Задачи к экзамену по курсу Анализ на многообразиях (магистратура геометрии, зимняя сессия, 2013/14 год).

1. Постройте касательное пространство для гладкого многообразия $\mathbb{R}^2$ (с канонической гладкой структурой и координатами (x, y)), укажите натуральный базис этого касательного пространства. Охарактеризуйте модуль гладких векторных полей на этом многообразии, укажите натуральный базис. Будут ли следующие линейные комбинации векторными полями:
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}; \quad X = x^2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}; \quad X = \sin^{-2} x^2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y};$$

2. Докажите, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ имеет место равенство $[X, Y]_p = X_p \circ Y - Y_p \circ X$.

3. Докажите, что коммутатор любых двух векторных полей из натурального базиса равен нулю.

4. Докажите, что $(\eta \otimes \xi)(X) = \eta(X)\xi$, где η – 1-форма, $\xi, X \in \mathcal{X}(M)$.

5. Упростите тензорные выражения: а) $C^{(2)}_{(1)}(L \times X)$, б) $C^{(1)}_{(1)}(L \otimes X)$, в) $C^{(1)(2)}_{(2)(1)}(L \otimes X \otimes \omega)$, г) $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(\omega \otimes L \otimes X)$, д) $C^{(1)(2)}_{(2)(1)}(\omega \otimes L \otimes X)$, где L – тензорное поле типа (1,1), X – векторное поле, ω – 1-форма.

6. Выразите через тензорные операции: а) $I \circ J(X)$, б) $I \circ J$, в) $\eta \circ L$, г) $\eta \circ L(X)$, где I, J – эндоморфизмы, η – 1-форма, X – векторное поле. Выразите компоненты тензорных полей а)-г) через компоненты I, J, η, X.

7. Пусть на гладком многообразии M даны тензорное поле g типа (2,0) и тензорное поле J типа (1,1). Снимите аргументы и переведите в тензорные операции выражение $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$.

8. Снимите аргументы в равенстве
$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$
где Φ – тензорное поле типа (1,1), g – тензорное поле типа (2,0), η – 1-форма.

9. Снимите аргументы в равенстве
$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX,$$
где T – тензорное поле типа (2,1), ψ – 1-форма, J – тензорное поле типа (1,1).

10. Докажите, что $\nabla_X(\omega)Y = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$, где ω – 1-форма, X, Y – векторные поля. Запишите это равенство в компонентах, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.

11. Докажите, что $\nabla_X(J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$, где J – эндоморфизм, X, Y – векторные поля. Запишите это равенство в компонентах, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.

12. Докажите, что для любого тензорного поля T типа $(r, 0)$ имеет место равенство
$$\nabla_X(T)(X_1, \ldots, X_r) = X(T(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_r).$$
Запишите это равенство в локальной карте, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.

13. Докажите, что для тензорного поля T типа (2,1) имеет место тождество
$$\nabla_X(T)(Y, Z) = \nabla_X(T(Y, Z)) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z).$$
Запишите это равенство в локальной карте, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.

14. Докажите, что для почти комплексной структуры J имеет место тождество $\nabla_X(J)(JY)+J\nabla_X(J)Y = 0$.

15. Докажите, что для почти контактной структуры имеют место тождества

$$
\begin{array}{ll}
\nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi\nabla_X(\Phi)Y = (\nabla_X(\eta)Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi; & \Phi^i_{j,k}\Phi^j_\ell + \Phi^i_j\Phi^j_{\ell,k} = \xi^i\eta_{\ell,k} + \xi^i_{,k}\eta_\ell; \\
\nabla_X(\eta)\xi + \eta(\nabla_X\xi) = 0; & \eta_{i,j}\xi^i + \eta_i\xi^i_{,j} = 0; \\
\nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_X\xi) = 0; & \Phi^i_{j,k}\xi^j + \Phi^i_j\xi^j_{,k} = 0; \\
\nabla_X(\eta)(\Phi Y) + \eta(\nabla_X(\Phi)Y) = 0; & \eta_{i,j}\Phi^i_k + \eta_i\Phi^i_{k,j} = 0.
\end{array}
$$

16. Запишите инвариантные тождества из предыдущей задачи в компонентах, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.