лекция 1,2.

определения: тензорное поле типа $(r, s)$, канонический базис, отображение порождаемое подстановкой, симметрическое тензорное поле, кососимметрическое тензорное поле, знак подстановки, проектор, проектор симметризации, проектор альтернирования.

1. Докажите, что система тензорных полей $(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s})$ линейно независима.

2. Докажите, что любое тензорное поле типа $(r, s)$ представимо в виде линейной комбинации тензорных полей $(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s})$.

3. Докажите, что $(\tau \circ \sigma)(t) = \sigma(\tau(t))$.

4. Докажите, что если тензорное поле кососимметрично, то его значение меняется на противоположное при перестановке любых двух аргументов.

5. Докажите, что если значение тензорного поля меняется на противоположное при перестановке любых двух аргументов, то это тензорное поле кососимметрично.

6. Докажите, что если тензорное поле симметрично, то его значение не меняется при перестановке любых двух аргументов.

7. Докажите, что если значение тензорного поля не меняется при перестановке любых двух его аргументов, то оно симметрично.

8. Докажите, что образ проектора симметризации есть множество симметрических тензорных полей.

9. Докажите, что отображение $Sym$ является $C^\infty(M)$-линейным.

10. Докажите второе условие из определения проектора для отображения $Sym$.

11. Выразите компоненты тензорного поля $Sym\, t$ через компоненты тензорного поля $t$ типа (0,3) (это не опечатка!).

По доказательству 5. могут возникнуть вопросы. Посмотрите этот пункт заранее. Если будет сложности – пишите! По остальным заданиям также принимаю вопросы в письменном виде.

лекция 3.

определения: операция внешнего умножения, операция тензорного произведения, $r$-форма, отображение альтернирования, кососимметричное тензорное поле, псевдо-риманова структура, риманова структура, поднимите индекс у тензорного поля $\{t_i{}^j\}$, опустите второй индекс у тензорного поля $\{t^{ij}\}$, поднимите нижний индекс и опустите верхний индекс у тензорного поля $\{t^i{}_j\}$.

1. Докажите, что $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$.

2. Докажите, что для любой $\sigma \in S_r$ и любого $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ имеем $\sigma \circ Alt(t) = \varepsilon(\sigma) Alt(t)$.

3. Докажите, что для любой $\sigma \in S_r$ и любого $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ имеем $Alt \circ \sigma(t) = \varepsilon(\sigma) Alt(t)$.

4. Докажите, что $Alt(Alt(t_1) \otimes t_2) = Alt(t_1 \otimes t_2)$.

5. Докажите, что $Alt(t_1 \otimes Alt(t_2)) = Alt(t_1 \otimes t_2)$.

6. Докажите, что $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.

7. Докажите, что для 1-форм $\omega$ и $\theta$ имеет место формула $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$.

8. Докажите, что компоненты 2-формы совпадают с ее координатами в каноническом базисе 2-форм.

9. Докажите, что компоненты 3-формы совпадают с ее координатами в каноническом базисе 3-форм.

10. Докажите, что для $r$-формы $\omega$ и $s$-формы $\theta$ имеет место равенство $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$.

11*. (задача из журнала Квантик) Пусть на канатной дороге 40 кабинок. Вы садитесь на канатную дорогу, чтобы подняться на вершину горы. Сколько кабинок Вы встретите по дороге?

лекция 4.

определения: римановой структуры, псевдо-римановой структуры, римановой связности, обобщенных символов Кристоффеля, ковариантной производной тензорного поля, связности, контравариантного метрического тензора.

1. Вывести формулу, задающую риманову связность.

2. Докажите, что отображение $\nabla$, задаваемое формулой

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X),$$

линейно по первому аргументу.

3. Докажите, что отображение $\nabla$, задаваемое формулой

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X),$$

удовлетворяет правилу Лейбница по второму аргументу.

3. Докажите, что отображение $\nabla$, задаваемое формулой

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X),$$

удовлетворяет тождеству $\nabla_X g = 0$.

4. Докажите, что отображение $\nabla$, задаваемое формулой

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X),$$

удовлетворяет тождеству $S(X,Y) = 0$.

5. Используя формулу

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X),$$

вычислите обобщенные символы Кристоффеля римановой связности.

6. Запишите тождество $X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ в компонентах.

7. Докажите, что контравариантное метрическое тензорное поле является ковариантно постоянным в римановой связности.

8*. (задача В. Арнольда) У Маши не хватило на покупку букваря 7 копеек, а у Миши – 1 копейки. Ребята решили купить один букварь на двоих, но у них все-равно не хватило денег. Сколько стоил букварь?

лекция 5.

определения: тензора кривизны связности, римановой структуры, ковариантного тензора Римана-Кристоффеля, почти эрмитова структура, почти контактная метрическая структура

Выпишите на отдельный лист бумаги формулы (ими можно будет пользоваться при написании проверочной работы)

$$R^a_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^d} + \Gamma^m_{db}\Gamma^a_{cm} - \Gamma^m_{cb}\Gamma^a_{dm}.$$

$$2\Gamma^{\ell}_{ij} g_{\ell k} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - g_{tk}\Gamma^t_{ij} - g_{jt}\Gamma^t_{ik} = 0.$$

1. Выведите формулу для $R_{ak,ij}$ и покажите, что $R_{ak,ij} = -R_{ka,ij}$.

2. Выведите формулу для $R_{ak,ij}$ и покажите, что $R_{ak,ij} = R_{ij,ak}$.

3. Докажите, что для почти эрмитовой структуры $g(X, JY) + g(JX, Y) = 0$.

4. Докажите, что для почти эрмитовой структуры $(J, g)$ и римановой связности метрики $g$ верно тождество $g(\nabla_X(J)(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(J)Z) = 0$.

5. Запишите тождество $g(\nabla_X(J)(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(J)Z) = 0$ в компонентах ковариантного дифференциала.

6. Докажите, что для почти контактной метрической структуры $(\Phi, \eta, \xi, g)$ имеет место тождество $\eta(X) = g(\xi, X)$.

7. Примените оператор $\nabla_X$ к условию $g(\Phi Y, \Phi Z) = g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)$.

8. Запишите тождество $g(\nabla_X(\Phi)Y, \Phi Z) + g(\Phi Y, \nabla_X(\Phi)Z) = -(\nabla_X(\eta)Y)\eta(Z) - \eta(Y)\nabla_X(\eta)Z$ в компонентах ковариантных дифференциалов.

лекция 6.

определения: связность на многообразии, почти эрмитова структура на многообразии, почти контактная метрическая структура на многообразии, тензор аффинной деформации.

1. Выразите тензор Нейенхейса $N(X,Y) = \frac{1}{4}(-[X,Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ через ковариантную производную $J$ в римановой связности.

2. Запишите в компонентах ковариантного дифференциала тождество $N(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X + \nabla_X(J)(JY) - \nabla_Y(J)(JX))$.

3. Получите соотношение между $N(JX,Y)$ и $JN(X,Y)$.

4. Получите соотношение между $N(X,JY)$ и $JN(X,Y)$.

5. Докажите, что $\tilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y$, где $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, $\nabla$ – риманова связность метрики $g$, $T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX$.

6. Пусть $T(X,Y) = \psi(X)Y+\psi(Y)X-\psi(JX)JY-\psi(JY)JX$. Выразите $\nabla_X(T)(Y,Z)$ через ковариантные производные $J$ и $\psi$ в римановой связности метрики $g$.

7. Докажите, что для почти контактной метрической структуры $g(\Phi X, Y) + g(X, \Phi Y) = 0$.

8. Докажите, что для почти контактной метрической структуры $g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$. Выведите из этого, что $\nabla_X(\eta)\xi = 0$.

9. Выразите через ковариантные производные эндоморфизма $\Phi$ отображение $N(X,Y) = \frac{1}{4}(\Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y])$.

10. Выпишите результат предыдущей задачи на отдельный лист и запишите это тождество в компонентах ковариантного дифференциала $\Phi$.

11*. (задача В.Арнольда) Из A в B и из B в A на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в B) в 4 часа дня, а вторая (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

лекция 7.

определения: тензор Бианки, тензор Риччи тензора Бианки, скалярная кривизна тензора Бианки, симметричное тензорное поле типа (2,0), риманова метрика, тензор Римана-Кристоффеля.

1. Докажите, что тензорное поле $g_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}$ является тензором Бианки.

2. Переведите равенство $g_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}$ в инвариантный вид.

3. Докажите, что тензор Риччи для любого тензора Бианки является симметричным тензорным полем.

4. Докажите, что отображение $Ric$ является $C^\infty(M)$-линейным отображением.

5. Докажите, что множество всех тензоров Бианки образует $C^\infty(M)$-модуль.

6. Докажите, что отображение $Ric$ является сюръективным.

лекция 8.

определения: тензор Бианки, тензор Вейля, тензор Эйнштейна, конформное преобразование, тензор Риччи, скалярная кривизна.

1. Выразите компоненты тензора Бианки $P_{ijk\ell}$ через компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну при $n = 3$.

2. Докажите, что $\tilde{g} = e^{2f}g$ является римановой структурой.

3. Докажите, что $\tilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}$.

4. Докажите, что если $f$ – константа, то $\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = 0$.

5. Используя формулу $\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = S_{jk}\delta^i_\ell - S_{j\ell}\delta^i_k - g^{ip}g_{\ell j}S_{pk} + g^{ip}g_{kj}S_{p\ell}$, выразите $S_{jk}$ через тензоры Риччи и скалярные кривизны.

6. Используя формулы $e^{-2f}\tilde{R}_{tj,k\ell} - R_{tj,k\ell} = g_{t\ell}S_{jk} - g_{tk}S_{j\ell} - g_{\ell j}S_{tk} + g_{kj}S_{t\ell}$ и $S_{j\ell} = -\frac{\tilde{r}_{j\ell} - r_{j\ell}}{n-2} + g_{j\ell}\frac{e^{2f}\tilde{\varkappa} - \varkappa}{2(n-1)(n-2)}$, докажите, что тензор Вейля конформной кривизны является конформным инвариантном.

7*. Докажите, что $P = Q(Ric\, P)$ для тензора Бианки $P_{ijk\ell} = g_{ik}S_{j\ell} + g_{j\ell}S_{ik} - g_{i\ell}S_{jk} - g_{jk}S_{i\ell}$.

8**. Проведите подробные вычисления разности $\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell}$.

лекция 9.

определения: оператор внешнего дифференцирования, $r$-форма, внешнее произведение форм, скобка Ли векторных полей, связность, оператор альтернирования, операция тензорного произведения.

1. Докажите корректность определения $d$ (однородность) для 1-формы.
2. Докажите корректность определения $d$ (однородность) для 2-формы.
3. Докажите формулу $d \circ d = 0$ для 1-формы.
4. Докажите формулу $d \circ d = 0$ для 2-формы.
5. Докажите формулу $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta$ для 1-форм.
6. Докажите формулу $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$ для 1-формы $\omega$ и функции $f$.
7. Докажите формулу $d(f\Omega) = df \wedge \Omega + fd\Omega$ для 2-формы $\Omega$ и функции $f$.

лекция 10.

определения: оператор внешнего дифференцирования, ковариантная производная тензорного поля, ковариантный дифференциал тензорного поля, форма, компоненты тензорного поля в карте.

1. Докажите, что $d(x^i \circ \varphi) = dx^i$.
2. Докажите, что $d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X$.
3. Выразите компоненты $d\omega$ через компоненты $\omega$ в натуральном базисе карты.
4. Докажите, что $d\Omega(X, Y, Z) = \nabla_X(\Omega)(Y, Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z, X) + \nabla_Z(\Omega)(X, Y)$.
5. Выразите компоненты 3-формы $d\Omega$ через компоненты $\Omega$.

лекция 11.

определения: дифференциал гладкого отображения, касательный вектор как класс эквивалентных путей, касательный вектор как инфинитазимальное дифференцирование, инфинитазимальное дифференцирование, гладкое отображение многообразий, координаты касательного вектора, натуральный базис касательного пространства, локальная карта.

1. Докажите корректность определения дифференциала отображения (правило Лейбница).
2. Докажите корректность определения дифференциала отображения (однородность).
3. Докажите $\mathbb{R}$-линейность дифференциала отображения (однородность).
4. Докажите, что $(\psi_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p = ((\psi \circ \phi)_*)_p$.
5. Докажите, что $((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} = ((\phi_*)_p)^{-1}$.
6. Докажите, что $(\phi_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(p)}$.
7. Докажите, что $(\phi_*)_p \xi = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(p)}$.
8. Докажите, что если пути $\gamma_1$ и $\gamma_2$ эквивалентны, то пути $\phi \circ \gamma_1$ и $\phi \circ \gamma_2$ также эквивалентны.

лекция 12.

определения: дифференциал отображения (вектор – инфинитазимальное дифференцирование), дифференциал отображения (вектор – класс эквивалентных путей), отображение антиувлечения $r$-ковекторов, отображение увлечения тензоров, отображение антиувлечения тензоров.

1. Докажите, что $(\phi_*)_p \xi = \eta$, где $\eta = [\phi \circ \gamma]$.
2. Докажите, что $(\varphi_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \varepsilon_i$ и выведите из этого, что $(\varphi_*)_p = r_\varphi$.
3. Пусть $\phi : M \to N$ – диффеоморфизм. Докажите, что $(\phi^*_{\phi(p)})^{-1} = (\phi^{-1})^*_p$.

лекция 13.

определения: $\phi$-связанных векторных полей, антиувлечение $r$-форм, отображение увлечения тензорных полей, отображение антиувлечения тензорных полей, операция внешнего дифференцирования, операция внешнего умножения.

1. Докажите, критерий $\phi$-связанных тензорных полей.
2. Докажите, что $\phi_*[X_1, X_2] = [\phi_* X_1, \phi_* X_2]$.
3. Докажите, что $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$.
4. Докажите, что $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.
5. Докажите, что $(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}(\omega_{\phi(p)})$.
6. Докажите, что $\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2$.

7. Докажите, что $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

лекция 14.

определения: регулярное в точке отображение, погруженное подмногообразие, подмногообразие, вложенное подмногообразие, матрица Якоби отображения $\phi$ в точке $p$.

1. Докажите, что отображение $\phi : M^n \to N^m$ регулярно в точке $p$ тогда и только тогда, когда его матрица Якоби имеет ранг $n$.

2. Пусть отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ с каноническими гладкими структурами задано в картах формулами $y^1 = \cos x^1$, $y^2 = \sin x^1$, $y^3 = \cos x^2$, $y^4 = \sin x^2$. Будет ли это отображение регулярным?

3. Пусть отображение $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ задано уравнениями $y^1 = x$, $y^2 = x^2$ ($x$ в квадрате), где $x$ – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$, $(y^1, y^2)$ – координаты в карте $(\mathbb{R}^2, id)$. Будет ли отображение регулярным?

4. Пусть дано отображение $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ по формуле $y = x^2$, где $x$ – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$, $y$ – координата в карте $(\mathbb{R}^1, id)$. Будет ли отображение $\phi$ регулярным?

5. Отобразите интервал $(0, 1)$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ так, чтобы получилось а) погруженное подмногообразие, б) подмногообразие, в) вложенное подмногообразие.

лекция 15.

определения: распределение, $r$-мерное распределение, кораспределение, $r$-мерное кораспределение, инволютивное распределение, ассоциированное кораспределение

1. Приведите пример 1-мерного распределения и пример распределения, не являющегося $r$-мерным распределением.

2. Пусть $D$ – $r$-мерное распределение. Докажите, что ассоциированное кораспределение является $(n-r)$-мерным.

3. Докажите, что $X \in D$ тогда и только тогда, когда $\omega^a(X) = 0$ для любого $a$.

4. Пусть распределение $D$ инволютивно. Докажите, что существуют формы $\omega^a_b$ такие что $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b$.

5. Пусть для форм Пфаффа $\{\omega^a\}$ существуют формы $\omega^a_b$ такие что $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b$. Докажите, что $D$ инволютивно.

лекции 16, 17.

определения: интегральное многообразие распределения, интегральное многообразие максимальной размерности, распределение, локальный поток, интегральная кривая векторного поля, локальная группа диффеоморфизмов, $\phi$-связанные векторные поля, дифференциал отображения, инволютивное распределение.

1. Докажите, что распределение $D = \{fX, f \in C^\infty(M)\}$ является инволютивным.

2. Докажите, что в некоторой окрестности каждой точки существует единственная интегральная кривая векторного поля.

3. Постройте локальный поток по векторному полю и докажите, что он удовлетворяет двум свойствам.

4. Как соотносятся дифференциалы $(\varphi_*)^{-1}\llcorner\lrcorner$ и $((\varphi^{-1})_*)\llcorner\lrcorner$?

5. Докажите, что $\Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t_2) = \Phi_X(p, t_1 + t_2)$.

6. Докажите, что $\Phi_X(p, ct) = \Phi_{cX}(p, t)$.

7. Докажите, что $\Phi_{\varphi_* X}(p, t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t)$.

8. Определите отображение $F_{t_0}$ и докажите, что $\{F_t\}$ – группа диффеоморфизмов.

9. Докажите, что $X(f) = \lim_{t\to 0}(f \circ F_t - f)$.

лекции 18, 19.

определения: производная Ли (два вида), увлечение тензора, увлечение тензорного поля, ковариантный дифференциал тензорного поля, выражение компонент ковариантного дифференциала тензорного поля через компоненты ковариантной производной, локальный поток, локальный диффеоморфизм $F_t$, связность, компоненты тензорного поля.

1. Докажите, что для тензорного поля $t$ типа $(r, s)$ имеет место равенство $(\phi_*)_p t_p = (\phi_* t)_{\phi(p)}$.

2. Докажите, что $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

3. Докажите, что $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

4. Пусть $\omega$ – 1-форма. Вычислите $\mathcal{L}_X\omega$ и запишите ее компоненты через частные производные $\omega$ и $X$.

5. Пусть $\omega$ – 1-форма. Выразите $\mathcal{L}_X\omega$ через ковариантную производную (связность без кручения) формы $\omega$ и поля $X$. Запишите в компонентах ковариантного дифференциала.

6. Пусть $L$ – эндоморфизм. Вычислите $\mathcal{L}_X L$ и запишите его компоненты через частные производные $L$ и $X$.

7. Пусть $L$ – эндоморфизм. Выразите $\mathcal{L}_X L$ через ковариантную производную $L$ (связность без кручения) и $X$. Запишите в компонентах ковариантного дифференциала.

8. Докажите, что $(\mathcal{L}_\xi\Phi)(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) + (\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi)\xi$. Запишите это равенство в компонентах ковариантного дифференциала.

9. Докажите, что $(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_Y(\Phi)X)$. Запишите это равенство в компонентах ковариантного дифференциала.

10. Докажите, что $(\mathcal{L}_\xi\eta)(X) = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi$. Запишите это равенство в компонентах ковариантного дифференциала.