лекция 3.

определения: алгебра Ли, отображения правого и левого сдвига, левоинвариантное векторное поле, дифференциал гладкого отображения в точке, ϕ-связанные векторные поля.

1. Докажите, что отображение левого сдвига является диффеоморфизмом.

2. Вычислите дифференциал L_g в точке h для основной аффинной группы (в локальных картах).

3. Вычислите дифференциал R_g в точке h для основной аффинной группы (в локальных картах).

4. Докажите, что для основной аффинной группы $r_3 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ является правоинвариантным векторным полем.

5. Докажите, что для основной аффинной группы $\ell_3 = \partial_3$ является левоинвариантным векторным полем.

лекция 5.

определения: левоинвариантная форма, отображение антиувлечения 1-форм, структурные константы.

1. Вычислите касательное пространство к $SL(3)$ в единице.

2. Получите формулу преобразования структурных констант C_{ij}^k.

3. Докажите, что значение левоинвариантной формы на левоинвариантном векторном поле является константой.

лекция 8.

определения: полная линейная группа, гомоморфизм групп Ли, гомоморфизм алгебр Ли, гомоморфизм алгебр Ли, однопараметрическая подгруппа Ли.

1. Найдите структурные константы и выведите уравнения Маурера-Картана полной линейной группы.

2. Постройте отображение ϕ по гомоморфизму групп Ли $\varphi : G \to H$ и докажите, что векторные поля X и ϕX являются φ-связанными.

3. Докажите, что для левоинвариантных векторные полей $\Phi_X(ab, t) = a\Phi_X(b, t)$.

лекция 10.

определения: представление действия (правое, левое) φ, действие (левое, правое) Φ, антигомоморфизм, эффективное действие

1. Пусть определено правое φ. Докажите, что определено правое действие $\Phi : G \times M \to M$.

2. Пусть определено левое Φ. Докажите, что определено левое φ.

3. Докажите, что представление действия $GL(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$, которое ставит каждой матрице центроаффинное преобразование, является левым действием.

4. Докажите, что для любого действия $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

5. Докажите, что действие $\tilde{\varphi}_{gH}(m) = \varphi_g(m)$, $gH \in G^* = G/Ker\,\varphi$ определено корректно и оно будет эффективным.

лекция 13.

определения: действие, эффективное действие, транзитивное действие, свободное действие, отображение σ_m.

1. Задайте действие группы $GL(2, \mathbb{R})$ на пучке прямых (модели проективной прямой) и перейдите от него к эффективному действию.

2. Постройте действие группы $\mathbb{R}^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

3. Сформулируйте альтернативное определение эффективного действия и докажите его эквивалентность с исходным определением.

4. Докажите, что для свободного действия отображение $\sigma_m : G \to M$ будет биекцией на образ.

лекция 18.

определения: гладкое действие группы на многообразии, дискретное действие, накрытие, открытое множество.

1. Приведите пример, когда пространство орбит не будет гладким многообразием.

2. Докажите, что $\pi : M \to Orb_G M$ будет непрерывным и открытым.

3. Приведите пример дискретного действия.

4. Приведите пример не дискретного действия.

5* (+3 балла). Пусть группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ рассматривается как группа Ли, то есть представление $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut\,\mathbb{R}^2$). Покажите, что для любого такого представления φ это действие не будет дискретным. Останется ли данное утверждение верным, если вместо $\mathbb{R}^2$ взять $\mathbb{R}^n$ для любого натурального n?

лекция 20.

определения: накрытие, дискретное действие группы, однородное пространство, локальная карта на многообразии.

1. Докажите, что если действие группы G на многообразии M дискретно, то $\pi : M \to Orb_G M$ накрытие.

2. Постройте гладкую структуру на $Orb_G M$ в случае дискретного действия группы.

3. Приведите примеры дискретного действия групп на $\mathbb{R}$ и S^1. Какими многообразиями являются пространства орбит?

4. Какие фундаментальные группы могут быть у $\mathbb{R}^2$ как однородного пространства?

5* (+1 балл). Пусть M – множество, G – абстрактная группа. Будет ли транзитивность действия G на M зависеть от выбора представления φ? Другими словами, будет ли для одного представления действие транзитивным, а для другого – нет?

лекция 23.

определения: группа изотропии, однородное пространство, представление действия.

1. Получите закон умножения в группе $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$, чтобы $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

2. Докажите, что группы изотропии изоморфны.

3. Будет ли изоморфизм групп изотропии H_p в H_q зависеть от выбора элемента из G, переводящего точку p в точку q?

лекция 26.

определения: однородное пространство, представление гладкого действия, гладкое отображение, факторгруппа.

1. Докажите корректность операции умножения в факторгруппе, то есть $(aH)(bH) = (ab)H$.

2. Пусть N – гладкое многообразие. Докажите, что $f : G/H \to N$ гладкое тогда и только тогда, когда $F = f \circ \pi : G \to N$ – гладкое.

3. Докажите, что отображение $\beta : G/H \to M$, $\beta(gH) = \varphi_g(p)$ определено корректно и инъективно.

4. Докажите, что отображение $\beta : G/H \to M$, $\beta(gH) = \varphi_g(p)$ сюръективно и гладко.

лекция 28.

определения: группа изотропии, ортогональная матрица, стандартное скалярное произведение, представление группы.

1. Докажите, что G/H – однородное пространство.

2. Докажите, что S^1 – однородное пространство и постройте его модель.

3. Докажете, что $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ тогда и только тогда, когда $A \in O(n, \mathbb{R})$.

4. Определите действие группы $O(n, \mathbb{R})$ на сфере S^{n-1} и докажите, что оно транзитивно.

лекция 31.

определения: $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SO(n, \mathbb{R})$.

1. Найдите группу изотропии для S^{n-1} с фундаментальной группой $O(n, \mathbb{R})$.

2. Постройте каноническую модель S^{n-1} с фундаментальной группой $SO(n, \mathbb{R})$.

3. Докажите, что $\langle\langle Cz, Cw\rangle\rangle = \langle\langle z, w\rangle\rangle$ тогда и только тогда, когда $C \in U(n)$.

лекция 33.

определения: $U(n)$, $SU(n)$, однородное пространство.

1. Докажите, что действие $U(n)$ на S^{2n-1} является гладким.

2. Постройте каноническую модель S^{2n-1} с фундаментальной группой $U(n)$.

3. Постройте каноническую модель S^{2n-1} с фундаментальной группой $SU(n)$.

лекция 38.

определения: проективное пространство, группа $Aut\, V$, эффективное действие, факторгруппа.

1. Определите действие $Aut\, V$ на $P(V)$ и докажите, что оно левое и не эффективное.

2. Постройте эффективное действие группы $GP(V)$ на $P(V)$ и докажите, что оно гладкое.

3. Постройте каноническую модель $\mathbb{R}P^{n-1}$ с фундаментальной группой $O(n, \mathbb{R})$.

4. Постройте каноническую модель $\mathbb{R}P^{n-1}$ с фундаментальной группой $SO(n, \mathbb{R})$.

лекция 41.

определения: многообразие Штифеля, многообразие Грассмана, однородное пространство.

1. Вычислите размерность многообразия Штифеля.

2. Постройте каноническую модель многообразия Штифеля.

3. Покажите, что многообразие Грассмана является однородным пространством.