лекция 1,2.

определения: гладкое многообразие, группа Ли, ортогональная группа, унитарная группа, специальная ортогональная группа, унитарная унимодулярная группа.

1. Докажите, что $G = \mathbb{R}^3$ с операцией умножения $x \cdot y = (x_1 + y_1 e^{x_3}, x_2 + y_2 e^{x_3}, x_3 + y_3)$ является группой.

2. Докажите, что $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли.

3. Докажите, что $\tilde{G}$ (матрицы) является группой Ли.

4. Докажите, что $GL(n, \mathbb{C})$ является группой Ли.

лекция 4.

определения: группа Ли, алгебра Ли, левоинвариантное векторное поле, отображение левого сдвига, присоединенная алгебра Ли.

1. Докажите, что $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ является инъективным.

2. Постройте по вектору $\xi \in T_e(G)$ векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ и покажите, что в карте с e оно будет гладким.

3. Докажите, что X является левоинвариантным.

4. Докажите, что β является гомоморфизмом.

5. Докажите, что $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно скобки Ли и постройте коммутатор на $T_e(G)$.

лекция 6,7.

определения: операция альтернирования, операция внешнего умножения, оператор внешнего дифференцирования, векторное поле как дифференцирование алгебры гладких функций, дифференциал гладкого отображения.

1. Вычислите структурные константы для правоинвариантного базиса основной аффинной группы: $r_1 = \partial_1$, $r_2 = \partial_2$, $r_3 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$.

2. Выведите структурные уравнения Маурера-Картана.

3. Постройте отображение $\varkappa : T_e(GL(n, \mathbb{R})) \to M_{n,n}$ и докажите, что оно является изоморфизмом векторных пространств.

4. Докажите, что для $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ имеют место равенства $g^i_j \circ L_g = g^i_k(g) g^k_j$ и $Y(g^i_j) = g^i_k Y_e(g^k_j)$.

5. Докажите, что отображение $\gamma : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to M_{n,n}$ сохраняет коммутатор.

6*. (+3балла) Выясните, будут ли векторы натурального базиса $\left\{ \frac{\partial}{\partial g^i_j} \right\}$ левоинвариантными. Найдите какой-нибудь левоинвариантный базис для алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (задайте из разложения по натуральному базису).

7*. (+5 баллов) Сформулируйте алгоритм нахождения какого-либо базиса левоинвариантных векторных полей, если известен конкретный вид операции умножения в группе. Докажите истинность этого алгоритма.

лекция 9.

определения: отображение exp, однопараметрическая подгруппа, локальный поток, левоинвариантное векторное поле, касательный вектор.

1. Докажите, что всякое левоинвариантное векторное поле полно.

2. Докажите, что интегральная кривая с началом в e левоинвариантного векторного поля будет однопараметрической подгруппой.

3. Докажите, что всякая однопараметрическая подгруппа является интегральной кривой с началом в e некоторого левоинвариантного векторного поля.

4. Докажите, что $g(t) = exp(tX)$.

5. Пусть на $\mathbb{R}^2$ дано векторное поле $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ (как мы знаем натуральным базисом на плоскости будет базис $(\vec{i}, \vec{j})$). Найдите интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $(1, 0)$.

6* (+2 балла). Найдите интегральные кривые векторного поля $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Найдите интегральные кривые этого векторного поля, проходящие через точку а) $(1, 1)$ и б) $(1, 0)$.

лекция 11, 12.

определения: гладкое действие, внутренний автоморфизм группы Ли, фундаментальное векторное поле, левоинвариантное векторное поле, отображение Ad, отображение ad.

1. Постройте действие группы Ли на самой себе.

2. Постройте действие группы Ли на присоединенной алгебре Ли. Докажите, что отображение Ad является гомоморфизмом.

3. Постройте действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве базисов векторного пространства V. Докажите, что оно правое и свободное.

4. Постройте гладкую структуру на множестве базисов векторного пространства и докажите, что действие будет гладким.

5. Докажите, что $\lambda[X, Y] = [\lambda X, \lambda Y]$ (распишите $[X^\flat, Y^\flat]$).

6. Докажите, что $\lambda[X, Y] = [\lambda X, \lambda Y]$ (распишите $[X, Y]^\flat$).

лекции 14, 15.

определения: r-мерное распределение, главное расслоение, эффективное действие, свободное действие, действие.

1. Докажите, что если группа Ли действует эффективно, то λ инъективно.

2. Докажите, что если группа Ли действует свободно, то для любого ненулевого левоинвариантного векторного поля X соответствующее фундаментальное векторное поле не обращается в нуль ни в одной точке

3. Найдите однопараметрическую подгруппу, соответствующую векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$.

4. Найдите левоинвариантное векторное поле, для которого однопараметрическая подгруппа $A_{g^{-1}}(exp(tX))$ будет интегральной кривой и докажите равенство $(\varphi_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1})$.

5. Докажите, что действие $(m, g)h = (m, gh)$ является правым и свободным.

6* (+2 балла). Пусть X – левоинвариантное векторное поле на группе Ли G, Y – правоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Докажите, что $[X, Y] = 0$. Другими словами, докажите, что левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля коммутируют.

лекции 16, 17.

определения: главное расслоение, гомоморфизм главных расслоений, изоморфизм главных расслоений, гладкое сечение.

1. Докажите, что для тривиального главного расслоения будет выполняться условие локальной тривиальности.

2. Докажите, что если расслоение изоморфно тривиальному, то оно допускает гладкое сечение.

3. Докажите, что если расслоение допускает гладкое сечение, то оно изоморфно тривиальному.

4. Постройте расслоение Хопфа.

лекция 19.

определения: субмерсия, вертикальное распределение, распределение, фундаментальное векторное поле.

1. Докажите, что π в главном расслоении является субмерсией.

2. Постройте модуль $\mathscr{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ и докажите, что там есть глобальный базис.

3. Докажите, что $\mathscr{F}_p = T_p(Orb_G p)$.

4. Докажите, что $\mathscr{V}_p = T_p(Orb_G p)$.

5*. (+1 балл) (Задачи со звездочкой не являются обязательными для решения! Они помогают более глубоко понять материал, освоиться с ним) Докажите, что для любого векторного поля $X \in \mathscr{V}$ имеем $\pi_* X = 0$.

лекции 21, 22.

определения: операция внешнего умножения форм, канонический базис 2-форм и тензорных полей типа (2,0), вертикальное распределение, горизонтальное распределение, связность, отображение $Ad(g)$, отображение антиувлечения для $\mathbb{R}$-линейного отображения векторных пространств.

1. Докажите, что вертикальное распределение является инволютивным и интегральные многообразия максимальной размерности – это (G, σ_p).

2. Введите локальный базис в $\mathfrak{X}(P)$ и выведите первую группу структурных уравнений.

3. Введите локальный базис в $\mathfrak{X}(P)$ и выведите вторую группу структурных уравнений.

4. Докажите, что $(\varphi_g)_*\mathfrak{f} \subset \mathfrak{f}$ и $(\varphi_g)_*\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$.

5. Пусть на главном расслоении фиксирована связность. Постройте дополнительное распределение и докажите, что оно инвариантно относительно действия структурной группы.

6. Докажите, что если на главном расслоении фиксировано распределение дополнительное к вертикальному и инвариантное относительно действия структурной группы, то на главном расслоении определяется связность.

7* (+2 балла). Пусть дана круговая цилиндрическая поверхность. Как мы видели, его вертикальное распределение состоит из векторных полей, касательные векторы которых параллельны прямолинейным образующим этой цилиндрической поверхности. Базисом вертикального распределения является система фундаментальных векторных полей (в данном случае – это одно векторное поле). Докажите, что фундаментальное векторное поле на цилиндре не может иметь стрелки торчащие в разные стороны. Используя этот факт, покажите, что вертикальное распределение не совпадает с векторным пространством фундаментальных векторных полей (чтобы получить знак равенства, нужно взять тензорное произведение $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$).

8* (+5 баллов). Для круговой цилиндрической поверхности в каждой ее точке даны прямые, которые пересекают прямолинейные образующие под одним и тем же углом. Будет ли множество векторов, параллельное такой прямой, образовывать горизонтальную площадку некоторой связности? Если эти прямые будут гладко поворачиваться?

лекции 24,25.

определения: форма связности, тензорные компоненты формы связности, горизонтальный лифт векторного поля, проектор, главное расслоение, горизонтальное распределение, связность.

1. Докажите, что $\theta \circ \Lambda = id$, $\theta(fX^\flat) = fX$.

2. Задайте отображение $Ad(g) : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ и докажите, что $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$.

3. Докажите, что $(\varphi_g)_*(fX) = (f \circ \varphi_{g^{-1}})((\varphi_g)_* X)$.

4. Докажите, что $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (\varphi_g)_*$ для горизонтальных векторных полей и произвольных.

5. Докажите, что $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (\varphi_g)_*$ для вертикальных векторных полей.

6. Докажите, что θ, удовлетворяющая $\theta \circ \Lambda = id$ и $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (\varphi_g)_*$ задает связность (проверить условия проектора и $Im\,\Pi = \mathscr{V}$).

7. Докажите, что θ, удовлетворяющая $\theta \circ \Lambda = id$ и $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (\varphi_g)_*$ задает связность (проверить инвариантность относительно действия структурной группы).

лекция 27.

определения: горизонтальный лифт векторного поля, фундаментальное векторное поле, операция внешнего умножения, связность.

1. Докажите, что $(\varphi_g)_* X^\sharp = X^\sharp$.

2. Докажите, что $\Pi_{\mathscr{H}}[X^\sharp, Y^\sharp] = [X, Y]^\sharp$.

3. Пусть $\mathscr{H}$ – горизонтальное. Докажите, что $R^a_{bj} = 0$.

4. Пусть $R^a_{bj} = 0$. Докажите, что $\mathscr{H}$ – горизонтальное.

лекции 29, 30.

определения: горизонтальная форма, вертикальная форма, репер, натуральный базис касательного пространства (как он строится), связность, отображение антиувлечения для линейного отображения Π, диффеоморфизм, локальная карта, гомеоморфизм, гладкое отображение.

1. Выведите инвариантный вид второй группы структурных уравнений связности.

2. Докажите, что 2-форма горизонтальна тогда и только тогда, когда $\Pi^*_H(\omega) = \omega$, $\Pi_H = id - \Pi$.

3. Докажите, что 2-форма ω вертикальна тогда и только тогда, когда $\Pi^*(\omega) = \omega$.

4. Докажите, что 2-форма ω горизонтальна тогда и только тогда, когда в построенном базисе она имеет вид $\omega = a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j (i < j)$.

5. Определите на множестве реперов действие группы Ли и докажите, что пространство орбит этого действия можно отождествить с многообразием M.

6. Задайте отображение ψ_U и докажите, что оно является биекцией.

7. Постройте с помощью отображения ψ_U карту (W, χ) (докажите, что это действительно карта).

8. Докажите, что две карты (W, χ) и $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ гладко связаны.

9. Докажите, что действие группы Ли на многообразии BM гладкое.

10. Докажите, что $F_U(pg) = F_U(p)g$ и ψ_U – диффеоморфизм.

11*. (+1 балл) Докажите, что если 2-форма ω вертикальна, то условия $\Pi^*(\omega) = \omega$ и $\Pi_H^*(\omega) = 0$ равносильны.

12*. (+3 балла) Докажите, что определение внешнего дифференциала формы связности не зависит от выбора базиса в присоединенной алгебре Ли.

лекция 32.

определения: реперное отображение, форма смещения, тензорные компоненты формы смещения, базисное векторное поле, представление действия группы Ли, векторное пространство.

1. Докажите, что $pg = p \circ g$.

2. Докажите, что форма смещения является горизонтальной и $(\varphi_g)^*\omega = g^{-1} \circ \omega$.

3. Докажите, что векторное поле X является базисным тогда и только тогда, когда $\omega(X) = \xi$.

4. Докажите, что множество базисных векторных полей обладает структурой векторного пространства и ω – изоморфизм.

5. Докажите, что $(\varphi_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$.

6. Докажите, что в $\mathfrak{X}(BM)$ существует глобальный базис.

7*. (+1 балл) Мы доказывали, что для горизонтальных лифтов $(\varphi_g)_* X^\sharp = X^\sharp$. А сейчас доказали, что $(\varphi_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$. Как объяснить эти несоответствия?

лекция 34, 35.

определения: горизонтальное распределение, главное расслоение, фундаментальное векторное поле, базисное векторное поле, присоединенная алгебра Ли, натуральный базис, дифференциал отображения (вектор как инфинитезимальное дифференцирование), дифференциал отображение (вектор как класс соприкасающихся путей).

1. Постройте связность на тривиальном расслоении (через горизонтальные площадки).

2. Перенесите связность с тривиального расслоения на кусок расслоения реперов.

3. Докажите, что $\pi^i_j = \tilde{g}^i_k dg^k_j$.

4. Докажите, что $(F_U)_* X^\flat = X$.

5. Докажите, что $F_U^* \pi^i_j = \omega^i_j$ и выведите из этого $\omega^i_j = \tilde{y}^i_k dy^k_j$, $\omega^i_j = -y^t_j d\tilde{y}^i_t$.

6. Докажите, что $(\pi_*)_p \frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_m$.

7. Докажите, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial y^i_j}$ вертикальные.

лекции 36, 37.

определения: функции e_i и e^j, компоненты тензорного поля на пространстве расслоения реперов, тензорное поле, компоненты тензорного поля, основная теорема тензорного анализа, кобазис, оператор внешнего дифференцирования.

1. Выведите вторую группу структурных уравнений для $\pi^{-1}(U)$.

2. Докажите, что $(\mathscr{E}_k)_p = y^i_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$.

3. Выведите первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов.

4. Выведите вторую группу структурных уравнений для главного расслоения реперов (процедура дифференциального продолжения).

5. Выведите формулы $de_i = \omega_k^j \otimes e_j$ и $de^i = -\omega_k^i \otimes e^k$.

6. Докажите, что если X – векторное поле, то $dX^i + X^j\omega_j^i = X^i{}_j\omega^j$.

7. Докажите, что если даны $\{X^i\} \subset C^\infty(BM)$ и $dX^i + X^j\omega_j^i = X^i{}_j\omega^j$, то на M однозначно определяется векторное поле X (включая корректность X_m).

8*. (+2 балла) Докажите, что задание 1-формы η на гладком многообразии M равносильно заданию системы функций $\{\eta_i\}$ на пространстве расслоения реперов, удовлетворяющих на $\pi^{-1}(U)$ уравнениям $d\eta_i - \eta_j\omega_i^j = \eta_{ij}\omega^j$.

лекции 39,40.

определения: связность, форма связности, горизонтальное распределение, главное расслоение реперов, отображение ψ_U.

1. Вычислите форму связности тривиального расслоения $(U \times GL(n,\mathbb{R}), U, p_1, GL(n,\mathbb{R}))$.

2. Вычислите форму тривиальной связности на $(W, U, \pi, GL(n,\mathbb{R}))$.

3. Докажите, что форма $\zeta = \theta_1 - \theta_2$, где θ_1 и θ_2 – формы связностей на главном расслоении, является горизонтальной.

4. Выведите первую группу структурных уравнений связности главного расслоения реперов.

5. Выведите вторую группу структурных уравнений связности главного расслоения реперов. (+2 балла: почему я считаю этот вывод халтурным?)

6. Докажите, что система функций $\{S^i_{jk}\}$ задает тензорное поле типа $(2,1)$ на многообразии M.

7* (+4 балла) Докажите, что система функций $\{R^i_{jk\ell}\}$ задает тензорное поле типа (3,1) на многообразии M.