лекция 1.

определения: метрическое пространство, сфера, открытый шар, замкнутый шар, открытое множество метрического пространства, непрерывное отображение метрических пространств.

1. Докажите, что тривиальная метрика действительно является метрикой.

2. Изобразите сферу и открытый шар с центром в точке (1,2) радиуса 1 в канонической метрике и в тривиальной метрике. Ответ обосновать.

3. Изобразите сферу и открытый шар с центром в точке (1,1) радиуса 2 в метрике $\rho(A,B) = max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$.

4. Изобразите сферу и открытый шар с центром в точке (1,2) радиуса 1 в метрике $\rho(A,B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$.

5. На плоскости $\mathbb{R}^2$ даны внутренние точки некоторого круга (в обычном смысле этого слова). Будет ли это множество точке а) открытым, б) замкнутым для каждой из четырех метрик? Ответ обосновать.

6. На плоскости $\mathbb{R}^2$ дан интервал. Будет ли он а) открытым, б) замкнутым для каждой из четырех метрик? Ответ обосновать.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана гомотетия f (то есть фиксирована точка O и отличное от нулю число m. Каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M', такая что $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$). Будет ли это отображение $f : X = \mathbb{R}^2 \to Y = \mathbb{R}^2$ непрерывным, если на X тривиальная метрика, а на Y – $\rho(A,B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$.

8. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана гомотетия f (то есть фиксирована точка O и отличное от нулю число m. Каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M', такая что $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$). Будет ли это отображение $f : X = \mathbb{R}^2 \to Y = \mathbb{R}^2$ непрерывным, если на X метрика $\rho(A,B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$, а на Y – тривиальная метрика.

лекция 2.

определения: топологическое пространство, открытое множество топологического пространства, замкнутое множество, база топологии, более слабая топология (сильная топология), топология Зариского, дискретная топология, антидискретная топология, метрическое пространство, открытый шар в метрическом пространстве.

1. Докажите, что открытый шар является открытым множеством в метрической топологии.

2. Докажите, что замкнутый шар является замкнутым множеством в метрической топологии.

3. Приведите пример несравнимых топологий. Ответ обосновать.

4. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Докажите, что семейство $\mathscr{B} \subset \tau$ является базой топологии τ тогда и только тогда, когда для любого непустого множества $U \in \tau$ и любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V \subset U$.

5. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Докажите, что семейство $\mathscr{B}$ будет базой топологии τ, если для любых $V_\alpha, V_\beta \in \mathscr{B}$ и любого $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ существует $V_\gamma \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

6. Пусть X – произвольное множество, $\mathscr{B} = \{V_\alpha\}$ – его покрытие. Докажите, что если для любых $V_\alpha, V_\beta \in \mathscr{B}$ и любого $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ существует $V_\gamma \in \mathscr{B}$, такое что $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$, то $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии (постройте множества этой топологии и докажите, что выполняются три требования из определения топологии).

7. Пусть дано множество X и его покрытие $\{V_\alpha\}$. Покажите, что множество $\mathscr{B} = \{\cap_{\alpha \in K} V_\alpha\}$, где K – произвольное конечное множество индексов α, является базой некоторой топологии. Как будут выглядеть элементы этой топологии?

8. Докажите, что из базы евклидовой топологии прямой можно выкинуть произвольный интервал.

9. Приведите примеры баз дискретной и антидискретной топологии.

10. Покажите, что система открытых кругов и открытых квадратов порождают одну и ту же топологию. Чем они являются базой или предбазой?

11. Опишите топологию на прямой $\mathbb{R}^1$, предбазой которой являются все бесконечные интервалы вида (∞, b) и (a, ∞), $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Опишите топологию на прямой $\mathbb{R}^1$, предбазой которой являются все бесконечные интервалы (a,∞), $a\in\mathbb{R}$.

лекция 3.

определения: полный прообраз точки, полный прообраз множества, непрерывное отображение, индуцированная топология, топология индуцированная отображением, замкнутое множество в топологическом пространстве, открытое множество в топологическом пространстве.

1. Докажите, что $f^{-1}(\cup_\alpha A_\alpha)=\cup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$.

2. Докажите, что $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

3. Докажите, что $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$.

4. Докажите, что отображения из произвольного топологического пространства в антидискретное и из дискретного в произвольное – непрерывны.

5. Докажите, что топология индуцированная отображением является топологией.

6. Рассмотрим отображение вложения in квадрата в плоскость (с евклидовой топологией) и отображение f квадрата в плоскость в виде четырехлепестковой ромашки (вершины квадрата отображаются в одну точку – сердцевину ромашки, а стороны превращаются в лепестки ромашки). Опишите индуцированные на квадрате топологии и сравните их.

7. Пусть дано топологическое пространство (X,τ_X) и открытое множество A в нем. Докажите, что любое открытое в A множество U будет открытым в X.

8. Пусть дано топологическое пространство (X,τ_X) и замкнутое множество A в нем. Докажите, что любое замкнутое в A множество F будет замкнутым в X.

9. Докажите критерий непрерывного отображения в терминах замкнутых множеств.

лекция 4.

определения: непрерывное отображение, замкнутое множество, гомеоморфизм, топологический инвариант, хаусдорфова топология.

1. Докажите критерий непрерывности в терминах базы.

2. Докажите, что отображение $f:X\to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого элемента предбазы топологического пространства Y открыт в X.

3. Пусть $X=F_1\cup F_2$, где F_1 и F_2 – замкнутые множества. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны отображения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$.

4. Докажите, что хаусдорфовость является топологическим инвариантом.

5. Докажите, что окружность с выколотой точкой гомеоморфна прямой.

6. Докажите, что любые два отрезка гомеоморфны.

7. Докажите, что дискретное пространство не гомеоморфно антидискретному пространству (оно содержит более одной точки).

8. Докажите, что интервал и отрезок с дискретными топологиями гомеоморфны.

лекция 5.

определения: топология декартова произведения, база топологии, непрерывное отображение, открытое множество, замкнутое множество, окрестность точки.

1. Опишите множества базы декартовой топологии на множестве $I^2=(0,1)\times(0,1)$, если ни интервалах задана а) евклидова, евклидова топология; б) евклидова, дискретная топология; в) дискретная, антидискретная топология.

2. Опишите множества базы двумерного тора $T^2=S^1\times S^1$, если на окружностях заданы топологии а) обе индуцированы евклидовой топологией плоскости; б) дискретная, евклидова; в) дискретная, антидискретная.

3. Докажите, что отображение $f:X\to Y\times Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны отображения $pr_Y\circ f$ и $pr_Z\circ f$.

4. Пусть X – топологическое пространство. Докажите, что топологическое пространство $\{y\} \times X$ гомеоморфно пространству X.

5. Пусть отображение $f : X \times Y \to Z$ непрерывно. Докажите, что отображение $f_x : Y \to Z$, $f_x(y) = f(x, y)$, где x – фиксированный элемент, непрерывно.

лекция 6.

определения: отношение эквивалентности, фактормножество, открытое множество в фактортопологии, непрерывное отображение, фактор отображения f по разбиению S, стягивание множества A в точку, склейка по биекции $f : A \to B$.

1. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ задано отношение эквивалентности $a \sim b$, если существует ненулевое число λ, такое что $a = \lambda b$. Перечислите элементы фактортопологии (с обоснованием).

2. Отображение $f : X \to Y$ постоянное на каждом элементе разбиения тогда и только тогда, когда существует $g : X/_S \to Y$, такое что $f = g \circ pr$. При этом $g = f/_S$. Докажите.

3. Если $f : X \to Y$ непрерывное отображение топологических пространств, постоянное на каждом элементе разбиения S, то отображение $f/_S : X/_S \to Y$ непрерывно. Докажите.

4. Докажите, что фактортопология действительно является топологией.

5. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задано отношение эквивалентности $x \sim y$, если существует ненулевое число λ, такое что $x = \lambda y$. Опишите фактормножество $\mathbb{R}^2/_\sim$, открытые множества в фактортопологии, приведите пример замкнутого множества в фактортопологии.

лекция 7.

Можем ссылаться (было доказано в курсе бакалавриата) на связность промежутков прямой, прямой, окружности (топология евклидова).

определения: открытое множество в фактортопологии, несвязное топологическое пространство, связное топологическое пространство, несвязное множество в топологическом пространстве, связное множество в топологическом пространстве, сокращение отображения.

1. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связным множеством прямой $\mathbb{R}$ а) с евклидовой топологией; б) с дискретной топологией; в) с антидискретной топологией; г) с топологией Зариского?

2. Докажите, что связность топологического пространства сохраняется при непрерывных сюръективных отображениях.

3. Докажите, что сокращение непрерывного отображения является непрерывным отображением.

4. Докажите, что квадрат связное множество плоскости.

5. Докажите, что отрезок не гомеоморфен квадрату.

лекция 8.

определения: пути, произведения путей, линейно связного топологического пространства, линейно связного подмножества топологического пространства, открытого покрытия, подпокрытия, компактного топологического пространства, компактного подмножества топологического пространства.

1. Докажите, что $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ является линейно связным.

2. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ является линейно связным.

3. Докажите, что любое линейно связное топологическое пространство является связным.

4. Докажите, что прямая с евклидовой топологией не является компактной.

5. Выясните, будет ли прямая с антидискретной топологией компактной?

6. Будет ли множество $\{0\}$ на прямой с топологией Зариского компактным?

7. Будет ли множество рациональных чисел компактным на прямой с дискретной топологией?

8. Будет ли множество рациональных чисел компактным на прямой с топологией Зариского?

лекция 9.

определения: гомотопия, рефлексивность, симметричность, транзитивность.

1. Докажите, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности.

2. Докажите, что два постоянных отображения гомотопны тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности.

3. Пусть $f, g : X \to Z$ – непрерывные гомотопные отображения, X и Y – гомеоморфные пространства ($\tau : Y \to X$). Докажите, что $f \circ \tau$ и $g \circ \tau$ гомотопны.

4. Пусть $f, g : X \to Z$ – непрерывные гомотопные отображения, Z и Y – гомеоморфные пространства ($\tau : Z \to Y$). Докажите, что $\tau \circ f$ и $\tau \circ g$ гомотопны.

лекция 10.

определения: гомотопия, топология декартова произведения, линейно связное множество, непрерывное отображение, индуцированная топология.

1. Докажите, что всякое непрерывное не сюръективное отображение любого топологического пространства в сферу S^n гомотопно постоянному.

2. Докажите, что любые два непрерывных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^n \setminus 0$ $(n > 1)$ гомотопны.

3. Найдите два не гомотопных постоянных отображения из одноточечного множества в $\mathbb{R} \setminus 0$.

4. Докажите, что два отображения f, g гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны их соответствующие координатные отображения.

5. Сформулируйте и докажите техническую теорему.

6. Докажите, что для любого топологического пространства X множество $\pi(X, [0, 1])$ состоит из одного элемента.

лекция 11.

определения: гомотопическая эквивалентность, одинаковый гомотопический тип, стягиваемое топологическое пространство, путь, A-гомотопия.

1. Докажите, что число элементов $\pi(I, Y)$ равно числу компонент линейной связности пространства Y.

2. Докажите, что любые два непрерывные отображения произвольного топологического пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопны между собой.

3. Докажите, что топологическое пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет гомотопический тип одноточечного пространства.

4. Докажите, что всякий путь можно рассматривать как гомотопию.

5. Докажите, что всякая гомотопия состоит из путей.

лекция 12.

определения: предбаза, компактно-открытая топология,свободная гомотопия, гомотопия связанная на множестве A, путь.

1. Пусть отображение $f : X \times Y \to Z$ является непрерывным. Докажите, что отображение $F : X \to C(Y, Z)$, $F(x)(y) = f(x, y)$ является непрерывным.

2. Докажите, что если два пути свободно гомотопны, то их образы лежат в одной компоненте линейной связности.

3. Докажите, что если образы путей лежат в одной компоненте линейной связности, то они свободно гомотопны.

лекция 13.

определения: $\{0, 1\}$-гомотопные пути, произведение путей, гомотопия, путь.

1. Пусть путь u гомотопен пути u', путь v гомотопен пути v' и существует путь uv. Докажите, что существует путь $u'v'$ и он гомотопен пути uv.

2. Докажите, что умножение путей не ассоциативно.

3. Докажите, что существует отображение $\varphi : I \to I$, такая что $(uv)w \circ \varphi = u(vw)$.

4. Используя техническую теорему, докажите, что пути $(uv)w$ и $u(vw)$ гомотопны.

лекция 14.

определения: умножение гомотопических классов путей, фундаментальная группа, умножение путей, изоморфизм групп, гомеоморфизм, топологическое пространство.

1. Докажите, что равенство $e_a u = u$ верно не для всех путей u, для которых определено произведение.

2. Будет ли верно для всех u равенство $ue_a = u$, для которых определено произведение?

3. Докажите, что $e_a u \sim u$.

4. Докажите, что $vv^{-1} = e_a$ только для $v = e_a$.

5. Докажите, что $vv^{-1} \sim v$ и выведите из этого, что $[v][v^{-1}] = [e_{v(0)}]$.

6. Чему будет равно $[v^{-1}][v]$?

7. Докажите, что фундаментальные группы гомеоморфных пространств в соответствующих точках изоморфны.

лекция 15.

определения: круговая петля, гомотопия круговых петель, петля, гомотопия петель.

1. Докажите, что каждой петле соответствует круговая и каждой круговой петле соответствует петля.

2. Докажите, что круговые петли гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны соответствующие им петли.

3. Определите умножение круговых петель и выразите его через комплексные числа.

лекция 16.

определения: фундаментальная группа, антидискретная топология, n-мерная сфера, стереографическая проекция.

1. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ тривиальна.

2. Докажите, что $\pi_1(X, x_0)$, где X антидискретное, тривиальна.

3. Докажите, что фундаментальная группа круга тривиальна.

4. Докажите, что при $n \geq 2$ группа $\pi_1(S^n, (1, 0, \ldots, 0))$ тривиальна.

лекция 17.

определения: гомеоморфизм, n-мерная сфера, односвязное топологическое пространство.

1. Докажите, что $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \backsimeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

2. Докажите, что стереографическая проекция для S^n является гомеоморфизмом. Почему при удалении еще одной точки из сферы S^n и точки из $\mathbb{R}^n$ стереографическая проекция остается гомеоморфизмом?

3. Вычислите фундаментальную группу $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 3$.

лекция 18. (скачайте последнюю версию лекций – есть изменения)

определения: односвязное топологическое пространство, непрерывное отображение, гомотопия, топология, замкнутый круг $\bar{B}^2$.

1. Докажите, что $X = \{a, b\}$ с топологией $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ является односвязным.

2. Выясните, будет ли $X = \{a, b\}$ односвязным с дискретной и антидискретной топологиями.

3. Докажите, что если X односвязно, то любое отображение $f : S^1 \to X$ гомотопно постоянному.

4. Докажите, что если любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ гомотопно постоянному, то его можно продолжить до непрерывного отображения $\bar{B}^2 \to X$.

5. Докажите, что любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ можно продолжить до непрерывного отображения $\bar{B}^2 \to X$, то всякие два пути, соединяющие точки x_1 и x_0, гомотопны.