, где Y – произвольное топологическое пространство, совпадает с числом компонент линейной связности топологического пространства Y.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f: I \to Y$ и покажем, что оно гомотопно постоянному. Действительно, отображение $H: I \times I \to Y$, заданное формулой $H(s,t) = f(s(1-t))$, будет искомой гомотопией, так как $H(s,0) = f(s)$, $H(s,1) = f(0)$ – постоянная точка в Y.

Рассмотрим все постоянные отображения из I в Y и распределим их по гомотопическим классам. Согласно задаче 2.3 таких классов будет столько же сколько компонент линейной связности у пространства Y. Любое другое непрерывное отображение будет гомотопно одному из постоянных, следовательно, нового гомотопического класса не задаст. В результате получаем, что количество гомотопических классов в множестве $\pi(I,Y)$ совпадает с количеством компонент линейной связности топологического пространства Y. □

3. Гомотопическая эквивалентность. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует непрерывное отображение $g: Y \to X$, такое что $gf \sim id_X$, $fg \sim id_Y$. Отображение g называется *гомотопически обратным* к f. Говорят, что топологическое пространство X *гомотопически эквивалентно* топологическому пространству Y (или X и Y имеют *одинаковый гомотопический тип*), если существует отображение $f: X \to Y$, являющееся гомотопической эквивалентностью.

Пример 2.2. Приведем тривиальный пример гомотопической эквивалентности.

Гомеоморфные пространства X и Y гомотопически эквивалентны, а гомеоморфизм $f: X \to Y$ является гомотопической эквивалентностью. Действительно, $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$.

Следующий пример менее тривиален. Пример самого простого (не пустого) топологического пространства – одна точка. Возникает вопрос: какие пространства имеют гомотопический тип точки?

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $id: X \to X$ гомотопно постоянному отображению (то есть отображению X в фиксированную точку $x_0 \in X$). Гомотопия между ними называется *стягиванием* пространства X в точку x_0.

Пример 2.3. Открытый круг $B_1(0)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с евклидовой топологией является стягиваемым топологическим пространством (топология индуцированная). Гомотопия между тождественным и постоянным отображением задается формулой

$$F: B_1(0) \times I \to B_1(0); \quad F(x,t) = (1-t)x.$$

Аналогично получаем, что $\mathbb{R}^n$ является стягиваемым топологическим пространством.

Можно показать, что $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ не является стягиваемым. Также стягиваемым пространством не является окружность S^1.

Пример 2.4. Окружность S^1 и проколотая плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ имеют одинаковый гомотопический тип.

Рассмотрим окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в точке 0. В качестве отображения $f: S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ возьмем вложение in окружности в плоскость, то есть каждой точке (x,y) окружности S^1 ставится в соответствие та же самая точка, но уже рассматриваемая как точка плоскости. В качестве гомотопически обратного к нему возьмем отображение $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ заданное соответствием $(x,y) \to \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Так как нуль на плоскости выкинут, это отображение задано корректно.

Проверим, что g действительно является гомотопически обратным к f. Очевидно, что отображение $g \circ f: S^1 \to S^1$ будет тождественным, тем более гомотопно тождественному. Отображение $f \circ g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ будет равно $in \circ g$. Прямолинейная гомотопия $F((x,y),t) = (in \circ g)(x,y)t + id(x,y)(1-t)$ соединяет это отображение с тождественным, то есть оно гомотопно тождественному.

Итак, мы получили, что f является гомотопической эквивалентностью, а значит, проколотая точка и окружность гомотопически эквивалентны.

Задача 2.8. Докажите, что любые два отображения f, g пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопны между собой.

Решение. Пусть Y – стягиваемое пространство. По определению это означает, что тождественное отображение $id_Y : Y \to Y$ гомотопно постоянному отображению $j : Y \to Y$, $j(y) = y_0$ – фиксированная точка. Тогда отображения $f \circ id_Y$ и $f \circ j$ будут гомотопны. Действительно, пусть $F : Y \times I \to Y$ – гомотопия между id_Y и j. Тогда отображение $H(x,t) = F(f(x),t)$ будет гомотопией между $f \circ id_Y$ и $f \circ j$.

Аналогично получаем, что $g \circ id_Y$ и $g \circ j$ гомотопны. Но $f \circ j = g \circ j : X \to y_0$. Следовательно, $f = f \circ id_Y$ гомотопно $g \circ id_Y = g$. □

Теорема 2.7. *Топологическое пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет тип одноточечного пространства, то есть существует гомотопическая эквивалентность между X и одноточечным пространством.*

Доказательство. Пусть X стягиваемо к точке x_0. Обозначим $\Phi : X \times I \to X$ гомотопию, соединяющую тождественное и постоянное отображения, то есть $\Phi(x,0) = id_X(x)$, $\Phi(x,1) = x_0$ – постоянное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ точку x_0. Обозначим $Q = \{x_0\}$; $\varphi : X \to Q$ – постоянное отображение; $in : Q \to X$ – отображение вложения. Тогда $\varphi \circ in = id_Q$, а Φ – гомотопия, связывающая id_X и $\varphi = in \circ \varphi$. Следовательно, φ – гомотопическая эквивалентность между X и Q.

Обратно, пусть X и $Q = \{y_0\}$ гомотопически эквивалентны, то есть существуют непрерывные отображения $f : X \to Q$ и $g : Q \to X$, такие что $f \circ g \sim id_Q$ и $g \circ f \sim id_X$. Надо показать, что X стягиваемо к точке x_0, то есть существует гомотопия $\Phi : X \times I \to X$, такая что $\Phi(x,0) = id_X$ и $\Phi(x,1) = x_0$. Заметим, что $g \circ f : x \to x_0$ для любой точки x, следовательно, искомая гомотопия Φ – это гомотопия, соединяющая отображения $g \circ f$ и id_X. □

§2.2. Связанные гомотопии.

Пусть $A \subset X$ – некоторое подмножество топологического пространства X. Говорят, что гомотопия $H : X \times I \to Y$ *связана на множества* A или называют A-*гомотопией*, если $H(x,t) = H(x,0)$ для всех $x \in A$, $t \in I$. Конечно, A-гомотопные отображения должны совпадать на множестве A. Если хотят подчеркнуть, что никакого условия связанности не предполагается, что говорят, что гомотопия является *свободной*.

Замечание 2.2. Полностью аналогично случаю свободной гомотопии для A-гомотопии доказывается , что отношение A -гомотопности является отношением эквивалентности.

Классы, на которые отношение A-гомотопности разбивает множество всех непрерывных отображений $X \to Y$, совпадающих на множестве A с отображением $f : A \to Y$, называются *A-гомотопическими классами* или *относительными классами* непрерывных продолжений отображения f на топологическое пространство X.

§2.3. Гомотопии и пути.

Напомним, что *путем* называется непрерывное отображение отрезка $I = [0,1]$ в топологическое пространство X.

Предложение 2.1 **.** *Всякий путь можно рассматривать как гомотопию.*

Доказательство. Пусть $u : I \to X$ – произвольный путь. Согласно задаче 1.14 I гомеоморфно $\{O\} \times I$ (декартово произведение одноточечного множества и отрезка с топологией декартова произведения). Тогда определяется отображение $\tilde{u} : \{O\} \times I \to X$ по формуле $\tilde{u} = u \circ \varkappa$, где $\varkappa$ – гомеоморфизм $\{O\} \times I \to I$, заданный формулой $\varkappa(O,t) = t$, $t \in I$. Отображение $\tilde{u}$ является непрерывным как композиция таковых. Выясним, для каких отображений $\tilde{u}$ является гомотопией. Имеем

$$\tilde{u}(O,0) = u \circ \varkappa(O,0) = u(0); \quad \tilde{u}(O,1) = u(1).$$

Таким образом, мы получаем, что $\tilde{u}$ является гомотопией, соединяющей отображение одноточечного множества O в начало пути $u(0)$ и отображение одноточечного множества O в конец пути $u(1)$. Гомотопия $\tilde{u}$ и путь u отождествляются. В результате чего мы можем говорить, что любой путь можно рассматривать как гомотопию. □

Предложение 2.2 **.** *Всякая гомотопия состоит из путей.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную гомотопию $F : X \times I \to Y$ для отображений $f, g : X \to Y$. Фиксируем точку $x \in X$. Тогда будет определено отображение $u_x : I \to Y$ формулой $u_x(t) = F(x,t)$. Оно будет непрерывным в силу теоремы 1.8, то есть является путем. Так как отображение u_x определено для любого $x \in X$, говорят, что гомотопия F состоит из путей u_x. □

Предложение 2.3 **.** *Всякая гомотопия является путем.*

Доказательство. Пусть $F(x,t)$ – гомотопия. Тогда при каждом фиксированном t мы получим отображение $f_t : X \to Y$, определенное формулой $f_t(x) = F(x,t)$. Если обозначить $C(X,Y)$ множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, то мы получим отображение $I \to C(X,Y)$, заданное так $t \to f_t$. Это отображение будет непрерывным, если в множестве $C(X,Y)$ ввести так называемую *компактно-открытую топологию.* Ее предбазой являются всевозможные множества вида

$$W(K,U) = \{\varphi \in C(X,Y) : \varphi(K) \subset U\},$$

где K – компактное множество пространства X, U – открытое множество пространства Y. Оказывается, что в такой топологии отображение $I \to C(X,Y)$ является непрерывным, а значит, является путем в пространстве непрерывных отображений $C(X,Y)$. Для доказательства этого нам потребуется

Лемма 2.1**.** *Если отображение $f : X \times Y \to Z$ непрерывно, то отображение $F : X \to C(Y,Z)$, заданное формулой $F(x)(y) = f(x,y)$ также непрерывно.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что для любого множества $W(K,V)$ из предбазы компактно-открытой топологии его полный прообраз открыт в X (см. задачу 1.9). Имеем

$$F^{-1}(W(K,V)) = \{x \in X : \ F(x)(K) \subset V\} = \{x \in X : \ f(x \times K) \subset V\}.$$

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in F^{-1}(W(K,V))$ (то есть $F(x_0) \in W(K,V)$, то есть $F(x_0)(y) \in V$, то есть $f(x_0,y) \in V$ для любого $y \in K$. Это можно записать так: $f(x_0 \times K) \subset V$ или $x_0 \times K \subset f^{-1}(V)$) и докажем, что ее можно окружить открытым множеством U_0, целиком лежащим в $F^{-1}(W(K,V))$. Другими словами, нам нужно предъявить такое открытое множество U_0, что

$$F(U_0) \subset W(K,V) \Leftrightarrow f(U_0 \times K) \subset V.$$

Строим U_0. Так как отображение f непрерывно, множество $f^{-1}(V)$ открыто и $x_0 \times K \subset f^{-1}(V)$. Так как $f^{-1}(V)$ открыто, любая точка $(x_0,k) \in x_0 \times K \subset f^{-1}(V)$ обладает открытой окрестностью $U_\alpha \times K_\alpha \subset f^{-1}(V)$ (топология декартова произведения). Так как множество K компактно и все U_α содержат x_0, из покрытия $\{U_\alpha \times K_\alpha\}$ множества $x_0 \times K$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_i \times K_i\}$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда множество $U_0 = \cap_{i=1}^n U_i$ будет искомым. Действительно, это открытое множество в X (как пересечение таковых), которое содержит точку x_0 и

$$f(U_0 \times K) \subset f(U_1 \times K_1 \cup \ldots \cup U_n \times K_n) \subset f(U_1 \times K_1) \cup \ldots \cup f(U_n \times K_n) \subset V,$$

то есть $U_0 \times K \subset f^{-1}(V)$.

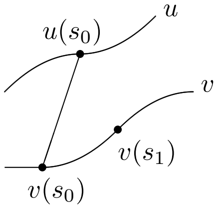
Итак, любая точка $x_0 \in F^{-1}(W(K,V))$ входит в это множество с некоторой своей открытой окрестностью, следовательно, множество $F^{-1}(W(K,V))$ открыто и отображение F непрерывно (по определению). □

Применим лемму к гомотопии $F : X \times I \to Y$ (чтобы применить лемму запишем данную гомотопию в виде $F : I \times X \to Y$ – порядок аргументов не существенен, они не перепутаются). Получим, что отображение $I \to C(X,Y)$ непрерывно. □

Замечание 2.3**.** Если в лемму применить к гомотопии F с исходным порядком аргументов, то получим непрерывное отображение $X \to C(I,Y)$, то есть каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие путь $u_x : I \to Y$. При этом такое соответствие является непрерывным.

Теорема 2.8**.** *Два пути в топологическом пространстве X свободно гомотопны тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства X.*

Доказательство. Пусть u и v – произвольные свободно гомотопные пути в топологическом пространстве X.



Тогда существует гомотопия $H(s,t) : I \times I \to X$, такая что $H(s,0) = u(s)$, $H(s,1) = v(s)$. Фиксируем точку $s_0 \in I$. Получим точку $u(s_0) \in u(I)$ (это получается произвольная фиксированная точка на образе пути u). Нам нужно соединить ее путем с произвольной фиксированной точкой $v(s_1) \in v(I)$. Согласно теореме 1.8 отображение $H(s_0,t) : I \to X$ является непрерывным отображением и $H(s_0,1) = v(s_0)$.

Дальше идем по пути v в точку $v(s_1)$. В результате получаем путь из точки $u(s_0)$ в точку $v(s_1)$. Следовательно образы путей $u(I)$ и $v(I)$ лежат в одной компоненте линейной связности пространства. Зададим явно путь, соединяющий точки $u(s_0)$ и $v(s_1)$.

$$w(t) = \begin{cases} H(s_0, 2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ v(2(1-t)s_0 + (2t-1)s_1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Обратно, пусть образы путей $u(I)$ и $v(I)$ лежат в одной компоненте линейной связности пространства X. Согласно доказательству теоремы 2.6 путь u гомотопен постоянному пути $I \to u(0)$ (гомотопия $H(s,t) = u(s(1-t))$ и, аналогично, путь v гомотопен постоянному пути $I \to v(0)$ (гомотопия $H(s,t) = v(s(1-t))$). Так как точки $u(0)$ и $v(0)$ лежат в одной компоненте линейной связности, постоянные пути $I \to u(0)$ и $I \to v(0)$ гомотопны согласно задаче 2.3. Следовательно, отображения u и v гомотопны по транзитивности. □

Результат этой теоремы показывает, что понятие свободной гомотопии путей не представляет интереса. С другой стороны, один из разновидностей относительных гомотопий путей играет очень важную роль. Это $\{0,1\}$-гомотопии, то есть от путей u и v требуется совпадение начал и концов ($u(0) = v(0)$, $u(1) = v(1)$). В связи с этим традиционно под гомотопией путей понимают гомотопию, связанную на концах отрезка I, то есть на множестве $\{0,1\}$. В дальнейшем $\{0,1\}$-гомотопический класс пути s будем называть просто гомотопическим классом и обозначать $[s]$.

§2.4. Гомотопические свойства умножения путей.

Напомним, что пути u и v в топологическом пространстве X можно перемножать, если начало $v(0)$ пути v совпадает с концом $u(1)$ пути u. Произведение путей определяется формулой

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ v(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Теорема 2.9. *Если путь u гомотопен пути u', путь v гомотопен пути v' существует произведение uv, то существует произведение $u'v'$ и оно гомотопно пути uv.*

Доказательство. Так как произведение uv определено, $u(1) = v(0)$. Так как $u \sim u'$, $u(1) = u'(1)$. Аналогично $v(0) = v'(0)$. Следовательно, $u'(0) = v'(0)$, а значит, определено отображение $u'v'$.

Пусть $H' : I \times I \to X$ – гомотопия для путей u и u'; $H'' : I \times I \to X$ – гомотопия для путей v и v'. Тогда отображение

$$H : I \times I \to X : (s,t) \to \begin{cases} H'(2s, t),\ s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ H''(2s-1, t),\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

является искомой гомотопией. □

Определим *произведение гомотопических классов* путей u и v как гомотопический класс пути uv. Таким образом, произведение $[u][v]$ определено тогда же, когда определено и произведение uv и $[u][v] = [uv]$. Из теоремы 2.9 следует корректность введенного определения.

Задача 2.9. Выясните, является ли умножение путей ассоциативным. Точнее: путь u, v и w – пути в некотором топологическом пространстве X, для которых определены произведения uv и vw (то есть $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$). Всегда ли верно, что $(uv)w = u(vw)$?

Решение. Нет, не верно. Пусть $u(s) = 0$, $w(s) = 1$ для любого $s \in I$ и $v(s) = s$. Тогда $((uv)w)(s) = 0$, $s \in [0, \frac{1}{4}]$, а $(u(vw))(s) = 0$ при $s \in [0, \frac{1}{2}]$. Действительно,

$$uv(s) = \begin{cases} u(2s),\ s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ v(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$(uv)w(t) = \begin{cases} uv(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ w(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} u(4t),\ t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ v(4t-1),\ t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ w(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} 0\, t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ 4t-1,\ t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ 1,\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Аналогично вычисляем

$$u(vw)(t) = \begin{cases} u(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ vw(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} u(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(4t-2),\ t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ w(4t-3),\ t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} = \begin{cases} 0, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4t-2,\ t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 1,\ t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

□

Теорема 2.10. *Умножение гомотопических классов путей ассоциативно.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для всяких путей u, v, w, для которых определены произведения uv и vw, пути $(uv)w$ и $u(vw)$ гомотопны. Докажем две леммы.

Лемма 2.2. *Существует отображение $\varphi : I \to I$, такое что если u, v, w – это пути, причем $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$, то $((uv)w) \circ \varphi = u(vw)$.*

Доказательство. В задаче 2.9 мы уже вычислили пути $(uv)w$ и $u(vw)$:

$$(uv)w(t) = \begin{cases} u(4t),\ t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ v(4t-1),\ t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ w(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad u(vw)(t) = \begin{cases} u(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(4t-2),\ t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ w(4t-3),\ t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Смотрим на эти два пути и видим, что на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ аргументы путей отличаются в $\frac{1}{2}$ раз, на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ – на $\frac{1}{4}$, на отрезке $[\frac{3}{4}, 1]$ – $t = 2s - 1$. Собираем вместе и задаем функцию $\varphi(s)$:

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2},\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ s - \frac{1}{4},\ s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2s-1,\ s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

□

Лемма 2.3. *Всякий путь в I, начинающийся в нуле и заканчивающийся в единице, гомотопен пути $id : I \to I$.*

Доказательство. Пусть $u : I \to I$, такой что $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ – произвольный путь. Тогда отображение $H(s,t) = (1-t)u(s) + id(s)t$ будет гомотопией для u и id. □

Теперь мы можем доказать, что пути $(uv)w$ и $u(vw)$ гомотопны. Применим техническую теорему (теорема 2.5). Положим $f = \varphi : I \to I$, $f' = id : I \to I$, $h = id$, $g = (uv)w : I \to X$. Тогда по технической теореме получим $u(vw) = ((uv)w) \circ \varphi \circ id$ гомотопно $((uv)w) \circ id \circ id$. □

Из доказанной теоремы следует, что операция умножения гомотопических классов петель является ассоциативной. Действительно,

$$([u][v])[w] = [(uv)w] = [u(vw)] = [u]([v][w]).$$

Для любой точки $a \in X$ обозначим через e_a путь $I \to X$, задаваемый формулой $e_a(t) = a$ для любого $t \in I$.

Задача 2.10. Выясните, является ли путь e_a единицей с точки зрения умножения путей. Другими словами, пусть u – путь, начинающийся в точке a, то есть $u(0) = a$. Верно ли, что $e_a u = u$?

Решение. Вообще говоря, нет. Если $u(s) = e_a u(s)$, то получим (вычисляя произведение в правой части равенства)

$$u(s) = \begin{cases} e_a,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} = \begin{cases} a,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} = u(s),$$

но, очевидно, что не любой путь u должен давать значение a на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$.

Однако, имеет место равенство $e_a u = u \circ \varphi$, если функцию φ определить следующим образом

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2s-1,\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Действительно,

$$e_a u(s) = \begin{cases} a,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad u \circ \varphi(s) = \begin{cases} u(0) = a,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Подгоняем к технической теореме: $g = u$, $f = \varphi$, $h = id$, $f' = id_I$. Тогда

$$e_a u = u \circ \varphi \circ id = g \circ f \circ h \sim g \circ f' \circ h = u \circ id_I \circ id = u.$$

Таким образом, путь $e_a u$ гомотопен пути u, следовательно, $[e_a][u] = [e_a u] = [u]$. □

Напомним, что для всякого пути u обратным к нему называется путь u^{-1}, определенный формулой $u^{-1}(t) = u(1-t)$.

Задача 2.11. Выяснить, является ли обратный путь обратным в смысле умножения путей. Другими словами: верно ли, что если путь u начинается в точке a и заканчивается в точке b, то $uu^{-1} = e_a$ и $u^{-1}u = e_b$.

Решение. Нет. Докажем, что $uu^{-1} = e_a \Rightarrow u = e_a$. Вычислим произведение uu^{-1} и приравняем e_a.

$$uu^{-1}(s) = \left\{ \begin{array}{l} u(2s),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u^{-1}(2s-1) = u(1-(2s-1)) = u(2-2s),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right. = e_a = a$$

Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} u(2s) = a,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2-2s) = a,\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right.$$

Обозначив $2s = t$, получим, что для любого $t \in [0,1]$ $u(t) = a$, то есть $u = e_a$. □

Теорема 2.11. *Для всякого пути v гомотопический класс обратного пути v^{-1} является обратным к гомотопическому классу пути v, то есть $[v]^{-1} = [v^{-1}]$.*

Доказательство. Докажем две леммы.

Лемма 2.4. *Существует непрерывное отображение $\varphi : I \to I$ такое, что $vv^{-1} = v \circ \varphi$ для любого пути v.*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ, заданное формулой

$$\varphi(s) = \left\{ \begin{array}{l} 2s,\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2s,\ s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Вычислим vv^{-1}.

$$vv^{-1}(s) = \left\{ \begin{array}{l} v(2s),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2-2s),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right. = v \circ \varphi(s).$$

□

Лемма 2.5. *Всякий путь в I, начинающийся и заканчивающийся в нуле, гомотопен постоянному пути $e_0 : I \to I$.*

Доказательство. Пусть $u : I \to I$ – произвольный путь. Тогда отображение $H(s,t) = (1-t)u(s) + te_0$ будет искомой гомотопией. □

Возвращаемся к доказательству теоремы. Применяем техническую теорему: $g = v$, $f = \varphi$, $h = id$, $f' = e_0$. Тогда $v \circ \varphi \circ id \sim v \circ e_0 \circ id$. Так как $v \circ e_0 = v(0) = e_{v(0)}$, получим что $vv^{-1} \sim e_{v(0)}$, следовательно, $[v][v^{-1}] = [vv^{-1}] = [e_{v(0)}]$. □

Мы видим, что хотя с алгебраической точки зрения операция умножения путей не обладает обычными свойствами, такими, как ассоциативность и т.п., она определяет в множестве гомотопических классов путей операцию, которая обладает привычными алгебраическими свойствами. Единственный недостаток этой операции в том, что она определяется не для любых двух классов путей.

Задача 2.12. Докажите, что $[uv]^{-1} = [v]^{-1}[u]^{-1}$.

§2.5. Фундаментальная группа.

Пусть X – топологическое пространство, $x_0 \in X$ – любая точка. Путь в X, который начинается и заканчивается в точке x_0, называется *петлей* топологического пространства X в точке x_0. Обозначим $\Omega_1(X, x_0)$ множество петель пространства X в точке x_0, а через $\pi_1(X, x_0)$ – множество гомотопических классов таких путей. В обоих множествах $\Omega_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_0)$ имеется операция умножения.

Теорема 2.12. *Для любого топологического пространства X и любой его точки x_0 множество $\pi_1(X, x_0)$ гомотопических классов петель пространства X в точке x_0 с введенной операцией умножения гомотопических классов является группой.*

Доказательство. Так как две петли (частный случай путей), определенные в одной и той же точке, начинаются и заканчиваются в этой точке, для них определена операция умножения (см. § 2.4.), а также определена операция умножения для классов таких путей. Выполнение свойств группы доказано в том же § 2.4.. □

Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* топологического пространства X в точке x_0. Она была введена Анри Пуанкаре, поэтому ее иногда называют группой Пуанкаре.

Замечание 2.4. Нижний индекс 1 в обозначении $\pi_1(X, x_0)$ появился много позже, чем буква π. Он связан с еще одним названием фундаментальной группы: *первая* (или *одномерная*) *гомотопическая группа*. Имеется бесконечная последовательность групп $\pi_r(X, x_0)$ с $r = 1, 2, \ldots$ и фундаментальная группа – первая из них. Многомерные гомотопические группы были введены Витольдом Гуревичем в 1935 году, более чем через 30 лет после определения фундаментальной группы. Образно говоря, общее определение $\pi_r(X, x_0)$ получается из определения $\pi_1(X, x_0)$ посредством повсеместной замены отрезка I на куб I^r.

Имеется еще и так называемая „нульмерная гомотопическая группа" $\pi_0(X, x_0)$, которая как правило, группой не является. Это – множество компонент линейной связности пространства X. Хотя в множестве $\pi_0(X, x_0)$ нет никакой естественной операции умножения (если только пространство X не снабжено дополнительной алгебраической структурой), однако в нем имеется единица: так называют естественный выделенный элемент – компоненту линейной связности пространства X, содержащую x_0.

Теорема 2.13. *Фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны. Точнее: пусть X и Y – гомеоморфные топологические пространства, $f : X \to Y$ – гомеоморфизм. Для любого $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ фундаментальные группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$ изоморфны.*

Доказательство. Если u и v – гомотопные петли в X, то $f \circ u$ и $f \circ v$ – гомотопные петли в Y (гомотопия $H(y, t) = F(f^{-1}(y), t)$, где F – гомотопия для петель u и v). Зададим отображение $\varkappa : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ по формуле $\varkappa([u]) = [f \circ u]$. Так как f – биекция, $\varkappa$ также является биекцией. Проверим сохранение операций:

$$\varkappa([u][v]) = \varkappa([uv]) = [f \circ (uv)] = [(f \circ u)(f \circ v)] = \varkappa([u])\varkappa([v]).$$

Таким образом, $\varkappa$ – изоморфизм групп. □

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

§2.6. Круговые петли.

Напомним, что окружность S^1 рассматривается как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которая, в свою очередь, канонически отождествляется с множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В частности, мы можем говорить, что число 1 принадлежит окружности S^1.

Пусть X – топологическое пространство, $x_0 \in X$. Непрерывное отображение $\ell : S^1 \to X$, такое, что $\ell(1) = x_0$, называется *круговой петлей* в точке x_0. Свяжем в каждой такой круговой петлей ℓ определенную выше петлю пространства X той же точке, взяв композицию ℓ с экспоненциальным отображением $I \to S^1$, заданным формулой $t \to e^{2\pi i t}$.

Теорема 2.14. *Всякая петля может быть получена таким образом из круговой петли.*

Доказательство. Пусть $u : I \to X$ – произвольная петля. Тогда существует факторотображение $\tilde{u} : I/_{\{0,1\}} \to X$. Относительно фактортопологии оно непрерывно, а топологическое пространство $I/_{\{0,1\}}$ гомеоморфно окружности (у отрезка I склеили концы). Тогда композиция $\tilde{u}$ и гомеоморфизма f дает круговую петлю, из которой получатся петля u. □

Круговые петли называются *гомотопными*, если они $\{1\}$-гомотопны (то есть если гомотопия между ними является связанной в точке $1 \in S^1$). Гомотопия круговых петель, не связанная в точке 1, называется *свободной гомотопией.*

Теорема 2.15. *Круговые петли гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны соответствующие им круговые петли.*

Доказательство. Если $H : S^1 \times I \to X$ – гомотопия круговых петель, то отображение $H'(s, t) = H(e^{2\pi i s}, t)$ будет гомотопией обычных петель.

Обратно, гомотопия круговых петель является факторотображением гомотопии обычных петель по разбиению квадрата, порожденному отношением эквивалентности $(0, t) \sim (1, t)$. □

Опишем операцию умножения круговых петель. Пусть U и V – круговые петли и $U(1) = V(1)$, то есть $u(s) = U(e^{2\pi i s})$, $v(s) = V(e^{2\pi i s})$. Тогда круговая петля UV будет определяться петлей uv. Так как

$$uv(s) = \begin{cases} u(2s),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

для петли UV получим

$$UV(e^{2\pi i s}) = uv(s) = \begin{cases} u(2s),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2s-1),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} U(e^{4\pi i s}),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ V(e^{2\pi i(2s-1)}),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} U(e^{4\pi i s}),\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ V(e^{4\pi i s}),\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Задача 2.13. Пусть U и V – круговые петли с общей начальной точкой $U(1)=V(1)$, соответствующие петли u и v. Докажите, что круговая петля, определенная формулой

$$z\to\begin{cases} U(z^2),\, Im\,z\geq 0\\ V(z^2),\, Im\,z\leq 0\end{cases}$$

отвечает произведению путей u и v.

Решение. Смотрим на окружность S^1 как на множество комплексных чисел единичного модуля. Рассмотрим произвольное число $z=e^{2\pi is}\in S^1$, $s\in[0,1]$, то по определению умножения круговых петель получим

$$UV(z)=\begin{cases} U(e^{4\pi is},\, s\in[0,\frac{1}{2}]\\ V(e^{4\pi is},\, s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}=\begin{cases} U((e^{2\pi is})^2),\, s\in[0,\frac{1}{2}]\\ V((e^{2\pi is})^2),\, s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}=\begin{cases} U(z^2),\, Im\,z\geq 0\\ V(z^2),\, Im\,z\leq 0\end{cases}$$

□

§2.7. Вычисление простейших фундаментальных групп.

Задача 2.14. Докажите, что группа $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)$ тривиальна, то есть состоит из одного элемента.

Решение. Рассмотрим постоянную петлю $e_0:I\to\mathbb{R}^n$, заданную формулой $e_0(t)=0$. Покажем, что любая петля $u:I\to\mathbb{R}^n$ $(u(0)=u(1)=0)$ гомотопна петля e_0. Тогда отображение $H(s,t)=(1-t)u(s)+te_0(s)$ задает искомую гомотопию. Следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)=\{[e_0]\}$. □

Задача 2.15. Вычислите фундаментальную группу антидискретного пространства.

Решение. Пусть X – антидискретное пространство, $x_0\in X$ – произвольная фиксированная точка. Вычислим группу $\pi_1(X,x_0)$.

Рассмотрим постоянную петлю $e_{x_0}:I\to X$, $e_{x_0}(t)=x_0$ и произвольную петлю $u:I\to X$, $u(0)=u(1)=x_0$. Рассмотрим отображение $H:I\times I\to X$, такое что $H(s,0)=e_0(s)$, $H(s,1)=u(s)$ $(s\in I)$, $H(0,t)=H(1,t)=x_0$, а в остальных точках квадрата $I\times I$ ставим в соответствие произвольно выбранные точки. Согласно примеру 1.7 любое отображение из произвольного топологического пространства в топологическое пространство с антидискретной топологией является непрерывным. Следовательно, H – гомотопия и любые две петли в точке x_0 гомотопны. Следовательно, $\pi_1(X,x_0)=\{[e_{x_0}]\}$. □

Задача 2.16. Вычислите фундаментальную группу круга $B^2\subset\mathbb{R}^2$.

Решение. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.6. *Два непрерывных отображения произвольного топологического пространства X в выпуклое подмножество $K\subset\mathbb{R}^n$ гомотопны.*

Доказательство. Напомним, что подмножество $K\subset\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если любые его две точки $a,b\in K$ можно соединить отрезком (то есть множеством $\{(1-t)a+tb,\ t\in[0,1]\}$), целиком лежащим в K.

Пусть $K\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклое множество, $f,g:X\to K$ – непрерывные отображения и $H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$ – прямолинейная гомотопия. По определению выпуклого множества получим, что $H(x,t)\in K$ для любой точки $(x,t)\in X\times I$ и мы получаем гомотопию для отображений f и g. □

Так как круг B^2 – выпуклое множество (докажите это самостоятельно), мы получаем для любой фиксированной точки $x_0\in B^2$ и любых петель u и v в этой точке, что эти петли гомотопны. В частности, все петли в точке x_0 гомотопны постоянной петле e_{x_0}. Следовательно, $\pi_1(B^2,x_0)=\{[e_{x_0}]\}$, то есть фундаментальная группа круга тривиальна. □

Теорема 2.16. *При $n\geq 2$ группа $\pi_1(S^n,(1,0,\ldots,0))$ тривиальна.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 2.7. *Пусть $n\geq 2$. Всякая петля $u:I\to S^n$, образ которой не заполняет сферу S^n целиком (то есть $u(I)\neq S^n$), гомотопна постоянной петле.*

Доказательство. Пусть $p\in S^n\setminus u(I)$. Рассмотрим стереографическую проекцию $\tau:S^n\setminus p\to\mathbb{R}^n$. Петля $v=\tau\circ u:I\to\mathbb{R}^n$ гомотопна постоянной (см. задачу 2.2). Пусть h – соответствующая гомотопия. Тогда $H=\tau^{-1}\circ h$ является гомотопией, соединяющей данную петлю и постоянную петлю на сфере. □

Замечание 2.5. 1) Для любого n существуют петли, заполняющие всю сферу S^n.

2) Петля, заполняющая всю сферу S^n, может быть гомотопна постоянной. Действительно, пусть u – петля, заполняющая всю сферу. Тогда петля uu^{-1} также заполняет всю сферу и гомотопна постоянной.

Напомним лемму Лебега и ее следствие (без доказательства)

Лемма 2.8. *(Лебега) Пусть $f: X \to Y$ непрерывное отображение компактного метрического пространства X в топологическое пространство Y и Γ – открытое покрытие пространства Y. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что образ $f(A)$ любого множества $A \subset X$ диаметра меньшего δ содержится в некотором элементе покрытия Γ.*

Лемма 2.9. *(следствие леммы Лебега) Пусть $u: I \to X$ – путь и Γ – открытое покрытие топологического пространства X. Существует последовательность точке $a_1, \ldots, a_N \in I$, где $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{N-1} < a_N = 1$, такая, что для любого $i = 1, \ldots, N-1$ образ $u([a_i, a_{i+1}])$ содержится в некотором элементе покрытия Γ.*

Лемма 2.10. *Пусть $n \geq 2$. Для любого пути $u: I \to S^n$ существует такое разбиение отрезка I на конечное число отрезков, что сужение пути u а каждый из них связанно гомотопно (относительно множества концевых точек этих отрезков) пути, образ которого нигде не плотен на сфере.*

Доказательство. Напомним, что множество $A \subset X$ топологического пространства X называется нигде не плотным, если в любой окрестности любой точки топологического пространства X существует точка, входящая в дополнение A вместе с некоторой своей окрестностью.

Пусть $x \in S^n$ – произвольная точка. Покроем сферу двумя открытыми множествами $U = S^n \setminus \{x\}$ и $V = S^n \setminus \{-x\}$. В силу следствия леммы Лебега найдется такая последовательность точек $a_1, \ldots, a_N \in I$, где $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{N-1} < a_N = 1$, такая, что для любого $i = 1, \ldots, N-1$ образ $u([a_i, a_{i+1}])$ целиком содержится в U или V. Поскольку каждое из этих множеств гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, где любые два пути с одинаковым началом и концом гомотопны, то каждое из сужений $U|_{[a_i, a_{i+1}]}$ гомотопно пути, образом которого является, к примеру, дуга большой окружности сферы S^n. Таким образом, путь u гомотопен пути, образ которого не то что не заполняет сферу, а даже нигде не плотен в ней. □

Следствие 2.1. Пусть $n \geq 2$. Всякая петля в S^n гомотопна петле, не заполняющей эти сферу целиком.

Итак, все петли на S^n гомотопны постоянной петле, следовательно, при $n \geq 2$ получаем $\pi_1(S^n, (1, 0, \ldots, 0))$ – тривиальна. □

Теорема 2.17. *Фундаментальная группа произведения топологических пространств канонически изоморфна произведению фундаментальных групп сомножителей.*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Доказательство. Сопоставим петле $u: I \to X \times Y$ в точке (x_0, y_0) петли в X и Y, являющиеся координатными выражениями отображения u, то есть $u_1 = pr_x \circ u$ и $u_2 = pr_Y \circ u$. В силу теоремы 2.4 петли u и v гомотопны тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$. Тогда отображение

$$\varkappa : [u] \to ([u_1], [u_2])$$

задает биекцию между группами $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ и $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Очевидно, что эта биекция является гомоморфизмом. Действительно,

$$\begin{aligned}\varkappa([u][v]) = \varkappa([uv]) = ([uv]_1, [uv]_2) = ([pr_X \circ uv], [pr_Y \circ uv]) = ([(pr_X \circ u)(pr_X \circ v)], [(pr_Y \circ u)(pr_Y \circ v)]) = \\ = ([u_1][v_1], [u_2][v_2]) = ([u_1], [v_1])([u_2], [v_2]) = \varkappa([u])\varkappa([v]).\end{aligned}$$

□

Задача 2.17. Докажите, что при $n \geq 3$ $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus 0, (1, 0, \ldots, 0))$ тривиальна.

Решение. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.11. $\mathbb{R}^n \setminus 0$ *гомеоморфно* $\mathbb{R} \times S^{n-1}$, *то есть цилиндру над* $(n-1)$ *-мерной сферой.*

Доказательство. Рассмотрим сферу Ω с центром точке O и цилиндр, описанный около сферы (ось цилиндра проходит через точку O). Пусть $M \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ – произвольная точка. Проведем луч $[OM)$ с началом в точке O. Он пересекает сферу Ω в точке M'. Соответствие $M \to M'$ задает гомеоморфизм $\mathbb{R} \times S^{n-1} \to \Omega \setminus \{N, S\}$. Тогда его композиция со стереографической проекцией $\Omega \setminus \{N, S\} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ будет искомым гомеоморфизмом.

Запишем гомеоморфизм $\mathbb{R} \times S^{n-1} \to \Omega \setminus \{N, S\}$ аналитически (строгое доказательство для гомеоморфизма). Имеем уравнения цилиндра $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ и сферы Ω:

$$\mathbb{R} \times S^{n-1} : (x^1)^2 + \ldots + (x^{n-1})^2 = r^2; \quad \Omega : (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = r^2.$$

Параметрические уравнения луча: $x^1 = p^1 t, \dots, x^n = p^n t$, $t \geq 0$, $(p^1, \dots, p^n)$ – направляющий вектор прямой, содержащей луч.

Рассмотрим произвольную точку $M(\xi^1, \dots, \xi^n)$ на цилиндре. Тогда луч $[OM)$ задается уравнениями $x^1 = \xi^1 t, \dots, x^n = \xi^n t$. Пересекаем его со сферой, то есть решаем систему из уравнения сферы и уравнений луча (подставляем уравнения луча в уравнение сферы). Тогда $t = \frac{r^2}{(\xi^1)^2+\ldots+(\xi^n)^2}$ и

$$M'\left(\xi^1 \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2}}, \dots, \xi^n \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2}}\right)$$

Если координаты точки M' обозначить через $(\eta^1, \dots, \eta^n)$, то формулы, задающие отображение $M \to M'$ будут иметь вид

$$\eta^1 = \xi^1 \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2}}, \quad \dots, \quad \eta^n = \xi^n \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2}}.$$

Такое отображение будет непрерывно, так как задается непрерывными функциями. Легко видеть, что обратное отображение задается функциями вида

$$\xi^1 = \eta^1 \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(\eta^i)^2}}, \quad \dots, \quad \xi^n = \eta^n \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(\eta^i)^2}}.$$

Следовательно, отображение цилиндра на сферу является гомеоморфизмом. □

Итак, мы показали, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus 0$ гомеоморфно цилиндру $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Так как фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны, мы можем отождествить фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}^n \setminus 0$ и $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Тогда по теореме 2.17 имеем

$$\pi_1(\mathbb{R} \times S^{n-1}) = \pi_1(\mathbb{R}) \times \pi_1(S^{n-1}) = \{[e_0]\} \times \{[e_{(1,0,\dots,0)}]\} = \{([e_0], [e_{(1,0,\dots,0)}]\}.$$

Мы получили, что фундаментальная группа пространства $\mathbb{R}^n \setminus 0$ является тривиальной. □

§2.8. Односвязность.

Непустое топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и всякая петля в нем гомотопна постоянной петле. Другими словами, линейно связное пространство X называется односвязным, если для всякой его точки $x \in X$ фундаментальная группа $\pi_1(X, x)$ тривиальна.

Задача 2.18. Докажите, что линейно связное двуточечное пространство односвязно.

Решение. Обозначим данное двуточечное пространство $X = \{a, b\}$. На двуточечном пространстве существует только три топологии: антидискретная; дискретная; топология, в которой открыта только одна точка из двух (то есть топология $\{\emptyset, X, \{a\}\}$).

1. Рассмотрим антидискретную топологию. Выясним, будет ли такое пространство линейно связным. Попробуем соединить точку a с точкой b непрерывным путем. Определим отображение $u : I \to X$ следующим образом $u([0, 1)) = a$, $u(1) = b$. Проверим непрерывность этого отображения. В топологическом пространстве X всего два открытых множества $\emptyset$ и X. Их полные прообразы при отображении u суть множества $\emptyset$ и I соответственно. Они являются открытыми в I. Следовательно, отображение u является непрерывным. Откуда следует, что антидискретное пространство X является линейно связным.

Вычислим группу $\pi_1(X, a)$. Согласно примеру 1.7 любое отображение $u : I \to X$ в антидискретное пространство X будет непрерывным, следовательно, любое отображение $u : I \to X$, $u(0) = u(1) = a$ будет петлей. Любые две петли будут гомотопны, так как любое отображение $H : I \times I \to X$, $H(s, 0) = u(s)$, $H(s, 1) = v(s)$ будет непрерывным, а значит, гомотопией, соединяющей петли u и v. Следовательно, фундаментальная группа тривиальна и пространство является односвязным.

2. Дискретная топология. В этом случае X не является линейно связным топологическим пространством. Действительно, допустим противное, то есть, что X линейно связно. Тогда оно является связным топологическим пространством. Но, с другой стороны, $X = \{a\} \cup \{b\}$, то есть оно представимо в виде объединения непустых, открытых, не пересекающихся множеств, то есть оно несвязно. Полученное противоречие показывает, что X не является линейно связным, а значит, не является и односвязным.

3. Топология $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ (случай с точкой b такой же с точностью до обозначений). Проверим линейную связность пространства X. Для этого нам нужно соединить точки a и b путем. Определим отображение $u : I \to X$ следующим образом: $u([0, 1)) = a$, $u(1) = b$. Проверяем непрерывность этого отображения. У нас сейчас три открытых множества. Нужно найти их полные прообразы:

$$f^{-1}(a) = [0, 1); \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \quad f^{-1}(X) = I.$$

Все три множества открыты в I (напомним, что на I индуцированная топология из $\mathbb{R}$). Так как точка b не является открытым множеством, ее проверять не нужно. Итак, мы получаем. что пространство X является линейно связным.

Вычислим фундаментальную группу. Пусть $u : I \to X$ – произвольная петля в точке a. Рассмотрим отображение

$$H(s,t) = \begin{cases} u(s),\ t \in [0, \frac{1}{2}) \\ b,\ t = \frac{1}{2} \\ a,\ t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Это отображение претендует на звание гомотопии, соединяющей петлю u с постоянной петлей в точке a (то есть петлей $e_a : I \to a$). Нам нужно проверить непрерывность этого отображения.

$$H^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \quad H^{-1}(X) = I; \quad H^{-1}(a) = (I \times (\tfrac{1}{2}, 1]) \cup (u^{-1}(a) \times [0, \tfrac{1}{2})) - -$$

открытые множества в $I \times I$. Таким образом, мы получили необходимую нам гомотопию и можем сделать вывод, что фундаментальная группа $\pi_1(X, a)$ является тривиальной.

Рассмотрим точку b. Пусть $u : I \to X$ – произвольная петля в точке b. Тогда отображение

$$H(s,t) = \begin{cases} u(s),\ t \in [0, \frac{1}{2}) \\ b,\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

является гомотопией, связывающей путь u с постоянным путем в точке b. Непрерывность этого отображения следует из того, что множества

$$H^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \quad H^{-1}(X) = I; \quad H^{-1}(a) = u^{-1}(a) \times [0, \tfrac{1}{2})$$

являются открытыми. □

Теорема 2.18. *Пусть X – линейно связное топологическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны*

1. *пространство X односвязно;*
2. *всякое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ (свободно) гомотопно постоянному;*
3. *всякое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{B}^2 \to X$, где окружность S^1 является границей замкнутого круга $\bar{B}^2$;*
4. *всякие два пути, соединяющие точки x_0 и x_1 пространства X гомотопны друг другу.*

Доказательство. 1. $\to$ 2. Пусть пространство X односвязно. Рассмотрим произвольное отображение непрерывное $f : S^1 \to X$ и обозначим через $x = f(1) \in X$. Обозначим через $f_x : S^1 \to X$ – постоянное отображение, ставящее каждой точке окружности S^1 точку x. Очевидно, что оно является непрерывным. Тогда мы получаем две круговые петли в точке x: f и f_x. Обозначим через u и e_x соответствующие им обычные петли в точке x, то есть $u : I \to X$, $u(s) = f(e^{2\pi i s})$ и $e_x : I \to X$, $e_x(s) = f_x(e^{2\pi i s}) = x$. Так как пространство X односвязно, петли u и e_x гомотопны. Тогда по теореме 2.15 соответствующие им круговые петли также $\{1\}$-гомотопны и тем более свободно гомотопны. Итак, мы получили, что отображения f и f_x (свободно) гомотопны.

2. $\to$ 3. Пусть любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ свободно гомотопно постоянному. Тогда существует гомотопия $h : S^1 \times I \to X$, такая что $h(p, 0) = f(p)$, $h(p, 1) = x_0$. Тогда согласно теореме 1.9 существует непрерывное отображение $h' : S^1 \times I/_{S^1 \times \{1\}} \to X$ – это фактор отображения h. (Очевидно, что h постоянно на $S^1 \times \{1\}$). Так как $S^1 \times I/_{S^1 \times 1}$ гомеоморфно $\bar{B}^2$ (одно основание цилиндра стягивается в точку), то h' – искомое отображение.

3) $\to$ 4). Нам даны два пути u_1 и u_2 с началами в точке x_0 и концами в точке x_1. Зададим отображение границы квадрата $I \times I$ в пространство X ($g : \partial(I \times I) \to X$) следующим образом: пусть $g(t, 0) = u_1(t)$, $g(t, 1) = u_2(t)$, $g(0, t) = x_0$ и $g(1, t) = x_1$ при $t \in I$. Как мы знаем, граница квадрата гомеоморфна окружности. Обозначим этот гомеоморфизм $\varkappa : \partial(I \times I) \to S^1$. Тогда отображение $g \circ \varkappa^{-1} : S^1 \to X$ по условию может быть продолжено до отображения $f : \bar{B}^2 \to X$. При этом $f|_{S^1} = g \circ \varkappa^{-1}$. Далее, круг $\bar{B}^2$ гомеоморфен квадрату $I \times I$. Обозначим этот гомеоморфизм через $\kappa : I \times I \to \bar{B}^2$. Тогда отображение $h = f \circ \kappa$ будет искомой гомотопией. Действительно, очевидно, что оно непрерывно как композиция таковых. Кроме того, $h|_{\partial(I \times I)} = g$. Следовательно, все условия из определения гомотопии выполняются.

4) $\to$ 1). Положим $x_0 = x_1$ и вторую петлю возьмем тождественной. □

§2.9. Понятие о высших гомотопических группах.

Пусть X – топологическое пространство, $x_0 \in X$ – произвольная фиксированная точка. Непрерывное отображение $I^r \to X$, отображающее границу ∂I^r куба I^r в точку x_0, называется *сфероидом* пространства X в точке x_0.

Два r-мерных сфероида называются *гомотопными*, если они ∂I^r-гомотопны. Произведение uv сфероидов u и v ($r \geq 1$) определяется формулой

$$uv(t_1, \ldots, t_r) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \ldots, t_r), \ t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_r), \ t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Обозначим $\Omega_r(X, x_0)$ множество r-мерных сфероидов пространства X в точке x_0. Множество гомотопических классов r-мерных сфероидов пространства X в точке x_0 называется r-й (или *r-мерной*) *группой гомотопий* или *гомотопической группой* $\pi_r(X, x_0)$ этого пространства в точке x_0. Произведение сфероидов индуцирует произведение в множестве $\pi_r(X, x_0)$, превращая $\pi_r(X, x_0)$ в группу.

Задача 2.19. Докажите, что $\pi_r(\mathbb{R}^n, 0)$ тривиальна, то есть состоит из одного элемента.
Указание. Покажите, что любой сфероид в точке x_0 гомотопен постоянному.

Имеет место теорема

Теорема 2.19. *При $r \geq 2$ группа $\pi_r(X, x_0)$ абелева для любого топологического пространства X и любой его точки x_0.*

§2.10. Роль отмеченной точки в фундаментальной группе.

Пусть $x_0, x_1 \in X$ – произвольные точки топологического пространства X; s – путь, соединяющий точки x_0 и x_1. Обозначим гомотопический класс пути s через $[s]$. Определим отображение $T_s : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ формулой

$$T_s([a]) = [s^{-1}][a][s],$$

где s^{-1} обозначает обратный путь для s, то есть путь, задаваемый формулой $s^{-1}(t) = s(1-t)$.

Теорема 2.20. *Отображение T_s является гомоморфизмом групп, то есть $T_s([a][b]) = T_s([a])T_s([b])$.*

Доказательство. Действительно,

$$T_s([a][b]) = [s^{-1}][a][s][s^{-1}][b][s] = T_s([a])T_s([b]).$$

□

Теорема 2.21. *Если путь u соединяет точки x_0 и x_1, а путь v соединяет точки x_1 и x_2, то $T_{uv} = T_v \circ T_u$.*

Доказательство. Действительно,

$$T_{uv}([a]) = [uv]^{-1}[a][uv] = [v]^{-1}[u]^{-1}[a][u][v] = T_v \circ T_u([a]).$$

□

Теорема 2.22. *Если путь u гомотопен пути v, то $T_u = T_v$.*

Доказательство. Из определения T_s следует, что это отображение зависит только от гомотопического класса пути. □

Теорема 2.23. $T_{e_a} = id_{\pi_1(X,a)} : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$.

Доказательство. $T_{e_a}([u]) = [e_a u e_a] = [u]$. □

Теорема 2.24. $T_{s^{-1}} = T_s^{-1}$.

Доказательство. Так как $s^{-1}s \sim e_{x_1}$, то $T_{s^{-1}} \circ T_s = T_{s^{-1}s} = T_{e_{x_1}} = id_{\pi_1(X,x_1)}$. □

Следствие 2.2. Для любого пути s гомоморфизм T_s является изоморфизмом.

Теорема 2.25. *Если точки x_0 и x_1 лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства X, то группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны.*

Доказательство. Если точки x_0 и x_1 лежат в одной компоненте линейной связности, то их можно соединить путем s. Тогда гомоморфизм $T_s : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ будет изоморфизмом групп. □

Несмотря на результат этой теоремы, мы не можем писать $\pi_1(X)$ даже если топологическое пространство X линейно связно. Дело в том, что хотя группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны, между ними нет никакого канонического изоморфизма.

Следствие 2.3. Пространство X односвязно тогда и только тогда, когда оно линейно связно и для некоторой точки $x_0 \in X$ фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиальна.

Следствие 2.4. Если петля s является представителем элемента $[s] \in \pi_1(X, x_0)$, то T_s является внутренним автоморфизмом этой группы, определенным формулой $[a] \to [s]^{-1}[a][s]$.

Теорема 2.26. *Пусть X – топологическое пространство, $x_0, x_1 \in X$ – произвольные различные точки. Изоморфизм $T_s : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ не зависит от пути тогда и только тогда, когда группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.*

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть изоморфизм T_s не зависит от выбора пути. Следовательно, изоморфизм переноса вдоль петли в точке x_0 тривиален (то есть тождественен). Рассмотрим произвольный элемент $[b] \in \pi_1(X, x_0)$. По условию $[b]^{-1}[a][b] = T_s([a]) = [a]$ для любого $[a] \in \pi_1(X, x_0)$, то есть $[a][b] = [b][a]$.

$\Leftarrow$). Пусть фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

Рассмотрим два произвольных пути s_1, s_2, соединяющих точки x_0 и x_1. Так как $T_{s_1 s_2^{-1}} = T_{s_2}^{-1} \circ T_{s_1}$, получим $T_{s_1} = T_{s_2}$ тогда и только тогда, когда $T_{s_1 s_2^{-1}} = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

Пусть $[b] \in \pi_1(X, x_0)$ – класс петли $s_1 s_2^{-1}$. Если группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева, то

$$T_{s_1 s_2^{-1}}([a]) = [b]^{-1}[a][b] = [a],$$

то есть $T_{s_1 s_2^{-1}} = id$, то есть $T_{s_1} = T_{s_2}$. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что если фундаментальная группа топологического пространства X абелева, то мы вправе писать $\pi_1(X)$.

§2.11. Накрытия.

Пусть X и B – топологические пространства, $p : X \to B$ – непрерывное отображение. Пусть p сюръективно и для любой точки из B существует окрестность U, такая что ее полный прообраз $p^{-1}(U)$ при отображении p представляется в виде объединения непересекающихся открытых множеств V_α, каждое из которых посредством p гомеоморфно отображается на U. В этом случае отображение $p : X \to B$ называется *накрытием* (пространства B). Топологическое пространство B называется *базой* накрытия, X – *накрывающим пространством* для B и *тотальным пространством* для этого накрытия. Отображение p также называется *накрывающим отображением* или *проекцией* этого накрытия. Окрестность U называется *правильно (или хорошо) накрытой.*

Приведем простейший пример накрытия (оно называется *тривиальным*).

Теорема 2.27. *Для любого топологического пространства B и любого дискретного топологического пространства F (то есть топологического пространства с дискретной топологией) проекция pr_B : $B \times F \to B$ является накрытием.*

Доказательство. Очевидно, что отображение pr_B является непрерывным, так как для любого открытого множества $U \subset B$ его полный прообраз $pr_B^{-1}(U) = (U \times F)$ является открытым множеством в $B \times F$ (здесь топология декартова произведения). По определению проекции это отображение сюръективно.

Покажем, что само множество B является правильно накрытым. Действительно,

$$(pr_B)^{-1}(B) = X = \bigcup_{y \in F} (B \times y),$$

а поскольку топология в F дискретна, то каждое из множеств $B \times y$ открыто в тотальном пространстве накрытия, а сужение pr_B на каждое из них есть гомеоморфизм. $\square$

Задача 2.20. Докажите, что если $U' \subset U \subset B$ и окрестность U является правильно накрытой, то и окрестность U' является правильно накрытой.

Следующая теорема показывает, что любое накрытие локально устроено как тривиальное.

Теорема 2.28. *Пусть отображение $p : X \to B$ является накрытием. Тогда для любой точки $a \in B$ полный прообраз $p^{-1}(a)$ является дискретным подпространством пространства X и существует такая окрестность $U \subset B$ точки a и такой гомеоморфизм $h : p^{-1}(U) \to U \times p^{-1}(a)$, что $p|_{p^{-1}(U)} = pr_U \circ h$.*

Доказательство. Пусть $p : X \to B$ – накрытие. Покажем, что на множестве $p^{-1}(a)$ индуцируется дискретная топология. Напомним, что для накрытия полный прообраз $p^{-1}(U)$ распадается в объединение не пересекающихся открытых множеств U_α. В каждое из них попадает ровно по одной точке из $p^{-1}(a)$. В самом деле, если бы в каком-то U_α было две точки из $p^{-1}(a)$, то гомеоморфизм $p|_{U_\alpha}$ должен бы был обе их отобразить в точку a. Это противоречит биективности гомеоморфизма. Таким образом, мы получаем, что любое одноточечное подмножество в $p^{-1}(a)$ можно получить как пересечение $p^{-1}(a)$ и множества U_α, открытого в X. По определению индуцированной топологии это означает, что это одноточечное подмножество открыто. Тогда открытым будет и любое подмножество в $p^{-1}(a)$ как объединение одноточечных.

Построим гомеоморфизм $h : p^{-1}(U) \to U \times p^{-1}(a)$ для произвольной правильно накрытой окрестности $U \subset B$ точки a. По определению правильно накрытой окрестности имеем $p^{-1}(U) = \cup_\alpha U_\alpha$. Пусть $x \in p^{-1}(U)$ – произвольная точка, U_α – то из множеств, которому принадлежит точка x ($x \in U_\alpha$). Зададим отображение h по формуле $h(x) = (p(x), c)$, где $c = p^{-1}(a) \cap U_\alpha$. Это и будет искомый гомеоморфизм. Действительно,

$$pr_U \circ h(x) = pr_U((p(x), c)) = p(x).$$

Так как множества U_α не пересекаются, соответствие h является биекцией. Так как p является непрерывным отображением, полный прообраз любого открытого в $U \times p^{-1}(a)$ множества открыт в $p^{-1}(U)$, следовательно, h непрерывно.

Если V – открытое множество в $p^{-1}(U)$, то его точки распределяются по множествам U_α, то есть мы получаем, что $V = \cup_\alpha (V \cap U_\alpha)$. Так как в сужении на U_α отображение p является гомеоморфизмом, образы этих множеств будут открыты в U, а значит будет открыто и множество $p(V)$ (как объединение открытых множеств). Тогда в $U \times p^{-1}(a)$ будет открыто любое множество вида $V \times W$, где $W \subset p^{-1}(a)$ – произвольное подмножество. Следовательно, отображение h^{-1} непрерывно.

Итак, мы показали, что h является гомеоморфизмом. □

Пример 2.5. Отображение $\mathbb{R} \to S^1$, заданное формулой $x \to e^{2\pi i x}$ является накрытием. Для любой точки $z \in S^1$ (мы рассматриваем окружность S^1 как подмножество комплексных чисел по модулю равных 1) множество $U_z = S^1 \setminus \{-z\}$ является ее правильно накрытой окрестностью. Действительно, пусть $z = e^{2\pi i x}$. Тогда прообраз окрестности U_z – это множество $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(x + k - \frac{1}{2}, x + k + \frac{1}{2})$. Объясним, как получилось это множество. Представим $z = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Тогда $-z = (-\cos 2\pi x, -\sin 2\pi x) = (\cos(-\pi + 2\pi x), \sin(-\pi + 2\pi x)) = e^{2\pi i(-\frac{1}{2}+x)}$. Пройдем оборот по окружности, то есть прибавим $2\pi i$: $-z = e^{2\pi i(-\frac{1}{2}+x)+2\pi i} = e^{2\pi i(\frac{1}{2}+x)}$. Чтобы крутиться дальше, надо прибавлять $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$. В результате получим

$$p^{-1}(U_z) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(x - \frac{1}{2} + k, x + \frac{1}{2} + k \right).$$

Для того чтобы выделить наиболее содержательные примеры, будем называть накрытия с линейно связным тотальным пространством *накрытиями в узком смысле*. Накрытие из предыдущего примера является накрытием в узком смысле.

Пример 2.6. Отображение $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, заданное формулой $(x, y) \to (e^{2\pi i x}, y)$ является накрытием. Для любой точки $z \in \mathbb{R}^2$ (здесь отождествляются $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$) правильно накрытой окрестностью является множество $S^1 \setminus \{z\} \times \mathbb{R}$. Представить себе это накрытие можно так: плоскость наматывается на цилиндр.

Теорема 2.29. *Если $p : X \to B$ и $p' : X' \to B'$ – накрытия, то отображение $p \times p' : X \times X' \to B \times B'$ является накрытием. Оно называется произведением накрытий p и p'.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(b, b') \in B \times B'$. Тогда хорошо накрытой окрестностью будет окрестность $U \times U'$, где U и U' – хорошо накрытые окрестности накрытий p и p' соответственно. □

Пример 2.7. Отображение $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, заданное формулой $(x, y) \to (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, является накрытием (плоскость накрывает тор).

Пример 2.8. Для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $p : S^1 \to S^1$, заданное формулой $p(z) = z^n$ является накрытием (окружность наматывается на себя n раз).

Пусть $z \in S^1$ – произвольная точка. Прообраз точки $-z$ при проекции состоит из n точек, которые разбивают тотальное пространство накрытия на n дуг. При этом сужение проекции на каждую из них определяет гомеоморфизм этой дуги на множество $S^1 \setminus \{-z\}$ точки z. Он задается соотношением

$$z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \to \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Пример 2.9. Напомним, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ получается в результате отождествления противоположных точек n-мерной сферы. Тогда естественная проекция $S^n \to \mathbb{R}P^n$ является накрытием.

Прообраз точки $y \in \mathbb{R}P^n$ – это пара точек $\{x, -x\} \subset S^n$. Проходящая через цент сферы плоскость, ортогональная вектору x, разбивает сферу на две открытых полусферы, каждая из которых гомеоморфно проектируется на (гомеоморфную $\mathbb{R}^n$) окрестность точки $y \in \mathbb{R}P^n$.

Пусть $p : X \to B$ – накрытие. Мощность прообраза $p^{-1}(a)$ точки $a \in B$ называется *кратностью накрытия в точке a* или *числом листов накрытия над точкой a*.

Теорема 2.30. *Если база накрытия связна, то кратность накрытия в точке базы не зависит от выбора точки.*

Доказательство. Пусть $\tilde{B} \subset B$ – множество точек, для которых все $p^{-1}(a)$ имеют одинаковую мощность. Для любой точки $a \in \tilde{B}$ существует правильно накрытая окрестность U, $p^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$. Если $U \subset \tilde{B}$, то $\tilde{B}$ является открытым множеством. Если существует точка $b \in U$, для которой $p^{-1}(b)$ имеет другую мощность (не все U умещается в $\tilde{B}$), то получим $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha = \cup_{\beta \in C} \tilde{V}_\beta$. Из этих двух разложений получаем, что $p^{-1}(U)$ имеет два разложения на множества, находящиеся в биективном соответствии с U, причем их количество различно. Получаем противоречие. Следовательно, множество $\tilde{B}$ открыто. Так как B связное топологическое пространство, получаем, что $\tilde{B} = B$. Действительно, пусть существует точка $b \in B$, которая не принадлежит $\tilde{B}$. Тогда множество точек из B, для которых $p^{-1}(b)$ имеет такую же мощность, будет открытым множеством и так далее. Все эти множества можно объединить в два семейства. Объединение множеств каждого семейства будет открытым, непустым и они не пересекаются. Следовательно, получаем представление B в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств. В результате мы получаем противоречие со связностью B. $\square$

Тем самым в случае накрытия со связной базой имеет смысл говорить о числе листов данного накрытия, понимая под этим число листов над произвольной точкой его базы. Если число листов конечно и равно n, то накрытие называется *n-листным.* В противном случае говорят, что накрытие является *бесконечнолистным.*

Введем следующее соглашение. По определению, прообраз $p^{-1}(U)$ всякой правильно накрытой окрестности $U \subset B$ разбивается на открытые подмножества $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$, такие что сужение p на каждое подмножество представляет собой гомеоморфизм $V_\alpha \to U$. Будем называть каждое из подмножеств V_α *листом* накрытия над окрестностью U.

Пример 2.10. 1. Рассмотрим накрытие $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, заданное соотношением $(x, y) \to (e^{2\pi i x}, y)$. Число листов этого накрытия бесконечно (счетно).

2. Рассмотрим накрытие $S^1 \to S^1$, заданное соотношением $z \to z^n$. Число листов равно n.

Накрытие $p : X \to B$ называется *универсальным*, если пространство X односвязно.

Например, накрытие $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, $(x, y) \to (e^{2\pi i x}, y)$ является универсальным.

§2.12. Накрывающие пути.

Пусть $p : X \to B$ и $f : A \to B$ – произвольные непрерывные отображения. Говорят, что отображение $g : A \to X$ *накрывает отображение* f или является его *поднятием* (по отношению к p), если $p \circ g = f$.

Множество топологических задач могут быть сформулированы как задачи поиска непрерывного накрывающего отображения для данного непрерывного отображения. Задачи этого типа называются задачами *поднятия.* Их формулировки могут включать дополнительные требования на поднятия, например, в некоторых из них требуется, чтобы поднятие было фиксировано на некотором подпространстве.

Пусть, в частности, $p : X \to B$ – накрытие, а отображение, которое требуется поднять – путь $s : I \to B$. Тогда путь $\tilde{s} : I \to X$, являющийся поднятием пути s, называется *накрывающим путем* пути s.

Задача 2.21. Пусть путь $s : I \to S^1$ задан соотношением $t \to e^{2\pi i t}$. Докажите, что путь $\tilde{s} : I \to \mathbb{R}$, заданный соотношением $t \to n - 1 + t$ является накрывающим путем относительно универсального накрытия $p : \mathbb{R} \to S^1$, $x \to e^{2\pi i x}$.

Решение. Надо проверить, что $p \circ \tilde{s} = s$. Имеем

$$p \circ \tilde{s}(t) = e^{2\pi i(n-1+t)} = e^{2\pi i t} \cdot e^{2\pi(n-1)} = e^{2\pi i t} \cdot 1 = s(t).$$

$\square$

Задача 2.22. Докажите, что путь $\tilde{s}_n : I \to \mathbb{R}$, задаваемый соотношением $t \to nt$ накрывает путь $s_n : I \to S^1$, $t \to e^{2\pi i n t}$ относительно универсального накрытия $p : \mathbb{R} \to S^1$, $x \to e^{2\pi i x}$.

Задача 2.23. Пусть $p : X \to B$ – накрытие, u, v – пути вида $I \to B$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ – их накрывающие пути, $\tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) = x_0$, $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1) = x_1$. Если пути $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ гомотопны, то гомотопны пути u и v.

Доказательство. Пусть гомотопны пути $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$. Тогда существует гомотопия $H : I \times I \to X$, такая что $H(0, t) = x_0$, $H(1, t) = x_1$, $H(\tau, 0) = \tilde{u}(\tau)$, $H(\tau, 1) = \tilde{v}(\tau)$. Так как $p \circ \tilde{u} = u$ и $p \circ \tilde{v} = v$, получим, что отображение $p \circ H : I \times I \to B$ будет гомотопией, соединяющей пути u и v. $\square$

Докажем цепочку вспомогательных теорем, которые позволят нам доказать основную теорему о накрывающем пути.

Теорема 2.31. *Пусть $p : X \to B$ – тривиальное накрытие, $x_0 \in X$, $b_0 \in B$, такие что $p(x_0) = b_0$. Для всякого непрерывного отображения $f : A \to B$, переводящего некоторую точку $a_0 \in A$ в точку b_0, существует его непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \to X$, для которого $\tilde{f}(a_0) = x_0$.*

Доказательство. По условию $X = B \times F$, где F – дискретное пространство, $p = pr_B$. Пусть $x_0 = (b_0, y_0)$. Соответствие $a \to (f(a), y_0)$ определяет непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \to X$. Действительно, оно является непрерывным, так как непрерывно отображение f, а в пространстве F дискретная топология. Кроме того,

$$pr_B \circ \tilde{f}(a) = pr_B(f(a), y_0) = f(a).$$

□

Теорема 2.32. *Пусть $p : X \to B$ – тривиальное накрытие, $x_0 \in X$, $b_0 \in B$, $p(x_0) = b_0$. Если множество A связно, то для всякого непрерывного отображения $f : A \to B$, переводящего некоторую точку $a_0 \in A$ в точку b_0, непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \to X$, такое что $\tilde{f}(a_0) = x_0$ единственно.*

Доказательство. Пусть $x_0 = (b_0, y_0) \in B\times F = X$. Пусть $\tilde{f} : A \to X = B\times F$ – поднятие f, то есть $pr_B\circ\tilde{f} = f$. Так как $\tilde{f}$ непрерывно, координатные отображения $f = pr_B \circ \tilde{f}$ и $g = pr_F \circ \tilde{f}$ непрерывны. Докажем, что g является постоянным отображением, то есть $g(a) = y_0$ для любой точки $a \in A$. Предположим противное, то есть предположим, что существуют точки y_0 и y_1 в F, такие что их полные прообразы $g^{-1}(y_0)$ и $g^{-1}(y_1)$ не пусты. Остальные значения y поместим либо к y_0, либо к y_1. Обозначим полученные множества F_1 и F_2. Так как на F топология дискретна, множества F_1 и F_2 являются открытыми. Так как g непрерывное отображение, полные прообразы $g^{-1}(F_1)$ и $g^{-1}(F_2)$ являются открытыми в A и не пусты. Так как все A отображается в F, получим $A = g^{-1}(F_1) \cup g^{-1}(F_2)$, что противоречит связности A. Следовательно, $g(a) = y_0$ для любого $a \in A$. Откуда получим

$$\tilde{f}(a) = (pr_B \circ \tilde{f}(a), pr_F \circ \tilde{f}(a)) = (f(a), y_0),$$

то есть отображение $\tilde{f}$ совпадает с построенным в теореме 2.31 поднятием, следовательно, поднятие единственно. □

Теорема 2.33. *Пусть $p : X \to B$ – накрытие, а A – некоторое связное и локально связное пространство (каждая точка имеет связную окрестность). Если непрерывные отображения $f, g : A \to X$ совпадают в некоторой точке и $p \circ f = p \circ g$, то $f = g$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $G = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$. По условию G не пусто. Для любой точки $a \in A$ выберем связную окрестность $V_a \subset (p \circ f)^{-1}(U_b)$, где $U_b \subset B$ – правильно накрытая окрестность. Если $a \in G$ (то есть $f(a) = g(a)$), то так как $p^{-1}(U_b)$ – тривиальное накрытие, получим: f и g являются поднятиями одного и того же отображения $p\circ f = p\circ g$ с начальными условиями $x_0 = f(a) = g(a)$, $b_0 = p \circ f(a) = p \circ g(a)$. Тогда по предыдущей теореме они совпадают на V_a, следовательно, $V_a \subset G$, то есть G открыто. Если $a \notin G$, то $V_a \cap G = \emptyset$ (если в V_a есть хотя бы одна точка из G, то все точки V_a принадлежат G), следовательно, $V_a \subset A \setminus G$, следовательно, $A \setminus G$ – открыто. По условию A связно и $G \neq \emptyset$, следовательно, $A = G$. □

Теорема 2.34. *(о накрывающем пути) Пусть $p : X \to B$ накрытие, $x_0 \in X$, $b_0 \in B$, $p(x_0) = b_0$. Для любого пути $s : I \to B$, начинающегося в точке b_0, существует единственный путь $\tilde{s} : I \to X$, начинающийся в точке x_0 и накрывающий путь s. Другими словами, существует единственный путь $\tilde{s} : I \to X$, такой что $\tilde{s}(0) = x_0$, $p \circ \tilde{s} = s$.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие базы набором правильно накрытых окрестностей его точек и такое разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$, что образ $s([a_i, a_{i+1}])$ содержится целиком в правильно накрытой окрестности U_i (следствие леммы Лебега). Поскольку сужение накрытия на прообраз $p^{-1}(U_0)$ является тривиальным накрытием и $f([a_0, a_1]) \subset U_0$, то существует такое поднятие отображения $s|_{[a_0,a_1]}$, что $\tilde{s}(a_0) = x_0$. Другими словами, мы поднимаем путь $s|_{[a_0,a_1]}$ в тот же лист накрытия, который содержит точку x_0. Пусть $x_1 = \tilde{s}(a_1)$. Делаем то же самое и так далее. Единственность данного построения следует из предыдущей теоремы. □

Теорема 2.35. *(о накрывающей гомотопии) Пусть $p : X \to B$ – накрытие, $x_0 \in X$, $b_0 \in B$, $p(x_0) = b_0$. Пусть пути $u, v : I \to B$ начинаются в точке b_0 и пусть $\tilde{u}, \tilde{v} : I \to X$ – пути с началом в точке x_0, накрывающие пути u и v соответственно. Тогда если пути u и v гомотопны, то $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ также гомотопны.*

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы о накрывающем пути, но является более громоздким. Поэтому мы опустим это доказательство.

Следствие 2.5. В предположениях теоремы накрывающие пути $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ кончаются в одной и той же точке, то есть $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1)$.

Замечание 2.6. Подчеркнем, что у накрывающих путей общее начало x_0. Тогда совпадают и из концы.

Следствие 2.6. Пусть $p : X \to B$ – накрытие. Если петля $s : I \to B$ накрывается незамкнутым путем (говорят, что петля размыкается при подъеме), то она не гомотопна постоянной.

Пример 2.11. В задаче 2.21 мы показали, что петля $s(t) = e^{2\pi it}$ на окружности S^1 относительно накрытия $p : \mathbb{R} \to S^1$ накрывается путем $\tilde{s}(t) = n - 1 + t$. Этот путь не является петлей, так как $\tilde{s}(0) = n - 1$, $\tilde{s}(1) = n$, то есть при подъеме петля s размыкается, следовательно, она не гомотопна постоянной, то есть фундаментальная группа окружности не тривиальна. Вычислим фундаментальную группу окружности мы в следующем параграфе.

Доказательство. Очевидно, что постоянный путь покрывается постоянным путем. В силу предыдущего следствия всякая петля, гомотопная постоянной петле, покрывается петлей. □

§2.13. Поверхности и их триангуляция.

Чтобы вычислить фундаментальную группу окружности, нам потребуется разработать дополнительную технику.

1. Топологические треугольники.Топологическое пространство X, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу, назовем *двумерным многообразием.* Удобно изучать такие многообразия, разбивая их на куски, гомеоморфные треугольникам евклидовой плоскости. Уточним это понятие.

Топологическим треугольником в двумерном многообразии X будем называть пару (T, φ), где T – топологическое подпространство в X (то есть подмножество с индуцированной топологией, $\varphi : \triangle \to T$ – гомеоморфизм некоторого треугольника $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ на T (на $\mathbb{R}^2$ рассматривается евклидова топология, а на $\triangle$ – индуцированная топология из $\mathbb{R}^2$). Если гомеоморфизм φ фиксирован (или понятен из контекста), то для краткости мы будем называть топологическим треугольником само подпространство T.

Образы вершин и сторон треугольника $\triangle$ (вместе с сужением гомеоморфизма φ на них) называются соответственно *вершинами* и *ребрами* топологического треугольника T. Для единообразия удобно и стороны треугольника $\triangle$ называть его ребрами.

Определим ориентацию треугольника. Из вершин треугольника $\triangle$ можно образовать различные упорядоченные тройки точек. Считаем две тройки вершин эквивалентными, если одна из другой получается циклической перестановкой. Из алгебры известно, что одна упорядоченная тройка получается из другой тогда и только тогда , когда они являются подстановками одной четности. Следовательно, получаем ровно два класса эквивалентности. Будем говорить, что треугольник $\triangle$ *ориентирован*, если фиксирован один из названных классов. Топологический треугольник (T, φ) называется *ориентированным*, если ориентирован соответствующий ему треугольник $\triangle$. Очевидно, что ориентация треугольника $\triangle$ равнозначна заданию определенного направления обхода его вершин (по часовой или против часовой стрелки). Это направление обхода с помощью гомеоморфизма φ определяет направление обхода топологического треугольника T. Эта ориентация будет называться *индуцированной гомеоморфизмом* φ. Ориентация треугольника задает ориентацию его ребер как упорядоченных пар вершин.

Заметим, что аналогичным образом задается ориентация n-угольника и его ребер при $n > 3$ (заданием направления обхода вершин).

Триангуляцией двумерного многообразия X называется конечное множество $K = \{(T_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$ топологических треугольников в X, удовлетворяющее двум требованиям

1. $X = \bigcup_{i=1}^k T_i$
2. пересечение любой пары топологических треугольников либо пусто, либо совпадает с их общей вершиной или общим ребром.

Привести пример триангуляции и не триангуляции (картинка).

Двумерное многообразие, для которого существует триангуляция, называется *триангулируемым.* Если для топологического пространства X существует триангуляция K такая, что любые две вершины треугольников из K можно соединить путем, составленным из ребер, то X назовем *связным двумерным многообразием.*

Замкнутой поверхностью будем называть связное (а значит, триангулируемое) двумерное многообразие.

Задача 2.24. Построить какую-либо триангуляцию тора и проективной плоскости.

Топологические свойства замкнутой поверхности определяются строением ее триангуляции. Для изучения последней удобно рассматривать ее схематичное представление на плоскости. При этом можно считать, что плоские треугольники $\triangle_i$ – прообразы треугольников $T_i \subset K$ – лежат в одной плоскости и не пересекаются. Опишем такое представление. Пусть (T_i, φ_i) и (T_j, φ_j) – два топологических треугольника из триангуляции K, $T_i \cap T_j = a$ – их общее ребро. Пусть $a_i = \varphi_i^{-1}(a)$, $a_j = \varphi_j^{-1}(a)$ – соответствующие ему ребра в треугольниках $\triangle_i$ и $\triangle_j$. Определен склеивающий гомеоморфизм

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1}|_a \circ \varphi_i|_{a_i} : a_i \to a_j.$$

Таким образом триангуляции K можно сопоставить систему

$$\triangle = (\{\triangle_i\}_{i=1}^k, \{\varphi_{ij}\})$$

треугольников плоскости вместе с гомеоморфизмами φ_{ij} для соответствующих пар ребер. Объявим в множестве $\bigcup_{i=1}^k \triangle_i$ эквивалентными точки, соответствующие друг другу при гомеоморфизмах φ_{ij} для соответствующих пар ребер. Обозначим указанную эквивалентность через R.

Лемма 2.12**.** *Факторпространство* $(\bigcup_{i=1}^k \triangle_i)/R$ *гомеоморфно поверхности* X.

Доказательство. Гомеоморфизмы $\varphi_i : \triangle_i \to T_i$ задают сюръективные отображения $\Phi : \bigcup_{i=1}^k \triangle_i \to X$, причем прообраз $\Phi^{-1}(x)$ для любой точки $x \in X$ есть в точности класс R-эквивалентности. По теореме 1.11 факторотображение $\Phi/R : (\bigcup_{i=1}^k \triangle_i)/R \to X$ является непрерывным отображением. Очевидно, что Φ/R биективно и обратное к нему непрерывно. Действительно, множество $(\bigcup_{i=1}^k \triangle_i)/R$ – это склеенные треугольники и их только осталось гомеоморфизмом искривить, придав форму X. □

2. Развертка поверхности. В дальнейшем нам понадобятся системы, аналогичные системе треугольников, схематически представляющие триангуляцию K поверхности X, но такие, чтобы вместе с треугольниками они включали и произвольные n-угольники.

Разверткой поверхности X называется система $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$, где $\{Q_i\}$ – конечный набор плоских многоугольников, $\{\varphi_{ij}\}$ – конечный набор склеивающих гомеоморфизмов пар ребер многоугольников $\{Q_i\}$, причем каждое ребро склеивается только с одним ребром (допускается склейка ребер одного многоугольника).

В частности, система $\triangle = (\{\triangle_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ является разверткой. Говорят, что $\triangle$ – развертка поверхности X, связанная с триангуляцией K.

Заметим, что если положение многоугольника Q_i на плоскости меняется при поощи некоторого гомеоморфизма (скажем даже точнее – аффинного преобразования) α_i, то естественным образом определяются новые гомеоморфизмы $\{\alpha_j \circ \varphi_{ij} \circ \alpha_i^{-1}\}$ склейки его ребер, которые мы в дальнейшем будем отождествлять с φ_{ij}.

Для произвольной развертки Q рассмотрим факторпространство $\hat{Q} = \cup_i Q_i/R$, где отношение эквивалентности R определяется гомеоморфизмами φ_{ij} (взятие фактормножества – склеивание развертки). Будем называть $\hat{Q}$ *факторпространством развертки* Q. Очевидно, что факторпространство развертки двумерное многообразие (действительно, все ребра всех многогранников попарно склеены, следовательно, любая точка будет допускать открытый круг в $\hat{Q}$). Таким образом, если факторпространство $\hat{Q}$ связно, то оно является замкнутой поверхностью. Будем называть в этом случае Q *разверткой поверхности.*

Факторотображение индуцирует разбиение поверхности $\hat{Q}$ на образы многоугольников, образы ребер (ребра разбиения), образы вершин. Отметим, что разбиение, вообще говоря, не является триангуляцией.

В дальнейшем многоугольники развертки будем ориентировать, фиксируя какие-либо ориентации каждого из них. Ориентации многоугольников задают ориентации ребер. При склеивающем гомеоморфизме $\varphi_{ij} : a_i \to a_j$ двух ребер ребро a_j получает индуцированную (из ориентации ребра a_i) гомеоморфизмом φ_{ij} ориентацию, которая, вообще говоря, может отличаться от ориентации ребра a_j.

Развертка Q называется *ориентируемой*, если при одинаковой ориентации всех ее многоугольников (например, обход всех ее вершин против часовой стрелки) гомеоморфизмы склейки ребер индуцируют в ребре образа ориентацию противоположную заданной.

Привести пример склейки тора из прямоугольника.

В противном случае (если хотя бы для одной пары ребер ориентации совпадают) развертка называется *неориентируемой.*

Привести пример сферы с дырой, заклеенной листом Мебиуса. Сфера с дырой – треугольник. Лента Мебиуса – прямоугольник. Прямоугольник склеиваем перекручивая (как раз стороны склеиваются с одинаковой ориентацией – сбой в ориентируемости). Далее у ленты Мебиуса остается одна сторона, которая приклеивается к дыре на сфере.

Поверхность X называется *ориентируемой* (соответственно, *неориентируемой*), если ее развертка ориентируема (соответственно, неориентируема). Можно показать, что ориентируемость не зависит от выбора развертки.

Для удобства дальнейшего изложения мы будем описывать каждую развертку специальным набором слов-символов по следующему правилу. Пусть $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ – некоторая развертка. Зафиксируем для каждого многоугольника развертки какую-либо ориентацию (договоримся всегда брать ориентацию против часовой стрелки). Обозначим ребра многоугольников развертки Q буквами так, чтобы склеиваемые между собой ребра многоугольников были обозначены одинаковыми буквами, а несклеиваемые – разными. Порядок склеивания ребер, задаваемый гомеоморфизмами φ_{ij}, будем указывать на рисунках с помощью стрелок, задав стрелками направления склеиваемых ребер так, чтобы начало одного ребра склеваемой пары склеивалось с началом другого, а конец – с концом (при этом направление одного из ребер склеиваемой пары можно задать произвольно, а направление другого однозначно определяется соответствующим гомеоморфизмом склейки φ_{ij}). Таким образом, мы ориентировали все ребра многоугольников развертки. При этом может оказаться, что ориентация некоторых ребер не совпадает с ориентацией, задаваемой фиксированным обходом многоугольников. К буквенным обозначениям таких ребер будем добавлять -1. Запишем последовательно обозначения ребер одного многоугольника Q_i в слово $\omega(Q_i)$, обходя последовательно ребра в заданном направлении. Слово $\omega(Q_i)$ характеризует схему приклеивания многоугольника Q_i в развертке Q, а набор слов всех многоугольников развертки Q характеризует развертку Q.

Пример 2.12**.** Тор $aba^{-1}b^{-1}$ и проективная плоскость. (Нарисовать картинки).

§2.14. Вычисление фундаментальной группы окружности.

1. Линейчатые пути на поверхности и их комбинаторные гомотопии. Рассмотрим замкнутую поверхность X и ее развертку Q, то есть X гомеоморфно факторпространству Q/R, где R – эквивалентность, определяемая склеивающими гомеоморфизмами развертки Q. Обозначим $\alpha : Q \to Q/R$ – отображение факторизации, $\beta : Q/R \to X$ – гомеоморфизм фактор пространства Q/R и поверхности X, $\varkappa = \beta \circ \alpha : Q \to X$. Оно задает *разбиение* X на образы многоугольников, ребер и вершин развертки ($\varkappa$-образы будем называть *ребрами* разбиения, а $\varkappa$-образы вершин – *вершинами разбиения*). Ребро разбиения является $\varkappa$-образом двух ребер развертки Q (a и a^{-1}, либо a и a), условимся обозначать его через a; $\varkappa$-образ вершины A обозначим той же буквой A. Точки ребра, отличные от вершины, будем называть *внутренними* точками ребра.

Нам потребуются следующие элементарные операции с развертками:

1) добавление новой вершины – внутренняя точка ребра объявляется новой вершиной;

2) добавление нового ребра – один из многоугольников развертки разбивается на два своей диагональю; $\varkappa$-образ этой диагонали объявляется новым ребром разбиения.

Рассмотрим ребро a в развертке Q и пусть $\gamma : I \to a$ – аффинное отображение (назовем его *линейным путем*).

Лирическое отступление. Отрезок $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ является 1-мерным аффинным пространством с аффинной структурой, индуцированной прямой $\mathbb{R}$. Также аффинным пространством является ребро a – это отрезок, лежащий на плоскости. У точек отрезка I одна координата (обозначим ее t), у точек отрезка a – две координаты (обозначим их (x, y)). Тогда мы можем записать отображение γ в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Аффинность отображения γ означает, что функции $x(t)$ и $y(t)$ являются линейными. $\square$
При этом точки 0 и 1 отображаются в вершины ребра a. Тогда отображение $\bar\gamma = \varkappa \circ \gamma : I \to X$ определяет путь на поверхности X, который назовем *элементарным путем.* Очевидно, что образ элементарного пути либо совпадает с одной из вершин ребра a разбиения поверхности X, либо полностью покрывает это ребро. В первом случае элементарный путь постоянен и считается равным нулю ($\bar\gamma = 0$). Во втором случае начало линейного пути γ либо совпадает с началом ориентированного ребра a, либо с его концом. В соответствии с этим будем обозначать элементарный путь либо a, либо a^{-1} ($\bar\gamma = a$, $\bar\gamma = a^{-1}$). По такому же правилу будем обозначать $\bar\gamma$, если $\gamma : I \to a^{-1}$, считая $(a^{-1})^{-1} = a$. Таким образом каждому ориентированному ребру a (a^{-1}) развертки отвечает элементарный путь в разбиении.

Линейчатым путем в разбиении поверхности X называется конечное произведение элементарных путей.

Замечание 2.7**.** Элементарный путь $\bar\gamma = \varkappa \circ \gamma$ является непрерывным отображением, так как $\varkappa$ непрерывно (см. его определение) и γ – линейное отображение, следовательно тоже непрерывно. Следовательно элементарный путь является путем в смысле определения данного выше. Тогда для элементарных путей имеет смысл операция умножения.

Замкнутый линейчатый путь называется *линейчатой петлей.* Из определения линейчатого пути λ следует, что его можно записать в виде произведения элементарных путей $\lambda = \lambda_1\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_s$, где $\lambda_i = a_i^{\pm 1}$, либо $\lambda_i = 0$. Опуская нули, сопоставим пути λ слово $\omega(\lambda) = a_1^{\pm 1} \ldots a_s^{\pm 1}$, указывающее порядок и направление обхода путем λ ребер разбиения поверхности X.

Рассмотрим границу Γ_i какого-нибудь многоугольника Q_i развертки Q. Сопоставив каждому ребру границы элементарный путь как описано выше, мы поставим в соответствие всей границе линейчатый путь λ_i в X, определяемый словом $\omega(\lambda_i) = \omega(Q_i)$. Слово $\omega(Q_i)$ описывает в свою очередь схему приклеивания многоугольника Q_i.

Комбинаторной деформацией I (или *II*) рода линейчатой петли λ называется вычеркивание или добавление в слово $\omega(\lambda)$ сочетания вида aa^{-1} (или слова $\omega(Q_i)$, определяющего линейчатую петлю в X, соответствующую ориентированной границе многоугольника Q_i развертки Q.

Линейчатые петли γ и γ' называются *комбинаторно гомотопными* в разбиении поверхности X, если одна получается из другой с помощью конечного числа комбинаторных деформаций I или II рода.

Заметим, что всякий линейчатый путь в разбиении Π поверхности X, можно рассматривать как линейчатый путь в некотором разбиении Π_1, полученным из Π применением конечного числа элементарных операций 1) и 2) над развертками.

Лемма 2.13. *Пусть разбиение Π_1 получено из разбиения Π применением конечного числа операций вида 1) и 2). Тогда для каждой линейчатой петли λ в Π_1 существует линейчатая петля λ' в Π комбинаторно гомотопная в Π_1 петле λ.*

Доказательство. 1) Пусть Π_1 получена из Π подразделением ребра a на два новых ребра b и c (применена операция добавления новой вершины). Если петля λ содержит одно из сочетаний bb^{-1}, cc^{-1}, $b^{-1}b$, $c^{-1}c$, то его можно опустить, получив при этом петлю, комбинаторно гомотопную λ. Опустив все эти сочетания, мы получим петлю либо вовсе не содержащую $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$, либо содержащую их в виде $bc(=a)$ или $c^{-1}b^{-1} = a^{-1}$. В любом из этих случаев это будет искомый линейчатый путь λ' из Π.

2) Пусть Π_1 получено из Π добавлением ребра d, которое разбивает некоторый многоугольник из Π_1 на части E и F. Пусть граничные пути E и F суть ud^{-1} и dv. Если в линейчатую петлю λ входит ребро $d^{\pm 1}$, то заменим его путем $v^{\pm 1}$ (или $u^{\pm 1}$). Полученная петля λ' комбинаторно гомотопна λ и является линейчатой петлей в Π. □

Лемма 2.14. *Пусть разбиение Π_1 получено из Π одной из операций типа 1), 2). Тогда всякая линейчатая петля λ в Π_1 комбинаторно гомотопна нулю в Π_1, комбинаторно гомотопна нулю и в Π.*

Доказательство. Согласно условию леммы в Π_1 существует последовательность линейчатых петель $\lambda = v_0, v_1, \dots, v_r = 0$, где v_{i+1} – петля, полученная из v_i посредством одной из комбинаторных деформаций. При этом $v_1, \dots, v_r$, вообще говоря, не являются петлями для Π. Для каждой петли v_i, $i = 1, \dots, r$ будем строить комбинаторно гомотопную ей линейчатую петлю ω_i в Π так, что в последовательности петель $\lambda, \omega_1, \dots, \omega_r = 0$ каждая петля ω_{i+1} получается из ω_i одной или несколькими комбинаторными деформациями.

1) Пусть Π_1 получается из Π подразделением ребра a на ребра b и c (операция 1)). Поставим тогда в соответствие каждой петле v_i петлю ω_i, сопоставив ребру, отличному от $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$ то же самое ребро, ребру $b^{\pm 1}$ – ребро $a^{\pm 1}$, а ребру $c^{\pm 1}$ ничего не сопоставим. Легко проверить, что тогда переход от петли ω_i к петле ω_{i+1} осуществляется комбинаторной деформацией I или II рода.

2) Если Π_1 получено из Π операцией 2), то ребру, отличному от разбивающего ребра d, соотнесем то же самое ребро, а ребро $d(d^{-1})$ заменяем путем $u(u^{-1})$. Если теперь в v_i вставляем или вычеркиваем сочетания dd^{-1}, чтобы получить v_{i+1}, то в ω_i следует соответственно добавить или вычеркнуть uu^{-1}. Получаем, что деформациям II рода соответствуют деформации I и II рода в Π. □

2. Комбинаторные аппроксимации путей.

Лемма 2.15. *Пусть задана некоторая триангуляция K поверхности X. Пусть $\lambda : I \to K$ – непрерывный путь в K, причем $\lambda(0)$ и $\lambda(1)$ – вершины триангуляции. Тогда существует гомотопный ему линейчатый путь в K.*

Доказательство. Разобьем отрезок $I = [0, 1]$ конечным числом точек $\{t_i\}_{k=0}^{n}$ $(t_0 = 0, t_n = 1)$ на достаточно мелкие отрезки так, чтобы для любого (t_{k-1}, t_{k+1}), $k = 1, \dots, n-1$ нашлась такая вершина $A_k \in K$, что образ $\lambda(t_{k-1}, t_{k+1})$ целиком лежал в звезде $S(A_k)$ – объединении открытых треугольников и ребер триангуляции K, примыкающих к вершине, и самой вершины A_k. Так как $S(A_k)$ – открытое множество, а λ – непрерывное отображение, этого всегда можно добиться. Поставим в соответствие каждой точке $t_k \in I$ вершину A_k. Заметим при этом, что для любого $k = 1, \dots, n-1$

$$\lambda(t_k, t_{k+1}) \subset S(A_k) \cap S(A_{k+1}),$$

где $S(A_k) \cap S(A_{k+1})$, очевидно, содержит треугольник, примыкающий одновременно к вершинам A_k и A_{k+1}. Тогда если вершины A_k и A_{k+1} – различны, то они соединены ребром, которое мы обозначим ℓ_k. Пусть $\lambda'_k : [t_k, t_{k+1}] \to \ell_k$ – элементарный путь, являющийся продолжением указанного соответствия вершин и точек t_k, t_{k+1}. В случае, если вершины A_k и A_{k+1} совпадают, считаем λ'_k нулевым. Произведение элементарных путей λ'_k определяет линейчатый путь $\lambda' : I \to K$, который называется *линейчатой аппроксимацией* пути λ.

Покажем, что пути λ и λ' гомотопны друг другу. В самом деле, в силу конструкции пути λ' для любого $t \in I$ образы $\lambda(t)$ и $\lambda'(t)$ лежат в одном и том же замкнутом топологическом треугольнике из K, поэтому эти точки можно соединить отрезком – гомеоморфным образом отрезка в треугольнике развертки.

Следовательно, естественно задать линейную деформацию точки $\lambda(t)$ в точку $\lambda'(t)$, которая определяет требуемую гомотопию (в пространстве развертки на плоскости $\mathbb{R}^2$ это будет линейная гомотопия, а в топологическом пространстве X она перенесется с помощью гомеоморфизма φ). Заметим при этом, что всякая точка $\lambda(t)$ в процессе этой гомотопии не выходит из того замкнутого треугольника, ребра или вершины, в которых она находится в начальный момент гомотопии. □

Необходимо различать, гомотопна ли линейчатая петля постоянной в топологическом смысле или комбинаторно. Петлю гомотопную или комбинаторно гомотопную постоянной будем называть *стягиваемой* или соответственно *комбинаторно стягиваемой.*

Примем без доказательства следующую лемму.

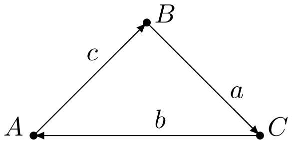
Лемма 2.16. *Стягиваемая линейчатая петля λ в триангуляции K комбинаторно стягиваема в K.*

Замечание 2.8. Пусть S^1 – окружность. Зафиксируем на S^1 конечное число точек $A', B', C', \ldots$ и зададим гомеоморфизм φ границы выпуклого многоугольника $ABC\ldots$ в S^1 так, что $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, ... Будем говорить, что гомеоморфизм φ определяет разбиение S^1 с ребрами $\widetilde{A'B'} = \varphi(AB)$, $\widetilde{B'C'} = \varphi(BC)$, ... и вершинами $A', B', C', \ldots$. Естественным образом определяются линейчатые пути и комбинаторные деформации I типа. Доказанные леммы остаются в силе для таких разбиений с тем изменением, что исчезают операции 2) над развертками и комбинаторные деформации II типа.

3. Фундаментальная группа окружности.

Теорема 2.36. *Группа $\pi_1(S^1)$ абелева и изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Доказательство. Согласно теореме 2.13 фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны. Поэтому мы можем вычислить фундаментальную группу треугольника (он гомеоморфен окружности).



Пусть $\triangle$ – треугольник с вершинами A, B, C, ориентированными ребрами и отмеченной вершиной A. Вычислим фундаментальную группу $\pi_1(\triangle, A)$. Пусть λ – произвольная петля в треугольнике ABC с началом в точке A. Тогда по лемме 2.15 в гомотопическом классе петли λ существует линейчатая петля λ'.

Поставим в соответствие каждому из ребер a, b, c петли $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ по правилу $\tilde{a} = cab$, $\tilde{b} = b^{-1}b$, $\tilde{c} = cc^{-1}$. Покажем, что классы петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ (не обязательно различные) являются образующими в группе $\pi_1(\triangle, A)$. В самом деле, каждой линейчатая петле λ' состоит из элементарных путей, соответствующих ребрам, то есть $\lambda' = \psi(a, b, c)$. Заменив в этом выражении каждое каждое ребро на соответствующую ему петлю, получим новую петлю $\lambda'' = \psi(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$. По определению комбинаторной гомотопности петли λ' и λ'' комбинаторно гомотопны. Отметим, что указанная замена ребра петлей заставляет нас дойти до начала этого ребра от фиксированной вершины A и, пройдя это ребро, вернуться в A кратчайшим путем. Поэтому при последовательной заменен ребер петлями мы, вернувшись в A из конца P предыдущего ребра, должны тотчас же отправиться в начало следующего ребра, то есть в же точку P (переход по ребрам петли λ' постоянно сопровождается возвращением в точку A). Тем самым при этой замене между каждыми двумя соседними ребрами петли λ' вставляется путь вида xx^{-1}, где $x \in \{a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$, то есть путь комбинаторно гомотопный нулю. Итак, в гомотопическом классе петли λ' всегда найдется линейчатая петля λ'', представляющая из себя конечное произведение, составленное из петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и обратных им.

Заметим, что петли $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ гомотопны постоянным. Их можно убрать из петли λ''. Тогда петля $\tilde{a}$ (а точнее определяемый ею гомотопический класс в фундаментальной группе $\pi_1(\triangle, A)$) является единственной образующей в группе $\pi_1(\triangle, A)$.

Элемент $\tilde{a}$ нетривиален (то есть гомотопна постоянной петле). Действительно, если бы петля была стягиваемой, то по лемме 2.16 она была бы и комбинаторно стягиваемой, то есть сводилась бы к постоянной конечным числом комбинаторных деформаций I типа, что невозможно. Следовательно, $\tilde{a}$ не является комбинаторно стягиваемой, то есть $[\tilde{a}]$ – нетривиальный элемент в $\pi_1(\triangle, A)$. Аналогичным образом получаем, что любой элемент $[\tilde{a}^\ell]$, $\ell > 1$ и любой элемент $[\tilde{a}^{-\ell}]$ нетривиальны. Таким образом, $\pi_1(\triangle, A)$ есть свободная циклическая группа, порожденная элементом $[\tilde{a}]$, то есть абелева группа изоморфная $\mathbb{Z}$. □

Вернемся к нашему основному вопросу курса: как различать не гомеоморфные пространства. Теперь мы знаем, что у прямой $\mathbb{R}$ тривиальная фундаментальная группа, а у окружности S^1 она изоморфна $\mathbb{Z}$. Следовательно, фундаментальные группы окружности и прямой не изоморфны, то есть прямая и окружность не гомеоморфны. Также будут не гомеоморфными окружность и интервал.

Напомним, что фундаментальная группа декартова произведения топологических пространств изоморфна произведению фундаментальных групп сомножителей. Тогда мы можем вычислить фундаментальную группу цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$. Она будет изоморфна $\mathbb{Z}$. Из этого получаем, что цилиндр не гомеоморфен плоскости $\mathbb{R}^2$.

Фундаментальная группа n-мерного тора будет $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (n сомножителей). Откуда мы видим, что двумерный тор T^2 не гомеоморфен цилиндру и плоскости.

Задача 2.25**.** Вычислите фундаментальную группу $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Глава 3. Элементы теории гомологий.

Теория гомологий сопоставляет всякому топологическому пространству X последовательность абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны (в частности, гомеоморфны), то соответствующие группы гомологий изоморфны. Наличие большого количества разнообразных методов работы с гомологиями делает их удобным инструментом топологических исследований.

§3.1. Воспоминания из области алгебры.

Пусть G – непустое множество произвольной природы, $*$ – отображение вида $G\times G \to G$, удовлетворяющее трем условиям

(1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);

(2) существует элемент $e \in G$, такой что $a * e = e * a = a$ (существование нейтрального элемента);

(3) для любого $a \in G$ существует элемент $a' \in G$, такой что $a * a' = a' * a = e$ (существование симметричного элемента).

Тогда пара $(G, *)$ называется *группой* (если операция $*$ понятна из контекста, то группу также обозначают одной буквой G). Отображение $*$ называется *групповой операцией.* Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если для любых элементов $a, b \in G$ имеет место равенство $a * b = b * a$.

В теории гомологий нам потребуются так называемые аддитивные группы. В них операция обозначается знаком $+$ (результат действия этой операции на двух элементах называется суммой), нейтральный элемент называется нулем и обозначается 0, симметричный элемент называется противоположным и обозначается $-a$. Этих обозначений мы будем придерживаться ниже.

Подмножество $H \subset G$ группы G называется *подгруппой*, если оно само является группой. Это определение просто, но не всегда удобно при проведении рассуждений. Поэтому мы будем пользоваться еще двумя (эквивалентными между собой и эквивалентными приведенному определению) определениями подгруппы. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если для любых $a, b \in G$ их сумма $a + b$ также принадлежит G и для любого элемента $a \in G$ противоположный ему элемент $-a$ тоже принадлежит G.

Отображение $\varphi : G \to H$ группы $(G, *)$ в группу $(H, \circ)$ называется *гомоморфизмом групп*, если $\varphi(a{*}b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ для любых $a, b \in G$.

Пример 3.1. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп. Множество

$$Ker\,\varphi = \{a \in G |\, \varphi(a) = \tilde{e}\},$$

где $\tilde{e} \in H$ – нейтральный элемент, называется *ядром* гомоморфизма φ. Ядро гомоморфизма является подгруппой группы G. Действительно, если $a, b \in Ker\,\varphi$, то $\varphi(a) = \tilde{e}$, $\varphi(b) = \tilde{e}$. Тогда

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) = \tilde{e} \circ \tilde{e} = \tilde{e},$$

то есть $a * b \in Ker\,\varphi$.

Пусть a' – симметричный к a. Тогда $a' * a = e$, где e – нейтральный в G. Применим гомоморфизм φ. Тогда

$$\tilde{e} = \varphi(e) = \varphi(a' * a) = \varphi(a') \circ \varphi(a) = \varphi(a') \circ \tilde{e} = \varphi(a'),$$

то есть $a' \in Ker\,\varphi$. По определению получаем подгруппу.

Пример 3.2. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп. Множество

$$Im\,\varphi = \{x \in H |\, \exists a \in G, \varphi(a) = x\}$$

называется *образом* гомоморфизма φ. Аналогично предыдущему примеру доказывается, что образ $Im\,\varphi$ является подгруппой группы H.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп. Тогда нуль первой группы переходит в нуль второй группы.*

Доказательство. Пусть $a \in G_2$, такой что существует $x \in G_2$ $x + a = x$. Покажем, что тогда для любого элемента $y \in G_2$ имеем $y + a = y$. Другими словами, докажем, что если элемент a не меняет хотя бы один элемент из G_2, то он совпадает с нулем. Действительно,

$$y + a = y + a + x + (-x) = y + x + (-x) = y + 0 = y.$$

Пусть $x \in G_1$, $\varphi(x) \in G_2$. Тогда

$$\varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(x + 0) = \varphi(x).$$

Таким образом, элемент $\varphi(0)$ не меняет хотя бы один элемент $\varphi(x)$, следовательно совпадает с нулем в G_2. □

Пусть $(G, +)$ – аддитивная группа (вид операции здесь не важен, выбран $+$, так как в дальнейшем мы будем рассматривать именно аддитивные группы), H – ее подгруппа. Тогда фактормножество G/H состоит из элементов вида $a + H = \{a + h, h \in H\}$, где a – произвольный фиксированный элемент G, h пробегает всю подгруппу H. На множестве G/H определена групповая операция $+$ по формуле

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H.$$

Пара $(G/H, +)$ называется *факторгруппой.*

Напомним теорему из алгебры.

Теорема 3.2. *(о гомоморфном образе группы) Гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе этой группы по ядру гомоморфизма.*

Пусть даны две группы $(G_1, +)$ и $(G_2, *)$. *Прямой суммой* $G_1 \oplus G_2$ групп G_1 и G_2 называется множество пар (g_1, g_2), $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, в котором групповая операция $\circ$ задается по формуле

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 + h_1, g_2 * h_2).$$

Пусть дана последовательность групп G_k и их гомоморфизмов ψ_k

$$\ldots \longrightarrow G_{k+1} \xrightarrow{\psi_{k+1}} G_k \xrightarrow{\psi_k} G_{k-1} \longrightarrow \ldots$$

Такая последовательность называется *точной в k-м члене*, если $Im\,\psi_{k+1} = Ker\,\psi_k$. Последовательность называется *точной*, если она точна в каждом члене.

§3.2. Гомологии цепных комплексов.

1. Определение. Бесконечная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{3.1}$$

абелевых групп C_k и их гомоморфизмов ∂_k, удовлетворяющих для любого $k \geq 1$ условию $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, называется *цепным комплексом* (или *комплексом цепей*). Будем обозначать его C_*; группы C_k называются группами цепей, гомоморфизмы ∂_k называются *дифференциалами* или *граничными гомоморфизмами.*

Множество

$$Ker\,\partial_k = \{c \in C_k : \partial_k c = 0\}$$

образует подгруппу в C_k. Она называется *группой k-мерных циклов* и обозначается Z_k, ее элементы называются *k-мерными циклами или короче k-циклами.* Множество

$$Im\,\partial_{k+1} = \{c \in C_k : c = \partial_{k+1} u\}$$

также образует подгруппу в C_k. Она называется *группой k-мерных границ* и обозначается B_k, ее элементы называются *k-мерными границами или короче k-границами.*

Задача 3.1. Покажите, что $B_k \subset Z_k$. Другими словами, любая k-граница является k-циклом.

Последняя задача показывает, что группа k-границ является подгруппой группы k-циклов. Тогда определена факторгруппа Z_k/B_k. Она обозначается $H_k(C_*)$ и называется *k-мерной группой гомологий цепного комплекса C_*.* Ее элементы – это классы эквивалентности k-циклов

$$[c_k] = \{c_k + \partial_{k+1} u,\ u \in C_{k+1}\} \equiv c_k + \partial_{k+1} C_{k+1}.$$

Говорят, что два цикла, принадлежащие одному классу, *гомологичны друг другу.*

Гомоморфизмом φ_* цепного комплекса C_* в цепной комплекс C'_* называется последовательность гомоморфизмов $\varphi_k : C_k \to C'_k$, таких что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{k-1}} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \\
\ldots & \longrightarrow & C'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{3.2}$$

коммутативна, то есть $\varphi_{k-1} \circ \partial_k = \partial'_k \varphi_k$.

Из коммутативности диаграммы (3.2) следует, что

$$\varphi_k(Ker\,\partial_k) \subset Ker\,\partial'_k; \quad \varphi_k(Im\,\partial_{k+1}) \subset Im\,\partial'_{k+1}.$$

В самом деле, любой элемент $c' \in \varphi_k(Ker\,\partial_k)$ представим в виде $c' = \varphi_k c$, где $\partial_k c = 0$. Тогда

$$\partial'_k c' = \partial'_k \circ \varphi_k c = \varphi_{k-1} \circ \partial_k c = 0.$$

В силу этого гомоморфизм φ_* цепных комплексов индуцирует гомоморфизм групп гомологий φ_{*k} : $H_k(C_*) \to H_k(C'_*)$ по формуле

$$\varphi_{*k}([c_k]) = [\varphi_k(c_k)].$$

Пусть C_* и C^0_* – цепные комплексы, такие что $C^0_k \subset C_k$ – подгруппы и $\partial^0_k = \partial_k|_{C^0}$ – сужения. В этом случае комплекс C^0_* называется *подкомплексом* комплекса C_*.

Мономорфизмы $i_k : C^0_k \to C_k$ вложения определяют гомоморфизм $i_* : C^0_* \to C_*$ цепных комплексов, который называется *мономорфизмом вложения цепных комплексов.*

Рассмотрим последовательность факторгрупп $\hat{C}_k = C_k/C^0_k$. Гомоморфизмы ∂_k индуцируют гомоморфизмы $\hat{\partial}_k : \hat{C}_k \to \hat{C}_{k-1}$ по формуле

$$\hat{\partial}_k(\hat{c}_k) = \partial_k c_k + C^0_{k-1},\ \hat{c}_k = c_k + C^0_k.$$

Задача 3.2. Докажите, что группы $\hat{C}_k$ и гомоморфизмы $\hat{\partial}_k$ образуют цепной комплекс. Он обозначается $\hat{C}_*$.

Задача 3.3. Докажите, что эпиморфизмы факторизации $j_k : C_k \to \hat{C}_k$ (он ставит каждому элементу из C_k класс из факторгруппы $\hat{C}_k$, которому принадлежит этот элемент) определяют гомоморфизм цепных комплексов $j_* : C_* \to \hat{C}_*$.

Решение. Проверим коммутативность диаграммы.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle j_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle j_{k-1}} & & \\
\ldots & \longrightarrow & \hat{C}_k & \xrightarrow{\hat{\partial}_k} & \hat{C}_{k-1} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Другими словами, надо доказать, что $j_{k-1} \circ \partial_k = \hat{\partial}_k \circ j_k$. Имеем

$$\hat{\partial}_k \circ j_k(c_k) = \hat{\partial}_k(c_k + C^0_k) = \partial_k c_k + C^0_{k-1}.$$

С другой стороны,

$$j_{k-1} \circ \partial_k(c_k) = j_{k-1}(\partial_k c_k) = \partial_k c_k + C^0_{k-1}.$$

□

Задача 3.4. Докажите, что последовательность

$$0 \xrightarrow{\varphi} C^0_k \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{j_k} \hat{C}_k \xrightarrow{\psi} 0,$$

где $\varphi(0) = 0$, $\psi(c_k + C^0_k) = 0$, точна.

Будем называть последовательность цепных комплексов и их гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow C^0_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{j_*} \hat{C}_* \longrightarrow 0,$$

точной.

Согласно общему определению групп гомологий можно построить группы гомологий факторкомплекса $\hat{C}_*$. Оказывается, что новые группы связаны с группами $H_k(C_*)$ и $H_k(C^0_*)$ в некоторой точной последовательности. Построим ее. Гомоморфизмы i_* и j_* индуцируют гомоморфизмы групп гомологий

$$i_{*k} : H_k(C^0_*) \to H_k(C_*),\ c^0_k + \partial_{k+1}C^0_{k+1} \to c^0_k + \partial_{k+1}C_{k+1}.$$

$j_{*k} : H_k(C_*) \to H_k(\hat{C}_*)$
$c_k + \partial_{k+1}C_{k+1} \to (c_k + C^0_k) + \hat{\partial}_{k+1}\hat{C}_{k+1} = c_k + C^0_k + \partial_{k+1}C_{k+1} + C^0_k = c_k + C^0_k + \partial_{k+1}C_{k+1}$

Получаем две короткие последовательности

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(C^0_*) & \xrightarrow{i_{*k}} & H_k(C_*) & \xrightarrow{j_{*k}} & H_k(\hat{C}_*) \\
H_{k-1}(C^0_*) & \xrightarrow{i_{*(k-1)}} & H_{k-1}(C_*) & \xrightarrow{j_{*(k-1)}} & H_{k-1}(\hat{C}_*)
\end{array}$$

Соединим эти короткие последовательности в одну длинную, построив гомоморфизм $\delta_k : H_k(\hat{C}_*) \to H_{k-1}(C^0_*)$. Пусть $\hat{\alpha} \in H_k(\hat{C}_*)$, $k > 0$, то есть $\hat{\alpha}$ – класс смежности некоторого элемента $\alpha \in Ker\,\hat{\partial}_k$ по подгруппе $Im\,\hat{\partial}_{k+1}$. В свою очередь $\alpha \in \hat{C}_k$ и его можно рассматривать как класс смежности некоторого элемента $d \in C_k$ по подгруппе C_k^0. Имеем

$$\hat{\alpha} = \alpha + \hat{\partial}_{k+1}\hat{C}_{k+1},\ \alpha = d + C_k^0,\ \hat{\partial}_k\alpha = 0,\ \hat{\partial}_k\alpha = \partial_k d + C_{k-1}^0.$$

Так как $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ имеем $\partial_k d \in Ker\,\partial_{k-1}$.

Покажем, что класс смежности элемента

$$[\partial_k d]^0 = \partial_k d + \partial_k C_k^0$$

элемента $\partial_k d$ в группе $H_{k-1}(C_*^0)$ не зависит от выбора элементов α и d в соответствующих классах.

Пусть $\alpha_1 \in \hat{\alpha}$ – другой представитель этого класса. Тогда

$$\alpha = \alpha_1 + \hat{\partial}_{k+1}\hat{c}_{k+1} = \alpha_1 + \partial_{k+1}c_{k+1} + C_k^0.$$

Пусть $d_1 \in \alpha_1$ – какой-то представитель этого класса. Тогда $\alpha_1 = d_1 + C_k^0$. С другой стороны, $\alpha = d + C_k^0$. Из трех последних равенств получим следующее равенство классов

$$d + C_k^0 = d_1 + C_k^0 + \partial_{k+1}c_{k+1} + C_k^0$$

Откуда мы видим, что элементы d и d_1 связаны соотношением

$$d = d_1 + \partial_{k+1}c_{k+1} + c_k^0.$$

Применим к обеим частям равенства гомоморфизм ∂_k

$$\partial_k d = \partial_k d_1 + \partial_k c_k^0.$$

Мы получили, что элементы $\partial_k d$ и $\partial_k d_1$ отличаются на границу из подкомплекса C_*^0, а значит, принадлежат одному классу $[\partial_k d]^0 \in H_{k-1}(C_*^0)$. Из этого следует, что отображение δ_k, задаваемое соответствием $\hat{\alpha} \to [\partial_k d]^0$ определено корректно.

Задача 3.5. Докажите, что δ_k является гомоморфизмом.

Гомоморфизм δ_k называется *связывающим гомоморфизмом.*

Связывающие гомоморфизмы позволяют составить из коротких точных последовательностей (1.) длинную точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_{k+1}(\hat{C}_*) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(C_*^0) \xrightarrow{i_{*k}} H_k(C_*) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(\hat{C}_*) \xrightarrow{\delta_k} \ldots \longrightarrow H_0(\hat{C}_*) \to 0.$$

Задача 3.6. Докажите, что длинная последовательность является точной. Для этого осталось проверить, что $Im\,\delta_{k+1} = Ker\,i_{*k}$, $Im\,j_{*k} = Ker\,\delta_k$.

2. Группы гомологий симплициального комплекса. В качестве примера для введенных общих определений рассмотрим симплициальный комплекс и построим с его помощью группы гомологий.

Начнем мы с введения понятия симплекса. Пусть дано арифметическое пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Будем называть 0-*симплексом* точку α_0 в $\mathbb{R}^{n+1}$. 1-*симплексом* будем называть отрезок $[\alpha_0\alpha_1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Напомним, что отрезком с концами a и b в арифметическом пространстве называется множество $\{ta + (1-t)b,\ 0 \le t \le 1\}$, где a и b – произвольные фиксированные точки из $\mathbb{R}^{n+1}$.

2-*симплекс* построим следующим образом: возьмем точку α_2, не принадлежащую арифметическому пространству $\mathbb{R}^1$, в котором лежит 1-симплекс $[\alpha_0\alpha_1]$, и соединим точку α_2 со всеми точками отрезка $[\alpha_0\alpha_1]$. Полученное множество точек назовем 2-*симплексом.* Будем обозначать его $\sigma^2 = [\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$. Очевидно, что 2-симплекс – это треугольник с внутренними точками.

Аналогичным образом определим 3-симплекс: берем точку α_3, не лежащую в пространстве $\mathbb{R}^2$ 2-симплекса σ^2 и соединяем ее со всеми точками 2-симплекса σ^2. Полученное множество точек обозначается $\sigma^3 = [\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ и называется 3-*симплексом.* Очевидно, что 3-симплекс – это тетраэдр со внутренними точками.

n-симплекс определяется по индукции. Пусть определен $(n-1)$-симплекс $\sigma^{n-1} = [\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}]$. Возьмем точку α_n, не принадлежащую пространству $\mathbb{R}^n$ симплекса σ^{n-1}, и соединим ее отрезками со всеми точками симплекса σ^{n-1}. Полученное множество точек называется n-*симплексом* и обозначается σ^n.

Пусть дан n-симплекс $\sigma^n = [\alpha_0\ldots\alpha_n]$. $(n-1)$-гранью этого симплекса называется $(n-1)$-симплекс $[\alpha_0\alpha_1\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_n]$, где крышка обозначает, что данная вершина удалена, $i = 0,\ldots,n$ – произвольное фиксированное число. Будем обозначать эту грань $\sigma_{(i)}^{n-1}$. Другими словами, $(n-1)$-грань $\sigma_{(i)}^{n-1}$ получается из n-симплекса σ^n удалением i-й вершины. Аналогичным образом определяются и обозначаются грани других размерностей. Например, $(n-2)$-грань, полученная выбрасыванием вершин α_i и α_j, обозначается $\sigma_{(ij)}^{n-2} = [\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\hat{\alpha}_j\ldots\alpha_n]$.

Ориентированной границей симплекса $\sigma^n = [\alpha_0 \ldots \alpha_n]$ назовем формальную линейную комбинацию его $(n-1)$-граней следующего вида

$$\partial \sigma^n = \partial[\alpha_0 \ldots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}.$$

Например, для 0-, 1- и 2-симплексов получаем

$$\partial[\alpha_0] = 0; \quad \partial[\alpha_0\alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0]; \quad \partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1].$$

Симплициальным комплексом называется совокупность симплексов произвольной размерности, обладающая свойствами:

1) вместе с любым симплексом его грани всех размерностей принадлежат этой совокупности;
2) два симплекса могут пересекаться (иметь общие точки) только по целой грани какой-то размерности, и при этом только по одной грани

Если симплициальный комплекс содержит конечное число симплексов, то он называется *конечным.*

Пусть дан конечный симплициальный комплекс M. Перенумеруем все его вершины каким-либо образом $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$. Тогда r-мерные симплексы $[\alpha_{i_0} \ldots \alpha_{i_r}]$ определяются некоторыми подмножествами вершин в данной нумерации.

Пусть G – произвольная аддитивная абелева группа, которая кроме нуля содержит еще хотя бы один элемент, который мы будем обозначать 1. *k-мерной цепью* в симплициальном комплексе назовем конечную формальную сумму вида

$$c_k = g_1\sigma_1^k + \ldots + g_T\sigma_T^k = \sum_i g_i\sigma_i^k,$$

где $g_i \in G$, $T \in \mathbb{N}$ – произвольное не фиксированное число, σ_i^k – k-симплексы из симплициального комплекса (с нумерацией вершин, введенной выше). Обозначим множество k-цепей через C_k. В этом множестве введем операцию $+$, записывая две формальные суммы подряд. Также договоримся отождествлять следующие формальные суммы

$$g_1\sigma^k + g_2\sigma^k = (g_1+g_2)\sigma^k \quad g_1\sigma_1^k + g_2\sigma_2^k = g_2\sigma_2^k + g_1\sigma_1^k.$$

Если в симплексе σ^k записать вершины в обратном порядке, то получим цепь $-1\sigma^k \equiv -\sigma^k$. Например, $[\alpha_0\alpha_1] = -[\alpha_1\alpha_0]$. При таких договоренностях множество C_k превращается в абелеву группу.

Определим граничные гомоморфизмы (все они определяются одинаково, поэтому будем обозначать их одной буквой) по формуле

$$\partial\left(\sum_i g_i\sigma_i^k\right) = \sum_i g_i\partial\sigma_i^k.$$

В правой части этого равенства знак ∂ обозначает ориентированную границу симплекса.

Лемма 3.1. *Имеет место формула $\partial\partial = 0$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\partial\partial\sigma^k = 0$, где $\sigma^k = [\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_k]$. Пусть $i > j$. Симплекс $[\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_k]$ встречается в выражении $\partial\partial\sigma^k$ дважды: когда из слагаемого $(-1)^j[\ldots\hat{\alpha}_j\ldots]$ убираем вторую вершину (будет знак $(-1)^j(-1)^{i-1}$) и когда из слагаемого $(-1)^i[\ldots\hat{\alpha}_i\ldots]$ убираем первую вершину (будет знак $(-1)^i(-1)^j$). Два таких слагаемых взаимно уничтожаются.

В силу определения граничного гомоморфизма мы получаем требуемое равенство для произвольной k-цепи. □

В результате мы получили пример цепного комплекса M_*. В этом цепном комплексе определяются циклы, то есть цепь c_k, такая что $\partial c_k = 0$ и границы, то есть цепь c_k, для которой существует цепь c_{k+1}, такая что $c_k = \partial c_{k+1}$.

Замечание 3.1. В данном примере цепного комплекса легко наглядно представить себе цикл и границу. Начнем с границы. Рассмотрим цепь $c_2 = \sigma^2$, то есть цепь состоит из 2-симплекса. Вычислим его границу:

$$\partial\sigma^2 = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1]$$

Отождествим цепь $-[\alpha_0\alpha_2]$ с 1-симплексом $[\alpha_2\alpha_0]$. Тогда цепь $[\alpha_1\alpha_2] + [\alpha_2\alpha_0] + [\alpha_0\alpha_1]$ – это цепь, состоящая из трех отрезком – сторон треугольника с внутренними точками σ^2, причем мы проходим их последовательно один за другим. Другими словами, мы получаем границу (в обычном смысле) треугольника с внутренностью, то есть 2-симплекса.

Цикл – это цепь, у которой нулевая граница. Возьмем цепь $[\alpha_1\alpha_2]+[\alpha_2\alpha_0]+[\alpha_0\alpha_1]$. Это треугольник, состоящий из трех отрезков. Как мы уже вычисляли выше в лемме 3.1 граница такой цепи нулевая. Если посмотреть на такой треугольник, то мы действительно видим, что границы у него нет. А вот отрезок $[\alpha_0\alpha_1]$ не является циклом, так как у него не нулевая граница – она является цепью $[\alpha_1]-[\alpha_0]$, то есть состоит из двух точек, а именно концов этого отрезка.

В группах k-цепей выделяются подгруппы циклов Z_k и границ B_k (как и в общей теории), а значит определяются факторгруппы Z_k/B_k. Эти группы обозначаются $H_k(M,G)$ и называются *группами гомологий симплициального комплекса* M (с коэффициентами в абелевой группе G).

Интерес представляют случаи $G=\mathbb{Q}$ (рациональные числа), $G=\mathbb{C}$, $G=\mathbb{Z}$, $G=\mathbb{Z}_2$ (вычеты по модулю 2) и вообще $G=\mathbb{Z}_m$ (вычеты по модулю m, особенно когда m простое число и $\mathbb{Z}_m$ поле). При $G=\mathbb{R}$ все множества $H_k(M,\mathbb{R})$ являются вещественными векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$. Размерность b_k пространств $H_k(M,\mathbb{R})$ называется k-м *числом Бетти* комплекса M.

Для конечного симплициального комплекса определяется *эйлерова характеристика* по формуле

$$\chi(M)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\gamma_i,$$

где γ_i – число симплексов размерности i в комплексе M. Оказывается, что эйлерова характеристика симплициального комплекса и его числа Бетти связаны следующей формулой

$$\chi(M)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i b_i.$$

3. Вычисление гомологий конкретных симплициальных комплексов. Вычислим группы гомологий $H_k(\sigma^n,G)$ симплициального комплекса, состоящего из одного симплекса σ^n и всех его граней. Рассмотрим сначала частный случай σ^0, то есть симплициальный комплекс представляет собой одну точку $[\alpha_0]$. При $k\geq 1$ симплексов σ^k в данном симплициальном комплексе нет. Договоримся в этом случае считать группы цепей C_k, состоящими из одного нуля. Группа C_0 имеет вид

$$C_0=\{g\alpha_0,\ g\in G\}.$$

Тогда цепной комплекс имеет вид

$$\ldots \xrightarrow{\ \partial\ } 0 \xrightarrow{\ \partial\ } 0 \xrightarrow{\ \partial\ } C_0 \xrightarrow{\ \partial\ } 0.$$

Ядро последнего отображения $\partial: C_0\to 0$ совпадает с C_0. Следовательно, любая цепь из C_0 является циклом. Не нулевых границ в C_0 нет (так как $0\to C_0$). Тогда каждая цепь (она есть цикл) определяет свой класс эквивалентности и других цепей там нет (так как нет не нулевых границ). Следовательно, группа гомологий $H_0(\sigma^0,G)=C_0$. С другой стороны, так как α_0 фиксированная точка, а элемент g пробегает всю группу, мы можем отождествить каждую цепь $g\alpha_0$ с элементом g. Значит, группа $H_0(\sigma^0,G)$ изоморфна G (проверьте самостоятельно, что при таком отождествлении сохраняется операция).

Итак, мы показали, что для 0-симплекса $H_k(\sigma^0,G)=0$, $k\geq 1$ и $H_0(\sigma^0,G)=G$.

Для вычисления групп гомологий симплекса σ^n, $n>0$ решим более общую задачу. Рассмотрим симплициальный комплекс M, лежащий в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^m$ и возьмем точку $a\in\mathbb{R}^{m+1}\setminus\mathbb{R}^m$. *Конусом* αM с вершиной α над симплициальным комплексом M будем называть совокупность симплексов, состоящую из симплексов $\sigma_i^k\in M$, симплекса α и симплексов вида $[\alpha\sigma_i^k]$, $\sigma_i^k\in M$.

Нетрудно показать, что конус является симплициальным комплексом (докажите самостоятельно).

Теорема 3.3. *Пусть αM – конус с вершиной α над симплициальным комплексом M. Тогда*

$$H_k(\alpha M,G)=0,\ k>0;\quad H_0(\alpha M,G)=G.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную нульмерную цепь $g\alpha+\sum g_i\alpha_i\in C_0(\alpha M,G)$, α_i – вершины из симплициального комплекса M. Любая такая цепь является циклом, так как $C_0(\alpha M,G)\to 0$. Имеем

$$g\alpha+\sum g_i\alpha_i=g\alpha+\sum g_i\alpha_i\pm\sum g_i\alpha.$$

Так как

$$\sum(g_i\alpha_i-g_i\alpha)=\partial(\sum g_i[\alpha\alpha_i]),$$

получим

$$g\alpha+\sum g_i\alpha_i=(g+\sum g_i)\alpha+\partial(\sum g_i[\alpha\alpha_i]).$$

Из этого равенства следует, что каждый 0-цикл гомологичен циклу вида $g'\alpha$, где $g'=g+\sum g_i$. При различных g' эти циклы не гомологичны друг другу (в противном случае цикл $g\alpha$ был бы гомологичен нулевому циклу при $g \neq 0$), а значит, каждый определяет свой класс эквивалентности в группе гомологий. Другими словами,

$$H_0(\alpha M, G) = \{[g'\alpha],\, g' \in G\}.$$

Каждый класс из этой группы можно отождествить с соответствующим элементом g' (проверьте, что операция сложения при этом сохранится), а значит, 0-мерная группа гомологий изоморфна группе G.

Рассмотрим теперь произвольный k-цикл c_k в $C_k(\alpha M, G)$. Они имеет вид

$$c_k = \sum g_i \sigma_i^k + \sum h_j[\alpha\sigma_j^{k-1}],\ \partial c_k = 0.$$

Имеем

$$\sum g_i \sigma_i^k \sim \sum (g_i\sigma_i^k - \partial(g_i[\alpha\sigma_i^k])) = \sum g'_m[\alpha\sigma_m^{k-1}].$$

Поэтому цикл c_k будет гомологичен циклу

$$c'_k = \sum h'_s[\alpha\sigma_s^{k-1}]. \tag{3.3}$$

Так как c'_k цикл, имеем $\partial c'_k = 0$. Тогда вычисляя ∂ от правой части (3.3), получим что симплекс σ_s^{k-1} входит в сумму с коэффициентом h'_s только один раз. Так как все симплексы σ_s^{k-1} различны, имеем $h'_s = 0$ для всех s, то есть $c'_k = 0$. Итак, мы показали, что любой цикл c_k гомологичен нулю. Следовательно, $H_k(\alpha M, G) = 0$, $k > 0$. □

Заметим, что комплекс $\{\sigma^n\}$, соответствующий n-симплексу $\sigma^n = [\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n]$, является конусом $\alpha_0\{\sigma^{n-1}\}$ над комплексом, соответствующим симплексу $\sigma^{n-1} = [\alpha_1 \ldots \alpha_n]$. Поэтому группы гомологий n-симплекса

$$H_k(\sigma^n, G) = \left\{ \begin{array}{l} G,\ k = 0 \\ 0,\ k > 0. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Пусть σ^n – n-симплекс. Рассмотрим симплициальный комплекс, состоящий из всех собственных граней этого симплекса (то есть из рассмотренного выше симплициального комплекса мы выбросили сам n-симплекс). Вычислим группы $H_k(\partial\sigma^n, G)$ гомологий полученного симплициального комплекса. Рассмотрим случай $n > 1$. Цепные комплексы для σ^n и $\partial\sigma^n$ имеют соответственно вид

$$\begin{array}{ll} \sigma^n: & \ldots 0 \to C_n \to C_{n-1} \to C_{n-2} \to \ldots \to C_0 \to 0; \\ \partial\sigma^n: & \ldots 0 \to 0 \to C_{n-1} \to C_{n-2} \to \ldots \to C_0 \to 0. \end{array}$$

Мы видим, что группы цепей совпадают до C_{n-1} включительно, а также совпадают граничные гомоморфизмы до $(n-1)$-го. Тогда при $k < n-1$.

$$H_k(\partial\sigma^n, G) = H_k(\sigma^n, G).$$

Заметим, что хотя группы цепей C_{n-1} совпадают в обоих случаях, они будут отличаться границами, так как n-е граничные гомоморфизмы уже различны. Так как все группы цепей, начиная с n-ой нулевые, получим $H_k(\partial\sigma^n, G) = 0$ при $k \geq n$. Нам осталось посчитать $H_{n-1}(\partial\sigma^n, G)$.

Заметим, что в группах цепей C_{n-1} циклы одни и те же в обоих случаях, так как $(n-1)$-е граничные гомоморфизмы совпадают. Значит, группы циклов совпадают. Группа границ B_{n-1} во втором случае нулевая, так как следующая группа цепей нулевая. Следовательно, $H_{n-1}(\partial\sigma^n, G) = Z_{n-1}(\sigma^n, G)$. Нам осталось выяснить, как выглядит группа $(n-1)$-циклов для симплициального комплекса σ^n. Как мы доказали выше, $H_{n-1}(\sigma^n, G) = 0$, то есть любой цикл c_{n-1} будет границей, то есть

$$c_{n-1} = \partial c_n = \partial(g\sigma^n),\ g \in G.$$

Тогда каждый цикл c_{n-1} можно отождествить с элементом $g\sigma^n$, а его в свою очередь отождествить с g. В результате мы получаем изоморфизм (сохранение операции проверьте самостоятельно) между группой $(n-1)$-циклов комплекса σ^n и группой G. С точки зрения алгебры эти группы не различимы, а значит мы получили, что

$$H_{n-1}(\partial\sigma^n, G) = Z_{n-1}(\sigma^n, G) = G.$$

Итак, мы показали, что

$$H_k(\partial\sigma^n, G) = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ k \neq 0, n-1; \\ G,\ k = 0, n-1. \end{array} \right.$$

Задача 3.7**.** Докажите, что

$$H_k(\partial\sigma^1, G) = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ k > 0; \\ G \oplus G,\ k = 0. \end{array} \right.$$

Решение. Заметим, что σ^1 – это отрезок $[\alpha_0\alpha_1]$. Собственные грани отрезка – это его концы. Поэтому мы получаем следующий цепной комплекс

$$\partial\sigma^1 : \quad 0 \to 0 \to C_0 \to 0.$$

Так как все группы цепей, кроме C_0, нулевые, мы получаем, что $H_k(\partial\sigma^1, G) = 0$ при $k \geq 1$. Вычислим группу $H_0(\partial\sigma^1, G)$. В группе цепей C_0 любая цепь является циклом, а граница только нулевая. Следовательно, группа гомологий H_0 изоморфна группе C_0. Выясним, как устроена группа C_0. Заметим, что любая цепь $c_0 \in C_0$ имеет вид (после приведения всех „подобных“) $c_0 = g_1\alpha_0 + g_2\alpha_1$, $g_1, g_2 \in G$ – произвольные элементы. Такую цепь можно отождествить с парой (g_1, g_2) (операция сохраняется), а значит, группа C_0 изоморфна группе $G \oplus G$. □

Будем говорить, что симплициальный комплекс M является *связным*, если любые его две вершины α_i и α_j можно соединить последовательностью 1-симплексов $[\alpha_i\alpha_{i_1}]$, $[\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}]$, $[\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}]$, ..., $[\alpha_{i_s}\alpha_j]$, принадлежащих комплексу M.

Теорема 3.4. *Пусть M – связный симплициальный комплекс. Тогда $H_0(M, G) = G$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную вершину α симплициального комплекса M. Так как комплекс M связен, любые его две вершины можно соединить последовательностью 1-симплексов. Тогда для любой вершины α_i имеем

$$\alpha_i = \alpha + \partial([\alpha\alpha_{i_1}] + [\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}] + \ldots + [\alpha_{i_s}\alpha_i]). \tag{3.5}$$

Если дана цепь $c_0 = \sum_i g_i\alpha_i$, то, заменяя каждую вершину α_i на выражение вида (3.5), получим

$$c_0 = \sum_i g_i\alpha_i = g\alpha + \partial(c_1).$$

Из этого мы видим, что в классе эквивалентности любой цепи есть представитель вида $g\alpha$. Покажем, что в каждом классе такой представитель единственен. Предположим противное. Тогда существует такой элемент $g \neq 0$, что $g\alpha$ гомологична нулевой цепи. Тогда

$$g\alpha = \partial(\sum g_i[\alpha_i\alpha_j]) = \sum g_i\alpha_i - \sum g_i\alpha_j.$$

В правой части сумма коэффициентов равна нулю. Кроме того, сумма коэффициентов при всех вершинах, отличных от α, равна нулю, а значит, $g = 0$. Таким образом, мы получаем, что каждый класс в $H_0(M, G)$ содержит элемент $g\alpha$ и при том только один. Отождествим каждый класс с элементом g. Это будет биекция, которая сохраняет операцию (проверьте самостоятельно), то есть изоморфизм групп. Тем самым мы доказали изоморфность групп $H_0(M, G)$ и G. □

Замечание 3.2. Аналогично доказывается, что если симплициальный комплекс содержит s „компонент связности“, то $H_0(M, G) = G \oplus \ldots \oplus G$ (s слагаемых).

Для вычисления групп гомологий более сложных симплициальных комплексов нам потребуются доказать дополнительные утверждения.

Задача 3.8. Пусть M – симплициальный комплекс, L_1, L_2 – его подкомплексы. Докажите, что $L_1 \cap L_2$ и $L_1 \cup L_2$ также являются подкомплексами.

Задача 3.9. Пусть M – симплициальный комплекс, L_1, L_2 – его подкомплексы. Докажите точность последовательности

$$0 \longrightarrow C_*(L_1 \cap L_2, G) \xrightarrow{I_*} C_*(L_1, G) \oplus C_*(L_2, G) \xrightarrow{J_*} C_*(L_1 \cup L_2, G) \longrightarrow 0,$$

где $I_*\left(\sum_i(g_i\sigma_i^k)\right) = \left(\sum_i(g_i\sigma_i^k), -\sum_i(g_i\sigma_i^k)\right)$, $J_*\left(\sum_i(g_i\sigma_i^k), \sum_j(\tilde{g}_j\tilde{\sigma}_j^k)\right) = \sum_i(g_i\sigma_i^k) + \sum_j(\tilde{g}_j\tilde{\sigma}_j^k)$ и выведите из этого точность последовательности

$$\ldots \to H_{k+1}(L_1 \cup L_2, G) \to H_k(L_1 \cap L_2, G) \to H_k(L_1, G) \oplus H_k(L_2, G) \to H_k(L_1 \cup L_2, G) \to H_{k-1}(L_1 \cap L_2, G) \to \ldots,$$

называемой *точной последовательностью Майера-Виеториса.*

Решение. Очевидно, что $Ker\, I_* = \{0\}$ и $Im\, I_* \subset Ker\, J_*$. Остается доказать, что $Ker\, J_* \subset Im\, I_*$, $Im\, J_* = C_*(L_1 \cup L_2, G)$.

Пусть $(\sum_i g_i\sigma_i^k, \sum_j \tilde{g}_j\sigma_j^k) \in Ker\, J_*$. Тогда

$$g_i\sigma_i^k + \tilde{g}_j\sigma_j^k = 0,$$

то есть сумма двух цепей является нулевой цепью. Тогда мы получаем, что количество слагаемых в каждой сумме одинаково и $g_i = -\tilde{g}_i$, а значит, исходный элемент имеет вид $(\sum_i g_i\sigma_i^k, -\sum_i g_i\sigma_i^k) \in Im\, I_*$.

Равенство $Im\, J_* = C_*(L_1 \cup L_2, G)$ имеет место, так как любую цепь из объединения симплициальных комплексов можно представить в виде суммы двух цепей: цепь из симплексов L_1 и цепь из симплексов L_2.

Заметим, что цепной комплекс $C_*(L_1 \cap L_2)$ является подкомплексом цепного комплекса $_*(L_1 \coprod L_2)$ (где $\coprod$ обозначает несвязное объединение симплициальных комплексов L_1 и L_2). Тогда $C_*(L_1 \cup L_2)$ будет факторкомплексом $_*(L_1 \coprod L_2)/C_*(L_1 \cup L_2)$. Поясним эту общую конструкцию на конкретном примере. Пусть L_1 и L_2 – два треугольника с внутренностью (то есть два 2-симплекса, их стороны и вершины), у которых есть пара равных по длине сторон. Тогда $L_1 \coprod L_2$ – это два треугольника, лежащие отдельно друг от друга (общих точек нет), $L_1 \cap L_2$ – равные стороны треугольников совмещены и пересечением является их общая сторона. Тогда объединением $L_1 \cup L_2$ будет четырехугольник (с внутренними точками) с диагональю (треугольники склеены по общей стороне). Факторизация как раз описывает эту склейку. Если в несвязном объединении мы имеем шесть вершин и шесть сторон, то в факторкомплексе склеиваются две пары вершин и сторона. В результате в таком комплексе получаем четыре вершины и пять сторон. Заметим, что в обоих случаях 2-симплексы одни и те же в обоих комплексах – это два треугольника.

Таким образом, мы получили, что последовательность Майера-Виеториса есть частный случай длинной точной последовательности (1.). □

Задача 3.10. Используя последовательность Майера-Виеториса вычислите группы гомологий следующих симплициальных комплексов: 1) два отдельных треугольника (с внутренними точками, со сторонами и вершинами), 2) два треугольника (с внутренними точками), имеющие общую сторону, 3) треугольник с внутренними точками и треугольник без внутренних точек, имеющие общую сторону.

Решение. 1) Обозначим L_1 – первый 2-симплекс со всеми гранями (то есть сам треугольник с внутренними точками, его стороны и вершины), L_2 – второй 2-симплекс со всеми гранями. Так как треугольники не пересекаются, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Объединение $L_1 \cup L_2$ есть тот симплициальный комплекс, для которого мы хотим вычислить группы гомологий. Заметим, что самая большая размерность симплексов, входящих в комплекс $L_1 \cup L_2$ равна 2. Следовательно, группы цепей, а значит, и группы гомологий, начиная с 3 будут нулевыми. С учетом этого запишем нужную нам часть последовательности Майера-Виеториса (коэффициенты берем из группы G)

$$\begin{gathered}H_3(L_1 \cup L_2) \to H_2(L_1 \cap L_2) \to H_2(L_1) \oplus H_2(L_2) \to H_2(L_1 \cup L_2) \to H_1(L_1 \cap L_2) \to H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) \to \\ \to H_1(L_1 \cup L_2) \to H_0(L_1 \cap L_2) \to H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) \to H_0(L_1 \cup L_2) \to 0 \quad (3.6)\end{gathered}$$

С учетом (3.4) получим

$$0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_2(L_1 \cup L_2) \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_1(L_1 \cup L_2) \to 0 \to G \oplus G \to G \oplus G \to 0$$

Рассмотрим короткие точные последовательности из последней длинной последовательности:

$$0 \to H_2(L_1 \cup L_2) \to 0.$$

Обозначим левое отображение φ, а правое – ψ. Тогда $\{0\} = Im\, \varphi = Ker\, \psi$. Так как все элементы из группы $H_2(L_1 \cup L_2)$ при отображении ψ должны отобразиться, а отобразиться они могут только в нуль и, кроме того, из-за равенства $\{0\} = Ker\, \psi$ в нуль отображается только нуль, мы получаем, что $H_2(L_1 \cup L_2) = \{0\}$.

Рассуждая аналогично, получим, что $H_1(L_1 \cup L_2) = \{0\}$.

Итак, мы получили, что для симплициального комплекса M, состоящего из двух „отдельных"симплексов, группы гомологий (с коэффициентами в группе G) имеют вид

$$H_k(M, G) = \begin{cases} 0,\ k > 0 \\ G \oplus G,\ k = 0. \end{cases}$$

2) Обозначим L_1 – первый 2-симплекс со всеми гранями (то есть сам треугольник с внутренними точками, его стороны и вершины), L_2 – второй 2-симплекс со всеми гранями. Так как треугольники пересекаются по стороне, получаем, что $L_1 \cap L_2$ – это отрезок и его концы (выше мы обозначали такой симплициальный комплекс $\partial\sigma^1$). Объединение $L_1 \cup L_2$ есть тот симплициальный комплекс, для которого мы хотим вычислить группы гомологий. Воспользуемся последовательностью (3.6).

$$0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_2(L_1 \cup L_2) \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_1(L_1 \cup L_2) \to G \to G \oplus G \to G \to 0$$

Как и выше получаем, что $H_2(L_1 \cup L_2) = \{0\}$. Подробнее рассмотрим последовательность

$$0 \xrightarrow{\varphi} H_1(L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\zeta} G \oplus G \xrightarrow{\xi} G \xrightarrow{\theta} 0$$

Начинаем с правого конца последовательности применять ее точность. Имеем $G = Ker\,\theta = Im\,\xi$. По теореме о гомоморфном образе группы (см. теорему 3.2) получаем $G = Im\,\xi = (G \oplus G)/Ker\,\xi$. Покажем, что $Ker\,\xi = G$, то есть покажем, что $(G \oplus G)/G = G$. Отождествим группу G с множеством пар $\{(g, 0), g \in G\}$. Тогда мы сможем рассматривать G как подгруппу группы $G \oplus G$. Тогда класс в факторгруппе будет выглядеть так $\{(a, b) + (g, 0), g \in G\}$. Поставим ему в соответствие элемент $b \in G$. Такое определение отображения корректно в смысле независимости от выбора представителя класса. Это будет биекция, сохраняющая операцию (проверьте самостоятельно). Следовательно, мы построили изоморфизм групп $(G \oplus G)/G$ и G. Что нам и требовалось. Таким образом, $Ker\,\xi = G$. Далее, $G = Ker\,\xi = Im\,\zeta$. Опять пользуемся теоремой о гомоморфном образе группы: $G = Im\,\zeta = G/Ker\,\zeta$. Откуда получаем, что $Ker\,\zeta = \{0\}$. Далее, $\{0\} = Ker\,\zeta = Im\,psi$. С другой стороны, $Ker\,\psi = Im\,\varphi = \{0\}$. Тогда $\{0\} = Im\,\psi = H_1(L_1 \cup L_2)/Ker\,\psi = H_1(L_1 \cup L_2)/\{0\}$. Откуда получаем, что $H_1(L_1 \cup L_2) = \{0\}$.

Итак, мы получаем, что для симплициального комплекса M, состоящего из двух „соединенных“симплексов, группы гомологий (с коэффициентами в группе G) имеют вид

$$H_k(M, G) = \begin{cases} 0,\ k > 0 \\ G,\ k = 0. \end{cases}$$

3) Обозначим L_1 – 2-симплекс с гранями, а через L_2 – треугольник без внутренних точек (три отрезка и три вершины. Выше такой симплициальный комплекс обозначали $\partial\sigma^2$). Тогда $L_1 \cap L_2$ – это отрезок. Тогда $H_2(L_1 \cup L_2) = \{0\}$. Запишем оставшийся кусок длинной точной последовательности

$$0 \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus G \xrightarrow{\psi} H_1(L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\zeta} G \xrightarrow{\xi} G \oplus G \xrightarrow{\theta} H_0(L_1 \cup L_2) \longrightarrow 0$$

Как и в пункте 2) $H_0(L_1 \cup L_2) = G$. Далее, имеем $Ker\,\psi = Im\,\varphi = \{0\}$. Тогда $Im\,\psi = G/Ker\,\psi = G$. Так как $Im\,\psi = Ker\,\zeta$, $Ker\,\zeta = G$. А $Im\,\zeta = Ker\,\xi = \{0\}$ (см. пункт 2)). Опять пользуемся теоремой о гомоморфном образе группы. Получаем $Im\,\zeta = H_1(L_1 \cup L_2)/Ker\,\zeta$, то есть $\{0\} = H_1(L_1 \cup L_2)/G$. Откуда получаем, что $H_1(L_1 \cup L_2) = G$. Итак, мы получили для симплициального комплекса M, состоящего из 2-симплекса и 2-симплекса с „двумерной дыркой“следующий результат

$$H_k(M, G) = \begin{cases} 0,\ k > 1 \\ G,\ k = 0, 1. \end{cases}$$

□

Замечание 3.3**.** Сравним полученные результаты для групп гомологий в предыдущей задаче. Заметим, что одномерная группа гомологий отловила „дырку“, ограниченную 1-симплексами.

Задача 3.11**.** Пусть симплициальный комплекс состоит из двух треугольников без внутренних точек (их сторон и вершин), которые имеют общую сторону. Напишите ожидаемый ответ для групп гомологий такого симплициального комплекса, а затем проверьте свою догадку вычислениями.

Задача 3.12**.** Запишите день своего рождения двумя цифрами (например, 03 или 23) как пишут индекс на почтовых конвертах. Добавьте точки так, чтобы в результате получился симплициальный комплекс из 0- и 1-симплексов. Вычислите его группы гомологий.

4. Группы гомологий полиэдров. Пусть дан конечный симплициальный комплекс M в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что через $|M|$ мы обозначили теоретико-множественное объединение всех симплексов, входящих в комплекс M. Это подмножество в $\mathbb{R}^n$. Евклидова топология (то есть метрическая топология канонической метрики) в $\mathbb{R}^n$ индуцирует на $|M|$ топологию, превращая симплициальный комплекс в топологическое пространство.

Полиэдром будем называть любое топологическое пространство X, гомеоморфное $|M|$, где M – это некоторый конечный симплициальный комплекс. Симплициальный комплекс M называется *триангуляцией* полиэдра X. Очевидно, что полиэдр может иметь более одной триангуляции.

С примерами полиэдров мы уже сталкивались – это замкнутые поверхности (см. § 2.13.). Их триангуляция задается разбиением поверхности на топологические треугольники, их ребра и вершины.

Пусть X – полиэдр, M – симплициальный комплекс, $\varphi : |M| \to X$ – гомеоморфизм. Гомеоморфизм φ порождает разбиение (триангуляцию) пространства X на множества $\Sigma_i^k = \varphi(\sigma_i^k)$, $\sigma_i^k \in M$, которые называются *криволинейными симплексами.*

Группами гомологий $H_k(X, G)$ полиэдра X с коэффициентами в абелевой группе G называются группы гомологий триангуляции M полиэдра X с коэффициентами в группе G.

Можно доказать (технически сложное доказательство), что это определение корректно в смысле независимости от выбора триангуляции.

Из определения полиэдра следует, что гомеоморфные полиэдры имеют одинаковые группы гомологий.

Задача 3.13. Докажите, что для замкнутого n-мерного шара $\bar{B}^n$ и n-мерной сферы S^n группы гомологий имеют вид

$$H_k(\bar{B}^n, G) = \begin{cases} 0, \ k > 0 \\ G, \ k = 0 \end{cases} ; \quad H_k(S^n, G) = \begin{cases} 0, \ k \neq 0, n-1 \\ G, \ k = 0, n-1 \end{cases}$$

Задача 3.14. Пусть $X = S^1 \times [0,1]$ – цилиндр. Используя последовательность Майера-Виеториса, вычислите его группы гомологий.

Решение. Разрежем цилиндр X вдоль диаметрально противоположных образующих отрезков I_1 и I_2 на два криволинейных прямоугольника P_1 и P_2. Каждый из криволинейных прямоугольников представляет собой полиэдр. Действительно, спроектируем каждый прямоугольник на плоскость, перпендикулярную основанию цилиндра, и проведем проведем в получившихся четырехугольниках по одной диагонали. Тогда

$$H_k(P_1, G) = H_k(P_2, G) = \begin{cases} 0, \ k > 0 \\ G, \ k = 0. \end{cases}$$

Докажите самостоятельно, что

$$H_k(I_1 \cup I_2, G) = \begin{cases} 0, \ k > 0 \\ G \oplus G, \ k = 0. \end{cases}$$

Точная последовательность

$$0 \to C_*(I_1 \cup I_2, G) \to C_*(P_1, G) \oplus C_*(P_2, G) \to C_*(X, G) \to 0$$

порождает точную последовательность Майера-Виеториса

$$0 \to H_2(I_1 \cup I_2) \to H_2(P_1) \oplus H_2(P_2) \to H_2(X) \to H_1(I_1 \cup I_2) \to H_1(P_1) \oplus H_1(P_2) \to H_1(X) \to H_0(I_1 \cup I_2) \to$$
$$\to H_0(P_1) \oplus H_0(P_2) \to H_0(X) \to 0.$$

Подставим в нее все, что знаем

$$0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_2(X) \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_1(X) \to G \oplus G \to G \oplus G \to G \to 0.$$

Сразу получаем, что $H_2(X) = \{0\}$. Оставшийся хвост выписываем отдельно.

$$0 \xrightarrow{\ \varphi\ } H_1(X) \xrightarrow{\ \psi\ } G \oplus G \xrightarrow{\ \zeta\ } G \oplus G \xrightarrow{\ \theta\ } G \xrightarrow{\ \xi\ } 0$$

Применяем точность последовательности и теорему о гомоморфном образе группы с правого конца последовательности. Имеем $G = Ker\,\xi = Im\,\theta$. Тогда $G = (G \oplus G)/Ker\,\theta$, следовательно, $Ker\,\theta = G$. Далее, $G = Ker\,\theta = Im\,\zeta$ и $G = (G \oplus G)/Ker\,\zeta$, следовательно, $Ker\,\zeta = G$. Наконец, $Im\,\psi = Ker\,\zeta = G$ и $Ker\,\psi = Im\,\varphi = \{0\}$. Тогда $G = H_1(X)/\{0\}$, то есть $H_1(X) = G$. Итак, для цилиндра X мы получили, что

$$H_k(X, G) = \begin{cases} 0, \ k > 1 \\ G, \ k = 0, 1 \end{cases} .$$

□

Задача 3.15. Вычислите группы гомологий вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ при $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{Z}_2$.

Указания: см. [5], ответ в [1]

Задача 3.16. Пусть в 2-мерной сфере S^2 вырезана круглая дырка. Вычислите группы гомологий получившегося топологического пространства. А что изменится, если в сфере вырезать квадратную дырку?

§3.3. Когомологии коцепных комплексов.

Бесконечная последовательность

$$\ldots \longleftarrow C^{k+1} \xleftarrow{\delta_k} C^k \xleftarrow{\delta^{k-1}} C^{k-1} \longleftarrow \ldots \xleftarrow{\delta^0} C^0 \longleftarrow 0 \tag{3.7}$$

абелевых групп C^k и их гомоморфизмов δ^k, удовлетворяющих для любого $k \geq 1$ условию $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$, называется *коцепным комплексом* (или *комплексом коцепей*). Будем обозначать его C^*; группы C^k называются группами коцепей, гомоморфизмы δ^k называются *дифференциалами* или *граничными гомоморфизмами*.

Множество

$$Ker\,\delta^k = \{c \in C^k : \delta^k c = 0\} \equiv Z^k$$

образует подгруппу в C^k. Она называется *группой k-мерных коциклов*, ее элементы называются *k-мерными коциклами.* Множество

$$Im\,\delta^{k-1} = \{c \in C^k : c = \delta^{k-1} u\} \equiv B^k$$

также образует подгруппу в C^k. Она называется *группой k-мерных кограниц*, ее элементы называются *k-мерными кограницами.*

Группой когомологий комплекса коцепей называют факторгруппу $H^k(C^*) = Z^k/B^k$.

§3.4. Группы когомологий гладкого многообразия.

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие. Напомним, что k-формой называется кососимметрическое тензорное поле типа $(k,0)$. Множество k-форм мы обозначали $\Lambda_k(M)$. Операция сложения форм превращает эти множества в абелевы группы C^k, а оператор внешнего дифференцирования $d : \Lambda_k(M) \to \Lambda_{k+1}(M)$ может быть принят за граничный гомоморфизм (так как $d \circ d = 0$). Таким образом, используя внешние формы на гладком многообразии, мы построили пример коцепного комплекса.

k-форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, где d – оператор внешнего дифференцирования. r-форма называется *точной*, если существует $(k-1)$-форма ω', такая что $\omega = d\omega'$. Так как $d \circ d = 0$, любая точная форма является замкнутой. Обратное, вообще говоря не верно.

Задача 3.17. Пусть на многообразии $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ задана 1-форма $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ (в декартовых координатах (x,y)). Докажите, что она точна. Вычислите ее в полярных координатах (r,φ). Докажите, что не существует функции $\varphi(x,y)$, определенной на $\mathbb{R}^2$, такой что $\omega = d\varphi(x,y)$.

Множество всех замкнутых k-форм обозначим Z^k. Оно является группой относительно сложения. Тогда множество всех точных k-форм B^k образует в Z^k подгруппу. Фактормножество Z^k/B^k обозначается $H^k(M^n)$ и называется k-ой *группой когомологий многообразия* M^n. Элементы группы когомологий $H^k(M^n)$ – это множества вида

$$[\omega] = \{\omega + d\omega',\, \omega' \in \Lambda_{k-1}(M)\}.$$

Две k-формы ω и $\tilde{\omega}$ будем называть *когомологичными*, если их разность является точной формой.

Задача 3.18. Докажите, что группы $H^k(M^n)$ являются векторными пространствами.

Теорема 3.5. *Для любого многообразия M^n группа $H^0(M^n)$ есть векторное пространство размерности q, где q равно числу компонент линейной связности многообразия M^n как топологического пространства.*

Доказательство. 0-формы – это функции f на многообразии M. Замкнутые 0-формы – это функции f, для которых $df = 0$, то есть f является константой на каждой компоненте линейной связности многообразия. Так как таких компонент q штук, каждую замкнутую 0-форму можно отождествить с упорядоченной совокупностью q вещественных чисел. Так как точных форм здесь нет, каждая функция является классом в группе гомологий. Следовательно, группа $H^0(M^n)$ есть q мерное векторное пространство. □

Пусть $\phi : M \to N$ – гладкое отображение многообразий. Тогда определено отображение антиувлечения k-форм $\phi^* : \Lambda_k(N) \to \Lambda_k(M)$. Как мы знаем, это отображение коммутирует с оператором внешнего дифференцирования d, то есть $\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega)$.

Задача 3.19. Используя этот факт, докажите, что отображение

$$\phi^* : H^k(N) \to H^k(M),$$

заданное формулой $\phi^*([\omega]) = [\phi^*\omega]$, определено корректно. Это отображение называется *отображением антиувлечением групп когомологий.*

Указания. Проверьте, что точные формы переходят в точные, а замкнутые – в замкнутые. Проверьте, что результат не зависит от выбора представителя класса.

Задача 3.20. Докажите, что для отображений антиувлечения групп когомологий имеет место соотношение $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Гладкие многообразия являются топологическими пространствами, а значит, все понятия, которые мы вводили выше для топологических пространств, применимы и для гладких многообразий. В частности, мы можем говорить о гомотопности гладких отображений гладких многообразий. Но так как работая с бесконечно дифференцируемыми объектами, вводить в их круг всего лишь непрерывные объекты не комильфо, мы изменим определение гомотопных гладких отображений, заменив везде непрерывность на гладкость. Получаем: два гладких отображения $f : M \to N$ и $g : M \to N$ гладких многообразий называются *гомотопными*, если существует гладкое отображение $F : M \times I \to N$, такое что $F(p,0) = f(p)$, $F(p,1) = g(p)$. Напомним, что $M \times I$ наделено гладкой структурой декартова произведения.

Теорема 3.6. *Если заданы два гладких отображения $f : M \to N$, $g : M \to N$ и они гомотопны, то отображения антиувлечения групп когомологий f^* и g^* совпадают.*

Доказательство. Если f и g гомотопны, то существует гомотопия $F : M \times I \to N$, такое что $F(p,0) = f(p)$, $F(p,1) = g(p)$.

Рассмотрим произвольную k-форму Ω на гладком многообразии $M \times I$. Локальные карты на этом многообразии имеют вид $(U \times I, \varphi \times id)$, где (U,φ) – локальная карта на многообразии M. Обозначим координаты на многообразии M через $(x^1,\dots,x^n)$, а на многообразии I – через t. Тогда локальный базис 1-форм на $M\times I$ имеет вид $(dx^1,\dots,dx^n,dt)$, а канонический базис k-форм имеет вид

$$\left\{dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,(i_1<\ldots i_k);dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dt\,(i_1<\ldots i_{k-1})\right\}.$$

Тогда форма Ω может быть представлена в виде

$$\Omega=\omega_1+\omega_2\wedge dt, \tag{3.8}$$

где ω_1 – k-форма, не содержащая в своем разложении множителя dt, ω_2 – $(k-1)$-форма, не содержащая в своем разложении множителя dt.

Рассмотрим произвольную форму $\omega\in\Lambda_k(N)$, то есть k-форму на многообразии N. Так как гомотопия F является гладким отображением, для него определено отображение антиувлечения F^*. Тогда $F^*(\omega)\in\Lambda_k(M\times I)$ – k-форма на многообразии $M\times I$. Представим эту форму в виде (3.8)

$$F^*(\omega)=\omega_1+\omega_2\wedge dt,$$

где

$$\omega_1=b_{i_1\ldots i_k}(x^1,\dots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k};\quad \omega_2=a_{j_1\ldots j_{k-1}}(x^1,\dots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dt.$$

Определим $(k-1)$-форму $D\Omega$ на многообразии $M\times I$ по формуле

$$D\Omega=\left(\int_0^1 a_{j_1\ldots j_{k-1}}(x^1,\dots,x^n,t)dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Докажем вспомогательную лемму

Лемма 3.2. *Верна формула „алгебраической гомотопии“*

$$d(DF^*(\omega))-D(dF^*(\omega))=(-1)^{k+1}(g^*(\omega)-f^*(\omega)).$$

$\diamond$ Покажем, что для любой формы $\Omega=\omega_1+\omega_2\wedge dt$ на многообразии $M\times I$ верна формула

$$dD(\Omega)-Dd(\Omega)=\Omega|_{t=1}-\Omega|_{t=0}.$$

Вычислим $dD(\Omega)$ в компонентах. Для этого вспомним формулы из курса Анализ на многообразиях: $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^r\omega\wedge d\theta$, $df=\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$. Тогда

$$d\omega=d(\omega_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=d(\omega_{i_1\ldots i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Применяем эту формулу для вычисления $dD(\Omega)$. С учетом определения $D\Omega$ имеем

$$dD(\Omega)=d\left(\int_0^1 a_{j_1\ldots j_{k-1}}(x^1,\dots,x^n,t)dt\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}=$$
$$=\left(\int_0^1\frac{\partial a_{i_1\ldots i_{k-1}}(x^1,\dots,x^n,t)}{\partial x^j}\right)dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Вычислим $D(d\Omega)$.

$$D(d\Omega)=D(d(\omega_1+\omega_2\wedge dt))=D(d\omega_1+d\omega_2\wedge dt)=$$
$$=D\left(\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_k}+\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial t}dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_k}+\frac{\partial a_{i_1\ldots i_{k-1}}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dt\right)=$$
$$=D\left(\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}+\left((-1)^k\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial t}+(-1)^{k-1}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_{k-1}}}{\partial x^{i_k}}\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dt\right)=$$
$$=\left(\int_0^1\left((-1)^k\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial t}+(-1)^{k-1}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_{k-1}}}{\partial x^{i_k}}\right)dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Тогда

$$dD(\Omega)-D(d\Omega)=(-1)^{k+1}\left(\int_0^1\frac{\partial b_{i_1\ldots i_k}}{\partial t}dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=$$
$$=(-1)^{k+1}(b_{i_1\ldots i_k}(x^1,\dots,x^n,1)-b_{i_1\ldots i_k}(x^1,\dots,x^n,0))dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=(-1)^{k+1}(\Omega|_{t=1}-\Omega|_{t=0}).$$

Поясним обозначение $\Omega|_{t=1}$. Локальная карта $(U\times I,\varphi\times id)$ является гладким многообразием. Уравнение $t=1$ определяет в этом гладком многообразии подмногообразие, диффеоморфное U, с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$. Модуль векторных полей этого многообразия имеет натуральный базис вида $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ и не содержит векторного поля $\frac{\partial}{\partial t}$. Обозначим сужение формы Ω на рассматриваемое подмногообразие через $\Omega|_{t=1}$. Тогда для любого набора векторных полей, определенных на подмногообразии, получим

$$\Omega|_{t=1}(X_1,\ldots,X_k)=\Omega(X_1,\ldots,X_k)=\omega_1(X_1,\ldots,X_k)+\omega_2\wedge dt(X_1,\ldots,X_k)=\omega_1(X_1,\ldots,X_k),$$

так как значение формы dt на любом векторном поле из набора $X_1,\ldots,X_k$ равно нулю (в их разложении по базису нет слагаемых с $\frac{\partial}{\partial t}$). Другими словами,

$$\Omega|_{t=1}=b_{i_1\ldots i_k}(x^1,\ldots,x^n,1)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Положим теперь $\Omega=F^*(\omega)$. Тогда $\Omega|_{t=1}=g^*(\omega)$, $\Omega|_{t=0}=f^*(\omega)$. Тем самым лемма доказана. ⋄

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть ω – замкнутая форма на многообразии N. Тогда по доказанной лемме получим

$$(-1)^{k+1}(g^*(\omega)-f^*(\omega))=d(DF^*(\omega))-0,$$

то есть разность форм $g^*(\omega)$ и $f^*(\omega)$ точна, следовательно они принадлежат одному классу. Тогда отображения антиувлечения групп когомологий g^* и f^* классу $[\omega]$ ставят в соответствие один и тот же класс. Следовательно, эти отображения совпадают. □

Будем говорить, что два гладких многообразия M и N *гомотопически эквивалентны*, если существуют гладкие отображения $f:M\to N$ и $g:N\to M$, такие что отображения $f\circ g:N\to N$ и $g\circ f:M\to M$ гомотопны тождественным.

Пример 3.3. Как мы знаем, пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке.

Теорема 3.7. *Гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.*

Доказательство. Пусть M и N – гомотопически эквивалентные многообразия, f и g – соответствующие отображения. Рассмотрим отображения антиувлечения групп когомологий $f^*:H^k(N)\to H^k(M)$ и $g^*:H^k(M)\to H^k(N)$. Так как отображения $f\circ g$ и $g\circ f$ гомотопны тождественным, получаем, что соответствующие отображения антиувлечения групп когомологий совпадают, то есть $(f\circ g)^*=id^*:H^k(N)\to H^k(N)$ и $(g\circ f)^*=id^*:H^k(M)\to H^k(M)$. Из определения отображения антиувлечения групп когомологий следует, что $id^*=id$. С учетом задачи 3.20 получим $g^*\circ f^*=id$ и $f^*\circ g^*=id$. Следовательно, отображения f^* и g^* являются взаимно обратными изоморфизмами групп когомологий $H^k(M)$ и $H^k(N)$. □

Замечание 3.4. Согласно доказанной теореме, можно определить группы когомологий для всех топологических пространств X, для которых существует гладкое многообразие M, содержащее X и гомотопически эквивалентное ему. Для этого кладут по определению $H^k(X)=H^k(M)$. Здесь уже гомотопическая эквивалентность рассматривается в прежнем смысле, то есть как гомотопическая эквивалентность топологических пространств.

Например, восьмерка не является гладким многообразием (почему?). Но она гомотопически эквивалентна плоскости с двумя выколотыми точками, а значит, для нее определены группы когомологий.

Задача 3.21. Докажите, что $H^k(\mathbb{R}^n)=\{0\}$, $k>0$ и $H^0(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$.

Доказательство. Напомним, что пространство $\mathbb{R}^n$ является стягиваемым, то есть гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{a\}$. Следовательно, оно имеет те же группы когомологий, что и одноточечное пространство. Вычислим $H^k(\{a\})$. Функций на таком пространстве столько же сколько вещественных чисел (каждая функция – это сопоставление точке a некоторого вещественного числа), следовательно, $H^0(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$. Форм степени выше 0 на таком пространстве нет, так как оно нульмерно, следовательно, остальные группы когомологий нулевые. □

Задача 3.22. Докажите, что $H^k(B^n)=\{0\}$, $k>0$ и $H^0(B^n)=\mathbb{R}$, где B^n – открытый шар в арифметическом пространстве.

В качестве приложения построенной теории посмотрим доказательство леммы Пуанкаре.

Теорема 3.8. *(лемма Пуанкаре). Пусть ω – замкнутая форма на гладком многообразии M^n. Тогда для любой точки $p\in M$ существует окрестность U и форма ω' на U, такие что имеет место равенство $\omega|_U=d\omega'$. Другими словами, любая замкнутая форма на многообразии локально точна.*

Доказательство. Пусть дана замкнутая форма ω. Рассмотрим произвольную точку $p \in M$ и локальную карту (U, φ), содержащую эту точку. Пусть

$$B^n = \{\sum (x^i - x_0^i)^2 < \varepsilon\}$$

открытый шар в U с центром в точке $p(x_0^i)$. Так как группы когомологий шара тривиальны, любая форма (степени строго больше нуля) является точной. Следовательно, $\omega|_{B^n}$ является точной. Сужая окрестность U до шара B^n, мы получаем требуемое утверждение. □

Следствие 3.1. В $\mathbb{R}^n$ любая замкнутая форма точна.

Задача 3.23. Докажите, что группы когомологий окружности S^1 имеют вид

$$H^k(S^1) = \{0\},\ k > 1; \quad H^1(S^1) = \mathbb{R}; \quad H^0(S^1) = \mathbb{R}.$$

Решение. Как мы знаем, окружность – это 1-мерное многообразие. Значит, ненулевыми на ней могут быть только 1- и 0-формы. Следовательно, $H^k(S^1) = \{0\}$ при $k \geq 2$. Кроме того, окружность является связной, следовательно, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Нам остается вычислить группу $H^1(S^1)$.

Введем координату φ. Тогда любая 1-форма имеет вид $\omega = a(\varphi)d\varphi$, где $a(\varphi)$ – периодическая функция ($a(\varphi) = a(\varphi + 2\pi n)$). Так как все 2-формы нулевые, любая 1-форма на окружности является замкнутой. Выясним, какие 1-формы являются точными. Форма ω точна тогда и только тогда, когда существует функция F, такая что $\omega = dF$, то есть $a(\varphi)d\varphi = dF$, то есть

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} a(\psi)d\psi + const.$$

Из этого равенства, в частности, следует, что при $\varphi = 0$ имеем $const = 0$. Так как F должна быть периодической, то есть $F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi)$, получим

$$\int_0^{\varphi} a(\psi)d\psi = \int_0^{\varphi+2\pi} a(\psi)d\psi = \int_0^{\varphi} a(\psi)d\psi + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} a(\psi)d\psi.$$

Тогда при $\varphi = 0$ получим $\int_0^{2\pi} a(\psi)d\psi = 0$. В других обозначениях это равенство запишется в виде $\int_{S^1} \omega = 0$. Тогда 1-формы ω_1 и ω_2 попадут в один класс тогда и только тогда, когда $\omega_1 - \omega_2 = dF$, то есть $\int_{S^1}(\omega_1 - \omega_2) = 0$, то есть $\int_{S^1} \omega_1 = \int_{S^1} \omega_2$. Так как $\int_{S^1} \omega$ – это вещественное число, классов будет столько же, сколько вещественных чисел (каждому классу ставим в соответствие свое вещественное число). Самостоятельно приведите пример формы, соответствующей произвольному вещественному числу (докажите сюръективность отображения). Очевидно, что операция сохраняется. Следовательно, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$. □

Следствие 3.2. Так как $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно S^1, группы гомологий

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \{0\},\ k > 1; \quad H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}; \quad H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}.$$

В частности, из этого следует, что $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфны.